

## บทที่ 5

### วิธีสอนและรูปแบบการสอนคณิตศาสตร์

#### เค้าโครงเรื่อง

- 5.1 วิธีสอนที่ยึดครูเป็นศูนย์กลาง
  - 5.1.1 การสอนแบบบรรยาย
  - 5.1.2 การสอนแบบนิรนัย
  - 5.1.3 การสอนแบบสาธิต
- 5.2 วิธีสอนที่ยึดนักเรียนเป็นศูนย์กลาง
  - 5.2.1 การสอนแบบอุปนัย
  - 5.2.2 การสอนแบบทดลอง
  - 5.2.3 การสอนแบบค้นพบ
- 5.3 รูปแบบการสอนคณิตศาสตร์บางลักษณะ
  - 5.3.1 การสอนมโนคติทางคณิตศาสตร์
  - 5.3.2 การสอนการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์
  - 5.3.3 การสอนการพิสูจน์

#### สาระสำคัญ

1. วิธีสอนมีหลายแบบ และแต่ละแบบนั้นจะมีการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่แตกต่างกัน กิจกรรมนั้นอาจจะเน้นที่ตัวครูหรือนักเรียน วิธีสอนที่เน้นกิจกรรมของครูหรือยึดครูเป็นศูนย์กลางที่ใช้ได้เหมาะสมกับการสอนคณิตศาสตร์ ได้แก่การสอนแบบบรรยาย การสอนแบบนิรนัย และการสอนแบบสาธิต ซึ่งแต่ละแบบนั้นจะใช้ได้เหมาะสมกับเนื้อหาบางเรื่อง

2. การสอนแบบอุปนัย แบบทดลอง และแบบค้นพบ เป็นวิธีสอนที่ใช้ได้ผลดีกับการสอนเนื้อหาทางคณิตศาสตร์ ที่เน้นให้นักเรียนเป็นผู้กระทำกิจกรรมมากกว่าครู โดยมีครูเป็นผู้จัดสถานการณ์ จะอำนวยความสะดวกต่าง ๆ นักเรียนจะหาข้อสรุปด้วยตนเอง กิจกรรมการเรียนนั้นอาจจัดเป็นรายบุคคลหรือเป็นกลุ่มก็ได้

3. การสอนเนื้อหาทางคณิตศาสตร์บางลักษณะ ไม่ว่าจะเป็นการสอนมโนคติ การสอนการแก้โจทย์ปัญหา การสอนการพิสูจน์ หรือการสอนอื่น ๆ ต้องอาศัยวิธีสอนแบบต่าง ๆ ที่กล่าวมาแล้ว มาใช้ให้เหมาะสม และการสอนแต่ละลักษณะเหล่านั้นจะมีรูปแบบและขั้นตอนการสอนที่แตกต่างกันบ้าง ซึ่งครูคณิตศาสตร์ต้องมีความรู้ความเข้าใจ และเลือกไปปรับใช้ให้เหมาะสมกับเนื้อหาและสภาพของผู้เรียน

### จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อศึกษาเนื้อหาในบทที่ 5 จบแล้ว นักเรียนสามารถ

1. บอกลักษณะของวิธีสอนแบบต่าง ๆ ได้
2. ระบุและอธิบายรูปแบบหรือขั้นตอนการสอนมโนคติ การแก้โจทย์ปัญหา และการพิสูจน์ตามเนื้อหาที่กำหนดให้ได้
3. เลือกใช้วิธีสอนที่เหมาะสมกับเนื้อหาที่กำหนดให้ได้

ครูคณิตศาสตร์ที่ดีนั้น นอกจากจะต้องมีความรู้และความเชี่ยวชาญในเนื้อหาคณิตศาสตร์ เป็นอย่างดีแล้ว ยังต้องมีความรู้ความเข้าใจในทฤษฎีหรือวิธีการสอนแบบต่าง ๆ และสามารถที่จะเลือกและปรับวิธีสอนให้เหมาะสมกับสถานการณ์การเรียนรู้ ลักษณะและความต้องการของผู้เรียนได้ วิธีการสอนนั้นมีมากมายหลายวิธี แต่ละวิธีนั้นก็อาจใช้ได้ผลกับเนื้อหาหนึ่ง ๆ หรือเหมาะสมกับนักเรียนกลุ่มหนึ่งในสถานการณ์หนึ่ง แต่อาจจะใช้ไม่ได้ผลกับเนื้อหาอีกประเภทหนึ่ง หรือกับนักเรียนอีกกลุ่มหนึ่งในสถานการณ์อีกอันหนึ่ง และแต่ละวิธีของการสอนก็จะมีข้อจำกัดและข้อดีที่แตกต่างกัน ดังนั้นจึงไม่สามารถกล่าวได้ว่ามีวิธีสอนใดที่ดีที่สุดที่สามารถนำไปใช้ได้กับทุกเนื้อหา และใช้ได้กับนักเรียนทุกคนที่มีความแตกต่างระหว่างบุคคล ครูคณิตศาสตร์จึงต้องมีความรู้ในวิธีสอนต่าง ๆ แต่ละแบบและสามารถเลือกและปรับใช้ให้เหมาะสมกับเนื้อหา นักเรียนและสภาพแวดล้อม

ในบทนี้จะกล่าวถึงวิธีสอนที่นำมาใช้ได้กับวิชาคณิตศาสตร์เท่านั้น ซึ่งจะแยกกล่าวเป็น 3 หัวข้อคือวิธีสอนที่ยึดครูเป็นศูนย์กลาง วิธีสอนที่ยึดนักเรียนเป็นศูนย์กลาง และรูปแบบการสอนคณิตศาสตร์บางลักษณะ นักศึกษาจะต้องศึกษาและทำความเข้าใจแต่ละรูปแบบและต้องฝึกหัดทดลองนำแต่ละรูปแบบมาทดลองสอน สังเกตข้อบกพร่องและปรับปรุงแก้ไขการสอนของตนเอง

## 5.1 วิธีสอนที่ยึดครูเป็นศูนย์กลาง

วิธีสอนที่ยึดครูเป็นศูนย์กลางนี้ จะเน้นบทบาทของครูในการจัดการเรียนการสอน ครูจะมีบทบาทอย่างมากในการอธิบาย การสาธิต หรือการบรรยาย นักเรียนจะมีบทบาทน้อย เป็นแต่เพียงรับฟังสิ่งที่ครูบรรยาย อธิบาย หรือยกตัวอย่าง หรือจดบันทึกสิ่งที่ครูสอน วิธีสอนที่ยึดครูเป็นศูนย์กลางที่สามารถนำมาใช้ในการสอนคณิตศาสตร์ที่นำมาศึกษา มีดังนี้

- การสอนแบบบรรยาย
- การสอนแบบบรรยาย
- การสอนแบบสาธิต

5.1.1 การสอนแบบบรรยาย (Lecture Method) เป็นวิธีสอนที่ใช้กันมาตั้งแต่สมัยโบราณที่ยังไม่มีเครื่องมือหรือเทคโนโลยีทางการศึกษาอื่นมาใช้เลย วิธีการนี้ยังเป็นที่นิยมใช้มาจนถึงปัจจุบัน โดยเฉพาะอย่างยิ่ง การสอนในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายและระดับอุดมศึกษา วิธีสอนนี้เน้นบทบาท

ของครู ครูต้องบรรยายสิ่งที่ครูรู้ให้แก่นักเรียน นักเรียนจะจดสิ่งที่สำคัญที่ครูบอก และนักเรียนต้องท่องจำเพื่อนำมาสอบ ต่อมาการสอนแบบบรรยายหรือบอกให้รู้ได้รับการปรับปรุงเป็นการสอนแบบอธิบาย และแสดงเหตุผล โดยที่ครูจะอธิบาย แสดงเหตุผล วิเคราะห์ ชี้แจง ตีความให้นักเรียนเข้าใจ กิจกรรมการเรียนการสอนจะเน้นที่ผู้สอนเป็นสำคัญ ผู้เรียนไม่ค่อยมีโอกาสดำเนินการในกิจกรรมการเรียนการสอนมากนัก ถึงแม้ว่าในบางครั้งครูอาจจะใช้การซักถาม ใช้สื่อการเรียนการสอนมาประกอบการบรรยายบ้าง แต่กิจกรรมการเรียนการสอนยังเน้นอยู่ที่ครูอยู่คนเดียว

กิจกรรมที่ใช้ในการสอนแบบบรรยายอาจทำได้หลายวิธี เช่น อธิบายมโนคติหรือหลักเกณฑ์ของเนื้อหาและยกตัวอย่างประกอบหรือใช้สื่อการเรียนการสอน ซึ่งมีความเป็นรูปธรรมประกอบ การอธิบายสิ่งที่เป็นามธรรม การเขียนแผนภาพหรือรูปภาพประกอบคำอธิบายก็ช่วยให้นักเรียนเข้าใจได้มากขึ้น ครูส่วนใหญ่อาจจะใช้วิธีการบอกสูตรและยกตัวอย่างแสดงการนำไปใช้ กิจกรรมการสอนแบบบรรยายดังที่กล่าวนี้สามารถใช้สอนนักเรียนที่มีจำนวนมาก ให้เข้าใจเนื้อหาที่เป็นเรื่องใหม่หรือเรื่องที่นักเรียนยังไม่เคยรู้มาก่อน ทำให้นักเรียนได้เรียนรู้เนื้อหาได้ในเวลาที่รวดเร็ว

การสอนแบบบรรยายที่ใช้ได้ผลดี ครูควรดำเนินการเป็นขั้นตอนดังนี้

1. การเตรียมการสอน การบรรยายจะเป็นไปได้อย่างไรดี ครูจะต้องมีการเตรียมตัวในการสอนเป็นอย่างดี ครูจะต้องศึกษาเนื้อหาที่จะสอนให้เข้าใจอย่างแจ่มแจ้ง จับประเด็นหลักหรือประเด็นที่สำคัญ วางเค้าโครงเรื่องที่จะสอนในคาบนั้น พิจารณาความสัมพันธ์ของเนื้อหาที่จะสอนกับประสบการณ์หรือเนื้อหาที่นักเรียนเคยเรียนมาแล้ว เรียงลำดับเนื้อหาที่ต่อเนื่องกันจากง่ายไปยาก กำหนดจุดประสงค์การเรียนรู้ พิจารณาขั้นตอนการบรรยาย เตรียมหรือหาตัวอย่างและกิจกรรมให้สอดคล้องกับเนื้อหาและจุดประสงค์การเรียนรู้ และจัดเตรียมและทดลองใช้สื่อการสอนต่าง ๆ ที่จะช่วยให้นักเรียนเข้าใจเนื้อหาเพิ่มมากขึ้น ขั้นตอนการสอนนี้เป็นขั้นที่สำคัญ หากครูได้มีการเตรียมการเป็นอย่างดีจะช่วยให้นักเรียนมีความมั่นใจในตนเองและสามารถดำเนินการสอนให้เป็นไปตามแผนที่วางไว้ได้

2. การดำเนินการบรรยาย ก่อนที่จะนำเสนอเนื้อหาหลักที่ครูเตรียมมา ควรจะมีการนำเข้าสู่บทเรียนเพื่อเตรียมความพร้อมของผู้เรียนก่อนเรียนเนื้อหาหลักเสียก่อน ซึ่งอาจจะทำได้โดยการทบทวนความรู้เดิมของผู้เรียนที่จำเป็นต้องนำมาเป็นพื้นฐานของการเรียนเรื่องใหม่ หรือชี้ให้นักเรียนเห็นประโยชน์หรือความสำคัญของเนื้อหาที่จะเรียนนั้น หรือครูอาจจะเล่าเรื่องหรือยกประวัติของเรื่องนั้น ๆ มาเล่าให้นักเรียนฟัง หรืออาจจะยกปัญหาของเรื่องนั้น ๆ ที่เกี่ยวข้องกับเหตุการณ์ในปัจจุบัน หรือ

ที่เกี่ยวข้องกับชีวิตประจำวันของผู้เรียน เมื่อสังเกตเห็นว่านักเรียนมีความพร้อมที่จะเรียนแล้ว ครูก็บรรยายหรืออธิบายเนื้อหาให้มีความต่อเนื่องกัน มีการเน้นส่วนที่เป็นประเด็นสำคัญของบทเรียน โดยการเขียนบนกระดาน มีการยกตัวอย่างประกอบการอธิบาย ตัวอย่างนี้ควรให้เกี่ยวข้องกับประสบการณ์ของผู้เรียนหรือเป็นเรื่องที่เกี่ยวกับสังคม อาจจะให้นักเรียนมีส่วนร่วมโดยการตอบคำถามหรือยกตัวอย่างบ้าง ครูอาจใช้สื่อการสอนที่ครูได้เตรียมมาประกอบการอธิบาย เมื่ออธิบายจบเนื้อหาหัวข้อหนึ่งครูควรสรุปสิ่งที่สำคัญหรือให้นักเรียนช่วยสรุปและเขียนสิ่งที่สำคัญบนกระดานให้นักเรียนจดลงสมุด และเมื่อสอนจบเนื้อหาที่เตรียมมา ควรจะได้มีการสรุปอีกครั้งหนึ่ง

ในการสอนแต่ละคาบนั้น เมื่อครูบรรยายเนื้อหาที่สำคัญจบแล้ว ควรให้นักเรียนได้ทบทวนความรู้ที่เรียนไปแล้ว โดยให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด ซึ่งอาจจะเป็นการทำเป็นรายบุคคลหรือเป็นกลุ่มเพื่อตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียน หากยังมีสิ่งใดที่นักเรียนยังไม่เข้าใจ ครูจะได้อธิบายเพิ่มเติมได้

3. การติดตามประเมินผล หลังจากบรรยายจบแล้วครูควรให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด แก่โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ และครูควรได้ตรวจแบบฝึกหัดเหล่านั้น และพิจารณาผลการเรียนของนักเรียนว่ามีความเข้าใจในเนื้อหาที่ครูได้สอนไปแล้วมากน้อยเพียงไร หากพบว่านักเรียนมีปัญหาครูจะต้องหาทางแก้ไขต่อไป

การที่ครูเป็นจุดศูนย์กลางของการเรียนการสอนนี้ อาจเป็นสาเหตุที่ทำให้นักเรียนไม่เข้าใจในเนื้อหาที่ครูบรรยาย เกิดความรู้สึกเบื่อหน่ายหรือขาดความสนใจในการเรียนก็ได้ ดังนั้น เพื่อเป็นแนวทางที่จะช่วยให้การสอนแบบบรรยายได้ผลดี ครูควรคำนึงถึงสิ่งต่าง ๆ ดังนี้

1. ต้องเตรียมการสอนล่วงหน้าทุกครั้ง เตรียมทั้งเนื้อหาความรู้ เตรียมขั้นตอนการจัดกิจกรรม ตัวอย่าง สื่อการเรียนการสอน และกำหนดจุดประสงค์การเรียนรู้

2. ครูต้องใช้ศิลปะต่าง ๆ ในการบรรยาย ลักษณะท่าทางของครูต้องมีชีวิตชีวา แสดงออกถึงความกระตือรือร้นและมั่นใจในสิ่งที่ตนสอน มีลีลาในการพูด และใช้ลักษณะท่าทางและน้ำเสียงให้เร้าความสนใจของนักเรียน

3. ครูต้องรู้จักวิธีการเขียนกระดานและใช้กระดานให้ถูกต้อง ในการนำเสนอเนื้อหา ซึ่งจะช่วยให้นักเรียนเรียบเรียงลำดับเนื้อหา และเข้าใจในสาระสำคัญและสามารถที่จะจดบันทึกได้อย่างถูกต้อง

4. เปิดโอกาสให้นักเรียนได้มีส่วนร่วมในการเรียนการสอนบ้าง เช่น ให้มีการซักถาม ให้ตอบคำถาม ให้มีการเสนอความคิดเห็น ให้มีส่วนร่วมในการเขียนกระดานหรือใช้สื่อการสอนต่าง ๆ

5. การเตรียมเนื้อหาหรือการบรรยาย ควรคำนึงถึงลักษณะของผู้เรียนทั้ง ในแง่ของ ระดับสติปัญญา ร่างกาย อารมณ์ และสังคมของผู้เรียนด้วย

6. วิธีการสอนแบบบรรยายนี้ ใช้ได้เหมาะสมกับเนื้อหาบางเรื่อง และบางกลุ่มของ นักเรียน ดังนั้นจึงควรเลือกใช้ให้เหมาะสม

การสอนโดยใช้วิธีการสอนแบบบรรยายมีทั้งจุดเด่นและมีข้อจำกัดต่าง ๆ ซึ่งพอจะสรุป ได้ดังนี้

#### จุดเด่นของวิธีการสอนแบบบรรยาย

1. เหมาะกับการสอนเนื้อหาที่ค่อนข้างยาก มีความยุ่งยากและซับซ้อน
2. ใช้ได้ดีกับเนื้อหาที่นักเรียนไม่สามารถหาแหล่งค้นคว้าได้ด้วยตัวเอง
3. ครูสามารถให้รายละเอียด ข้อเท็จจริง มโนคติหรือหลักเกณฑ์ที่สำคัญต่าง ๆ ที่ผู้เรียนไม่มีความรู้มาก่อนได้ในเวลาที่รวดเร็ว ทำให้ประหยัดเวลาในการสอน
4. สามารถสอนนักเรียนที่มีจำนวนมาก ๆ ได้

#### ข้อจำกัดของวิธีการสอนแบบบรรยาย

1. หากผู้สอนไม่มีการเตรียมการสอนล่วงหน้า หรือไม่มีความคิดปะในการพูด จะทำให้การ บรรยายนั้นไม่ประสบผลดี
2. เน้นเนื้อหาและบทบาทของครูมากเกินไป ทำให้นักเรียนไม่มีโอกาสพัฒนาในด้านต่าง ๆ โดยเฉพาะความคิดริเริ่มสร้างสรรค์
3. สอนเนื้อหาเหมือนกันหมด โดยไม่คำนึงถึงความแตกต่างระหว่างบุคคล
4. ทำให้นักเรียนมีความรู้อยู่ในวงจำกัด รู้เฉพาะเท่าที่ครูบอก ทำให้ไม่มีความสามารถในการแสวงหาความรู้จากแหล่งอื่น และขาดประสบการณ์ในการค้นคว้าหาความรู้ด้วยตนเอง ทำให้นักเรียนไม่กระตือรือร้นในการเรียน
5. การที่นักเรียนไม่ค่อยมีส่วนร่วมในการเรียนการสอน ทำให้นักเรียนขาดความสนใจ และเกิดความเบื่อหน่ายในการเรียน อาจก่อให้เกิดปัญหาทางด้านระเบียบวินัยในห้องเรียนได้

6. ไม่โอกาสเปิดโอกาสให้นักเรียนได้แสดงความคิดเห็นและทำงานร่วมกันมากนัก  
ทำให้นักเรียนไม่กล้าแสดงความคิดเห็น และไม่รู้จักการทำงานเป็นกลุ่ม

การสอนแบบบรรยายนี้ใช้ได้ดีกับการสอนทักษะเบื้องต้น ข้อเท็จจริงหรือความรู้ที่  
นักเรียนไม่เคยมีประสบการณ์มาก่อน ครูอาจตั้งหรือคาดหวังผลสำเร็จของนักเรียนไว้ค่อนข้างสูง และ  
เพื่อให้ประสบผลสำเร็จ ครูควรได้ตรวจสอบการสอนของตนเองอยู่เสมอ โดยวิเคราะห์หรือตั้งคำถาม  
ตนเองดังนี้

- นักเรียนจำเป็นต้องมีพื้นฐานในการเรียนหรือมีทักษะใหม่หรือไม่
- ขั้นตอนและกระบวนการในการเรียน ได้มีการแบ่งเป็นขั้นตอนย่อย ๆ อย่างเพียงพอหรือไม่

- จุดประสงค์การเรียนรู้ได้กำหนดไว้อย่างชัดเจนหรือไม่
- แต่ละขั้นตอนเหล่านั้น ได้มีการเรียนก่อนที่จะสอนขั้นตอนใหม่หรือไม่
- จุดประสงค์การเรียนรู้ได้กำหนดไว้อย่างชัดเจนหรือไม่
- การจัดเนื้อหาเป็นเหตุเป็นผลหรือไม่ รวมทั้งตัวอย่างและการนำเสนอมีประสิทธิภาพหรือไม่

- คำถามที่ใช้เพื่อตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียนเพียงพอหรือไม่
- การฝึกฝนภายใต้การแนะนำของครูเพียงพอหรือไม่ นักเรียนทั้งหมดได้รับการฝึกฝนหรือไม่ และข้อบกพร่องต่าง ๆ ได้มีการชี้แจงและแก้ไขอย่างรวดเร็วหรือไม่

- ได้ให้นักเรียนฝึกฝนด้วยตนเองหรือไม่ ได้มีการตรวจสอบผลการฝึกฝนของนักเรียนว่ากระทำอย่างไม่มีข้อบกพร่องหรือไม่

- ได้มีการทบทวนความรู้และทักษะที่เรียนไปเป็นระยะอย่างสม่ำเสมอหรือไม่ แบบฝึกหัดหรือการบ้าน ได้มีการตรวจก่อนสอนเรื่องต่อไปหรือไม่

**ตัวอย่าง** วิธีการสอนแบบบรรยาย

**เนื้อหา** การแบ่งเส้นตรงออกเป็นส่วน ๆ ที่เท่ากัน

**ขั้นตอนการสอน**

**ขั้นที่ 1** ทบทวนความรู้เดิมของนักเรียนเกี่ยวกับการแบ่งครึ่งเส้นตรงที่นักเรียนเรียนมาแล้ว โดยให้นักเรียนคนหนึ่งออกมาแสดงวิธีการแบ่งเส้นตรงที่กำหนดให้บนกระดาน และให้นักเรียนอีกคนหนึ่ง

บอกวิธีการที่เพื่อนใช้ ให้นักเรียนที่เหลือพิจารณาว่าที่เพื่อนทำไปนั้นถูกต้องหรือไม่ หากไม่ถูกต้องให้ช่วยกันแก้ไข หากมีส่วนใดไม่ชัดเจน ครูช่วยแก้ไขและอธิบายเพิ่มเติม ครูชี้แจงว่าจะนำความรู้ในเรื่องการแบ่งครึ่งเส้นตรงไปใช้ในการแบ่งเส้นตรงออกเป็นส่วน ๆ

**ขั้นที่ 2** ครูระบุจุดประสงค์การเรียนรู้เรื่องการแบ่งเส้นตรงที่กำหนดให้ ออกเป็นส่วน ๆ เท่า ๆ กัน ดังนี้

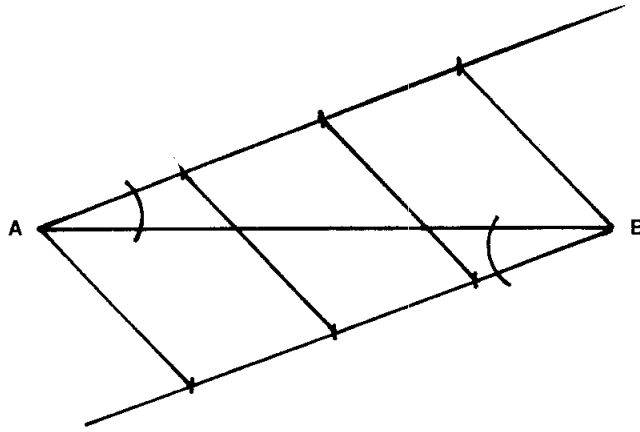
จุดประสงค์การเรียนรู้ หลังจากศึกษาเรื่องนี้แล้วนักเรียนสามารถ

1. แบ่งครึ่งเส้นตรงที่กำหนดให้โดยใช้วงเวียนได้
2. แบ่งเส้นตรงออกเป็นสองส่วน สี่ส่วน แปดส่วน โดยใช้ความรู้เกี่ยวกับการแบ่งครึ่งเส้นตรงได้
3. ทำแบบฝึกหัดที่มอบหมายให้ได้อย่างถูกต้องอย่างน้อย 4 ข้อ ใน 5 ข้อ

### **ขั้นที่ 3**

1. ให้นักเรียนบอกวิธีแบ่งครึ่งเส้นตรงและให้นักเรียนทุกคนแบ่งครึ่งเส้นตรงที่ตนเองกำหนดลงในสมุด
2. ให้นักเรียนพิจารณาว่า เส้นตรงที่แบ่งได้นั้นมีกี่ส่วน และหากจะแบ่งครึ่งแต่ละส่วนไปเรื่อย ๆ จะทำได้หรือไม่ และเส้นตรงที่นักเรียนกำหนดไว้บนจะแบ่งได้เป็นกี่ส่วน ซึ่งนักเรียนจะบอกได้ว่าเส้นตรงนั้นจะแบ่งได้เป็น 2 ส่วน 4 ส่วน 8 ส่วน 16 ส่วน ..... เท่า ๆ กัน ให้นักเรียนแบ่งเส้นตรงออกเป็น 4 ส่วน ครูตรวจสอบให้คำแนะนำและแก้ไขหากนักเรียนทำไม่ถูกต้อง
3. ให้นักเรียนลองแบ่งเส้นตรงที่กำหนดให้ออกเป็นส่วน ๆ ที่เท่ากัน โดยให้เป็นจำนวนคี่โดยให้ใช้วงเวียน ซึ่งนักเรียนจะใช้ความรู้การแบ่งครึ่งเส้นตรงมาใช้ไม่ได้
4. ครูสาธิตการแบ่งส่วนเส้นตรงออกเป็นสามส่วนเท่า ๆ กัน โดยการสร้างมุมที่เท่ากันที่จุดปลายของเส้นตรงทั้งสองข้าง โดยให้เส้นตรงที่กำหนดให้เป็นแขนข้างหนึ่งของมุม การสร้างมุมนี้ใช้วงเวียนและไม้บรรทัด และใช้วงเวียนตัดแขนของมุมที่สร้างขึ้นใหม่ทั้งสองด้านออกเป็นด้านละ 3 ส่วนเท่า ๆ กัน โดยใช้จุดยอดมุมทั้งสองเป็นจุดเริ่มต้น โยงจุดเริ่มต้นของแขนของมุมข้างหนึ่ง และจุดปลายที่แบ่งไว้บนแขนอีกข้างหนึ่ง และโยงจุดที่เหลือ เส้นที่โยงนี้จะตัดเส้นตรงที่กำหนดให้ออกเป็นสามส่วนเท่า ๆ กัน ดังรูป ให้นักเรียนตรวจสอบว่าแต่ละส่วนที่แบ่งได้นั้นเท่ากันหรือไม่ โดยให้ใช้วงเวียน





5. ให้นักเรียนทดลองปฏิบัติแบ่งส่วนของเส้นตรงที่นักเรียนกำหนดขึ้นเองออกเป็นสามส่วนเท่า ๆ กัน โดยใช้วงเวียน ครูตรวจสอบในขณะที่นักเรียนปฏิบัติ ให้คำแนะนำเพิ่มเติมและแก้ไขข้อบกพร่องของนักเรียน โดยเฉพาะอย่างยิ่งทักษะการใช้วงเวียน
6. ให้นักเรียนฝึกฝนด้วยตนเองในการแบ่งส่วนของเส้นตรงออกเป็นส่วน ๆ เท่ากัน เช่น ให้นำแบ่งเป็นสี่ส่วน ห้าส่วน หกส่วน
7. ครูตรวจสอบแบบฝึกหัดและแก้ไขข้อบกพร่องของนักเรียน

**5.1.2 การสอนแบบนิรนัย (Deductive Method)** การสอนแบบนิรนัยเป็นวิธีการสอนที่ครูนิยมใช้มากในสมัยก่อน โดยเฉพาะอย่างยิ่งในการสอน การพิสูจน์เรขาคณิต วิธีการสอนนี้จะเริ่มต้นด้วยการที่ครูสอนให้รู้หลัก กฎ นิยาม ทฤษฎี หรือนัยทั่วไปที่เป็นที่ยอมรับแล้ว และหาทางพิสูจน์ความจริงนั้น และนำข้อเท็จจริงนั้นมาใช้เพื่อแก้ปัญหาเรื่องใหม่ หรือหาข้อสรุปใหม่ วิธีนี้เป็นการสอนที่เริ่มต้นด้วยหลักเกณฑ์ พิสูจน์ว่าหลักเกณฑ์นั้นเป็นจริง แล้วนำไปสู่ตัวอย่าง การสอนแบบนิรนัยนี้จะประหยัดเวลาในการสอน เพราะครูเอาหลักเกณฑ์หรือทฤษฎีที่ได้มีการพิสูจน์แล้วมาพิสูจน์ให้นักเรียนดู และให้นักเรียนนำไปใช้ในการแก้ปัญหาใหม่ บทบาทในการเรียนการสอนจะเน้นที่ตัวครู นักเรียนมีบทบาทน้อยส่วนใหญ่ จะเป็นการตอบคำถามสลับกับการอธิบายของครู

การสอนแบบนิรนัย ควรมีการดำเนินการสอนเป็นขั้นตอนดังนี้

1. การเตรียมการสอน ครูควรเตรียมการล่วงหน้าเช่นเดียวกับการสอนแบบ

บรรยาย

2. การดำเนินการสอน ครูอธิบายกฎ หลักเกณฑ์ ทฤษฎี นัยทั่วไป หรือปัญหาให้นักเรียน เข้าใจเสียก่อนว่า กฎ หลักเกณฑ์ ทฤษฎี หรือปัญหานั้นมีข้อมูลอะไรบ้าง ข้อมูลต่าง ๆ เหล่านั้นหมายความว่าอย่างไร มีความสัมพันธ์กันอย่างไร และเกี่ยวข้องกับหลักเกณฑ์หรือนัยทั่วไปอย่างไร และแนวทางในการแก้ปัญหาเป็นอย่างไร ซึ่งในขั้นนี้เรียกว่า ขั้นกำหนดนัยทั่วไป หลังจากนั้นครูทำการพิสูจน์ข้อเท็จจริงหรือนัยทั่วไปนั้น หรืออาจจะให้ตัวอย่างสัก 2-3 ตัวอย่าง เพื่อชี้ให้เห็นว่ากฎเกณฑ์ ข้อเท็จจริง หรือนัยทั่วไปนั้นเป็นจริงตามที่ได้พิสูจน์หรือตามที่ได้ทำตัวอย่างนั้น ๆ ขั้นตอนนี้เป็น ขั้นของการตรวจสอบนัยทั่วไป ส่วนในขั้นสุดท้ายคือ ขั้นการนำนัยทั่วไปไปใช้ เป็นการนำนัยทั่วไปไปใช้ในการแก้ปัญหาต่าง ๆ หรือค้นหาข้อสรุปใหม่ ๆ ต่อไป

3. การตรวจสอบหรือติดตามผล ครูให้นักเรียนทำตัวอย่างเพิ่มเติมหรือทำแบบฝึกหัด ซึ่งอาจจะให้ทำในคาบนั้นเป็นรายบุคคล เป็นกลุ่ม หรือไปทำเป็นการบ้าน โดยใช้ความรู้ที่เรียนไปแล้วนั้นไปใช้เพื่อเป็นการประเมินผลว่า นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจในเรื่องนั้น ๆ และสามารถนำไปใช้ได้หรือไม่

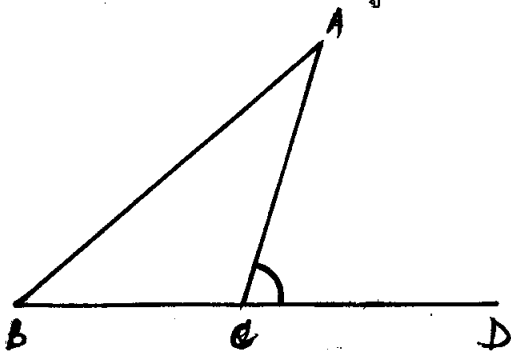
#### ตัวอย่างการสอนแบบนิรนัย

เนื้อหาเกี่ยวกับทฤษฎีบทเรขาคณิต

ทฤษฎี "มุมภายนอกของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ จะมีค่าเท่ากับผลบวกของมุมภายในที่อยู่ตรงข้าม"

การดำเนินการสอนแบบนิรนัย ทำได้ดังนี้

1. ชี้นำเข้าสู่บทเรียน ครูวาดรูปสามเหลี่ยมใด ๆ บนกระดานพร้อมทั้งกำหนดชื่อมุม



ให้นักเรียนบอกชื่อมุมของรูปสามเหลี่ยม ABC ครูลากเส้นต่อด้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมออกไป เช่น ต่อด้าน BC ออกไปจนถึง D ให้นักเรียนพิจารณาว่าเกิดอะไรขึ้น ซึ่งนักเรียนจะบอกได้ว่าเกิดมุม ACD ขึ้น ครูให้นักเรียนบอกชื่อของมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้าม

## 2. ขั้นตอนการสอน

การกำหนดนัยทั่วไป ครูบอกนักเรียนว่า มีทฤษฎีเกี่ยวกับมุมภายนอกและมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมอยู่ที่ทฤษฎีหนึ่งว่า มุมภายนอกของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ จะมีค่าเท่ากับผลบวกของมุมภายในที่อยู่ตรงข้าม ครูเขียนข้อความลงบนกระดาน และให้นักเรียนเขียนประโยคสัญลักษณ์ซึ่งจะเขียนได้เป็น  $\text{มุม } ACD = \text{มุม } ABC + \text{มุม } BAC$

ขั้นตรวจสอบนัยทั่วไป ครูอธิบายให้นักเรียนเข้าใจว่าก่อนที่นัยทั่วไปนี้ไปใช้ ต้องพิสูจน์ให้แน่ใจก่อนว่าเป็นจริง ในการนี้นักเรียนจะต้องนำความรู้เกี่ยวกับเรื่องมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมและมุมภายนอกที่เกี่ยวข้องกับรูปสามเหลี่ยมมาใช้ ให้นักเรียนระบุทฤษฎีที่เรียนไปแล้วที่จะนำมาใช้ช่วยในการพิสูจน์ คือ

$$1. \text{มุม } ABC + \text{มุม } BAC + \text{มุม } ACB = 180 \text{ องศา}$$

$$2. \text{มุม } ACD + \text{มุม } ACB = 180 \text{ องศา}$$

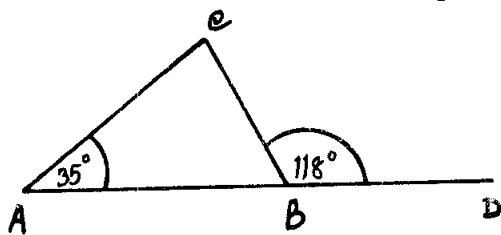
ครูอธิบายและให้นักเรียนช่วยการพิสูจน์จนได้ว่า

$$\text{มุม } ACD + \text{มุม } ACB = \text{มุม } ABC + \text{มุม } BAC + \text{มุม } ACB$$

$$\text{มุม } ACD = \text{มุม } ABC + \text{มุม } BAC$$

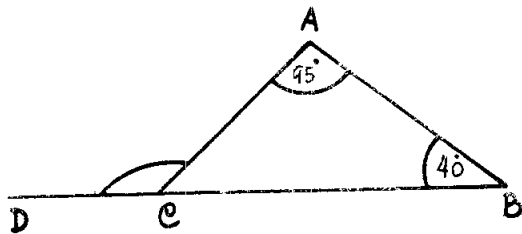
ครูสรุปให้เห็นว่า การพิสูจน์นี้สอดคล้องกับทฤษฎีที่กล่าวไว้ และนักเรียนสามารถนำทฤษฎีนี้ไปใช้ในการพิสูจน์ต่อไปได้

การนัยทั่วไปไปใช้ ครูยกตัวอย่างเกี่ยวกับการหาค่ามุมภายในของรูปสามเหลี่ยม



เช่น ให้หาค่ามุม  $ACB$  และมุม  $ABC$

จากรูปที่กำหนดให้



จากรูปให้หาค่ามุม  $ACD$

และให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด

ครูทบทวนเกี่ยวกับความสัมพันธ์ของมุมภายนอกและมุมภายในของสามเหลี่ยมอีกครั้งหนึ่ง โดยให้นักเรียนท่องนัยทั่วไปนั้นเป็นรายบุคคล

การสอนแบบนี้มีจุดเด่นและข้อจำกัดในการใช้ เช่นเดียวกับการสอนแบบอื่น ๆ ซึ่งพอสรุปได้ดังนี้

#### จุดเด่นของวิธีการสอนแบบนี้

1. ทำให้นักเรียนเข้าใจเนื้อหาได้โดยใช้เวลาในการสอนน้อย  
2. นักเรียนสามารถท่องและจำหลักเกณฑ์ได้อย่างดี เพราะครูเขียนหรือบอกให้ทราบโดยใช้ถ้อยคำที่สั้นกระชับรัด

3. นักเรียนยอมรับในหลักเกณฑ์หรือนัยทั่วไปนั้น เพราะมีเหตุผลและมีข้อพิสูจน์ที่เชื่อถือได้

4. มีเวลาเหลือมากพอในการทำตัวอย่างและการทำแบบฝึกหัด

#### ข้อจำกัดของวิธีการสอนแบบนี้

1. นักเรียนมีบทบาทในการเรียนน้อย  
2. นักเรียนต้องจำกฎหรือหลักเกณฑ์โดยไม่ทราบที่มาหรือแนวคิดเบื้องต้น อาจทำให้

3. เมื่อนักเรียนลืมหลักเกณฑ์หรือนัยทั่วไปหรือทฤษฎี นักเรียนก็ไม่สามารถแก้ปัญหาได้  
4. ไม่ส่งเสริมการคิดริเริ่มสร้างสรรค์ของนักเรียน และไม่ได้ฝึกให้นักเรียนคิดค้นด้วย

ตนเอง

**5.1.3 การสอนแบบสาธิต (Demonstration Method)** คือวิธีการสอนหรืออธิบายโดยใช้เครื่องมือหรือวัสดุต่าง ๆ ประกอบการอธิบาย เพื่อให้นักเรียนได้มองเห็นหรือเข้าใจในมโนทัศน์และเนื้อหาทางคณิตศาสตร์ได้ชัดเจนและรวดเร็วขึ้น การสาธิตนั้น ครูอาจจะเป็นผู้สาธิตหรืออาจให้นักเรียนซึ่งได้รับการฝึกมาแล้วเป็นผู้สาธิตก็ได้ เชื่อกันว่า การที่ครูนำวัสดุอุปกรณ์และเครื่องมือต่าง ๆ มาสาธิตประกอบการอธิบายจะช่วยสร้างความสนใจในการเรียนของนักเรียนได้เป็นอย่างดี อย่างไรก็ตาม การสอนแบบสาธิตจะได้ผลดีหรือไม่เพียงใดนั้น ย่อมขึ้นอยู่กับองค์ประกอบหลายประการ เช่น ความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับเนื้อหาของครู วิธีการและเทคนิคในการสาธิต อุปกรณ์ที่นำมาใช้ในการสาธิต

เวลาหรือสภาพของห้องเรียน เป็นต้น ดังนั้น ในการสอนแบบสาธิตนั้น ครูควรได้คำนึงถึงสิ่งต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

1. ครูต้องมีความพร้อมในด้านต่าง ๆ เช่น มีความรู้ในเนื้อหาเป็นอย่างดี จัดหาเครื่องมือหรืออุปกรณ์ไว้อย่างดี และมีทักษะในการใช้เครื่องมือต่าง ๆ เหล่านั้น รวมทั้งต้องมีความสามารถในการอธิบาย และการสาธิตได้กลมกลืนกัน

2. เครื่องมือหรือวัสดุอุปกรณ์ที่จะนำมาใช้ในการสาธิตนั้น ต้องเลือกและตรวจสอบสภาพความพร้อมเรียบร้อยและทดลองใช้ก่อนนำมาใช้ในห้องเรียน หากมีหลายชิ้นควรจัดวางเรียงลำดับก่อนหลัง เพื่อความสะดวกในการสาธิต และทำให้การสอนแบบสาธิตเป็นไปอย่างรวดเร็ว เรียบร้อย และราบรื่น ทำให้นักเรียนไม่เกิดความเบื่อหน่าย

3. ก่อนที่จะทำการสอน ครูควรบอกนักเรียนก่อนว่าครูจะสาธิตการสอนเรื่องอะไร จะให้นักเรียนสังเกตอะไร และจะให้นักเรียนบันทึกหรือทำอย่างไรในขณะที่มีการสาธิต เพื่อให้นักเรียนได้ติดตามและสังเกตสิ่งที่เกิดขึ้นและเกิดการเรียนรู้ ครูไม่ควรบอกผลของการสาธิตก่อน เพราะจะทำให้ให้นักเรียนไม่สนใจเรียน

4. ถ้าเป็นไปได้ควรให้นักเรียนมีส่วนร่วมในการสาธิตด้วย เช่น ให้นักเรียนสาธิตในตอนที่ไม่ยากหรือไม่เกิดอันตราย หรือครูอาจจะส่งผ่านอุปกรณ์หรือเครื่องมือต่าง ๆ ให้นักเรียนดูอย่างใกล้ชิด หรือให้นักเรียนได้ดูหลังจากที่ครูสาธิตไปแล้ว หรือถามปัญหาที่คาดการณ์ไว้ล่วงหน้า

5. ในการสาธิตนั้น ครูต้องแสดงให้เห็นการสาธิตได้อย่างทั่วถึง และควรสังเกตสีหน้าและพฤติกรรมของนักเรียนด้วยว่า เข้าใจหรือไม่ เพื่อว่าครูจะได้แก้ไขปัญหาที่เกิดขึ้นได้ทันที เช่น สาธิตให้ดูใหม่ หรือให้นักเรียนสาธิตด้วยตนเอง

6. ช่วงเวลาที่ใช้ในการสาธิตไม่ควรนานจนเกินไป เพราะจะทำให้นักเรียนเกิดความเบื่อหน่าย

การสอนแบบสาธิต ควรมีการดำเนินการเป็นขั้นตอนดังนี้

1. การเตรียมการสอน ครูจะต้องเตรียมการสอนล่วงหน้า โดยการเตรียมเนื้อหาที่จะสาธิต กำหนดจุดประสงค์ของการสาธิตให้ชัดเจนและให้เหมาะสมกับเนื้อหา เตรียมอุปกรณ์การสาธิตให้พร้อม เตรียมและทดลองการสาธิตโดยพิจารณาขั้นตอนการสาธิตและ เวลาที่จะใช้ในแต่ละขั้น จัดทำคู่มือ คำแนะนำหรือข้อสังเกตในการสาธิตเพื่อให้นักเรียนใช้ประกอบในการสาธิต

2. การดำเนินการสาธิต ครูชี้แจงจุดประสงค์การเรียนรู้ของการสาธิตให้นักเรียนทราบ ทบทวนความรู้เดิมของนักเรียนที่จะต้องนำมาใช้ประกอบการสาธิต แจกคู่มือหรือข้อสังเกตที่นักเรียนจะต้องสังเกตในขณะที่ครูสาธิต ครูสาธิตเนื้อหาโดยใช้เครื่องมือตามลำดับขั้นตอนที่ได้เตรียมมาให้ให้นักเรียนสังเกตสิ่งที่ครูสาธิตและให้สรุปมโนคติหรือเนื้อหาสิ่งที่ครูสาธิตนั้น และอาจให้นักเรียนได้ทำการสาธิตซ้ำ เพื่อเน้นให้นักเรียนเกิดความเข้าใจมากขึ้น ครูยกตัวอย่างการนำเอาผลของการสาธิตนั้นไปใช้ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ และให้นักเรียนทำกิจกรรมหรือแบบฝึกหัดที่นำเอาผลของการสาธิตไปใช้

3. การติดตามและประเมินผล ครูสังเกตพฤติกรรมของนักเรียนในขณะที่ครูทำการสาธิต การสรุปผลการสาธิตของนักเรียน และผลการเรียนรู้ของนักเรียน

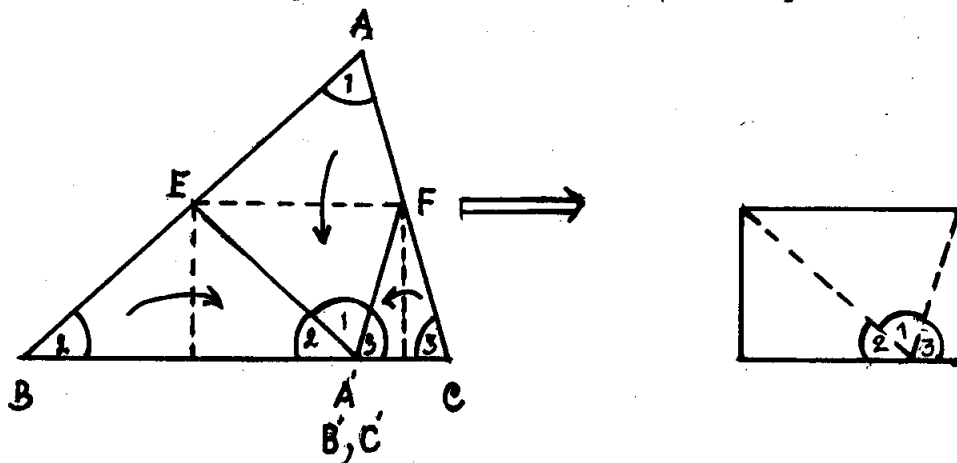
ตัวอย่างการสอนแบบสาธิต

ตัวอย่างที่ 1 การนิรนัยเนื้อหาทางเรขาคณิต "มุมภายในของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเข้าเท่ากับสองมุมฉาก"

อุปกรณ์ รูปสามเหลี่ยมใด ๆ ที่ทำจากกระดาษสี หรืออาจใช้อุปกรณ์ที่ทำจากไม้ ตัดเป็นสามเหลี่ยมเล็ก 3 รูป และสี่เหลี่ยมผืนผ้า 1 รูป ตรงติดกันด้วยบานพับ

การดำเนินการสอนแบบสาธิต ทำได้ดังนี้

1. ชี้นำเข้าสู่บทเรียน ครูให้นักเรียนพิจารณามุมตรงและมุมประชิด-บนมุมตรงว่ามีลักษณะเป็นอย่างไร และมีค่ากี่องศา และบอกให้นักเรียนทราบจุดประสงค์ของการเรียนรู้ในคาบนั้น
2. ชี้นำดำเนินการสอน ให้นักเรียนพิจารณารูปสามเหลี่ยมใด ๆ ที่ทำจากกระดาษสีว่ามีลักษณะเป็นอย่างไร มีมุมกี่มุม ให้นักเรียนออกมาทำเครื่องหมายที่มุมภายในของรูปสามเหลี่ยมทั้งสาม และให้นักเรียนสังเกตการสาธิตของครู ครูดำเนินการสาธิตโดยขั้นแรกพับมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมลงมาให้



จรตฐาน BC โดยให้รอยพับนั้นขนานกับฐาน และพับมุม B และมุม C โดยให้แขน BE และแขน CF แนบกับแขน EA และ FA ที่พับลงมา ซึ่งแขนของมุมทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมจะแนบกัน ให้นักเรียนสังเกต ลักษณะของมุมทั้งสามที่เกิดขึ้น และให้ช่วยกันสรุปมโนคติเกี่ยวกับมุมภายในของรูปสามเหลี่ยม ซึ่งนักเรียน จะสรุปได้ว่า "มุมภายในของรูปสามเหลี่ยมรวมกันได้เท่ากับสองมุมฉาก"

ให้นักเรียนสาธิตด้วยตนเอง โดยให้นักเรียนตัดหรือฉีกกระดาษให้เป็นรูปสามเหลี่ยม และให้พับมุมทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมให้มาจรดกับที่จุดใดจุดหนึ่งบนฐานของรูปสามเหลี่ยมนั้น ซึ่งจะจรด กันได้เป็นมุมตรงพอดี ครูและนักเรียนช่วยกันทำตัวอย่าง เกี่ยวกับการนำมโนคตินี้ไปใช้ และให้นักเรียน ทำกิจกรรมกลุ่มเกี่ยวกับการนำความรู้เรื่องนี้เป็นไปใช้ และให้ทำแบบฝึกหัด

ขั้นสรุป ให้นักเรียนสรุปมโนคติเกี่ยวกับมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมโดยการถามตอบ  
**ตัวอย่างที่ 2** เนื้อหาทางเลขคณิต การคูณเลขจำนวนเต็ม โดยใช้แท่งหรือกระดุกเนเปียร์  
 การดำเนินการสอนแบบสาธิตทำได้ดังนี้

1. ชี้นำเข้าสู่บทเรียน ให้นักเรียนท่องสูตรคูณแม่สองถึงแม่เก้า (เพื่อจะนำมาเขียนบน กระดาษซึ่งจะเรียกว่าแท่งเนเปียร์) และบอกจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบว่า ในการคูณเลข จำนวนมาก ๆ ในสมัยโบราณยังไม่มีเครื่องคิดเลข เขาใช้แท่งเนเปียร์ในการคูณ

2. ขั้นตอนการการสอน แบ่งนักเรียนเป็นกลุ่ม ๆ ละ 5 คน และแจกกระดาษสี่เหลี่ยมผืนผ้า ขนาด 1" x 10" กลุ่มละ 10 ชิ้น ครูสาธิตการสร้างตารางสูตรคูณลงบนกระดาษหน้าขาวหลังเทา ที่ครูเตรียมมาและให้นักเรียนในกลุ่มจัดทำตารางสูตรคูณของตนเอง ดังตัวอย่าง

Index	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
1	0/1	0/2	0/3	0/4	0/5	0/6	0/7	0/8	0/9	0/0
2	0/2	0/4	0/6	0/8	1/0	1/2	1/4	1/6	1/8	0/0
3	0/3	0/6	0/9	1/2	1/5	1/8	2/1	2/4	2/7	0/0
4	0/4	0/8	1/2	1/6	2/0	2/4	2/8	3/2	3/6	0/0
5	0/5	1/0	1/5	2/0	2/5	3/0	3/5	4/0	4/5	0/0
6	0/6	1/2	1/8	2/4	3/0	3/6	4/2	4/8	5/4	0/0
7	0/7	1/4	2/1	2/8	3/5	4/2	4/9	5/6	6/3	0/0
8	0/8	1/6	2/4	3/2	4/0	4/8	5/6	6/4	7/2	0/0
9	0/9	1/8	2/7	3/6	4/5	5/4	6/3	7/2	8/1	0/0

ครูสาธิตการคูณจำนวนเต็มให้นักเรียนดู โดยเริ่มจากจำนวนน้อยไปหาจำนวนมาก ให้นักเรียนพยายามสังเกตผลลัพธ์ที่ได้และหาหลักเกณฑ์การคูณว่าเหมือนหรือคล้ายคลึงกับวิธีตั้งคูณแบบธรรมดาอย่างไร

ตัวอย่างการคูณ เลขสี่หลักด้วยเลขสามหลัก เช่น

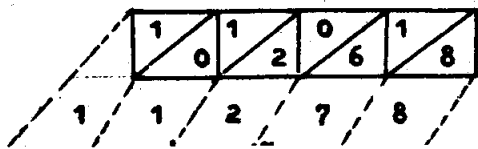
$$5639 \times 218 \text{ แยกให้นักเรียนดูว่า } 218 = 200 + 10 + 8 \text{ เพราะฉะนั้น}$$

$$5639 \times 200 = (5639 \times 200) + (5639 \times 10) + (5639 \times 8)$$

**ขั้นที่ 1** ทียบแผ่นตารางสูตรคูณที่ได้จัดเตรียมไว้แล้วหมายเลข 5, 6, 3 และ 9 มาเรียงดังรูป

	5	6	3	9
1	0	0	0	0
2	1	0	1	0
3	1	5	1	0
4	2	0	2	1
5	2	5	3	0
6	3	0	3	1
7	3	5	4	2
8	4	0	4	2
9	4	5	4	2

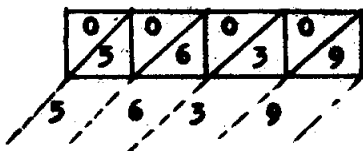
**ขั้นที่ 2** ให้นักเรียนสังเกตตัวเลขในแถวที่ 2 นำตัวเลขในแถวนี้นามาวกในแนวทแยงจากขวาไปซ้ายและเขียนจากหลักหน่วยหลักสิบมาก่อน



$$5639 \times 2 = 11278$$

$$5639 \times 200 = 1127800$$

**ขั้นที่ 3** ให้นักเรียนสังเกตตัวเลขในแถวที่ 1 ทำเช่นเดียวกับขั้นที่ 2

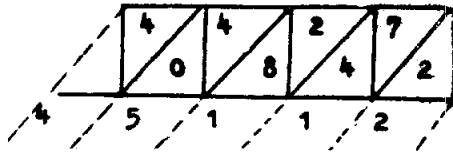


$$5639 \times 1 = 5639$$

$$5639 \times 10 = 56390$$



ขั้นที่ 4 ให้นักเรียนสังเกตตัวเลขในแถวที่ 8 นำตัวเลขในแถวนี้มาบวกในแนวทแยงเช่นเดียวกับขั้นที่ 2 เริ่มต้นจากทางด้านขวามือ ถ้าเกิน 10 ก็ให้ทดไปบวกในแนวทแยงถัดไป



$$5639 \times 8 = 45112$$

ขั้นที่ 5 ผลลัพธ์ของ  $5639 \times 218$  จะหาได้โดยการนำค่าผลคูณที่ได้จากขั้นที่ 2 ถึงขั้นที่ 4 มารวมกันโดยจะต้องตั้งให้ตัวเลขให้หลักหน่วยตรงกันเสมอ

1 1 2 7 8 0 0	หรือ	4 5 1 1 2
6 5 3 9 0		5 6 3 9 0
<u>4 5 1 1 2</u>		<u>1 1 2 7 8 0 0</u>
<u>1 2 2 9 3 0 2</u>		<u>1 2 2 9 3 0 2</u>

ทดลองเปรียบเทียบกับวิธีการคูณโดยใช้การตั้งคูณ

$$\begin{array}{r}
 5639 \\
 \times 218 \\
 \hline
 45112 \\
 5639 \phantom{0} \\
 11278 \phantom{00} \\
 \hline
 1229302
 \end{array}$$

ให้นักเรียนฝึกคูณจำนวนที่ครูกำหนดให้หรือที่นักเรียนช่วยกันกำหนด  
ขั้นสรุป ให้นักเรียนสรุปวิธีการคูณจำนวนเต็ม โดยใช้กระดุกเนเปียร์

### กิจกรรมการเรียนรู้ที่ 5.1

หลังจากศึกษาเนื้อหาในหัวข้อ 5.1 เข้าใจแล้ว ให้นักศึกษาทำกิจกรรมดังต่อไปนี้

1. จงเปรียบเทียบจุดเด่นและข้อจำกัดของวิธีสอนแบบบรรยาย วิธีสอนแบบนิรนัย และวิธีสอนแบบสาธิต

2. ให้นักศึกษาฝึกแสดงวิธีสอนแบบบรรยาย เรื่องจำนวนและตัวเลข

3. ให้นักศึกษาฝึกแสดงวิธีสอนแบบนิรนัย เรื่องเลขยกกำลัง  $8^0 = 1$

4. ให้นักศึกษาฝึกแสดงวิธีสอนแบบสาธิต เรื่อง การหาปริมาตรของกรวยกลม

(นักเรียนเรียนเรื่องการหาปริมาตรของรูปทรงกระบอกมาแล้ว)

## 5.2 วิธีสอนที่ยึดนักเรียนเป็นศูนย์กลาง

ฮาร์โรลด์ ซี ทริมเบิล (Harold C. Trimble) ได้กล่าวไว้ว่า "การสอนคณิตศาสตร์ที่ชั้นครูไม่เพียงแต่จะสอนให้นักเรียนได้มีโน้มนำไปใช้ได้อย่างมีประสิทธิภาพเท่านั้น แต่จะต้องให้นักเรียนเกิดความเชื่อมั่นในตนเอง และกระหายที่จะเรียนรู้ด้วย เพราะความเชื่อมั่นในตนเอง และความกระหายที่จะเรียนนั้นเป็นบ่อเกิดที่สำคัญของการวิเคราะห์การวิจัย ซึ่งเป็นเครื่องมือที่สำคัญของการขยายความรู้ และทำให้เกิดการเรียนรู้ว่าจะเรียนอย่างไร (Trimble 1971: 115) วิธีการสอนที่จะช่วยให้นักเรียนเกิดความเชื่อมั่นในตนเอง และกระหายที่จะเรียนรู้นั้นจะต้องใช้วิธีสอนที่ยึดเอานักเรียนเป็นศูนย์กลางในการเรียนการสอน กล่าวคือ ให้นักเรียนได้มีบทบาทในการเรียนการสอนให้มากที่สุด ให้นักเรียนเป็นผู้คิด เป็นผู้ลงมือกระทำหรือค้นคว้าด้วยตนเอง ครูเป็นผู้คอยแนะนำช่วยเหลือและจัดสถานการณ์การเรียนรู้ให้นักเรียน วิธีการสอนที่ยึดนักเรียนเป็นศูนย์กลางของการเรียนการสอนนั้นมีมากมายหลายวิธี มีทั้งแบบที่เน้นบทบาทนักเรียนเป็นรายบุคคล เช่น วิธีสอนโดยใช้บทเรียนแบบโปรแกรม วิธีสอนโดยใช้ชุดการสอน รายบุคคล หรือวิธีสอนโดยใช้เอกสารแนวทางการ ซึ่งผู้เรียนจะได้รับคำแนะนำจากครูเฉพาะ เรื่องที่จำเป็นเท่านั้น นอกจากนี้ยังมีวิธีสอนที่เน้นนักเรียนเป็นกลุ่มให้ทำงานร่วมกัน เช่น วิธีสอนแบบอภิปราย และวิธีสอนแบบโครงการ วิธีการสอนที่กล่าวมานี้มักจะนำมาใช้ได้บ่อยในการสอนเนื้อหาทางคณิตศาสตร์ เพราะบทเรียนแบบโปรแกรมและชุดการสอนรายบุคคลนั้นยังไม่มีการจัดทำและใช้กันอย่างแพร่หลายนัก และในบางวิธีก็ต้องใช้เวลาในการดำเนินการมาก

วิธีสอนที่ยึดนักเรียนเป็นศูนย์กลางของการเรียนการสอนโดยที่ครูก็ยังมีส่วนอยู่บ้าง และใช้ได้เป็นอย่างดีในการสอนคณิตศาสตร์ที่จะกล่าวในบทนี้ ได้แก่

การสอนแบบอุปนัย

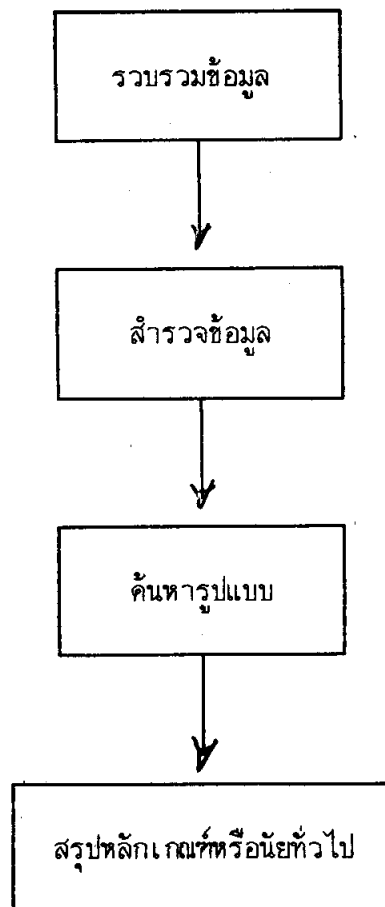
การสอนแบบทดลอง

การสอนแบบค้นพบ

**5.2.1 การสอนแบบอุปนัย (Inductive Method)** เป็นวิธีสอนที่ให้นักเรียนค้นพบด้วยตนเอง ภายใต้คำแนะนำของครู โดยที่ครูพยายามให้นักเรียนได้มองเห็นรูปแบบจากตัวอย่างหรือข้อมูลต่าง ๆ ที่มีจำนวนมากพอ แล้วสรุปออกมาเป็นหลักเกณฑ์หรือนัยทั่วไปได้ด้วยตนเอง การที่จะสรุปหลักเกณฑ์ออกมาได้นี้ นักเรียนจะต้องใช้การสังเกต การเปรียบเทียบลักษณะร่วม หรือความสัมพันธ์ของข้อมูลหรือตัวอย่าง

เท่านั้น การสอนแบบอุปนัยนี้เป็นการสอนจากตัวอย่าง ไปสู่หลักเกณฑ์ หรือเป็นการสอนจากส่วนย่อยไปสู่ส่วนรวม

ลำดับขั้นตอนของการสอนแบบอุปนัยมีดังนี้



วิธีการสอนแบบอุปนัยนี้จะช่วยฝึกให้นักเรียนรู้จักการสังเกต รู้จักใช้ความคิด และหาความสัมพันธ์ของข้อมูลต่าง ๆ ที่มีจำนวนมากพอ จนสามารถหาข้อสรุปและค้นพบกฎเกณฑ์หรือนัยทั่วไปได้ด้วยตัวเอง

## การสอนแบบอุปนัยควรมีการดำเนินการเป็นขั้นตอนดังนี้

1. การเตรียมการสอน ครูควรพิจารณาว่าเนื้อหาทางคณิตศาสตร์ที่จะสอนนั้น เหมาะสมกับวิธีการสอนแบบอุปนัยหรือไม่ การค้นหารูปแบบเพื่อสรุปเป็นหลักเกณฑ์หรือนัยทั่วไปนั้น ยุ่งยาก ซับซ้อนเกินความสามารถของนักเรียนหรือไม่ พิจารณาความรู้เดิมที่จะนำไปใช้เป็นพื้นฐานในการสร้าง ตัวอย่าง หรือข้อมูลว่ามีเรื่องอะไรบ้างที่สามารถนำไปเชื่อมโยงกับความรู้ใหม่ที่ครูจะสอน จัดเตรียม ตัวอย่างหรือข้อมูล กำหนดจุดประสงค์การเรียนรู้ ขั้นตอนการสอน และกิจกรรมการเรียนการสอน

2. การดำเนินการสอน ครูนำเข้าสู่บทเรียน โดยการชี้ให้เห็นถึงประโยชน์หรือความสำคัญของเนื้อหาที่จะสอนนั้น ทบทวนความรู้เดิมของนักเรียนที่จะเป็นพื้นฐานที่จะนำไปสู่เรื่องที่จะสอน จากนั้นดำเนินการสอนตามขั้นตอนของการสอนแบบอุปนัย คือ

- การรวบรวมข้อมูล ครูเสนอตัวอย่างหรือข้อมูลที่ครูได้เตรียมไว้ โดยใช้ความรู้เดิมที่นักเรียนได้เรียนมาแล้ว (จะนำเอาหลักเกณฑ์หรือข้อสรุปที่จะสอนในคาบนั้นมาใช้ในตัวอย่างหรือข้อมูลที่แสดง ไม่ได้) ข้อมูลที่นำเสนอต้องมีจำนวนให้มากพอ (อย่างน้อยสัก 5-6 ตัวอย่าง) ที่จะช่วยให้นักเรียนมองเห็นความสัมพันธ์ของลักษณะเหมือนที่ร่วมกันในตัวอย่างเหล่านั้น ครูควรให้นักเรียนได้มีส่วนช่วยในการสร้างหรือทำตัวอย่างหรือข้อมูลตามอย่างที่ครูได้กำหนดไว้ ในบางครั้งอาจใช้อุปกรณ์ประกอบด้วยก็ได้

- การสำรวจข้อมูล ให้นักเรียนพิจารณาข้อมูลต่าง ๆ ที่ได้รวบรวมมานั้น สังเกต และวิเคราะห์ความเหมือนหรือความแตกต่างร่วมของข้อมูลทั้งหมดเพื่อค้นหารูปแบบ ครูอาจจะช่วยชี้แนะ โดยใช้คำถามหรือให้ข้อสังเกตบ้าง ในกรณีที่นักเรียนวิเคราะห์ไม่ออกหรือใช้เวลานานจนเกินไป

- การค้นหารูปแบบ จากผลลัพธ์ของข้อมูลที่ได้จากการสำรวจนั้น นักเรียนจะมองเห็นความสัมพันธ์ของรายละเอียดหรือองค์ประกอบร่วม หรือลักษณะร่วมของข้อมูล และค้นหารูปแบบที่จะอธิบายถึงความสัมพันธ์นั้น การค้นหารูปแบบนี้อาจจะเสียเวลาบ้าง เพราะบางครั้งนักเรียนจะมองไม่เห็นความสัมพันธ์หรือองค์ประกอบร่วม ครูอาจจะต้องใช้เทคนิคต่าง ๆ เข้าช่วย เช่น ให้นักเรียนพิจารณาข้อมูลที่สัมพันธ์กันทีละส่วน หรือจะใช้การอ่านออกเสียงข้อมูลที่สัมพันธ์กัน เพื่อเป็นการชี้แนะ

- การสรุปหลักเกณฑ์หรือนัยทั่วไป จากรูปแบบที่ค้นพบแล้วนั้น ให้นักเรียนสรุปเป็นกฎเกณฑ์ นัยทั่วไป นิยาม หรือสูตรซึ่งจะเขียนอยู่ในรูปของประโยคภาษาหรือประโยคสัญลักษณ์ก็ได้ จากนั้นควรมีการตรวจสอบหลักเกณฑ์หรือนัยทั่วไปนั้นว่าสามารถนำไปใช้ได้ และสามารถหาค่าได้เท่ากับ

การทำโดยใช้ความรู้เดิม (ตามที่ทำในขั้นของการรวบรวมข้อมูล)

เมื่อได้หลักเกณฑ์แล้ว ครูยกตัวอย่างการนำหลักเกณฑ์นั้นไปใช้ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดหรือแก้ปัญหาโดยใช้หลักเกณฑ์นั้น

3. การติดตามและประเมินผล ตรวจสอบความเข้าใจและการเรียนรู้ของนักเรียน จากแบบฝึกหัดหรือการทดสอบซึ่งครูได้เตรียมมา

#### ตัวอย่างการสอนแบบอุปนัย

$$\text{เนื้อหา : } \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

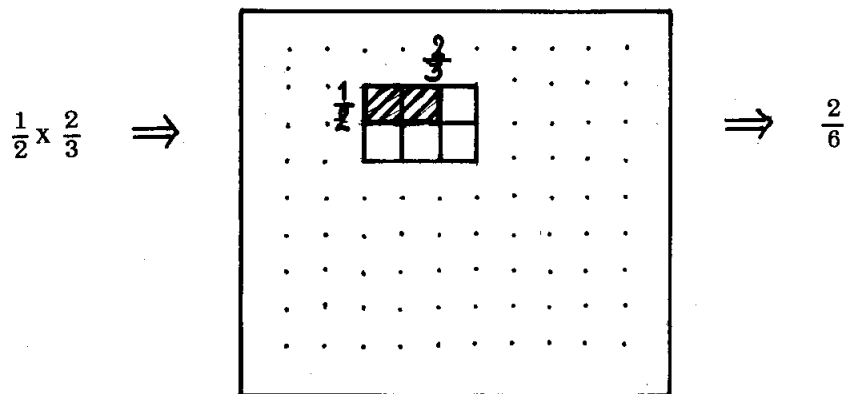
อุปกรณ์ : กระดาษตะปูละวงยางสีต่าง ๆ

การดำเนินการสอนแบบอุปนัยทำได้ดังนี้

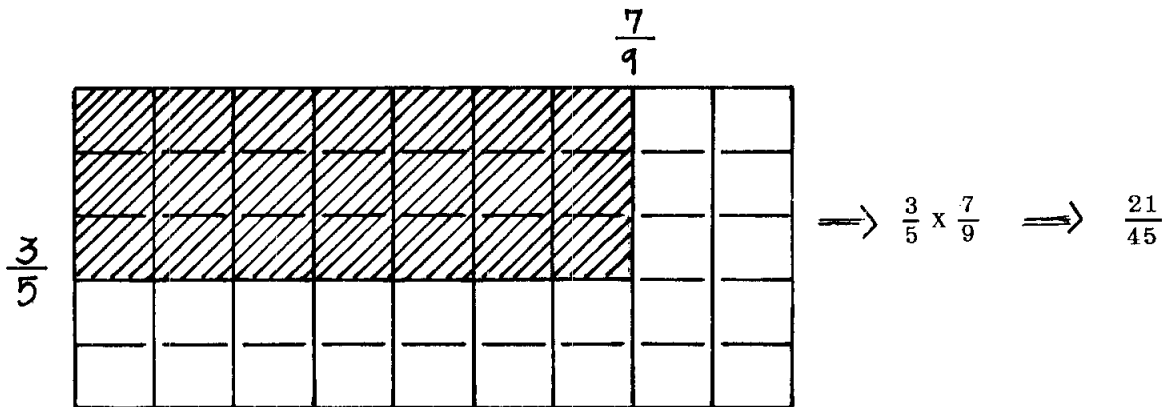
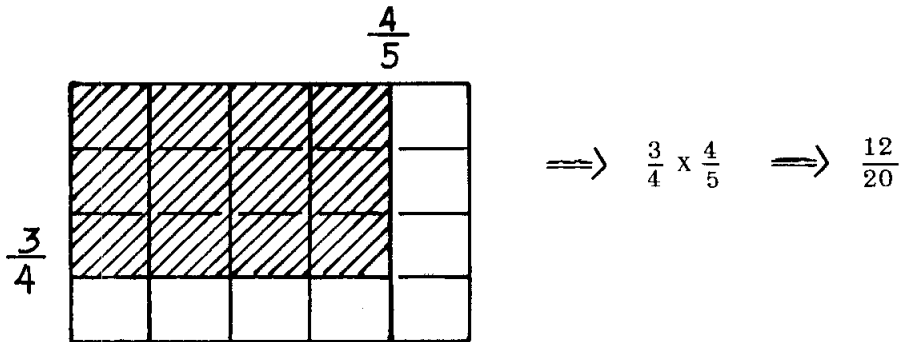
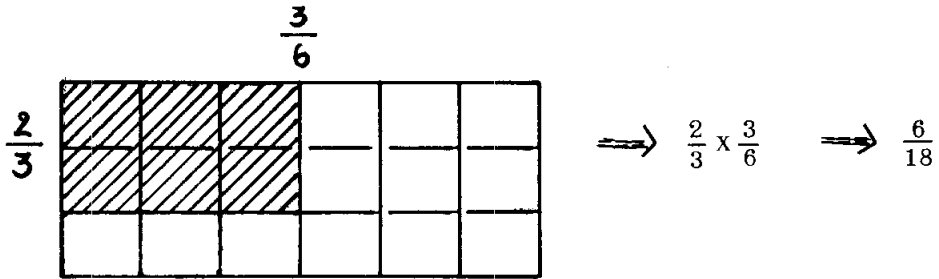
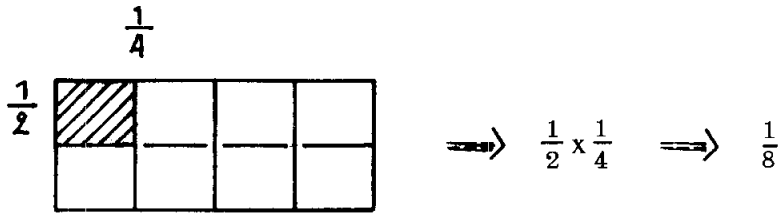
1. ชี้นำเข้าสู่บทเรียน ให้นักเรียนหาพื้นที่สี่เหลี่ยมมุมฉาก โดยใช้กระดาษตะปูละวงยาง เมื่อครูหรือนักเรียนคนอื่น ๆ กำหนดด้านกว้างและด้านยาวมาให้ ครูชี้แจงให้นักเรียนทราบว่า จะนำความรู้เรื่องพื้นที่สี่เหลี่ยมมุมฉากมาใช้ให้การคูณเศษส่วน

2. ขั้นตอนการสอน

- การรวบรวมข้อมูล ครูแสดงการหาพื้นที่บนกระดาษตะปูละวงยาง เมื่อความกว้างและความยาวเป็นเศษส่วน เช่น



และให้นักเรียนช่วยกันหาพื้นที่บนกระดาษตะปูละวงยางตามข้อมูลที่ครูหรือนักเรียนช่วยกันกำหนด ซึ่งข้อมูลที่รวบรวมได้อาจเป็นดังนี้



- การสำรวจข้อมูล ให้นักเรียนหาค่าของพื้นที่ที่ความกว้างและความยาวเป็น  
เศษส่วน และให้นักเรียนพิจารณาเศษของผลคูณและเศษของผลลัพธ์ และส่วนของผลคูณและส่วนของผลลัพธ์

$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{6}$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{6} = \frac{6}{18}$$

$$\frac{3}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{12}{20}$$

$$\frac{3}{5} \times \frac{7}{9} = \frac{21}{45}$$

- การค้นหารูปแบบ ให้นักเรียนค้นหารูปแบบของการคูณเศษส่วน โดยการสังเกต  
และวิเคราะห์เศษและส่วนของผลคูณของเศษส่วน และผลลัพธ์

$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{6} \implies \frac{1 \times 2}{2 \times 3}$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8} \implies \frac{1 \times 1}{2 \times 4}$$

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{6} = \frac{6}{18} \implies \frac{2 \times 3}{3 \times 6}$$

$$\frac{3}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{12}{20} \implies \frac{3 \times 4}{4 \times 5}$$

$$\frac{3}{5} \times \frac{7}{9} = \frac{21}{45} \implies \frac{3 \times 7}{5 \times 9}$$



- การสรุปหลักเกณฑ์หรือนัยทั่วไป ให้นักเรียนเขียนรูปแบบซึ่งได้จากการวิเคราะห์

ข้อมูล เพื่อหาข้อสรุป ซึ่งจะเขียนได้เป็น

$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1 \times 2}{2 \times 3}$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1 \times 1}{2 \times 4}$$

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{6} = \frac{2 \times 3}{3 \times 6}$$

$$\frac{3}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{3 \times 4}{4 \times 5}$$

$$\frac{3}{5} \times \frac{7}{9} = \frac{3 \times 7}{5 \times 9}$$

และให้นักเรียนสรุปหลักเกณฑ์หรือนัยทั่วไป เกี่ยวกับการคูณเศษส่วน

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d} \quad \text{เมื่อ } a, b, c, d \text{ เป็นจำนวนจริงที่ไม่เป็นศูนย์}$$

ให้นักเรียนตรวจสอบหลักเกณฑ์ โดยให้หาค่าของการคูณเศษส่วนและตรวจสอบผลลัพธ์ที่ได้กับการหาพื้นที่บนกระดาษตาราง และให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดเพื่อตรวจสอบความเข้าใจ

3. ขึ้นสรุป อาจสรุปโดยการทำแบบทดสอบหรือให้นักเรียนสรุปหลักเกณฑ์การคูณเศษส่วน วิธีสอนแบบอุปนัยใช้ได้เหมาะสมกับเนื้อหาส่วนใหญ่ในระดับมัธยมศึกษาที่จะช่วยให้

นักเรียนเข้าใจเนื้อหาได้อย่างชัดเจน ได้ใช้ความคิดและรู้จักวิเคราะห์หาเหตุผลและหาข้อสรุปหลักเกณฑ์ด้วยตนเอง ทำให้นักเรียนยอมรับหลักเกณฑ์นั้น โดยไม่มีข้อสงสัย ซึ่งแตกต่างจากวิธีสอนแบบบรรยายหรือวิธีบอกให้รู้ อย่างไรก็ตาม วิธีสอนแบบอุปนัยจะให้ได้ผลมาน้อยเพียงใดนั้น จะขึ้นอยู่กับครู เพราะครูจะต้องเป็นผู้จัดสถานการณ์และชี้แนะแนวทางในการคิดเพื่อให้นักเรียนหาข้อสรุปได้ด้วยตัวเอง ดังนั้นครูจึงต้องมีความรู้ในเนื้อหาที่จะสอนเป็นอย่างดี มีความเข้าใจในเมโนมติและขั้นตอนกระบวนการสอนแบบอุปนัยอย่างแจ่มแจ้ง การนำเสนอข้อมูลแต่ละขั้นตอนตั้งแต่การรวบรวมข้อมูลจนถึงการสรุปหลักเกณฑ์นั้นจะค่อย ๆ พัฒนามโนมติของนักเรียนไปที่ละน้อย ๆ จนถึงการสรุป หากขั้นตอนใดไม่ชัดเจนหรือไม่ต่อเนื่องสัมพันธ์กัน การพัฒนามโนมติของนักเรียนก็จะหยุดชะงัก นักเรียนไม่สามารถหาเหตุผลหรือสรุป

หลักเกณฑ์ในเนื้อหานั้นได้ ทำให้การสอนโดยใช้วิธีการแบบอุปนัยไม่เกิดผลตามที่คาดหวัง และในบางครั้ง ครูอาจจะทักท้วงว่า วิธีการสอนแบบอุปนัยใช้ไม่ได้ผล เนื่องจากเมื่อใช้วิธีสอนแบบนี้แล้ว นักเรียนเรียนไม่รู้เรื่อง และสรุปว่าวิธีนี้คือการสอนแบบบรรยายหรือบอกให้รู้ไม่ได้ ก่อนที่ครูจะกล่าวข้อความดังกล่าว ครูควรได้พิจารณาวิธีการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนของครูอีกสักครั้งว่า ตนเองมีความเข้าใจในวิธีสอนแบบอุปนัยอย่างถ่องแท้หรือไม่ การจัดกิจกรรมการเรียนการสอนในแต่ละขั้นตอนนั้นมีความชัดเจนสัมพันธ์ ต่อเนื่องกันหรือไม่ ครูชักนำ ชี้แนะ หรือได้ใช้วิธีการถ่ายโยงความรู้จากสิ่งที่นักเรียนได้เรียนรู้แล้วมาสู่สิ่งที่กำลังจะเรียนได้ถูกต้องหรือไม่ ฯลฯ เมื่อพิจารณาแล้วควรปรับปรุงและทดลองใช้อีก 3-4 ครั้ง แล้วจึงค่อยสรุปว่า วิธีการสอนแบบอุปนัยเหมาะสมกับการสอนคณิตศาสตร์มากน้อยเพียงไร เหมาะสมกับเนื้อหาประเภทใด ใช้ได้กับนักเรียนที่มีลักษณะอย่างไร และควรจัดสภาพการเรียนการสอนอย่างไรจึงจะเกิดประโยชน์สูงสุดกับการเรียนการสอน

### 5.2.2 การสอนแบบทดลอง (Laboratory Method) เป็นวิธีการสอนที่ให้นักเรียนได้

กระทำกิจกรรมการเรียนด้วยตนเอง ซึ่งจะใช้การสังเกตหรือการทดลองโดยอาศัยสื่อหรืออุปกรณ์ต่าง ๆ และสรุปเป็นหลักเกณฑ์ด้วยตัวเอง เป็นการเรียนรู้โดยใช้การทดลองจากสิ่งที่เป็นรูปธรรม ไปสู่ข้อสรุปหลักเกณฑ์ที่เป็นนามธรรม การทดลองนี้อาจจะให้นักเรียนทดลองเป็นกลุ่ม เป็นรายบุคคล หรือครูหรือนักเรียนคนใดคนหนึ่งเป็นผู้ทดลองให้นักเรียนทั้งชั้นได้สังเกตก็ได้ ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับจุดประสงค์ของการสอน ความง่ายหรือความซับซ้อนของการทดลอง ความยากง่ายในการจัดหาวัสดุหรือเครื่องมือที่นำมาใช้ในการทดลอง เป็นต้น อย่างไรก็ตาม ในการสอนแบบทดลองนั้นหากนักเรียนได้เป็นผู้ลงมือกระทำด้วยตนเองทุกขั้นตอน ได้สังเกต พิจารณา และวิเคราะห์การกระทำนั้น ๆ อย่างต่อเนื่อง จนกระทั่งหาข้อสรุปหรือสรุปหลักเกณฑ์ได้ด้วยตนเอง ก็จะทำให้นักเรียนเกิดความสนใจและสนุกสนานในการเรียน เกิดการเรียนรู้และจดจำเนื้อหานั้นได้นาน เพราะนักเรียนได้ทดลองปฏิบัติด้วยตัวเอง

การสอนแบบทดลอง ควรมีการดำเนินการเป็นขั้นตอนดังนี้

1. การเตรียมการสอน ครูต้องพิจารณาว่าเนื้อหานั้น ๆ เหมาะสมกับวิธีการสอนแบบทดลองหรือไม่ วัสดุและเครื่องมือที่จะนำมาใช้ในการทดลองนั้นจะใช้สิ่งใด จะจัดเตรียม สร้างเครื่องมือที่จะใช้ในการทดลองอะไรบ้าง หรือจะให้นักเรียนเตรียมสิ่งใดมา กิจกรรมการทดลองจะใช้รูปแบบใด จะต้องจัดทำเอกสารแนะนำการทดลองหรือจะชี้ประเด็นให้นักเรียนสังเกตในเรื่องใด และให้นักเรียน

สรุปสิ่งใด นอกจากนั้นครูควรได้ใช้วัสดุ เครื่องมือ ทำการทดลองก่อน เข้าสอนว่าใช้ได้เหมาะสมถูกต้องหรือไม่ ต้องใช้เวลาอย่างน้อยเพียงไร เพื่อว่าครูจะได้จัดกิจกรรมการทดลองได้อย่างเหมาะสม

2. การดำเนินการสอน ในการนำเข้าสู่บทเรียน ครูควรหาวิธีที่จะสร้างให้นักเรียนเกิดความสนใจใคร่รู้โดยอาจใช้การสนทนาซักถาม การเล่าเรื่อง การเล่นเกมหรือการร้องเพลงให้เกี่ยวข้องกับสัมพันธ์กับสิ่งที่จะสอน ครูเสนอปัญหาให้นักเรียนอภิปรายและเสนอวิธีการทดลองหลาย ๆ รูปแบบที่สามารถตอบปัญหานั้น ๆ ได้ ครูอธิบายและแนะนำวิธีการทดลอง แจกเอกสารแนะนำการทดลอง และแจกวัสดุและเครื่องมือที่จะทำการทดลอง (ถ้าให้นักเรียนเตรียมมาล่วงหน้า ครูควรตรวจสอบว่าเครื่องมือนั้นถูกต้องหรือไม่) ในชั้นสอน ควรให้นักเรียน (อาจเป็นรายบุคคลหรือเป็นกลุ่ม) ทำการทดลองด้วยตนเอง โดยใช้วัสดุและเครื่องมืออย่างเดียวกัน หรือแตกต่างกัน ให้นักเรียนสังเกตสิ่งที่เกิดขึ้นในขณะที่ทดลองและหาข้อสรุปด้วยตนเอง ในขณะที่ทำการทดลองอาจมีปัญหาต่าง ๆ เกิดขึ้น ครูควรชี้แนะควบคุมดูแลอย่างใกล้ชิด และให้นักเรียนแก้ไขเอง ครูควรกำหนดเวลาที่ใช้ในการทดลองและควรใช้คำพูดที่ให้กำลังใจที่จะช่วยให้นักเรียนใช้ความสามารถในการทำทดลองให้เต็มที่ เมื่อนักเรียนทดลองเสร็จสิ้นแล้ว ให้นักเรียนรายงานวิธีการดำเนินการทดลองและผลที่ได้และให้นักเรียนสรุปผลหรือหลักการที่ได้จากการทดลองนั้น ๆ อีกครั้งหนึ่ง จากนั้นครูนำผลจากการทดลองนั้น ไปใช้ในการแก้ปัญหาในลักษณะต่าง ๆ กัน และให้นักเรียนนำไปใช้ในการทำแบบฝึกหัดเป็นกลุ่มหรือทำเป็นรายบุคคล ครูตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียนหรือแก้ไขความเข้าใจผิดของนักเรียน อธิบายเพิ่มเติมในประเด็นที่นักเรียนยังไม่เข้าใจ

3. การติดตามและประเมินผล ตรวจสอบความเข้าใจและการเรียนรู้ของนักเรียน โดยใช้การสังเกตพฤติกรรมของนักเรียนในขณะที่ทำการทดลอง จากการซักถามและการทำแบบฝึกหัดของนักเรียนว่ามีความเข้าใจมากน้อยเพียงไร

#### ตัวอย่างการออกแบบทดลอง

- เนื้อหา : มุมภายในของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ รวมกันได้เท่ากับสองมุมฉาก
- อุปกรณ์ : 1. รูปสามเหลี่ยมต่างชนิดและต่างขนาดหลาย ๆ รูป  
2. กรรไกร  
3. ไม้โปรแทรกเตอร์

การดำเนินการสอนแบบทดลองทำได้ดังนี้

1. การเตรียมการ แบ่งนักเรียนเป็น 3 กลุ่ม ให้นักเรียนกลุ่มที่ 1 แต่ละคนตัดกระดาษให้เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก คนละ 1 รูป กลุ่มที่ 2 ตัดกระดาษเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมป้าน และกลุ่มที่ 3 ตัดกระดาษเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมแหลม โดยให้มีทั้งสามเหลี่ยมด้านเท่าและสามเหลี่ยมหน้าจั่วรวมอยู่ด้วย ให้นักเรียนในกลุ่มที่ 1 นำกรรไกร และนักเรียนในกลุ่มที่ 2 นำไม้โปรแทรกเตอร์มาด้วย

2. ชี้นำเข้าสู่บทเรียน ให้นักเรียนแสดงรูปสามเหลี่ยมที่แต่ละคนสร้างมาพร้อมกันให้บอกชื่อ ลักษณะหรือสมบัติของรูปสามเหลี่ยมนั้น ๆ

3. ชี้นำดำเนินการสอน ครูชี้ให้นักเรียนเห็นว่าสามเหลี่ยมทุกรูปจะมีมุมภายใน 3 มุมเหมือนกันหมด ถ้านำมุมทั้งสามมารวมกันจะมีค่าเท่ากันทุกรูปหรือไม่ และให้นักเรียนอภิปรายว่ามีวิธีการอย่างไรบ้างที่จะทำให้ทราบว่ามุมภายในของรูปสามเหลี่ยมรวมกันได้เท่าไร จากนั้นครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มทำการทดลอง โดยให้

นักเรียนกลุ่มที่ 1 ใช้กรรไกรตัดมุมทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมแล้วนำมาต่อกัน

นักเรียนกลุ่มที่ 2 ใช้ไม้โปรแทรกเตอร์วัดมุมทั้งสามแล้วนำมาวมกัน

นักเรียนกลุ่มที่ 3 ใช้วิธีพับมุมทั้งสามให้มาพบกันที่จุด ๆ หนึ่งบนฐานของสามเหลี่ยม โดยที่แขนของมุมแต่ละคู่ให้ทับกัน

หลังจากการทดลอง ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มรายงานผลการทดลองและผลลัพธ์ที่ได้ ให้นักเรียนช่วยกันพิจารณาและวิเคราะห์ผลการทดลองของแต่ละกลุ่ม และให้นักเรียนช่วยกันสรุปผลการทดลองที่ได้ ซึ่งนักเรียนจะสรุปได้ว่า มุมภายในของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ รวมกันได้เท่ากับสองมุมฉาก จากนั้นครูอธิบายวิธีการนำเอาผลของการทดลองนี้ไปใช้ในการแก้ปัญหาโจทย์ทางคณิตศาสตร์ต่าง ๆ เมื่อนักเรียนเข้าใจดีแล้ว ให้นักเรียนแข่งขันกันแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ เกี่ยวกับเรื่องนี้ แล้วจึงให้ทำแบบฝึกหัดเป็นรายบุคคล

การใช้วิธีการสอนแบบทดลองนี้ มีข้อที่ควรคำนึงถึงอยู่หลายประการ คือ

1. วัสดุอุปกรณ์หรือเครื่องมือที่จะใช้ทดลองนั้นจะต้องจัดเตรียมให้พร้อมก่อนการสอน ให้เหมาะสมกับการทดลองเป็นกลุ่ม หรือเป็นรายบุคคล

2. หากการทดลองนั้นมีขั้นตอนการดำเนินการหลายขั้น หรือยุ่งยาก ซับซ้อน ครูควรได้จัดทำเอกสารแนะนำหรือคู่มือการทดลอง เพื่อให้นักเรียนทำตามได้ถูกต้อง

3. ช่วงเวลาที่กำหนดให้นักเรียนทำการทดลองไม่ควรใช้เวลานานเกินไป เพราะจะทำให้นักเรียนเกิดความเบื่อหน่าย

4. ในขณะที่นักเรียนทำการทดลอง ครูควรได้ตรวจสอบการดำเนินการ หากมีสิ่งใดผิดพลาดควรได้ชี้แนะให้คำปรึกษาอย่างใกล้ชิด และพยายามให้นักเรียนทุกคนได้มีส่วนร่วมในการทดลอง และให้ได้ข้อสรุปหรือผลของการทดลองด้วยตัวเอง นอกจากนี้ควรฝึกให้นักเรียนรู้จักการทำงานร่วมกัน และได้แลกเปลี่ยนความคิดเห็นซึ่งกันและกันด้วย

5. ในกรณีที่การทดลองไม่ประสบผลสำเร็จ ครูไม่ควรประณามนักเรียน โดยเฉพาะนักเรียนที่เรียนช้า ครูควรได้ชี้แนะหรืออธิบายเพิ่มเติม

#### จุดเด่นของวิธีการสอนแบบทดลอง

1. เป็นวิธีการสอนที่เน้นนักเรียนเป็นจุดศูนย์กลาง นักเรียนได้ลงมือทำการทดลองด้วยตนเองจนได้ข้อสรุปหรือหลักการออกมา ทำให้เกิดความเข้าใจอย่างแน่นแฟ้นและจดจำได้นาน

2. เป็นการเรียนจากกรุปธรรม ไปสู่ความเป็นนามธรรม ทำให้นักเรียนยอมรับในข้อสรุปอย่างไม่มีเงื่อนไข

3. เป็นการฝึกให้นักเรียนรู้จักใช้เครื่องมือและอุปกรณ์ในการทดลอง

4. ช่วยฝึกให้นักเรียนรู้จักการทำงานร่วมกัน และได้แลกเปลี่ยนความคิดเห็นกัน รู้จักคิดหาเหตุผลก่อนที่จะเชื่อหรือหาข้อสรุป ทำให้เกิดความมั่นใจในเนื้อหาที่ได้เรียนรู้

#### ข้อจำกัดของวิธีการสอนแบบทดลอง

1. ใช้ได้เฉพาะกับบางเนื้อหา

2. ใช้เวลานานกว่าวิธีการสอนแบบบรรยายหรือสาธิต

3. นักเรียนอาจหาข้อสรุปไม่ได้ ทำให้เกิดความเบื่อหน่ายในการเรียน

**5.2.3 การสอนแบบค้นพบ (Discovery Method)** เป็นวิธีการสอนที่นักจิตวิทยา จากมหาวิทยาลัยฮาร์วาร์ด เจโรมี เอส บรูเนอร์ (Jerome S. Bruner) ได้มีบทบาทอย่างสำคัญในการชี้แนะเกี่ยวกับการเรียนรู้โดยใช้วิธีการค้นพบ โดยให้นักเรียนตั้งคำถามที่ตนเองต้องการรู้ คิดหาคำตอบด้วยตนเองอย่างต่อเนื่อง และค้นพบคำตอบนั้นด้วยตัวเอง ครูเป็นเพียงผู้ชี้แนะหรือป้อนคำถามเพียงเพื่อกระตุ้นให้นักเรียนได้พัฒนาความคิดของตนเอง ไอเชลและเรส (Aichele and Reys 1977, 188)

กล่าวว่า กระบวนการที่นักเรียนใช้ในการตรวจสอบการค้นหามีความสำคัญมากกว่าสิ่งที่นักเรียนจะได้รับ (Knowing is a process, not a product) กระบวนการที่นักเรียนใช้ในการค้นพบนั้นจะช่วยพัฒนาความคิดและความสามารถในการแก้ปัญหาของนักเรียน และสร้างข้อสรุปในการค้นพบด้วยตนเอง การค้นพบด้วยตนเองเป็นการสอนแบบปลายเปิด คือนักเรียนตั้งคำถามที่ตนเองอยากรู้ ซึ่งเป็นคำถามที่มีความหมายแก่ตนเอง และพยายามค้นคว้าหาคำตอบด้วยวิธีการต่าง ๆ ไม่ว่าจะ เป็นวิธีการลองผิดลองถูก การทดลองหรือวิธีการอื่น ๆ ดังนั้นการค้นพบด้วยตนเองจึงไม่สามารถเกิดขึ้นได้ทุกเวลาตามที่ต้องการ และบางครั้งก็ต้องใช้เวลานานมาก

การสอนแบบค้นพบ โดยให้นักเรียนคิดและค้นพบด้วยตนเองนั้น เป็นวิธีสอนที่เหมาะสมในการสอนคณิตศาสตร์ในทุกๆระดับ เป็นการเปิดโอกาสให้นักเรียนได้ใช้ความคิดอย่างเป็นอิสระหรืออย่างสร้างสรรค์ โดยไม่ใช้การบังคับ ครูมีบทบาทและหน้าที่ที่สำคัญที่จะช่วยกระตุ้นหรือช่วยให้นักเรียนเกิดความอยากรู้อยากเรียน รู้จักคิดหาเหตุผลและคิดอย่างเสรี และสนับสนุนให้นักเรียนได้เสนอแนวคิดหรือข้อค้นพบต่าง ๆ ให้เพื่อน ๆ ได้รับฟัง ครูควรเตรียมปัญหาคำถามและข้อมูลต่าง ๆ ไว้มาก ๆ เพื่อชี้แนะให้นักเรียนคิดเมื่อนักเรียนต้องการความช่วยเหลือซึ่งจะนำไปสู่ข้อค้นพบด้วยตัวนักเรียนเอง นอกจากนี้ ครูควรช่วยนักเรียนขัดเกลาข้อสรุปหรือกฎเกณฑ์ที่นักเรียนได้ค้นพบให้ชัดเจนและรัดกุมมากยิ่งขึ้น

การสอนแบบค้นพบ ควรมีการดำเนินการเป็นขั้นตอนดังนี้

1. การเตรียมการสอน ก่อนที่ครูจะตัดสินใจใช้วิธีการสอนแบบค้นพบนี้ ครูควรได้ศึกษาวิธีสอนแบบนี้ให้เข้าใจอย่างแจ่มแจ้งเสียก่อน พิจารณาว่าเนื้อหาหัวข้อนั้น ๆ เหมาะสมกับวิธีการสอนแบบค้นพบหรือไม่ จะให้นักเรียนค้นพบอะไร และจะใช้วิธีการอย่างไรที่จะกระตุ้นให้นักเรียนได้ใช้ความคิด เหตุผล หรือวิธีการต่าง ๆ เพื่อนำไปสู่การค้นพบด้วยตนเอง และจัดเตรียมสถานการณ์หรือสื่อการสอนที่จำเป็นต้องใช้ให้พร้อมก่อนการสอน

2. การดำเนินการสอน ชี้นำเข้าสู่บทเรียนเป็นขั้นตอนที่สำคัญในการดำเนินการสอน ครูจะต้องจัดหรือสร้างสถานการณ์ หรือสร้างปัญหาโจทย์ที่เร้าความสนใจหรือสงสัยใคร่รู้ให้เกิดขึ้นกับตัวนักเรียน ซึ่งนักเรียนจะต้องค้นหาคำตอบหรือหาแนวทางในการอธิบายปัญหาต่าง ๆ เหล่านั้น ทั้งนี้ครูอาจจะเริ่มจากสิ่งที่นักเรียนเรียนรู้มาแล้ว นำสิ่งนั้นมาตั้งเป็นปัญหาใหม่ สำหรับในชั้นสอนนั้น ครูให้นักเรียนได้คิดค้นหาคำตอบด้วยตัวเอง ครูอาจจะให้คำแนะนำ ตั้งเป็นคำถามให้นักเรียนคิด หรือชี้แนะให้นักเรียนสังเกตหรือพิจารณาหาเหตุผลในส่วนที่เกี่ยวข้อง หากนักเรียนคิดไม่ออกหรือกำลังจะ

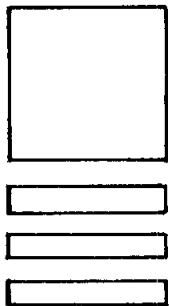
ออกนอกแนวทางของการค้นพบ แนวทางในการคิดนั้นอาจจะใช้การพิสูจน์โดยอาศัยเนื้อหาความรู้ที่เคยเรียนมาแล้ว ทดลองหรือเปรียบเทียบ ในการสอนนี้ครูต้องเอาใจใส่ คอยซักถามเพื่อให้เด็กเรียนคิดหาเหตุผล และครูควรให้กำลังใจในการทำงานของนักเรียน ในบางครั้งที่นักเรียนค้นไม่พบครูต้องคอยให้ความช่วยเหลือ การสรุปเป็นหลักเกณฑ์หรือนัยทั่วไปนั้นควรให้นักเรียนสรุปให้ได้ความ สั้นกระชับรัดและถูกต้อง และให้นำข้อค้นพบนั้นไปใช้ในสถานการณ์ต่าง ๆ

3. การติดตามและประเมินผล ครูควรตรวจสอบพฤติกรรมและความสนใจของนักเรียน เมื่อใช้วิธีการสอนแบบนี้ว่า นักเรียนเกิดการเรียนรู้มากน้อยเพียงไร นักเรียนสนุกสนานกับการคิดค้นหรือไม่ นักเรียนได้ใช้กระบวนการในการแก้ปัญหาอย่างไร และเวลาที่ใช้นั้นเหมาะสมหรือไม่

#### ตัวอย่างการสอนแบบค้นพบ

เนื้อหา :  $x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$

อุปกรณ์ : แผ่นไม้หรือแผ่นกระดาษแข็งที่ตัดเป็นรูปสี่เหลี่ยมจตุรัสใหญ่ 1 รูป



สี่เหลี่ยมจตุรัสเล็กซึ่งมีด้านยาวด้านละ 1 หน่วย หลาย ๆ รูป และ  
  สี่เหลี่ยมผืนผ้า ซึ่งมีด้านกว้างเท่ากับด้านของสี่เหลี่ยมจตุรัสรูปเล็ก  
  และด้านยาวเท่ากับด้านของสี่เหลี่ยมจตุรัสรูปใหญ่ ซึ่งตัดอย่างละ  
  หลาย ๆ รูป

การดำเนินการสอนแบบค้นพบทำได้ดังนี้

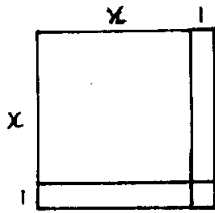
1. การเตรียมการ ก่อนถึงเวลาสอน ครูแบ่งกลุ่มนักเรียนให้มีสมาชิกกลุ่มละ 3-5 คน และให้สร้างอุปกรณ์มากลุ่มละ 1 ชุด

2. ชี้นำเข้าสู่บทเรียน ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มพิจารณาอุปกรณ์ที่เตรียมมา และให้หาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมต่าง ๆ เหล่านั้น และตั้งปัญหาให้นักเรียนทดลองหรือหาคำตอบว่า ถ้าจะสร้างรูปสี่เหลี่ยมจตุรัส โดยให้ใช้รูปสี่เหลี่ยมทั้งสามชนิดนั้นโดยไม่จำกัดจำนวนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าและสี่เหลี่ยมจตุรัสรูปเล็ก นักเรียนจะสร้างได้หรือไม่ และสร้างได้กี่รูป

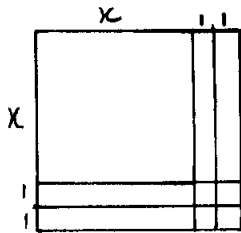
3. ชี้นำดำเนินการสอน ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มวางเรียงอุปกรณ์ให้เป็นรูปสี่เหลี่ยมจตุรัสให้มีขนาดต่าง ๆ อย่างน้อยกลุ่มละ 4-5 รูป และให้บันทึกพื้นที่ที่ได้จากการรวมพื้นที่รูปเล็ก ๆ ที่ประกอบเป็นรูปสี่เหลี่ยมจตุรัสรูปใหม่ และพื้นที่ที่ได้จากการหาโดยใช้ด้านคูณด้าน และให้นักเรียนพิจารณาว่าพื้นที่

ที่หาได้จากทั้งสองแบบนี้มีความสัมพันธ์กันอย่างไร ถ้านักเรียนเห็นค่าที่เขียนในรูปแบบหนึ่ง เขาสามารถจะเขียนให้อยู่ในอีกรูปแบบได้หรือไม่ และจะสรุปเป็นหลักเกณฑ์ได้อย่างไร

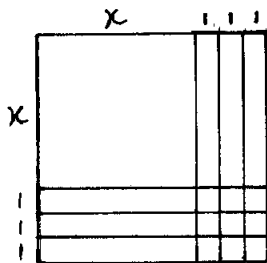
นักเรียนในแต่ละกลุ่มจะช่วยกันประกอบรูปสี่เหลี่ยมจตุรัส โดยใช้อุปกรณ์ที่เตรียมมาในลักษณะดังนี้



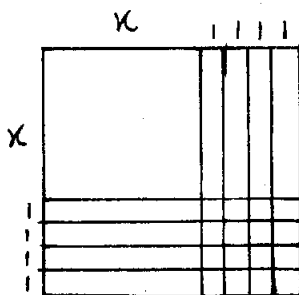
$$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)(x + 1)$$



$$x^2 + 4x + 4 = (x + 2)(x + 2)$$



$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)(x + 3)$$



$$x^2 + 8x + 16 = (x + 4)(x + 4)$$



จากรูปแบบที่ทำให้นักเรียนจะสังเกตเห็นว่าสัมประสิทธิ์ของ  $x$  จะมีค่าเป็นอนุกรม 2, 4, 6, 8 และค่าคงที่หรือสัมประสิทธิ์ของ  $x^0$  จะเป็น 1, 4, 9, 16 ซึ่งจะเขียนได้ในรูปของกำลังสองของค่าคงที่ทางขวามือ จากการสังเกตและวิเคราะห์นี้ นักเรียนจะค้นพบรูปแบบและสรุปเป็นหลักเกณฑ์ได้ว่า

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$$

หลังการค้นพบรูปแบบของสมการกำลังสองสมบูรณ์นี้ ครูให้นักเรียนนำหลักเกณฑ์นี้ไปใช้ในการแยกตัวประกอบของกำลังสองสมบูรณ์อื่น ๆ ในขั้นของการทบทวนและการนำไปใช้นั้น อาจจะใช้การแข่งขันหรือการเล่นเกมที่เกี่ยวกับเรื่องนี้ เพื่อฝึกฝนการใช้ให้แม่นยำและรวดเร็ว

การใช้วิธีสอนแบบค้นพบด้วยตัวเองนี้ มีข้อที่ครูควรคำนึงอยู่หลายประการ เช่นเดียวกับวิธีสอนแบบทดลอง เช่น ครูต้องควบคุมดูแลอย่างใกล้ชิด ให้คำชี้แนะเท่าที่จำเป็น ให้นักเรียนเป็นผู้คิดหรือลงมือกระทำด้วยตนเอง เพื่อให้ได้ข้อสรุปหรือหลักเกณฑ์ อาจให้นักเรียนคิดเป็นรายบุคคลหรือเป็นกลุ่มก็ได้ แต่ที่สำคัญก็คือ การค้นพบแนวคิดหรือหลักเกณฑ์นั้นเป็นสิ่งที่ เป็นความรู้ใหม่ ของนักเรียน ซึ่งครูไม่ได้เป็นผู้บอกหรือสอนโดยตรง

#### จุดเด่นของวิธีการสอนแบบค้นพบ

1. เป็นการฝึกให้นักเรียนได้พัฒนาความคิดของตนเอง ช่วยให้เกิดความเข้าใจในเนื้อหาได้อย่างชัดเจน ทำให้จดจำได้นาน
2. ช่วยให้ผู้เรียนได้พัฒนาความคิดริเริ่มและสร้างสรรค์
3. ช่วยให้ผู้เรียนรู้จักการคิด พิจารณา สังเกต และรู้จักหาเหตุผล
4. เป็นการฝึกให้นักเรียนมีทักษะกระบวนการที่จะสร้างเสริมนิสัยที่ดีในการทำงานและการดำรงชีวิตในอนาคตต่อไป

5. สร้างเสริมลักษณะนิสัยที่ดีให้นักเรียนได้รู้จักคิดค้น และหาข้อสรุปต่าง ๆ โดยอาศัยข้อมูลและเหตุผลที่เชื่อถือได้

#### ข้อจำกัดของวิธีการสอนแบบค้นพบ

1. ครูต้องมีความสามารถในการสอนที่จะตั้งประเด็นปัญหาหรือสร้างสถานการณ์ที่จะทำให้นักเรียนเกิดความสนใจ ใคร่ค้นหาคำตอบ
2. บางครั้งอาจใช้เวลาในการที่จะให้นักเรียนค้นพบหลักเกณฑ์ต่าง ๆ ด้วยตัวเอง

3. สอนยากกว่าวิธีการสอนแบบบรรยาย หรือวิธีบอกให้รู้
4. นักเรียนอาจเกิดความเบื่อหน่ายในการเรียน

## กิจกรรมการเรียนรู้ที่ 5.2

หลังจากที่ศึกษาเนื้อหาในหัวข้อ 5.2 แล้ว ให้นักศึกษาทำกิจกรรมดังต่อไปนี้

1. จงอธิบายประโยชน์ที่เกิดแก่ตัวนักเรียนในการจัดการเรียนการสอนที่ยึดนักเรียนเป็นจุดศูนย์กลางของการเรียน

2. จงเปรียบเทียบวิธีการสอนแบบอุปนัยและวิธีการสอนแบบค้นพบในหัวข้อต่าง ๆ ดังนี้

ก. กระบวนการสอน

ข. บทบาทของครู

ค. บทบาทของผู้เรียน

3. จงเลือกเนื้อหาในแบบเรียนคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษา 3 หัวข้อ ที่ใช้ได้เหมาะสมกับวิธีการสอนแบบอุปนัย วิธีการสอนแบบทดลอง และวิธีการสอนแบบค้นพบ อธิบายให้เข้าใจเกี่ยวกับหัวข้อต่อไปนี้

ก. การเตรียมการก่อนสอน

ข. การดำเนินการสอน

4. ทดลองสอนกับเพื่อนหรือนักเรียนที่เรียนในระดับนั้น ๆ ตามที่เตรียมไว้ในข้อ 3 สังเกตการดำเนินการสอนด้วยตนเอง สอบถามความคิดเห็นเกี่ยวกับวิธีการสอนของตนเองจากเพื่อน บันทึกข้อคิดเห็นเหล่านั้นและหาทางแก้ไข

5. หากเป็นไปได้ ควรหาเวลายามอบอาจารย์ผู้สอนและทดลองสอนให้อาจารย์ดู และปรับปรุงแก้ไขตามข้อเสนอแนะของอาจารย์

### 5.3 รูปแบบการสอนคณิตศาสตร์บางลักษณะ

วิธีสอนต่าง ๆ ที่กล่าวข้างต้นนั้นสามารถนำมาใช้ในการสอนคณิตศาสตร์ได้ แต่ต้องทำความเข้าใจในเบื้องต้นเสียก่อนว่า "ไม่มีวิธีสอนใดที่ดีที่สุดที่สามารถใช้ได้กับทุกเรื่องหรือทุกเนื้อหา" การจะนำวิธีสอนใดไปใช้นั้นต้องพิจารณาเนื้อหา ระดับชั้น วัย วุฒิภาวะของผู้เรียน และสภาพแวดล้อมของโรงเรียน ในการสอนแต่ละครั้งนั้นครูอาจจะเลือกใช้วิธีสอนหลายวิธีก็ได้ และนำมากำหนดรูปแบบการสอนให้เหมาะสมกับลักษณะของเนื้อหา นั้น ๆ

#### 5.3.1 การสอนมโนคติทางคณิตศาสตร์ (Teaching mathematical concepts)

ก่อนที่จะศึกษาเกี่ยวกับรูปแบบการสอนมโนคติ ครูควรได้เข้าใจความหมายและการเรียนรู้เกี่ยวกับมโนคติเสียก่อน

คำว่า มโนคติ (concept) ใช้ในความหมายเดียวกับคำว่า ความคิดรวบยอด มโนทัศน์ หมายถึง แนวคิดหรือความเข้าใจที่สรุปได้จากคุณลักษณะเฉพาะของสิ่งนั้น ซึ่งทำให้สามารถแยกแยะจากสิ่งอื่น ๆ ได้ เช่น รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส เป็นรูปสี่เหลี่ยมที่มีมุมทุกมุมเป็นมุมฉาก เส้นทแยงมุมแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน ด้านตรงข้ามขนานกัน เส้นรอบรูปเป็นสี่เท่าของด้าน และพื้นที่จะเท่ากับกำลังสองของด้าน มโนคติอาจจะใช้เพื่อ (1) บอกลักษณะโครงสร้างของการใช้ (conjunctive concept) เช่น สามเหลี่ยมคือรูปปิดด้วยด้าน 3 ด้านบนระนาบและมีมุม 3 มุม (2) บอกลักษณะของการเลือก (disjunctive concept) เช่น คน หมายถึง คน สัตว์ หรือ สิ่งของ จะเป็นทั้งสามอย่างพร้อมกันไม่ได้ (3) แสดงความสัมพันธ์ของสิ่งต่าง ๆ เช่น อัตราเร็ว แสดงความสัมพันธ์ระหว่างระยะทางและเวลา

เนื่องจากมโนคติจะช่วยในการจำกัด ย่นย่อ แยกแยะ ขยายความรู้ และสามารถสื่อสารกับผู้อื่นได้ จึงเป็นพื้นฐานความรู้และความคิดที่สำคัญมาก ซึ่งจัดเป็นความรู้พื้นฐานของเนื้อหาวิชา

การเรียนรู้มโนคติเป็นการจัดสิ่งต่าง ๆ ให้เข้ากลุ่มเข้าพวก และสามารถที่จะระบุสมาชิกที่อยู่ในกลุ่มหรือพวกนั้น ๆ ได้ (Gagne 1985, 95)

การเรียนรู้มโนคติจะต้องคำนึงถึงธรรมชาติของมโนคติต่าง ๆ ดังนี้

1. มโนคติสามารถจัดให้เข้ากลุ่มเข้าพวกได้

2. การเรียนรู้โมติจะเกี่ยวข้องกับการแยกแยะสิ่งที่ใช้ (example) และ สิ่งที่ไม่ใช่ (unexample) เช่น วงกลม สามเหลี่ยม เป็นรูปเรขาคณิตบนระนาบ ส่วนทรงกลม ทรงกระบอก ปริมาตร ไม่ใช่รูปเรขาคณิตบนระนาบ

3. สภาพของสังคมมีบทบาทต่อโมติ สังคมและวัฒนธรรมในแต่ละแห่งอาจทำให้โมติของสิ่งต่าง ๆ ไม่เหมือนกัน เช่น คำว่า "องศา" อาจใช้ในความหมายของหน่วยในการวัดมุมหรือหน่วยในการวัดอุณหภูมิ หรือคำว่า "ป่า" อาจแสดงถึงหญิงที่มีความสัมพันธ์เป็นพี่ของแม่ แต่ในบางสังคม "ป่า" อาจหมายถึงคนเลี้ยงเด็กพิเศษเฉพาะตัว ซึ่งไม่เกี่ยวข้องกับความสัมพันธ์ทางสายเลือด

4. โมติมีทั้งส่วนที่ใช้เป็นคำจำกัดความ (definition) และการเรียกชื่อ (labels) เช่น ที่เก็บของในรถยนต์ (ซึ่งส่วนมากอยู่ที่ท้ายรถ) ชาวอังกฤษเรียกว่า "boot" ส่วนชาวอเมริกันเรียกว่า "trunk" ทั้งชื่อและความหมายหรือคำจำกัดความนั้นจะช่วยให้การสื่อความหมายหรือการใช้โมตินั้น การรู้แต่ชื่อเพียงอย่างเดียวไม่ได้หมายความว่า เรามีความเข้าใจโมติของสิ่งนั้น

5. โมติจะต้องมีคุณสมบัติหรือลักษณะเฉพาะบางอย่างที่จะใช้อธิบายหรือแยกแยะโมตินั้นออกจากโมติอื่น ๆ และในบางครั้งจะมีคุณลักษณะเฉพาะบางอย่างประกอบ (critical attributes) เช่น สามเหลี่ยมด้านเท่า คือสามเหลี่ยมที่มีด้านเท่ากันทั้งสามด้าน ลักษณะเฉพาะของสามเหลี่ยมด้านเท่า คือ ทุกด้านของสามเหลี่ยมต้องเท่ากัน สามเหลี่ยมอื่น ๆ ที่ด้านทั้งสามไม่เท่ากันไม่เรียกว่าสามเหลี่ยมด้านเท่า ในกรณีที่มีโมติใดเป็นส่วนย่อยของโมติใหญ่ (broader concept) โมติย่อยนั้นจะต้องมีลักษณะเฉพาะของโมติใหญ่รวมอยู่ด้วย เช่น สามเหลี่ยมด้านเท่าเป็นสมาชิกของสามเหลี่ยม จึงต้องมีลักษณะเฉพาะของรูปสามเหลี่ยมด้วย

6. การเรียนรู้โมติต้องเกี่ยวข้องทั้งความรู้ในด้านความหมายและความรู้ในด้านกระบวนการ (procedural knowledge) ความรู้ในด้านความหมายหมายถึงความสามารถของผู้เรียนที่จะให้ความหมายของโมติบนพื้นฐานของเกณฑ์บางประการ (เช่น สภาพทางกายภาพหรือความสัมพันธ์) และสามารถระบุความสัมพันธ์โมตินั้นกับโมติอื่นอื่นได้ เช่น เมื่อกล่าวถึงรูปสามเหลี่ยม นักเรียนจะนึกถึงรูปปิดด้วยเส้นตรงสามเส้น ส่วนความรู้ทางด้านกระบวนการของโมติหมายถึงความสามารถของนักเรียนในการใช้โมติในการแยกแยะในการเปรียบเทียบ และบอกความแตกต่างของโมติที่คล้ายคลึง แต่แตกต่างกัน เช่น ความรู้เกี่ยวกับ "ผู้ชาย" เมื่อนำมาเปรียบเทียบกับโมติที่คล้ายกัน เช่น ผู้หญิง เด็กผู้หญิง เด็กผู้ชาย ผู้ชายแก่ ผู้ชายหนุ่ม และผู้ชายสูง เป็นต้น

วิธีการนำเสนอความรู้ด้านมโนทัศน์นั้นมีหลายวิธี ซึ่งมีความแตกต่างกันเล็กน้อย เมื่อนำมาจัดเข้ากลุ่มกันสามารถจัดกลุ่มได้เป็น 2 วิธี คือ

1. การนำเสนอความรู้เกี่ยวกับมโนทัศน์โดยวิธีการใช้กฎไปสู่ตัวอย่าง (expository หรือ rule-to-example) เริ่มต้นด้วยการที่ครูให้ความหมายของมโนทัศน์นั้น ๆ และให้ตัวอย่างทั้งที่เป็นและไม่เป็นตามมโนทัศน์นั้น (examples and non-examples) เพื่อให้นักเรียนเข้าใจมากยิ่งขึ้น ครูต้องบอกทั้งชื่อและบอกความหมายของมโนทัศน์นั้น การนำเสนอความรู้โดยวิธีการใช้กฎไปสู่ตัวอย่างนี้ใช้ได้ผลดีในการพัฒนาความรู้เกี่ยวกับมโนทัศน์สำหรับนักเรียนที่ไม่มีความเข้าใจหรือมีความเข้าใจน้อยในสิ่งที่ได้เรียนมาแล้ว

2. การนำเสนอความรู้เกี่ยวกับมโนทัศน์โดยใช้ตัวอย่างไปสู่กฎ (concept attainment or example to rule method) เป็นวิธีการที่ตรงกันข้ามกับวิธีแรก โดยที่ครูจะให้สิ่งที่เป็นตัวตัวอย่างและไม่ใช้ตัวอย่างของมโนทัศน์นั้นมาก ๆ และให้นักเรียนพยายามค้นพบหรือให้ได้มโนทัศน์นั้น ๆ ด้วยตนเอง โดยใช้การหาเหตุผลแบบอุปนัย นักเรียนจะต้องใช้การสังเกตและวิเคราะห์จากสิ่งที่เห็นคุณสมบัติหรือลักษณะร่วมกันของสิ่งที่เป็นตัวตัวอย่างของมโนทัศน์นั้น วิธีการนี้จะใช้ได้ดีเมื่อนักเรียนมีความเข้าใจเป็นอย่างดีในมโนทัศน์บางประการที่นำมาใช้เป็นพื้นฐานของมโนทัศน์ที่กำลังจะเรียนนั้น และจุดประสงค์ของบทเรียนต้องการให้นักเรียนได้เรียนรู้เกี่ยวกับการสำรวจ และให้รู้จักการใช้เหตุผลแบบอุปนัย สำหรับการเลือกใช้สิ่งที่เป็นตัวตัวอย่าง หรือไม่ใช้ตัวอย่างของมโนทัศน์ที่สอนนั้น ครูควรจะต้องเลือกอย่างระมัดระวัง ต้องคำนึงถึงการเรียงลำดับตามหลักตรรกศาสตร์หรือเหตุผล (logical or rational sequence) เพราะการลำดับของสิ่งที่เป็นตัวตัวอย่างและสิ่งที่ไม่ใช่ตัวอย่างนี้จะมีผลต่อความเข้าใจและการสรุปมโนทัศน์โดยใช้การหาเหตุผลแบบอุปนัยของนักเรียน

การเลือกตัวอย่างควรคำนึงถึงสิ่งต่าง ๆ ดังนี้

- ก. ตัวอย่างต้น ๆ ควรเลือกจากสิ่งที่นักเรียนมีความคุ้นเคยมาแล้ว
- ข. ตัวอย่างควรเริ่มจากง่ายไปหายากหรือมีความซับซ้อนขึ้นตามลำดับ
- ค. ตัวอย่างที่อยู่ใกล้ตัวนักเรียนจะช่วยให้วิเคราะห์ได้ง่ายกว่าสิ่งที่อยู่ไกลตัว

**หลักการสอนเกี่ยวกับมโนทัศน์** จากการศึกษางานวิจัยต่าง ๆ ที่วิจัยเกี่ยวกับการเรียนและการสอนมโนทัศน์นี้ ชี้ให้เห็นว่าการเลือกใช้กลวิธีการสอนเฉพาะบางอย่างสามารถช่วยให้นักเรียนได้เรียนรู้เกี่ยวกับมโนทัศน์อย่างมีประสิทธิภาพมากขึ้น มาร์โทเรลลา (Mortorella, 1982) ได้ศึกษา

งานวิจัยที่เกี่ยวกับการเรียนการสอนโมเมนต์และได้สรุปแนวทางในการสอนโมเมนต์ไว้ดังนี้

1. ในชั้นแรก ครูต้องมีความเข้าใจอย่างชัดเจนในคำจำกัดความหรือความหมายของโมเมนต์นั้น
2. ในบางเรื่อง การสอนจะต้องรวมถึงคำจำกัดความของโมเมนต์และลักษณะพิเศษที่ทำให้โมเมนต์นั้นแตกต่างจากโมเมนต์อื่น
3. ในการสอนโมเมนต์บางอย่างจำเป็นต้องใช้ทั้งการอธิบายและการซักถาม
4. การเลือกใช้ตัวอย่างที่ดีจะช่วยให้การเรียนโมเมนต์ดีขึ้น
5. ครูจะต้องสอนลักษณะพิเศษของโมเมนต์ที่ทำให้โมเมนต์นั้นแตกต่างจากโมเมนต์อื่นในขณะสอนโมเมนต์นั้น เว้นไว้แต่นักเรียนได้เรียนรู้มาแล้ว
6. ครูควรถือโอกาสให้นักเรียนได้ฝึกหรือทดลองการวิเคราะห์สิ่งที่เป็นตัวอย่างและที่ไม่ใช่ตัวอย่างด้วย และจะต้องมีการให้ข้อมูลย้อนกลับเกี่ยวกับข้อถูกต้องและไม่ถูกต้องที่นักเรียนตอบด้วย
7. การใช้สื่อทัศนศึกษา เช่น กราฟ ชาร์ต แผนผัง การโยงเส้นแสดงการจับคู่ ฯลฯ จะช่วยให้การเรียนรู้อินทรีย์มีความเป็นรูปธรรม และช่วยชี้ให้เห็นถึงความสัมพันธ์ของโมเมนต์ธรรมดาและลักษณะพิเศษของโมเมนต์นั้นได้ชัดเจนยิ่งขึ้น (เช่น สามเหลี่ยมหน้าจั่ว เป็นสามเหลี่ยมที่มีด้านเท่ากัน คู่หนึ่ง และมุมคู่มียู่ตรงข้ามด้านที่เท่ากันต้องเท่ากัน)
8. การใช้ภาพที่จะช่วยให้นักเรียนเกิดจินตนาการ

## ขั้นตอนในการสอนมโนคติ การสอนมโนคติควรจัดลำดับขั้นตอนในการสอนดังนี้

ขั้นที่ 1 กำหนดเป้าหมายและเตรียมการ (presenting goals and establishing set) สิ่งที่ครูจะต้องกระทำคือ อธิบายจุดหมายและวิธีการเรียนในบทเรียนนั้น และจัดเตรียมให้นักเรียนพร้อมที่จะเรียน โดยการทบทวนความรู้เดิม หรือชี้ให้นักเรียนเห็นความสำคัญหรือความเกี่ยวข้องของสิ่งที่จะเรียนกับความรู้ที่เรียนแล้ว

ขั้นที่ 2 ให้สิ่งที่เป็นตัวอย่างและสิ่งที่ไม่ใช่ตัวอย่าง (input of examples and non-examples) ถ้าใช้วิธีการนำเสนอเนื้อหาโดยตรงหรือการให้กฎไปสู่ตัวอย่าง ครูบอกชื่อมโนคติให้คำนิยาม คำจำกัดความ หรือสิ่งที่บอกลักษณะพิเศษ และให้สิ่งที่เป็นตัวอย่างและสิ่งที่ไม่ใช่ตัวอย่าง เพื่อให้มโนตินั้นชัดเจนขึ้น ถ้าใช้วิธีการนำเสนอจากตัวอย่างไปสู่กฎ ครูจะให้สิ่งที่เป็นตัวอย่างและสิ่งที่ไม่ใช่ตัวอย่าง (ซึ่งได้เลือกมาอย่างเหมาะสมและเป็นลำดับ) ชี้แนะให้นักเรียนสังเกตวิเคราะห์โดยใช้เหตุผลแบบอุปนัยเพื่อนำไปสู่คำนิยามหรือคำจำกัดความของมโนคติ และสิ่งที่บอกลักษณะพิเศษของมโนตินั้น

ขั้นที่ 3 ทดสอบความสำเร็จ (testing for attainment) ครูกำหนดสิ่งที่เป็นตัวอย่าง และสิ่งที่ไม่ใช่ตัวอย่างเพิ่มเติม เพื่อทดสอบความเข้าใจในมโนคติที่เรียนไปแล้ว และให้นักเรียนยกสิ่งที่เป็นตัวอย่างและสิ่งที่ไม่ใช่ตัวอย่างของมโนตินั้น เพื่อตรวจสอบและย้ำความเข้าใจของนักเรียนให้เพิ่มมากขึ้น

ขั้นที่ 4 วิเคราะห์แนวคิดและการบูรณาการการเรียนรู้ (analysis of thinking and intergration of learning) ให้นักเรียนวิเคราะห์กระบวนการคิดของตนเอง พิจารณาการตัดสินใจและผลลัพธ์ของการเลือกของเขา ครูช่วยนักเรียนให้เชื่อมโยงการเรียนรู้สิ่งใหม่ มโนคติใหม่ ให้สัมพันธ์กับมโนคติอื่น ๆ ที่อยู่ในหน่วยการเรียนรู้

ตัวอย่างการสอนมโนคติเกี่ยวกับปริซึม ขั้นตอนการสอนสามารถดำเนินการได้ดังนี้

ขั้นที่ 1 ครูอธิบายเป้าหมายของการเรียนซึ่งเขียนอยู่ในรูปของจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม ( 1) จากสิ่งที่เป็นตัวอย่างและสิ่งที่ไม่ใช่ตัวอย่างที่ให้นักเรียนได้พิจารณา นักเรียนสามารถระบุลักษณะที่เป็นสมบัติร่วมของสิ่งที่เป็นตัวอย่างได้ 2) จากสมบัติร่วมของสิ่งที่เป็นตัวอย่างนั้น นักเรียนสามารถให้คำนิยามหรือคำจำกัดความของมโนตินั้นได้ และ 3) เมื่อกำหนดสิ่งที่เป็นตัวอย่างและสิ่งที่ไม่ใช่

ตัวอย่างให้ นักเรียนสามารถบอกได้ว่า เป็นมโนเมตินั้นหรือไม่ พร้อมทั้งให้เหตุผลได้อย่างถูกต้องและชัดเจน) จากนั้นครูอธิบายถึงความสำคัญของปริซึมที่นำไปใช้การออกแบบในการก่อสร้าง ฯลฯ

**ขั้นที่ 2** ถ้าครูจะใช้การสอนแบบตัวอย่าง ไปสู่กฎเกณฑ์ ครูจะให้นักเรียนพิจารณาอุปกรณ์รูปทรงเรขาคณิตต่าง ๆ เช่น รูปพีระมิด ฐานสามเหลี่ยม ฐานสี่เหลี่ยม รูปกรวยกลม และบอกว่ารูปทรงรูปใดเป็นปริซึม และรูปทรงใดไม่เป็นปริซึม ให้นักเรียนระบุลักษณะร่วมของรูปทรงที่เป็นปริซึม ครูเขียนลักษณะร่วมเหล่านั้นบนกระดานและให้นักเรียนพิจารณารูปพีระมิด กรวยกลม และทรงกลมว่ามีลักษณะร่วมหรือไม่ ครูให้นักเรียนช่วยกันสรุปนิยามหรือคำจำกัดความของปริซึม โดยใช้ลักษณะร่วมที่ได้ระบุไว้แล้ว ครูและนักเรียนช่วยกันปรับถ้อยคำให้สั้นกระชับรัดและสละสลวย

**ขั้นที่ 3** ครูให้นักเรียนพิจารณารูปสามเหลี่ยม สี่เหลี่ยม รูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก รูปปริซึม ฐานหกเหลี่ยม และบอกว่ารูปใดเป็นปริซึมบ้าง และให้ระบุลักษณะสำคัญที่เป็นปริซึม และเพื่อตรวจสอบว่านักเรียนเข้าใจมโนเมติของปริซึมเป็นอย่างดี ครูอาจให้นักเรียนแยกอุปกรณ์รูปทรงเรขาคณิตที่ครูจัดเตรียมมาว่ารูปทรงใดเป็นปริซึม และให้นักเรียนให้เหตุผลหรือระบุลักษณะที่เป็นปริซึม

**ขั้นที่ 4** ให้นักเรียนวิเคราะห์และอภิปรายเกี่ยวกับกระบวนการคิดที่ใช้ในการเรียนรู้มโนเมติ เกณฑ์ที่ใช้ในการรวบรวมความคิดว่ามโนเมตินี้ เกี่ยวข้องกับเนื้อหาที่เรียนรู้มาแล้วอย่างไร นักเรียนได้พิจารณามโนเมติเกี่ยวกับพีระมิด โดยส่วนทั้งหมดหรือเฉพาะส่วนย่อยที่บอกลักษณะแตกต่างจากสิ่งอื่น สิ่งที่ไม่ใช้ลักษณะร่วมมีส่วนช่วยให้เกิดความเข้าใจมโนเมตินั้นอย่างไร และถ้านักเรียนจะสอนมโนเมติในเรื่องใดก็ตามให้กับเด็กที่เล็กกว่าตัวเอง นักเรียนควรทำอย่างไร ครูช่วยชี้แนะประเด็นในการอภิปรายเพิ่มเติมข้อคิดเห็นและช่วยสรุป

การเลือกมโนเมติใดมาสอนนั้น ครูควรได้พิจารณาและวิเคราะห์เนื้อหาที่จะนำมาสอนว่ามีมโนเมติเกี่ยวข้องในด้านใด เช่น เกี่ยวข้องกับการนิยามคำใหม่ กฎเกณฑ์ ขั้นตอนการดำเนินการหรือเหตุการณ์ใดแล้วจึงเตรียมบทเรียนให้สอดคล้องกับมโนเมติที่จะสอนนั้น สิ่งที่ควรคำนึงถึงในการเตรียมการก็คือ ครูต้องหาวิธีการที่จะช่วยให้นักเรียนเข้าใจมโนเมติที่จะสอนมากกว่าที่จะให้คำจำกัดความของคำศัพท์ใหม่ ๆ เท่านั้น นอกจากนั้นต้องเข้าใจว่า การที่จะช่วยให้นักเรียนเข้าใจหรือจดจำมโนเมตินั้น ๆ ได้นาน นักเรียนต้องสามารถ 1) ให้ความหมายและรู้ลักษณะที่เป็นสิ่งเฉพาะหรือสิ่งที่จำเป็นต้องมีในมโนเมตินั้น ๆ 2) จำตัวอย่างสิ่งที่มีลักษณะที่จำเป็นและสิ่งที่ไม่ใช่ตามมโนเมตินั้น 3) สามารถวิเคราะห์และให้เหตุผลได้ว่า ตัวอย่างสิ่งที่เป็นไปตามมโนเมติและสิ่งที่ไม่เช่นนั้น ทำไมจึงเป็นและไม่เป็น



## ข้อควรระวังในการสอนมโนคติทางคณิตศาสตร์ ในการสอนมโนคติ ครูควรให้ความ

เอาใจใส่ในสิ่งต่าง ๆ ดังนี้

1. มโนคติบางเรื่องต้องอาศัยมโนคติอื่นเป็นพื้นฐาน ครูต้องตรวจสอบและให้แน่ใจว่านักเรียนเข้าใจมโนคติพื้นฐานนั้นก่อนที่จะสอนมโนคติใหม่ เช่น ครูจะสอนมโนคติการบวกเศษส่วน ที่ส่วนไม่เท่ากัน ครูกำหนดเศษส่วนที่ตัวส่วนไม่เท่ากันสองจำนวน และอธิบายว่า "จะต้องแปลงเศษส่วนแต่ละจำนวนให้เป็นเศษส่วนที่เท่ากัน โดยให้ตัวส่วนของเศษส่วนทั้งสองนั้นเท่ากัน ซึ่งในการทำส่วนให้เท่ากันนี้ทำได้โดยการหาตัวคูณร่วมน้อยที่สุดของตัวส่วนของเศษส่วนทั้งสองจำนวน" หากมีนักเรียนบางคนไม่มีมโนคติเกี่ยวกับเศษส่วนที่เท่ากัน ตัวส่วนและตัวคูณร่วมน้อยที่สุด นักเรียนเหล่านั้นจะไม่เข้าใจมโนคติการบวกเศษส่วนที่ตัวส่วนไม่เท่ากัน

2. หลีกเลี่ยงจากการให้ความหมายหรือคำนิยามที่ใช้คำที่ต้องให้คำนิยามอีก เช่น ให้คำนิยามของสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนว่า "สี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนคือสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีด้านเท่ากัน" ซึ่งนักเรียนจะต้องมีความเข้าใจว่าสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีด้านเท่ากันเป็นอย่างไร หากให้คำนิยามของสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนว่า "สี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนคือรูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านเป็นส่วนของเส้นตรงที่ยาวเท่ากัน" นักเรียนจะเข้าใจได้มากกว่า แม้ว่าข้อความนี้จะยาวก็ตาม

3. ระวังระวังในการใช้บรรทัด การใช้สัญลักษณ์และวรรคตอนในการเขียนหรือการพูด เช่น

สามหารห้า หมายความว่า  $5 \div 3$  (สามเป็นตัวหาร)

สามหารด้วยห้า หมายความว่า  $3 \div 5$  (ห้าเป็นตัวหาร)

สามเท่าของเลขจำนวนหนึ่ง บวกสอง เขียนได้เป็น  $3x + 2$

สามเท่าของเลขจำนวนหนึ่งบวกด้วยสอง เขียนได้เป็น  $3(x + 2)$

เอกซ์บวกวายกำลังสอง เขียนเป็นสัญลักษณ์  $x + y^2$

เอกซ์บวกวายทั้งหมดกำลังสอง เขียนเป็นสัญลักษณ์  $(x + y)^2$

การประเมินผลการเรียนรู้มโนคติ ครูควรตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียนโดยใช้วิธีการต่าง ๆ มากกว่าที่จะให้นักเรียนให้ความหมายหรือคำจำกัดความนั้นเป็นตัวหนังสือ ครูควรให้นักเรียนได้แสดงความรู้ความเข้าใจถึงลักษณะที่จำเป็นต่อมีและความสัมพันธ์ของลักษณะเหล่านั้น เช่น เมื่อจะประเมินความรู้ของนักเรียนเกี่ยวกับมโนคติของคำว่า สี่เหลี่ยมคางหมู นอกจากจะให้นักเรียนบอกลักษณะของสี่เหลี่ยมคางหมูแล้ว อาจจะให้นักเรียนวาดรูปสี่เหลี่ยมคางหมู หรือให้นักเรียนดูภาพรูป

สี่เหลี่ยมต่าง ๆ และให้ระบุว่ารูปใดเป็นสี่เหลี่ยมคางหมู หรือให้นักเรียนดูเครื่องร่อนหรือเครื่องบินที่บ้าน และให้ชี้ว่ารูปใดใช้สี่เหลี่ยมคางหมู

การประเมินผลการเรียนมโนทัศน์ ครูควรพยายามประเมินให้ครอบคลุมถึงความสามารถของนักเรียนในเรื่อง 1) การสรุปความเข้าใจตัวอย่างใหม่ของมโนตินอกเหนือจากที่ครูให้ 2) การแยกแยะตัวอย่างที่เป็นและไม่เป็นตามมโนตินั้น ๆ แบบทดสอบที่ใช้อาจสร้างให้อยู่ในรูปของปรนัยได้ ผลจากการประเมินจะช่วยครูในการวินิจฉัยการเรียนรู้มโนติของนักเรียนว่า นักเรียนเข้าใจมโนตินั้น ๆ มากน้อยเพียงใด นักเรียนเข้าใจผิดในแง่ใด ประเด็นใด นักเรียนสรุปมโนติเกินความเป็นจริงหรือไม่ หรือนักเรียนเข้าใจในลักษณะที่จำเป็นของมโนตินั้นคลาดเคลื่อนไป ซึ่งในประเด็นเข้าใจผิดต่าง ๆ นี้ ครูก็ต้องนำมโนตินั้นมาสอนใหม่

**5.3.2 การสอนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ (Teaching mathematical problem solving)** โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์หมายถึงปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่อยู่ในรูปของปัญหาที่เป็นคำพูด (word problems) หรือปัญหาที่เป็นสถานการณ์หรือเรื่องราว (situation or story problems) ซึ่งต้องการคำตอบออกมาในรูปแบบต่าง ๆ เช่น ปริมาณ จำนวน หรือเหตุผล การแก้ปัญหา หมายถึง กระบวนการหรือวิธีการในการหาคำตอบของโจทย์ปัญหา ซึ่งต้องอาศัยความรู้ความเข้าใจในมโนติหลักเกณฑ์ กระบวนการทางคณิตศาสตร์ ประสบการณ์และทักษะการแก้ปัญหาของนักเรียนเข้ามาช่วย การแก้ปัญหาเป็นส่วนที่สำคัญในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในทุกๆระดับ ดังที่มีคำกล่าวที่ว่า "Learning to solve problems is the principal reason for studying mathematics." (National Council of Supervisors of Mathematics 1977 : 20) การเรียนรู้การแก้ปัญหาเป็นเหตุผลที่สำคัญในการศึกษาวิชาคณิตศาสตร์ ดังนั้น ครูคณิตศาสตร์จึงควรหาวิธีการต่าง ๆ ที่จะช่วยให้นักเรียนสามารถแก้ปัญหาได้อย่างมีประสิทธิภาพ

องค์ประกอบที่มีผลต่อความสำเร็จในการแก้ปัญหา การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนแต่ละคนจะเป็นไปได้ดีหรือไม่เพียงใดนั้น จะขึ้นอยู่กับองค์ประกอบที่สำคัญหลายประการ ได้แก่ โจทย์ปัญหา นักเรียน กระบวนการในการแก้ปัญหา และสภาพแวดล้อมในการแก้ปัญหา

1. โจทย์ปัญหา ธรรมชาติของโจทย์ปัญหา จะเป็นสิ่งที่ทำให้นักเรียนแก้โจทย์ปัญหาได้สำเร็จหรือไม่สำเร็จ เนื้อหาที่สำคัญในโจทย์ปัญหาได้แก่ รูปแบบของโจทย์ซึ่งได้แก่วิธีการที่โจทย์นำเสนอ ข้อมูลต่าง ๆ และโครงสร้างของโจทย์ ชับซ้อนหรือไม่ซับซ้อน ทั้งในด้านเนื้อหา ภาษาที่ใช้ รูปประโยค หรือความเป็นเหตุเป็นผล

2. นักเรียน ลักษณะต่าง ๆ ในตัวของนักเรียนแต่ละคนจะมีบทบาทอย่างมากในการแก้โจทย์ปัญหา ลักษณะต่าง ๆ เหล่านี้ได้แก่ ความรู้พื้นฐานทางด้านคณิตศาสตร์ และความชำนาญในการแก้ปัญหา ประสบการณ์ในการแก้ปัญหาที่คล้ายคลึงกับปัญหานี้ ความสามารถในการอ่าน การฟัง และความเข้าใจในด้านภาษา และภาษาคณิตศาสตร์ ความสามารถในการทำความเข้าใจในปัญหาคณิตศาสตร์ ซึ่งต้องอาศัยองค์ความรู้เกี่ยวกับศัพท์ นิยาม มโนคติ และข้อเท็จจริงต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับปัญหานั้น ๆ ความมานะบากบั่นในการแก้ปัญหาและการทำงานของผู้เรียน ความพยายามในการทำให้ปัญหากระจ่างชัดเจน และความกดดันของผู้เรียนในสถานการณ์ต่าง ๆ

3. กระบวนการในการแก้ปัญหา องค์ประกอบในด้านกระบวนการนี้เกี่ยวข้องอย่างใกล้ชิดกับโจทย์ปัญหาและนักเรียนผู้จะแก้ปัญหา กระบวนการแก้ปัญหาจะเกี่ยวข้องกับพฤติกรรมของนักเรียนแต่ละคน ในขณะที่แก้ปัญหานั้น ๆ เช่น การจัดและการแยกแยะข้อมูลต่าง ๆ วิธีการวิเคราะห์ปัญหา (ปัญหากำหนดอะไรให้บ้าง ต้องการให้หาอะไร ข้อมูลอะไรบ้างที่จำเป็นและไม่จำเป็นต้องใช้ในการแก้ปัญหา) ยุทธวิธีต่าง ๆ ที่สามารถนำมาใช้ในการแก้ปัญหา และวิธีการในการตรวจคำตอบ

4. สภาพแวดล้อมในการแก้ปัญหา หมายถึงสิ่งต่าง ๆ ที่นอกเหนือจากนักเรียน โจทย์ปัญหา และกระบวนการในการแก้ปัญหา สภาพแวดล้อมต่าง ๆ ได้แก่ วิธีการสอนของครู สภาพการณ์ต่าง ๆ ที่เกิดในขณะที่นักเรียนทำงาน เวลาและช่วงเวลาในการแก้ปัญหา ฯลฯ

องค์ประกอบต่าง ๆ ดังกล่าวข้างต้นนี้ มีผลต่อการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนอย่างมาก ซึ่งมีความเกี่ยวพันกันมากจนแทบจะแยกไม่ออก สิ่งที่ทำให้การแก้โจทย์ปัญหาเหล่านั้น เป็นสิ่งที่ยากสำหรับนักเรียน ได้แก่

- ความซับซ้อนในโจทย์ปัญหา เช่น จำนวนของข้อมูลที่กำหนดให้ จำนวนตัวแปร ความซับซ้อนของรูปประโยค และความซับซ้อนของเนื้อหา (เกี่ยวข้องกับข้อ 1 และ 4)

- วิธีการนำเสนอและการเป็นตัวแทนของปัญหา การเลือกปัญหาให้นักเรียนแก้ (ความเกี่ยวพันของปัญหากับผู้เรียน ความคุ้นเคยและประสบการณ์ของผู้เรียน) และเนื้อหาที่อยู่ในตัว

ปัญหานั้น (เกี่ยวข้องกับข้อ 1, 2 และ 4)

- ความคุ้นเคยในการแก้ปัญหาที่กระบวนการแก้ปัญหาที่เป็นที่ยอมรับ การแก้ปัญหาเฉพาะบางอย่างจะง่ายขึ้นหากนักเรียนได้เคยใช้กระบวนการที่เป็นที่ยอมรับในการแก้ปัญหานั้นมาก่อน (เกี่ยวข้องกับข้อ 2 และ 3)

- คำตอบหรือกระบวนการแก้ปัญหาไม่ถูกต้อง และไม่ได้รับการแก้ไข (เกี่ยวข้องกับข้อ 1 และ 3)

- ความยากลำบากของนักเรียนในการเรียนด้านการแก้ปัญหา (เกี่ยวข้องกับข้อ 1, 2 และ 3)

- ความไม่เข้าใจนิมิตหรือความเข้าใจผิดในข้อมูลต่าง ๆ ที่กำหนดให้ในโจทย์ปัญหา และในบางครั้งนักเรียนหาคำตอบที่ถูกต้องไม่ได้ เพราะทำตามที่เขาเข้าใจผิดนั้น (เกี่ยวข้องกับข้อ 1 และ 2)

- เจตคติของนักเรียนที่มีต่อการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เช่น นักเรียนขาดแรงกระตุ้น มีความกดดันสูง ไม่เข้าใจในโจทย์ปัญหา โจทย์ปัญหาไม่น่าสนใจและไม่เกิดความสุขในการแก้โจทย์ปัญหานั้น (เกี่ยวข้องกับข้อ 1, 2, 3 และ 4)

### ขั้นตอนในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

จี. โพลยา (G.Polya 1985) ศาสตราจารย์ทางด้านคณิตศาสตร์ผู้ซึ่งสอนคณิตศาสตร์ที่มหาวิทยาลัยสแตนฟอร์ด ประเทศสหรัฐอเมริกาได้เสนอขั้นตอนการแก้ปัญหาไว้เป็น 4 ขั้นตอนตามลำดับดังนี้

ขั้นที่ 1 การทำความเข้าใจในปัญหา ผู้ที่จะแก้โจทย์ปัญหาจะต้องพยายามทำความเข้าใจในโจทย์ปัญหานั้น จะต้องวิเคราะห์ปัญหาว่าสิ่งที่ต้องการทราบคืออะไร ข้อมูลที่กำหนดให้มานั้นมีอะไรบ้าง มีเงื่อนไขหรือไม่ อย่างไร มีการเกี่ยวข้องกับสัมพันธ์กันอย่างไร เงื่อนไขหรือความสัมพันธ์ต่าง ๆ เหล่านั้นเพียงพอที่จะนำไปใช้ในการหาคำตอบหรือไม่ หรือไม่เพียงพอ หรือมีมากเกินไปในการทำความเข้าใจในปัญหานี้ ถ้าใช้การวาดรูป การเขียนแผนภูมิ การใช้สัญลักษณ์ที่เหมาะสม การแบ่งเงื่อนไขต่าง ๆ ออกเป็นส่วน ๆ และเขียนสิ่งต่าง ๆ เหล่านี้ลงในกระดาษ จะช่วยให้เข้าใจในปัญหามากขึ้น

**ขั้นที่ 2** การวางแผน เป็นขั้นตอนที่สำคัญในการวางแผนแนวทางในการแก้ปัญหา ในการวางแผนหรือหาแนวทางแก้ปัญหาให้ได้นั้น ผู้แก้ปัญหาก็ต้องหาความสัมพันธ์หรือความเกี่ยวพันของข้อมูลที่มีอยู่กับสิ่งที่ต้องการทราบ ต้องถามตนเองว่าเคยเห็นปัญหาแบบนี้ หรือที่มีรูปแบบหรือโครงสร้างเช่นนี้ มาก่อนหรือไม่ เคยพบปัญหาที่เกี่ยวข้องทำงานก่อนหน้านี้มาก่อนหรือไม่ มีทฤษฎีหรือหลักเกณฑ์ใดที่เคยเรียนมาแล้วที่จะนำมาใช้ได้ หากยังหาแนวทางแก้ปัญหาไม่ได้ก็ต้องดูสิ่งที่ต้องการทราบค่า และพยายามคิดถึงปัญหาที่เคยพบที่มีตัวที่ต้องการทราบค่าคล้ายคลึงกัน พิจารณาว่าจะนำส่วนใดมาใช้ได้บ้าง ข้อมูลที่มีอยู่สามารถปรับ แปลความ หรือขยายความเพิ่มเติม หรือเกี่ยวข้องสัมพันธ์กันได้อย่างไร ผู้แก้ปัญหาก็จะต้องมองเห็นความสัมพันธ์ของข้อมูลกับคำตอบที่ต้องการและการกระทำต่าง ๆ ของข้อมูลเหล่านั้น

**ขั้นที่ 3** การดำเนินการตามแผน เป็นขั้นลงมือปฏิบัติตามแผนในระหว่างทำ ควรได้มีการตรวจสอบการกระทำที่ละขั้น ๆ ว่าถูกต้องหรือไม่ สามารถพิสูจน์หรือให้เหตุผลได้หรือไม่ว่าทำถูกต้องทำแต่ละขั้นตอนจนได้คำตอบที่ต้องการ

**ขั้นที่ 4** การตรวจสอบย้อนกลับ พิจารณาคำตอบที่ได้ว่าถูกต้องหรือไม่ มีเหตุผลหรือวิธีการตรวจสอบย้อนกลับอย่างไร นอกจากนั้นควรพิจารณาด้วยว่ามีวิธีการแก้ปัญหาที่สั้นกระชับรัดกุมกว่านี้หรือไม่ หรือมีวิธีอื่น ๆ อีกหรือไม่ คำตอบที่ได้หรือกระบวนการที่ใช้ในการแก้ปัญหานั้นสามารถนำไปใช้ในการแก้ปัญหานั้น ๆ อีกได้หรือไม่

**เทคนิคที่ช่วยพัฒนาการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์** การสอนให้นักเรียนมีความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์นั้น เป็นงานที่ค่อนข้างยาก ต้องใช้ความอดุสาหะมาก ต้องค่อยทำทีละเล็กทีละน้อย และต้องอาศัยเทคนิคต่าง ๆ เข้าช่วย ในที่นี้จะกล่าวถึงเทคนิคต่าง ๆ ที่จะฝึกนักเรียนให้นำไปใช้ในแต่ละขั้นตอนของการแก้โจทย์ปัญหาดังนี้

1. ฝึกการอ่าน การอ่านเนื้อหาหรือโจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์จะแตกต่างจากการอ่านเนื้อหาอื่น ๆ เนื้อหาทางคณิตศาสตร์จะมีศัพท์เฉพาะและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งนักเรียนบางคนไม่สามารถจะเข้าใจได้ การให้นักเรียนอ่านโจทย์ปัญหาจึงต้องฝึกให้นักเรียนอ่านช้า ๆ และให้คิดเกี่ยวกับสิ่งที่เขาอ่านด้วย ครูไม่ควรถามนักเรียนว่า "นักเรียนอ่านโจทย์ปัญหาเรียบร้อยแล้วหรือยัง?" ควรใช้ว่า "อ่านโจทย์ปัญหาให้ครูฟังหน่อยซิ สมศรี" "ทุกคนฟังและติดตามไปด้วย" ครูต้องสังเกตและแก้ไขว่านักเรียนอ่านได้ถูกต้องหรือไม่ หยุดตามวรรคตอนที่ถูกต้องหรือไม่ อ่านสัญลักษณ์ถูกต้องหรือไม่ ถาม

นักเรียนเกี่ยวกับที่เขาอ่าน เช่น โจทย์ต้องการให้หาอะไร ข้อมูลที่โจทย์ให้มามีอะไรบ้าง ข้อมูลต่าง ๆ เหล่านี้มีความหมายหรือบอกข้อเท็จจริงอื่นทางคณิตศาสตร์อีกบ้างหรือไม่ อย่างไร ข้อมูลแต่ละตัวสัมพันธ์กันอย่างไร และเกี่ยวข้องกับสิ่งที่ต้องการหาอย่างไร ในการถามนี้ครูต้องใช้คำถามให้ชัดเจน พยายามให้นักเรียนตอบให้ชัดเจนและให้รู้จักใช้เหตุผล

นักเรียนที่แก้โจทย์ปัญหาไม่ได้มักจะมีปัญหาในการอ่านและการตีความทางคณิตศาสตร์ ครูจึงต้องฝึกให้นักเรียนอ่าน ตีความหมายและทำความเข้าใจในโจทย์ให้ชัดเจนก่อนให้ทำ

2. สอนการใช้ทักษะทางเครื่องมือ (tool skills) บางประการเพื่อช่วยให้เข้าใจ โจทย์ปัญหาให้ดียิ่งขึ้น ทักษะทาง เครื่องมือหมายถึงทักษะที่จะช่วยให้การวางแผน ได้ชัดเจน ช่วยในการจัดการข้อมูลต่าง ๆ หรือช่วยใช้กลวิธีการแก้ปัญหาได้ถูกต้อง ครูควรสอนเทคนิคบางอย่างที่จะทำ โจทย์ปัญหา มีความเป็นรูปธรรม และมองเห็นความสัมพันธ์ของข้อมูล เช่น การทำตาราง การเขียนสมการ การใช้สูตร การใช้การประมาณ การเขียนประโยคสัญลักษณ์ การเขียนภาพและการวาดรูปจำลอง การเขียนโครงสร้าง ฯลฯ เทคนิคต่าง ๆ เหล่านี้ครูควรใช้ประกอบการสอนอยู่เสมอ ๆ และชี้ให้นักเรียนเห็นว่า จะช่วยให้ เข้าใจโจทย์ปัญหาอย่างไร และฝึกให้นักเรียนนำไปใช้

3. ใช้การเปรียบเทียบ เปรียบเทียบสถานการณ์ที่อยู่ใกล้ตัวนักเรียน ให้ใกล้ตัวที่ นักเรียนเคยมีประสบการณ์มาก่อน หรือจากข้อมูลมาก ๆ ซึ่งจะทำให้นักเรียนมองมาเป็นข้อมูลน้อย เมื่อ นักเรียนเข้าใจขั้นตอนกระบวนการแล้ว จึงกลับไปฝึกฝนตามสถานการณ์หรือข้อมูลที่แท้จริง ใน โจทย์ปัญหา ต่อไป

4. การฝึกให้นักเรียนระลึกถึง ข้อมูลใน โจทย์ปัญหาที่มีความสัมพันธ์กันหรืออยู่ในแวดวง นูเดียวกัน เช่น

<u>ข้อมูลใน โจทย์ปัญหา</u>	<u>ข้อมูลที่สัมพันธ์กันหรืออยู่ในแวดวง เดียวกัน</u>
ปี	1 ปี มี 12 เดือน และ 1 เดือน มี 30 วัน
ความเร็ว	<u>ระยะทาง</u> เวลา
จุดศูนย์กลางของวงกลม	เส้นรอบวง รัศมี พื้นที่ของวงกลม
สามเหลี่ยมเท่ากันทุกประการ	ด.ม.ด. ม.ด.ม. ด.ด.ด.
ฯลฯ	

5. ฝึกให้นักเรียนสร้างโจทย์ปัญหา เป็นการฝึกให้นักเรียนรู้จักใช้ภาษา ความรู้และสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งจะช่วยให้นักเรียนคุ้นเคยและเข้าใจโจทย์ปัญหาได้มากขึ้น การสอนอาจเริ่มจากให้นักเรียนแปลงประโยคสัญลักษณ์ให้เป็นประโยค ภาษา สร้างโจทย์ปัญหาที่มีการกระทำง่าย ๆ ก่อนที่จะสร้างปัญหาที่มีความยุ่งยากซับซ้อนขึ้น หรืออาจจะให้นักเรียนเติมปัญหาที่ครูกำหนดให้บางส่วนให้สมบูรณ์ เป็นต้น

6. ให้นักเรียนฝึกฝนทำโจทย์ปัญหาที่ได้มาจากที่นักเรียนพบจริง ๆ ในชีวิตประจำวัน หรือหากไม่ได้มาจากสภาพที่นักเรียนพบจริงก็ต้อง เป็นสภาพที่นักเรียนนึกถึงได้ เช่น การวางแผนไปเที่ยวร่วมกัน จะต้องใช้จ่ายอะไรบ้าง จะต้องเก็บเงินคนละเท่าไร เป็นต้น

7. กระตุ้นให้นักเรียนคิดด้วยตนเอง เช่น การใช้คำถามกระตุ้นให้นักเรียนคิดหาวิธีการหรือคิดถึงความสัมพันธ์ของข้อมูลต่าง ๆ

8. แนะนำหรือกระตุ้นให้นักเรียนแก้โจทย์ปัญหาใหม่ ๆ โดยใช้วิธีการเดิมหรือใช้เทคนิควิธีการใหม่ ๆ ในการแก้โจทย์ปัญหาเดียวกัน เพื่อให้นักเรียนได้ฝึกการแก้ปัญหาได้หลาย ๆ วิธี ไม่ยึดติดในรูปแบบใดแบบหนึ่งโดยเฉพาะ

9. แก้ไขความผิดหรือข้อบกพร่องต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นเมื่อนักเรียนแก้โจทย์ปัญหา ไม่ควรแก้ไขเพียงให้ได้คำตอบที่ถูกต้องเท่านั้น ครูควรได้อธิบายเทคนิคที่ไม่ถูกต้องที่นักเรียนใช้ในการแก้ปัญหาหรืออธิบายความหมายหรือสิ่งที่นักเรียนยังไม่เข้าใจด้วย

10. กระตุ้นให้นักเรียนคิด ตรวจสอบ และพิจารณาข้อบกพร่องหรือแก้ไข โจทย์ปัญหาผิด ให้นักเรียนอธิบายข้อผิดพลาดและให้หาว่าทำไมถึงผิด หากนักเรียนหาพบและอธิบายข้อผิดพลาดได้ นักเรียนจะเข้าใจได้มากขึ้นและจะไม่ทำสิ่งผิดพลาดนั้น ๆ อีก

11. ฝึกนิสัยนักเรียนให้วางแผนรวมทั้งหมดก่อนลงมือทำ การวางแผนนั้นอาจทำได้โดยใช้การเขียนแผนภาพ การวาดภาพหรือการเขียนความสัมพันธ์ของสิ่งที่โจทย์กำหนด และเน้นให้นักเรียนเห็นว่า กระบวนการที่นักเรียนใช้ในการแก้ปัญหานั้นสำคัญกว่าคำตอบ

12. จัดหาปัญหาที่น่าสนใจที่ทำทลายความคิด และให้เหมาะสมกับความสามารถของนักเรียนมาให้นักเรียนคิดบ่อย ๆ โดยให้นักเรียนใช้วิธีการแก้ปัญหาหลาย ๆ แบบ

13. ก่อนลงมือทำตามแผน ครูควรฝึกให้นักเรียนตรวจสอบความเป็นไปได้ของแผนเสียก่อนว่าถูกต้องหรือไม่

14. ฝึกให้นักเรียนประมาณคำตอบหรือหาค่าโดยประมาณ โดยใช้เทคนิควิธีการต่าง ๆ (เช่น 256 - 95 ให้นักเรียนสังเกตว่า 95 มีค่าใกล้เคียง 100 ดังนั้นการหาค่าโดยประมาณให้รวดเร็วย่อมใช้ 100 เป็นตัวหาร)

15. ฝึกให้นักเรียนตรวจสอบคำตอบที่หาได้ว่าถูกต้องหรือไม่ และให้ตรวจสอบความเป็นไปได้ของคำตอบเหล่านั้นด้วย เช่น หาคำตอบจากกานคำนวณเกี่ยวกับจำนวนคนที่ เป็นโรคเอ็ดส์ได้ 23 คน ให้นักเรียนพิจารณาว่าจำนวนคนจะเป็นเศษส่วนได้หรือไม่ เพราะเหตุใด

16. ฝึกให้นักเรียนสร้างโจทย์ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับเรื่องที่เรียนจากข้อมูลที่เป็นจริงในชีวิตประจำวัน หรือโจทย์ปัญหาแปลก ๆ และอาจมีการประกวดการสร้างโจทย์หรือการแก้ปัญหาโจทย์ เพื่อส่งเสริมให้นักเรียนให้ความสนใจมากขึ้น

ในการสอนการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์นี้ ครูต้องใช้ความพยายามและฝึกนักเรียนตั้งแต่เริ่มต้น ตั้งใจเขียนและรอบคอบในการดำเนินการ สิ่งที่สำคัญและจำเป็นในการแก้โจทย์ปัญหาให้ได้ ผลก็คือ ครูจะต้องตระหนักว่าการแก้โจทย์ปัญหานั้น เป็นกิจกรรมที่สำคัญ และครูจะต้องใช้การแก้ปัญหาโจทย์เป็นส่วนหนึ่งของการสอนคณิตศาสตร์ด้วยตลอดเวลา

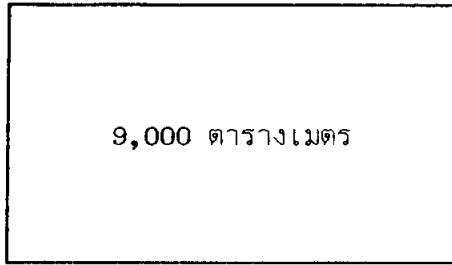
ตัวอย่างการสอนการแก้โจทย์ปัญหา ซึ่งมีขั้นตอนการสอนดังนี้

โจทย์

นายสมศักดิ์ต้องการล้อมรั้วรอบพื้นที่ซึ่ง เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ด้านกว้างของพื้นที่จะยาวน้อยกว่าด้านยาว 10 เมตร ถ้าพื้นที่นั้นมีเนื้อที่ 9,000 ตารางเมตร พื้นที่นี้มีความกว้างและความยาวเท่าไร

ขั้นที่ 1 ให้นักเรียนอ่านออกเสียงโจทย์ปัญหา และให้หาว่าโจทย์ต้องการให้หาอะไร และโจทย์กำหนดสิ่งใดมาให้บ้าง และให้นักเรียนเขียนภาพและนำสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ลงในภาพนั้น ซึ่งนักเรียนจะเขียนแผนภาพและหาความสัมพันธ์ของข้อมูลที่โจทย์กำหนดให้มาได้ดังนี้

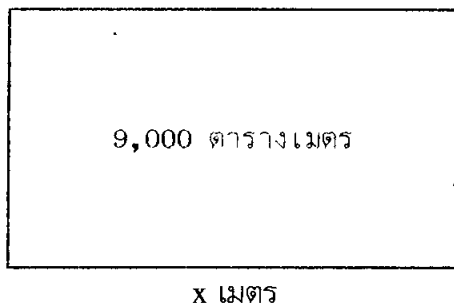




ด้านกว้างน้อยกว่าด้านยาว 10 เมตร

ต้องการหาด้านกว้างและด้านยาว

**ขั้นที่ 2** ให้นักเรียนพิจารณาความสัมพันธ์ของด้านกว้างและด้านยาว และสมมติค่าตัวแปรของสิ่งที่ต้องการหา ซึ่งนักเรียนอาจสมมติความยาวเป็น  $x$  เมตร ก็จะหาความกว้างได้เป็น  $x - 10$  เมตร ให้นักเรียนนำข้อมูลลงในแผนภาพ และให้เขียนสมการแสดงความสัมพันธ์ของด้านกว้างและด้านยาวกับพื้นที่ของสี่เหลี่ยมผืนผ้า



$(x - 10)$  เมตร

$$\text{พื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้า} = \text{ความกว้าง} \times \text{ความยาว}$$

$$9,000 = x(x - 10)$$

**ขั้นที่ 3** ให้นักเรียนช่วยกันแก้สมการโดยใช้สมบัติการกระจายและการแยกตัวประกอบ

เข้าช่วย ครูอาจต้องทบทวนเรื่องการแยกตัวประกอบหากนักเรียนบางคนต้องการความช่วยเหลือ

$$9,000 = x(x - 10)$$

$$9,000 = x^2 - 10x$$

$$0 = x^2 - 10x - 9,000$$

$$0 = (x - 100)(x + 90)$$

$$\text{จะได้ } (x - 100) = 0 \text{ หรือ } (x + 90) = 0$$

$$x = 100 \text{ หรือ } -90$$

ให้นักเรียนพิจารณาคำตอบ  $x = 100$  และ  $x = -90$  สิ่งที่น่าสนใจต้องการให้หาและ  
สิ่งที่นักเรียนสมมุติตัวแปรขึ้นมาแทน นักเรียนจะตอบได้ว่า ตัวแปร  $x$  แทนความยาวของด้านของสี่เหลี่ยม  
ผืนผ้า ดังนั้น จึงต้องใช้ค่าที่เป็นบวกเท่านั้น เมื่อความยาวของด้านของสี่เหลี่ยมผืนผ้าเป็น 100 เมตร  
ก็จะหาความกว้างได้เป็น 90 เมตร ซึ่งเป็นคำตอบที่ต้องการ

ขั้นที่ 4 ให้นักเรียนตรวจสอบคำตอบที่ได้ว่าความยาวของพื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้าเป็น  
100 เมตร และความกว้างเป็น 90 เมตร จะได้พื้นที่เป็น 9,000 ตารางเมตรหรือไม่ และด้านกว้าง  
น้อยกว่าด้านยาว 10 เมตรจริงหรือไม่ ถ้าเป็นจริง คำตอบที่หาได้มาจึงเป็นคำตอบที่ถูกต้อง

**5.3.3 การสอนการพิสูจน์ (Teaching proof)** การพิสูจน์ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์มักจะ  
เริ่มสอนในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ซึ่งมักจะใช้ในการพิสูจน์เรขาคณิตระบยยูคลิด ส่วนการพิสูจน์อื่น ๆ  
ที่ไม่ใช่เรขาคณิตจะสอนในระดับที่สูงขึ้น นักเรียนส่วนใหญ่ไม่ค่อยชอบการพิสูจน์ เนื่องจากขาดความรู้  
ความเข้าใจในนิมิตของการพิสูจน์ เขาเข้าใจแต่เพียงว่าต้องพยายามหาหลักฐานหรือเหตุผลมาแสดง  
ให้ได้ว่า ข้อความหรือความเชื่อนั้นถูกหรือผิด นักเรียนไม่เข้าใจว่าเขาจะเริ่มต้นการพิสูจน์อย่างไร  
จะใช้กลวิธีหรือแนวทางใดมาใช้ในการพิสูจน์ หรือจะใช้อะไรมาอ้างในข้อความต่าง ๆ ที่ยกมานั้น ฯลฯ  
เมื่อนักเรียนไม่เข้าใจนิมิตการพิสูจน์ ทำแบบฝึกหัดไม่ได้ สอบตก ไม่สนุกสนานในการเรียนหรือการ  
คิดค้นหาเหตุผล หรือไม่ชอบวิธีการสอนของครู ฯลฯ จึงทำให้นักเรียนไม่ชอบเรียนเกี่ยวกับการพิสูจน์  
และทำให้ไม่ชอบคณิตศาสตร์ด้วย ในบางครั้ง ไม่ใช่เพียงแต่นักเรียนไม่ชอบเรียนเกี่ยวกับการพิสูจน์  
แม้แต่ครูผู้สอนบางคนเองก็ไม่ชอบการพิสูจน์ พิสูจน์ไม่เป็น และไม่รู้วิธีที่จะสอนนักเรียนให้สามารถพิสูจน์  
ได้ ครูจึงต้องพยายามศึกษาเกี่ยวกับเทคนิคการพิสูจน์และพยายามหาวิธีการต่าง ๆ ที่จะสอนนักเรียน  
ให้พิสูจน์ได้ ดังนั้น ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงความรู้พื้นฐานที่ต้องนำมาใช้ช่วยในการสอนพิสูจน์ในเรื่อง  
ความหมายของการพิสูจน์ รูปแบบการพิสูจน์ และวิธีการสอนการพิสูจน์

ความหมายของการพิสูจน์ การพิสูจน์หมายถึง วิธีการที่มีแบบแผน ในการที่จะทำให้ตนเอง  
หรือคนอื่นเกิดความเชื่อมั่นว่าสิ่งที่กล่าวนั้นเป็นจริงหรือเป็นเท็จ โดยใช้เหตุผลหรือหลักฐานที่เป็นที่ยอมรับ  
นั้นมาสนับสนุนการให้เหตุผลนั้น ๆ

ข้อความหรือพจน์ทางคณิตศาสตร์นั้นมักจะกล่าวออกมาในรูปแบบเป็นจริงหรือเป็นเท็จ เช่น

$$n. 1 = 0$$

ข.  $3x = 5$  และ  $y = 1$

ค.  $x$  มีค่าไม่  $> 0$

ง. มีมุม  $t$  ที่ทำให้  $\cos(t) = t$

จ. เส้นตรงสองเส้นใด ๆ บนระนาบจะขนานกันหรือตัดกันที่จุด ๆ หนึ่ง

จากข้อความหรือพจน์ทางคณิตศาสตร์ข้างต้นนี้ จะพบว่า ข้อ ก. เป็นเท็จเสมอ

ข้อ จ. เป็นจริงเสมอ สำหรับข้อ ข. และข้อ ค. อาจเป็นจริงหรือเท็จ ซึ่งจะขึ้นอยู่กับค่าของตัวแปร ส่วน ข้อ ง. นั้นมองเห็นไม่ชัดเจนว่าจะเป็จริงเสมอ ดังนั้นจึงจำเป็นต้องมีการพิสูจน์ว่าเป็นจริง หรือ ผิดอีกนัยหนึ่งก็คือ การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ คือการหาเหตุผลมาสนับสนุนการกล่าวอ้าง โดยใช้ภาษาทางคณิตศาสตร์ และข้อความนั้นจะเป็นจริงก็ต่อเมื่อได้มีการพิสูจน์ว่าเป็นจริง

ในกรณีที่มีข้อความ 2 ข้อความ A และ B แต่ละข้อความนั้นอาจเป็นจริงหรือเท็จ

ปัญหาพื้นฐานทางคณิตศาสตร์จะเขียนได้เป็น

ถ้า A เป็นจริงแล้ว B เป็นจริง (If A is true then B is true)

หรือ ถ้า A แล้ว B (If A then B)

หรือ  $A \implies B$  (อ่านว่า A อิมพลาย B)

ในการทำการพิสูจน์ นักเรียนจะต้องทำความเข้าใจให้ถ่องแท้ว่า "ถ้า A เป็นจริงแล้ว B เป็นจริง" หมายความว่าอย่างไร ข้อความ A นั้นเรียกว่าสมมุติฐาน ส่วนข้อความ B นั้นเรียกข้อสรุป เงื่อนไขนี้เป็นจริงหรือไม่ ขึ้นอยู่กับว่า A และ B เป็นจริงหรือไม่ ซึ่งจะแยกประเด็นการพิจารณาได้เป็น

4 ประเด็น คือ

1) A เป็นจริง และ B เป็นจริง

2) A เป็นจริง และ B เป็นเท็จ

3) A เป็นเท็จ และ B เป็นจริง

4) A เป็นเท็จ และ B เป็นเท็จ

ตัวอย่างข้อความที่จะช่วยให้เห็นง่ายขึ้น เช่น "ถ้าฝนตก แดงจะนำร่มมา" A คือ

ถ้าฝนตก และ B คือ แดงจะนำร่มมา พิจารณาประเด็นข้างบนนี้จะได้ว่า

- ถ้าฝนตก แดงจะนำร่มมา เป็นจริง

- ถ้าฝนตก แดงไม่นำร่มมา เป็นเท็จ

- ถ้าฝนไม่ตก แดงนำร่มมา เป็นเท็จ } เพราะในข้อความไม่ได้
- ถ้าฝนไม่ตก แดงไม่นำร่มมา เป็นจริง } กล่าวถึงเมื่อฝนไม่ตก

ดังนั้นในการพิสูจน์ "ถ้า A แล้ว B" นั้นเราจะพิจารณาเฉพาะในกรณีที่ A เป็นจริง เท่านั้น ในกรณีนี้เราต้องสมมุติว่า A เป็นจริงและพยายามพิสูจน์หรือหาข้อสนับสนุนให้ได้ว่า B เป็นจริง

รูปแบบการพิสูจน์ กระบวนการคิดและรูปแบบการพิสูจน์มีหลายวิธี แต่ในที่นี้จะกล่าวถึงเฉพาะรูปแบบที่เป็นพื้นฐานในการพิสูจน์ในระดับมัธยมศึกษาเท่านั้น ซึ่งได้แก่วิธีการหน้าไปหลัง-หลังมาหน้า (forward - backward methoe) และการพิสูจน์แย้ง (contradiction method)

1) วิธีการหน้าไปหลัง-หลังมาหน้า เป็นวิธีการคิดเพื่อหารูปแบบการพิสูจน์ โดยเริ่มจากพิจารณาข้อความที่ให้มาในลักษณะ ถ้า A แล้ว B ว่าอะไรเป็น A และอะไรเป็น B หรือสิ่งที่กำหนดให้มาที่เป็นจริงนั้นคืออะไร และสิ่งที่จะสรุปหรือพิสูจน์ให้เป็นจริงนั้นคืออะไร จากนั้นวิเคราะห์ข้อความ B ด้วยวิธีการหาเหตุผลเป็นนัย โดยใช้กระบวนการย้อนกลับจนไปถึงจุดที่หาเหตุผลต่อไม่ได้ ก็กลับมาวิเคราะห์ข้อความใน A โดยวิธีการตั้งคำถามจากข้อมูลที่กำหนดให้มาไปเรื่อย ๆ ในลักษณะของการเดินไปข้างหน้า จนพบกับข้อความ B ที่ได้วิเคราะห์มาแล้ว การวิเคราะห์การพิสูจน์แบบหน้าไปหลัง-หลังมาหน้า อาจเขียนเป็นแผนผังได้เป็น

สมมุติ

สรุป

A -----> (หน้าไปหลัง .... (หลังมาหน้า) <----- B

ตัวอย่าง การหาแนวคิดในการพิสูจน์โดยใช้วิธีหน้าไปหลัง-หลังมาหน้า

ถ้าสามเหลี่ยมมุมฉาก xyz ที่มีด้านยาว x และ y และมีด้านตรงข้ามมุมฉากเป็น z มีพื้นที่เป็น  $\frac{z^2}{4}$  แล้วสามเหลี่ยม xyz นั้นเป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

4

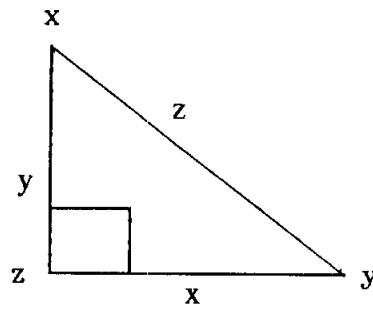
วิธีวิเคราะห์การพิสูจน์

1. แยกข้อความที่เป็นสมมุติฐานหรือสิ่งกำหนดให้เป็น A และข้อความที่เป็นข้อสรุปหรือข้อที่จะต้องพิสูจน์เป็น B ซึ่งจะแยกได้เป็น

A : สมมุติฐาน สามเหลี่ยม xyz เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านยาว x และ y และมีด้านตรงข้ามมุมฉากยาว z มีพื้นที่เป็น  $\frac{z^2}{4}$

4

B : ข้อสรุปหรือสิ่งที่จะพิสูจน์ คือสามเหลี่ยม xyz เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว หากวาดภาพประกอบจะ ได้ดังนี้



2. ใช้กระบวนการหลังมาหน้า (backward process) โดยการตั้งคำถามย้อนกลับ จากสิ่งที่ เป็นข้อสรุปว่าเป็นจริงนั้น จะต้องเนื่องมาจากเหตุผลใด ถามเรื่อยไปจนถึงข้อมูลใน A จนกว่า จะหาเหตุผลมาตอบไม่ได้ เช่น

คำถามวิเคราะห์	เหตุผลหรือคำตอบ
1) จะสรุปได้อย่างไรว่าสามเหลี่ยม xyz เป็น สามเหลี่ยมหน้าจั่วจริง	1. ถ้ามีด้านสองด้านเท่ากัน ซึ่งก็คือ $x = y$ ( $B_1$ )
2) x จะเท่ากับ y หรือ y เท่ากับ z ได้หรือไม่	2. ไม่ได้ เพราะ z เป็นด้านตรงข้ามมุมฉาก ต้องยาวที่สุด
3) จะแสดงให้เห็นได้อย่างไรว่า $x = y$	3. เมื่อด้านทั้งสองอยู่ตรงข้ามกับมุมที่เท่ากัน คือมุม $x =$ มุม $y$ (แต่เมื่อพิจารณาข้อมูล ใน A ไม่มีข้อมูลเพียงพอที่จะบอกได้ว่า มุม $x =$ มุม $YX$ ) หรือ เมื่อ $(x - y) = 0$ ( $B_2$ )
4) จะแสดงได้อย่างไรว่า $(x - y) = 0$ ?	4. หาเหตุผลมาตอบไม่ได้

3. ใช้กระบวนการหน้าไปหลัง (forward process) โดยวิเคราะห์ข้อมูลในข้อความ A ที่เป็นสมมุติฐานหรือที่กำหนดให้มาว่าเป็นจริงนั้น จะมีความสัมพันธ์กับ  $B_1$ ,  $B_2$  และไปสู่ข้อสรุป B ได้หรือไม่ วิเคราะห์โดยใช้คำถามและการหาเหตุผลเช่นเดียวกับกระบวนการหลังมาหน้า

คำถามวิเคราะห์	เหตุผลหรือคำตอบ
5) xyz เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก หาพื้นที่ได้หรือไม่?	5. หาพื้นที่สามเหลี่ยม $xyz = \frac{1}{2} xy$ เมื่อ x เป็นความยาวของฐาน และ y เป็นความสูง
6) พื้นที่ของสามเหลี่ยม xyz ที่กำหนดให้มา กับที่หาได้เป็นอย่างไรกัน ?	6. จะได้ $\frac{1}{2} x \cdot y = \frac{z^2}{4}$ $A_1$
7) จากทฤษฎีบทของพีทาโกรัสเกี่ยวกับด้านของสามเหลี่ยมมุมฉากมีความสัมพันธ์กันอย่างไร?	7. $(x^2 + y^2) = z^2$ $A_2$
8) $A_1$ และ $A_2$ มีความสัมพันธ์กันอย่างไร?	8. $\frac{1}{2} xy = \frac{(x^2 + y^2)}{4}$ $A_3$
9) จะทำ $A_3$ ให้ไปสู่ $(x - y) = 0$ ได้อย่างไร?	9. $x^2 - 2xy + y^2 = 0$ $A_4$ $(x - y)^2 = 0$ $A_5$ $(x - y) = 0$ $A_6 = B_2$

จะพบว่า  $A_6$  และ  $B_2$  มาพบกันแล้ว การวิเคราะห์การพิสูจน์ก็มาถึงจุดที่จะเขียนการพิสูจน์ให้เป็นลำดับขั้นตอนได้

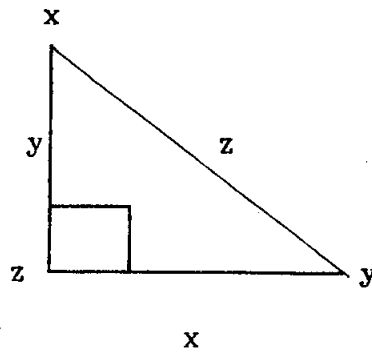
วิธีการเขียนการพิสูจน์ เมื่อนำข้อความและเหตุผลที่ได้จากการวิเคราะห์มาเขียนตามลำดับเพื่อพิสูจน์ ถ้า A แล้ว B จะเขียนได้ดังนี้

ข้อความ	เหตุผล
$A : \text{พื้นที่ของสามเหลี่ยม } xyz = \frac{z^2}{4}$	กำหนดให้
$A_1 : \frac{1}{2} x \cdot y = \frac{z^2}{4}$	พื้นที่สามเหลี่ยม = $\frac{1}{2}$ x ฐาน x สูง
$A_2 : x^2 + y^2 = z^2$	ทฤษฎีบทพีทาโกรัส
$A_3 : \frac{1}{2} x \cdot y = \frac{(x^2 + y^2)}{4}$	แทนค่า $A_2$ ใน $A_1$
$A_4 : x^2 - 2xy + y^2 = 0$	สมบัติการเท่ากันของการคูณและการบวก
$A_5 : (x - y)^2 = 0$	แยกตัวประกอบ
$B_2 : (x - y) = 0$	จาก $A_5$
$B_1 : x = y$	บวก $y$ ทั้งสองข้าง
$B : xyz$ เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว	เพราะ $B_1$ เป็นจริง

ช.ต.พ.

การพิสูจน์ในระดับมัธยมศึกษาชั้นต้นนิยมทำเป็นขั้นตอน เพื่อให้เห็นชัดเจน ทั้งที่เป็นข้อความและการใช้เหตุผลมาอ้างอิง ในการเขียนพิสูจน์ตามตัวอย่างนี้ ใช้  $A, A_1, A_2, \dots, B_2, B_1$  และ  $B$  เพื่อให้เห็นว่านำมาจากแนวคิดในการวิเคราะห์ว่าส่วนใดนำมาจาก  $A$  และส่วนใดนำมาจาก  $B$  และการใช้วิธีการหน้าไปหลัง-หลังมาหน้า ทำอย่างไร ถ้าจะเขียนให้เป็นรูปแบบปกติ จะเขียนได้ดังนี้

**โจทย์** ถ้าสามเหลี่ยมมุมฉาก  $xyz$  ที่ด้านยาว  $x$  และ  $y$  และมีด้านตรงข้ามมุมฉากเป็น  $z$  มีพื้นที่เป็น  $\frac{z^2}{4}$  แล้วสามเหลี่ยม  $xyz$  นั้นจะเป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว



สิ่งที่กำหนดให้  $xyz$  เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก มีด้านยาว  $x$  และ  $y$  และมีด้านตรงข้ามมุมฉากยาว  $z$  มีพื้นที่  $= \frac{z^2}{4}$

สิ่งที่ต้องพิสูจน์  $xyz$  เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

พิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. พื้นที่ของสามเหลี่ยม $xyz = \frac{z^2}{4}$	1. กำหนดให้
2. $\frac{1}{2} x \cdot y = \frac{z^2}{4}$	2. พื้นที่สามเหลี่ยม $= \frac{1}{2} \times$ ฐาน $\times$ สูง
3. $x^2 + y^2 = z^2$	3. ทฤษฎีบทพีทาโกรัส
4. $\frac{1}{2} x \cdot y = \frac{(x^2 + y^2)}{4}$	4. แทนค่า $A_2$ ใน $A_1$
5. $x^2 - 2xy + y^2 = 0$	5. สมบัติการเท่ากันของการคูณและการบวก
6. $(x - y)^2 = 0$	6. แยกตัวประกอบ
7. $(x - y) = 0$	7. จาก $A_5$
8. $x = y$	8. บวก $y$ ทั้งสองข้าง
9. $\therefore xyz$ เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว	9. มีด้านเท่ากันสองด้าน

บ.ค.พ.



การเขียนการพิสูจน์ในลักษณะนี้ค่อนข้างยาว ในระดับที่สูงขึ้นหรือนักเรียนที่มีอัจฉริยะ อาจจะใช้วิธีเขียนสั้น ๆ ตามความเข้าใจของเขาโดยไม่ต้องชี้ให้เห็นถึงกระบวนการคิดหลังมาหน้าได้ การเขียนแบบนี้ อาจเขียนได้ดังนี้

**พิสูจน์** จากสิ่งที่กำหนดให้และสูตรการหาพื้นที่จะได้พื้นที่สามเหลี่ยม  $xyz = \frac{xy}{2} = \frac{z^2}{4}$  และจากทฤษฎีบทของพีทาโกรัสจะได้  $(x^2 + y^2) = z^2$  และจากการแทนค่า  $z^2$  ด้วย  $(x^2 + y^2)$  และใช้วิธีการทางพีชคณิต จะได้  $(x - y)^2 = 0$  ดังนั้น  $x = y$  และสามเหลี่ยม  $xyz$  เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว #

สิ่งที่นำมาใช้ประกอบการพิสูจน์โดยใช้วิธีการหน้าไปหลัง-หลังมาหน้า นักเรียนจะต้องให้ความรู้เกี่ยวกับนิยาม ลัจฉพจน์ ทฤษฎีบท บทแทรก บทกลับ ฯลฯ

ตัวอย่างการพิสูจน์โดยใช้ค่านิยามเข้าช่วย เช่น นิยามของเลขคู่ที่นิยามไว้ว่า "เลขจำนวนเต็มจะเป็นเลขคู่ถ้าเพียงแต่นำ 2 มาหารเลขจำนวนนั้น แล้วเศษเป็น 0" หรือเลขคู่คือเลขจำนวนเต็ม ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ 2 คูณกับจำนวนเต็มอื่นได้ สามารถนำมาใช้ในการพิสูจน์ข้อความที่ว่า

ถ้า  $n$  เป็นเลขจำนวนเต็มคู่แล้ว  $n^2$  จะเป็นเลขจำนวนเต็มคู่ด้วย

การวิเคราะห์การพิสูจน์ เมื่อใช้วิธีการหน้าไปหลัง-หลังมาหน้า เราก็ต้องตั้งคำถามว่า "จะแสงให้เห็นได้อย่างไรว่า เลขจำนวนเต็ม  $n^2$  เป็นเลขคู่" เมื่อพิจารณาคำจำกัดความก็จะได้คำตอบว่า

$B_1$  : ต้องเขียน  $n^2$  ให้อยู่ในรูปของ 2 คูณกับตัวเลขจำนวนเต็มอื่น เมื่อถามต่อไปว่า เลขจำนวนเต็มใด คำตอบจะได้มาจากวิธีการหน้าไปหลัง คือวิเคราะห์ข้อมูลใน A เพราะว่า  $n$  เป็นเลขคู่ สามารถเขียน  $n$  ให้อยู่ในรูป 2 เท่าของเลขจำนวนอื่นได้ สมมติให้เป็น  $k$  ซึ่งจะได้

$$A_1 : n = 2k$$

$$A^2 : n^2 = (n)(n) = (2k)(2k) = 4k^2 = 2(2k^2) \text{ เมื่อยกกำลังสองทั้งสองข้าง}$$

ดังนั้น เมื่อ  $n^2$  สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ 2 เท่าของจำนวนเต็มอื่น ๆ ได้ คือ  $2(2k^2)$   $n^2$  จึงเป็นเลขจำนวนเต็มคู่ด้วย

การพิสูจน์นี้จะเขียนได้เป็น

พิสูจน์ เพราะว่า  $n$  เป็นเลขจำนวนเต็มคู่ จะมีเลขจำนวนเต็ม  $k$  ที่ทำให้  $n = 2k$   
และ  $n^2 = (2k)^2 = 2(2k)^2$  ดังนั้น  $n^2$  จึงเป็นเลขจำนวนเต็มคู่ด้วย #

การพิสูจน์แย้ง (contradiction method) เป็นวิธีการพิสูจน์ที่ไม่สามารถใช้วิธี  
การพิสูจน์แบบหน้าไปหลัง-หลังมาหน้าได้ การพิสูจน์แย้งจะเริ่มต้นจากการสมมุติว่า  $A$  เป็นจริง แต่แทนที่  
จะพิสูจน์ว่า  $B$  เป็นจริงตามที่ทำในวิธีการหน้าไปหลัง-หลังมาหน้า กลับพยายามหาทางพิสูจน์ว่าอาจจะมี  
สักประเด็นที่ทำให้  $B$  ไม่เป็นจริง แต่หาไม่พบหรือหาไม่ได้แต่ขัดแย้งกับ  $A$  ดังนั้นจึงสรุปว่า ที่บอกว่า  $B$   
ไม่เป็นจริงหรือเป็นเท็จนั้น ไม่ถูกต้องนั่นคือจะพิสูจน์ว่า

$A$  เป็นจริง และ ไม่ใช่  $B$  เป็นจริง ( $A$  is true and that Not  $B$  is true)

หากเปรียบเทียบรูปแบบการพิสูจน์แบบหน้าไปหลัง-หลังมาหน้า และการพิสูจน์แย้งจะ  
ช่วยให้เข้าใจนั้น

	<u>รูปแบบ</u>	<u>สมมุติ</u>	<u>สรุป</u>
หน้าไปหลัง-หลังมาหน้า	$A$	-----> (หน้าไปหลัง) .....	(หลังมาหน้า) <----- $B$
การพิสูจน์แย้ง	$A$	]-----> (หน้าไปหลัง) .....	. (ขัดแย้ง)
	ไม่ใช่ $A$		

การพิสูจน์แย้งนี้ควรใช้เมื่อข้อความไม่ใช่  $B$  ให้ข้อมูลที่เพียงพอที่จะนำไปใช้ได้ เช่น  
ข้อความใน  $B$  อาจแยกได้เป็น 2 ประเด็น พิจารณาข้อความ  $B$  " $n$  เป็นเลขจำนวนเต็มคู่" เมื่อสมมุติ  
ว่า  $B$  ไม่เป็นจริง ( $n$  ไม่ใช่เลขจำนวนเต็มคู่) จะมีประเด็นที่ว่า  $n$  เป็นเลขจำนวนเต็มคี่ นั่นก็คือ  
จะใช้การพิสูจน์แย้งเมื่อข้อความใน  $B$  คือหนึ่งในสองของสิ่งที่เป็นไปได้ นอกจากนี้อาจใช้ได้เมื่อข้อความ  
ใน  $B$  มีคำว่า "ไม่" อยู่

ตัวอย่าง การหาแนวคิดในการพิสูจน์แย้ง

ถ้า  $n$  เป็นเลขจำนวนเต็ม และ  $n^2$  เป็นเลขคู่แล้ว  $n$  เป็นเลขคู่ด้วย

วิธีวิเคราะห์การพิสูจน์

วิธีการวิเคราะห์การพิสูจน์จะใช้วิธีการถามและค้นหาเหตุผล เช่นเดียวกับที่เคยใช้  
ไปแล้ว พิจารณาข้อความที่ใช้ในการพิสูจน์แย้ง

สมมติ

A : n เป็นเลขจำนวนเต็ม  
 $n^2$  เป็นเลขคู่

สรุป

Not B : n ไม่เป็น เลขจำนวนเต็มคู่

คำถามวิเคราะห์	เหตุผลหรือคำตอบ
1. จะแสดงให้เห็นได้อย่างไรว่าเลขจำนวนเต็ม n ไม่เป็นเลขคู่?	1. เมื่อ n ไม่มีเลขจำนวนเต็มคู่ n ก็ต้องเป็นเลขจำนวนเต็มคี่
2. เลขจำนวนเต็มที่มีลักษณะเป็นอย่างไร?	2. จะมีจำนวนหนึ่งเรียกว่า k ที่ทำให้ $n = 2k + 1$ (B <sub>1</sub> )
3. จะหาค่า $n^2$ ได้หรือไม่? อย่างไร?	3. $n^2 = (2k + 1)^2$ $n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$
4. $n^2$ เป็นเลขจำนวนเต็มคู่หรือเลขจำนวนเต็มคี่?	4. $n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ $n^2 = 2p + 1$ เมื่อ $p = (2k^2 + 2k)$ $n^2 = 2p + 1$ เป็นจำนวนเต็มคี่ (B <sub>2</sub> )
5. $n^2$ เป็นเลขคู่ (A <sub>1</sub> )	5. ขัดแย้งกัน

วิธีการเขียนการพิสูจน์ เขียนในรูปแบบที่สั้นได้ดังนี้

พิสูจน์ สมมติว่า n เป็นจำนวนเต็มคี่ และ  $n^2$  เป็นจำนวนเต็มคู่ จะมีจำนวนเต็ม k ที่ทำให้

$$n = 2k + 1$$

จะได้  $n^2 = (2k + 1)^2$

$$n^2 = 4k^2 + 4k + 1$$

$$= 2(2k^2 + 2k) + 1 \text{ ซึ่งเป็นจำนวนเต็มคี่}$$

ที่สมมติว่า n เป็นจำนวนเต็มคี่ และ  $n^2$  เป็นจำนวนเต็มคู่ จึงขัดแย้งกัน จึงสรุปได้ว่า เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มที่ทำให้  $n^2$  เป็นจำนวนเต็มคู่แล้ว n จะเป็นจำนวนเต็มคู่ #

## การสอนการพิสูจน์ การสอนให้นักเรียนเข้าใจการพิสูจน์และสามารถพิสูจน์ได้นั้น

เป็นเรื่องที่ครูผู้สอนต้องใช้ความพยายามในการสังเกตลักษณะของผู้เรียน การทดลองใช้วิธีสอนแบบต่าง ๆ และการสร้างให้นักเรียนมีเจตคติต่อการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ขั้นตอนและวิธีการสอนนั้น ทำเช่นเดียวกับการสอนการแก้โจทย์ปัญหา นอกจากนั้นข้อเสนอแนะต่าง ๆ นี้ อาจจะช่วยครูในการสอนการพิสูจน์ให้นักเรียนได้เข้าใจมากขึ้น

1. ครูต้องมีเจตคติที่ดีต่อการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ มองเห็นความสัมพันธ์ของข้อมูลที่เกี่ยวข้องต่าง ๆ และคิดค้นหาเหตุผลอยู่เสมอ
2. ฝึกให้นักเรียนคุ้นเคยกับการหาเหตุผลในการพิสูจน์ โดยใช้คำถาม ทำไม? ทราบได้อย่างไร? ทำไมจึงคิดเช่นนั้น? ได้มาอย่างไร? ฯลฯ ในการสอนคณิตศาสตร์ทุกวิชา
3. ฝึกให้นักเรียนวิเคราะห์ข้อเท็จจริง หรือการใช้ถ้อยคำสำนวนในการพูดหรือการสรุปข้อความว่ามีความหมายที่แท้จริงเป็นอย่างไร
4. เริ่มต้นฝึกให้นักเรียนคุ้นเคยกับการพิสูจน์โดยใช้สิ่งที่เป็นรูปธรรมที่นักเรียนสามารถสังเกตหรือเห็นได้ชัดเจนก่อน แล้วจึงค่อยพิสูจน์สิ่งที่เป็นนามธรรม
5. การฝึกให้นักเรียนมีทักษะในการพิสูจน์ เริ่มต้นครูต้องดูแล ให้คำแนะนำอย่างใกล้ชิดถูกต้อง และให้ฝึกพิสูจน์ครั้งละไม่มากจนเกินไป เมื่อนักเรียนคุ้นเคยและมีทักษะในการพิสูจน์บ้างแล้ว ครูอาจจะปล่อยให้เรียนทำเอง และให้จำนวนมากขึ้น
6. จุดประสงค์ของการพิสูจน์คือ การสอนหลักการพิสูจน์และการพัฒนาทักษะการพิสูจน์ ดังนั้นจึงไม่จำเป็นต้องเน้นให้นักเรียนจำการพิสูจน์ตัวทฤษฎี แต่ควรจะเน้นที่ผลของทฤษฎีนั้น และการนำไปใช้
7. ความแตกต่างระหว่างบุคคลจะมีผลต่อเวลาที่ใช้ในการเรียนรู้การพิสูจน์ ดังนั้นครูจึงควรให้ความช่วยเหลือและเอาใจใส่กับนักเรียนที่เรียนช้า โดยการชี้ให้เห็นถึงกลยุทธ์ในการพิสูจน์ต่าง ๆ ชี้ให้นักเรียนวิเคราะห์ประเด็นในสิ่งที่กำหนดให้ สิ่งที่ถูกต้องสมบูรณ์ (valid) และสิ่งที่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์ (invalid)
8. ควรหลีกเลี่ยงการสอนการพิสูจน์ทฤษฎีทางเรขาคณิตที่ง่าย ๆ ที่เห็นจริงแล้ว เพราะจะทำให้ความสนใจของนักเรียนลดลง
9. ไม่ควรใช้วิธีการพิสูจน์ตามหนังสือแบบเรียน เพราะนักเรียนจะขาดความสนใจ

ควรจัดกิจกรรมที่จะให้นักเรียนพิสูจน์ด้วยตัวเอง โดยใช้ภาษาพูดของตนเอง แล้วนำผลการพิสูจน์นั้นมาอภิปรายกันในชั้น เช่น เมื่อสอนเกี่ยวกับเรื่องเส้นขนานหรือเส้นตั้งฉาก ครูอาจจะลากเส้นตรงตัดเส้นขนานคู่หนึ่ง และให้นักเรียนพิจารณาสมบัติต่าง ๆ ที่เกิดขึ้น และอาจให้นักเรียนลากเส้นขนานเส้นตั้งฉากตัดเส้นขนานคู่หนึ่ง หรือลากเส้นตัดแต่ไม่ตั้งฉาก เป็นต้น นักเรียนซึ่งเคยเรียนมโนคติเกี่ยวกับเรื่องสี่เหลี่ยมด้านขนาน สี่เหลี่ยมมุมฉาก สี่เหลี่ยมจตุรัส หรือเส้นทแยงมุมมาแล้ว อาจนำความรู้นี้มาใช้ในการพัฒนาการคิดวิเคราะห์และพิสูจน์ ครูอาจจะให้นักเรียนแต่ละคนเลือกเส้นตรงตัดเส้นขนานในลักษณะต่าง ๆ กัน และหาทางพิสูจน์เกี่ยวกับมุมภายนอก มุมภายใน มุมแย้ง มุมที่เท่ากัน สี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน ฯลฯ และหาทางพิสูจน์สมบัติเหล่านั้น หากนักเรียนสามารถพิสูจน์ได้ เขาจะเกิดความภาคภูมิใจและเกิดเจตคติในการเรียนการพิสูจน์

การสอนให้นักเรียนเข้าในการพิสูจน์นั้น ครูต้องใช้เวลาและต้องพัฒนาผู้เรียนให้เข้าใจในการพิสูจน์ทีละเล็กทีละน้อย เป็นขั้นเป็นตอน นักเรียนบางคนอาจจะเข้าใจได้เร็ว บางคนอาจจะเข้าใจได้ช้า ครูก็ไม่ควรหมดกำลังใจหรือละเลยเด็กที่ไม่เข้าใจ สำหรับนักเรียนบางคนที่ยังเรียนช้า ครูต้องช่วยโดยพยายามหาโจทย์ที่ค่อนข้างง่าย ใช้คำถามชี้แนะให้คิด ใช้การเสริมแรงประกอบ ใช้วิธีการสอนหลาย ๆ แบบ ฯลฯ อาจทำให้นักเรียนเข้าใจการพิสูจน์ได้ ซึ่งจะทำให้การเรียนการสอนคณิตศาสตร์เป็นไปได้อย่างราบรื่น

### กิจกรรมการเรียนรู้ 5.3

หลังจากศึกษาเนื้อหาในหัวข้อ 5.3 เข้าใจดีแล้ว ให้นักศึกษาทำกิจกรรมดังต่อไปนี้

1. จงอธิบายขั้นตอนการสอนมโนคติเรื่องสี่เหลี่ยมมุมฉาก พร้อมทั้งระบุอุปกรณ์การสอนที่ใช้ประกอบด้วย
2. จากโจทย์ปัญหาที่กำหนดให้ "มุมสองมุมซึ่งอยู่บนพื้นระนาบต่างกัน แต่ชนแต่ละด้านของมุมทั้งสองนั้นขนานกัน และมีทิศทางไปในทางเดียวกัน จงพิสูจน์ว่ามุมทั้งสองนั้นเท่ากัน" จงตั้งคำถามเพื่อช่วยให้นักเรียนเข้าใจจนสามารถแก้ปัญหาโจทย์นี้ได้
3. จงแสดงการวิเคราะห์การพิสูจน์ "เส้นผ่านศูนย์กลางเป็นเคอร์คที่ยาวที่สุดของวงกลมนั้น" โดยใช้วิธีการพิสูจน์แย้ง

## สรุป

วิธีสอนต่าง ๆ ที่ใช้ ได้ผลดีกับการสอนคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษา มีหลายวิธี แต่ละวิธีมีขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน ข้อดีและข้อจำกัดที่แตกต่างกัน วิธีสอนที่ยึดเอาผู้สอนเป็นศูนย์กลางของการเรียนการสอน เป็นผู้กระทำกิจกรรมเป็นส่วนใหญ่ นักเรียนมีส่วนร่วมน้อยได้แก่ วิธีสอนแบบบรรยาย วิธีสอนแบบบรรยาย วิธีสอนแบบสาธิต ส่วนวิธีสอนที่ยึดเอาผู้เรียนเป็นศูนย์กลางของการเรียนการสอนที่กล่าวถึง ในบทนี้ ได้แก่วิธีสอนแบบอุปนัย วิธีสอนแบบทดลอง และวิธีสอนแบบค้นพบ นักเรียนจะเป็นผู้ทำกิจกรรมเป็นส่วนใหญ่ และหาข้อสรุป หลักเกณฑ์ หรือค้นพบด้วยตัวเอง ครูจะเป็นผู้จัดสร้างสถานการณ์การเรียนรู้ ชักถามและให้ข้อชี้แนะเพื่อให้นักเรียนหาข้อสรุปด้วยตนเอง การเลือกใช้วิธีสอนคณิตศาสตร์นี้ถือเป็นเรื่องที่สำคัญมาก ครูจะต้องมีความรู้ความเข้าใจในวิธีสอนแบบต่าง ๆ เหล่านั้น และเลือกนำมาใช้ให้เหมาะสมกับเนื้อหาแต่ละอย่าง เนื้อหาอย่างเดียวกันอาจจะมีวิธีสอนได้หลายวิธี ครูจะต้องรู้จักเลือก ใช้วิธีที่ดีที่สุดสำหรับเรื่องนั้น ๆ นอกจากนั้นครูต้องรู้จักนำวิธีสอนต่าง ๆ เหล่านี้มาปรับใช้ในรูปแบบการสอนคณิตศาสตร์บางลักษณะ เช่น การสอนมโนคติทางคณิตศาสตร์ การสอนการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ และการสอนการพิสูจน์ ซึ่งการสอนเนื้อหาทางคณิตศาสตร์ในลักษณะต่าง ๆ เหล่านี้ ครูจะต้องศึกษารูปแบบและวิธีสอนต่าง ๆ ให้เข้าใจ นำไปทดลองสอน ฝึกใช้วิธีการต่าง ๆ จนเกิดความชำนาญ จึงจะทำให้การจัดการสอนคณิตศาสตร์ได้ผลดีมีประสิทธิภาพ

## บรรณานุกรม

1. พร้อม พานิชักดิ์ และประเสริฐ ฌ นคร. คณิตศาสตร์ที่น่าสนใจ. (แปลจาก *Mathematician's Delight* โดย W.W. Sawyer Middlesex, England 1943)  
สภาวิจัยแห่งชาติจัดแปลและจัดพิมพ์, พ.ศ.2512.
2. ยุพิน นิพิชกุล. สื่อการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น. เอกสารโรเนียว, 2535.
3. สมวงษ์ แปลงประสพโชค, ปราณี วิชกุล และปรีชา เนาว์เย็นผล. เกมคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษา.  
กรุงเทพฯ : ชมรมคณิตศาสตร์ วิทยาลัยครูพระนคร, 2532.
4. อุตตรา รัศมิเสน. ภาษาคณิตศาสตร์. (แปลจาก *The Language of Mathematics* โดย F.W. Land, London 1960). สำนักงานคณะกรรมการการวิจัยแห่งชาติจัดแปลและจัดพิมพ์ พ.ศ.2521.
5. Aichele, B. Douglas and Robert E. Reys (editors). Reading in Secondary School Mathematics. Boston : Prindle, Weber and Schmidt, 1977.
6. Arends, Richard I. Learning to Teach. 3 rd. ed., New York : McGraw-Hill, 1994.
7. Bass, W.G., and L.J. Godfrey. Mathematics Through Arithmetic.  
Northamptonshire : The Teacher Publishing Co. Ltd., 1969.
8. Cockcroft, W.H., (Chairman). Mathematics Counts. Report of the Committee of Inquiry into the Teaching of Mathematics in Schools. London : Her Majesty's Stationary Office, 1982.
9. Cooney, Thomas J., Edward J. Davis and K.B. Henderson. Dynamics of Teaching Secondary School Mathematics. Boston : Houghton Mifflin Company, 1975.
10. Gagne, R.M. The Conditions of Learning and Theory of Instruction. 4<sup>th</sup> ed., New York : Rinehart and Winston, 1985.

11. Fremont. How to Teach Mathematics in Secondary Schools. London : W.B. Saunders Company, 1969.
12. Gunter, Mary Alice, Thomas H. Estes and Jan Hasbrouck Schwab. Instruction : A Models Approach. Boston : Allyn and Bacon, 1990.
13. Immerzeel, George and Bob Wills (Compiler) Ideas from the Arithmetic Teacher. Virginia : The National Council of Teachers of Mathematics, Inc. 1979.
14. Kidd, Kenneth P., Shirley S Myers and David M. Cilley. The Laboratory Approach to Mathematics. Illinois : Science Research Associates, Inc., 1970.
15. Krulik, Stephen, and Ingrid B. Weise. Teaching Secondary School Mathematics. Philadelphia : W.B. Saunders Company, 1975.
16. MacLennan, Alexander. Technical Teaching and Instruction. London : Oldbourne Book Co. Ltd., 1963.
17. National Council of Supervisors of Mathematics. "Position Paper on Basic Mathematics Skills" Arithmetic Teacher. 25 (November 1977) : 19 - 22.
18. Polya, G. How to Solve It : A New Aspect of Mathematical Method. 2 nd. ed., Princeton, New Jersey : Princeton University Press, 1985.
19. Rosenshine, B. "Teaching Functions in Instructional Programs," The Elementary School Journal. 83(March 1983) : 335 - 350.
20. Solow, Daniel. How to Read and Do Proofs : An Introduction to Mathematical Thought Processes. 2 nd ed., New York : John Wiley and Sons, 1990.
21. Trimble, Harold C. "The Heart of Teaching" Perspective on Secondary Mathematics Education. New Jersey : Printice Hall, 1971.