บทที่ 7
การวิเคราะห์การถดถอยของตัวแปรพหุ
(Multivariate Regression Analysis)

7.1 บทนำ

ในบทนี้จะทบทวนการประมาณค่า β_0 และ β_1 จากตัวแบบการถดถอยเชิงเส้นตรง $y = \beta_0 + \beta_1 x + e$ และการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับ β_0 และ β_1 ในการวิเคราะห์การถดถอยของตัวแปรเดี่ยวก่อนที่จะขยายการพิจารณาไปถึงกรณีของตัวแปรพหุ นั่นคือเมื่อเราพิจารณาตัวแปรตามมากกว่า 1 ตัว $[y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(p)}]$ สำหรับตัวแปรอิสระตัวหนึ่ง (x) ทั้งนี้จะได้แสดงให้เห็นด้วยว่า ตัวสถิติทดสอบในกรณีของตัวแปรพหุโดยวิธี Likelihood Ratio Test คือ

$$\boxed{U_{[p,1,(n-2)]} = \left|\underline{E}\right| / \left|\underline{E} + \underline{H}\right|}$$

นั้นอาจถูกใช้สำหรับการวิเคราะห์การถดถอยของตัวแปรเดี่ยวได้ โดยที่ผลก็คือวิธีการเดียวกับที่เราใช้อยู่ในกรณีของตัวแปรเดี่ยวนั่นเอง นอกจากนั้นจะได้แสดงการหา simultaneous confidence intervals สำหรับกรณีของตัวแปรพหุด้วย

7.2 ทบทวนการวิเคราะห์การถดถอยของตัวแปรเดี่ยว

การวิเคราะห์การถดถอยของตัวแปรเดี่ยวนั้นเกี่ยวข้องกับปัญหาของการประมาณค่าหรือการทำนายค่าของตัวแปรตาม (Y) จากข้อมูลของตัวแปรอิสระ (X) ตัวหนึ่ง

ตัวแบบของการวิเคราะห์คือ

$$y_j = \beta_0 + \beta_1 x_j + e_j \ , \ j = 1, \ldots, n$$

โดยที่ β_0 คือ ส่วนตัดบนแกน y (y-intercept)

β_1 คือ สัมประสิทธิ์การถดถอยหรือความชัน (slope) ของเส้นการถดถอย

และ e_j คือ ความคลาดเคลื่อนสุ่ม (random error)

เราจะประมาณค่าของ β_0 และ β_1 และทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับ β_0 และ β_1

ตารางที่ 7.1

ข้อมูลสำหรับการวิเคราะห์การถดถอยของตัวแปรเดี่ยว

x_1	y_1
x_2	y_2
:	:
x_j	y_j
:	:
x_n	y_n

เราจะคำนวณค่าต่าง ๆ ต่อไปนี้คือ

$$\bar{x} = (1/n) \sum_{j=1}^{n} x_j \;,\quad \bar{y} = (1/n) \sum_{j=1}^{n} y_j$$

$$S_{xx} = \sum_{j=1}^{n} (x_j - \bar{x})^2 = \sum_{j=1}^{n} x_j^2 - (\sum_{j=1}^{n} x_j)^2/n$$

$$S_{yy} = \sum_{j=1}^{n} (y_j - \bar{y})^2 = \sum_{j=1}^{n} y_j^2 - (\sum_{j=1}^{n} y_j)^2/n$$

$$S_{xy} = \sum_{j=1}^{n} (x_j - \bar{x})(y_j - \bar{y}) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j - (\sum_{j=1}^{n} x_j)(\sum_{j=1}^{n} y_j)/n$$

ดังนั้นค่าประมาณของ β_0 และ β_1 (ซึ่งคือค่าของตัวประมาณค่า B_0 และ B_1) คือ

$$b_1 = S_{xy}/S_{xx} \text{ และ } b_0 = \bar{y} - b_1\bar{x} \qquad \ldots(1)$$

ซึ่งคือผลเฉลยของสมการปกติ (normal equations)

$$\begin{aligned} nb_0 + b_1 \Sigma x_j &= \Sigma y_j \\ b_0 \Sigma x_j + b_1 \Sigma x_j^2 &= \Sigma x_j y_j \end{aligned} \qquad \ldots(2)$$

ในการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับ β_0 และ β_1 นั้นเราต้องประมาณค่า σ^2 ก่อน

โดยหา $\quad SSR = (S_{xy})^2/S_{xx} = b_1S_{xy} \qquad \ldots(3)$

และ $\quad SSE = S_{yy} - SSR \qquad \ldots(4)$

ดังนั้น $\quad \hat{\sigma}^2 = s^2 = SSE/(n-2) \qquad \ldots(5)$

$$s_{B_1}^2 = s^2/S_{xx} \qquad \ldots(6)$$

และ $\quad s_{B_0}^2 = [(1/n) + x^2/S_{xx}]s^2 \qquad \ldots(7)$

ในการทดสอบ H_0: $\beta_1 = \beta_{10}$ เราใช้ตัวสถิติทดสอบ

$$T = [B_1 - \beta_{10}]/s_{B_1} \sim t_{n-2} \text{ ถ้า } H_0 \text{ เป็นจริง}$$

ดังนั้น $\quad t_c = [b_1 - \beta_{10}]/s_{B_1} \qquad \ldots(8)$

และในการทดสอบ H_0: $\beta_0 = \beta_{00}$ เราใช้ตัวสถิติทดสอบ

$$T = [B_0 - \beta_{00}]/s_{B_0} \sim t_{n-2} \text{ ถ้า } H_0 \text{ เป็นจริง}$$

ดังนั้น $\quad t_c = [b_0 - \beta_{00}]/s_{B_0} \qquad \ldots(9)$

ตัวอย่าง จากข้อมูลในตารางที่ 7.2 แสดงน้ำหนักที่เพิ่มขึ้นเป็นกรัม (x) ของหนู (weanling mice) 15 ตัว ซึ่งถูกควบคุมให้กินอาหารที่ไม่มี SO_4 และค่าของ y ซึ่งคือ M_o concentration in mg./g. dry liver/g. body weight

ตารางที่ 7.2

Weight Gain and M_o in Liver

	x	y
	147	9.4
	103	24.7
	102	14.2
	102	8.6
	75	27.0
	69	24.3
	65	17.0
	61	43.0
	53	27.0
	49	30.0
	46	32.0
	45	41.0
	42	27.0
	31	80.0
	22	29.0
Total	1012	434.2

$\bar{y}$ = 434.2/15 = 28.95, $\bar{x}$ = 1012/15 = 67.47

S_{xx} = 83918 - 68276.27 =15641.73

S_{yy} = 16735.54 - 12568.64 = 4166.90

S_{xy} = 24151.20 - 29294.03 = -5142.83

คำนวณค่าต่าง ๆ จากสูตร (1)-(9) ได้ดังนี้

b_1	= -5142.83/15641.73	= -0.3288
b_0	= 28.95 - (-0.3288)(67.47)	= 51.1341
SSR	= (-0.3288)(-5142.83)	= 1690.9625
SSE	= 4166.90 - 1690.9625	= 2475.9375
s^2	= MSE = 2475.9375/13	= 190.4567
$s_{B_1}^2$	= 190.4567/15641.73	= 0.0122
$s_{B_0}^2$	= [(1/15)+(67.47^2/15641.73)]190.4567	= 68.1264

ในการทดสอบ H_0: $\beta_1 = 0$, H_1: $\beta_1 \neq 0$, ระดับนัยสำคัญ = α

t_c = -0.3288/0.1104 = -2.9783 โดยที่เขตวิกฤตคือ $|T| > t_{13,\alpha/2}$

หรือใช้ $f_c = t_c^2$ = 8.87 โดยที่เขตวิกฤตคือ $F > f_{(1,13),\alpha}$

ในการทดสอบ H_0: $\beta_0 = 0$, H_1: $\beta_0 \neq 0$, ระดับนัยสำคัญ = α

t_c = 51.1341/8.2539 = 6.1952 โดยที่เขตวิกฤตคือ $|T| > t_{13,\alpha/2}$

หรือใช้ $f_c = t_c^2$ = 38.38 โดยที่เขตวิกฤตคือ $F > f_{(1,13),\alpha}$

7.3 การวิเคราะห์การถดถอยของตัวแปรเดียวโดยใช้เมตริกซ์

ในหัวข้อนี้จะได้กล่าวถึงวิธีการวิเคราะห์ซึ่งจะถูกขยายไปในการวิเคราะห์การถดถอยของตัวแปรพหุ เมื่อเราพิจารณาตัวแปรตามมากกว่าหนึ่งตัว สำหรับตัวแปรอิสระตัวหนึ่ง ๆ

กำหนดเมตริกซ์ $\underline{X}$ คอลัมน์เวคเตอร์ $\underline{Y}$, $\underline{\beta}$ และ $\hat{\underline{\beta}}$ ดังนี้

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ : & : \\ 1 & x_n \end{bmatrix}, \quad \underline{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ : \\ y_n \end{bmatrix}, \quad \underline{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}, \quad \hat{\underline{\beta}} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น

$$\underline{X}'\underline{X} = \begin{bmatrix} n & \Sigma x_j \\ \Sigma x_j & \Sigma x_j^2 \end{bmatrix}, \quad \underline{X}'\underline{Y} = \begin{bmatrix} \Sigma y_j \\ \Sigma x_j y_j \end{bmatrix}$$

เราอาจเขียนสมการปกติ (2) ในหัวข้อ 7.2 ในรูปเมตริกซ์ดังนี้

$$\underline{X}'\underline{X}\ \hat{\underline{\beta}} = \underline{X}'\underline{Y} \qquad \text{...(10)}$$

$$\hat{\underline{\beta}} = (\underline{X}'\underline{X})^{-1}\underline{X}'\underline{Y} \qquad \text{...(11)}$$

ให้ $R(\underline{\beta}) = R(\beta_0,\ \beta_1) = \hat{\underline{\beta}}'\underline{X}'\underline{Y}$ ...(12)

และ $R(\beta_0) = n\bar{y}^2$

$$SSR = R(\beta_0,\ \beta_1) - R(\beta_0) = \hat{\underline{\beta}}'\underline{X}'\underline{Y} - n\bar{y}^2 \qquad \text{...(13)}$$

$$SSE = \underline{Y}'\underline{Y} - R(\underline{\beta}) = \underline{Y}'\underline{Y} - \hat{\underline{\beta}}'\underline{X}'\underline{Y} \qquad \text{...(14)}$$

ในการทดสอบ $H_o: \beta_1 = \beta_{10}$ เราจะกำหนด

$$\underline{A}' = [0 \quad 1] \text{ และ } D = \beta_{10} \qquad \ldots(15)$$

ดังนั้นเราอาจเขียน H_o ใหม่ดังนี้คือ $H_o: \underline{A}'\underline{\beta} = D$

Sum of squares สำหรับการทดสอบสมมติฐานนี้คือ

$$H = (\underline{A}'\hat{\underline{\beta}} - D)'[\underline{A}'(\underline{X}'\underline{X})^{-1}\underline{A}]^{-1}(\underline{A}'\hat{\underline{\beta}} - D) \qquad \ldots(16)$$

และตัวสถิติทดสอบโดยวิธี Likelihood Ratio Test คือ

$$U_{[1,1,(n-2)]} = \left|\underline{E}\right| / \left|\underline{E} + \underline{H}\right| \qquad \ldots(17)$$

และจุดวิกฤตคือ $u_{[1,1,(n-2)],\alpha}$ ถ้า u_c น้อยกว่าจุดวิกฤต เราจะปฏิเสธสมมติฐาน

เพื่อแสดงวิธีที่กล่าวมาข้างต้น จะใช้ข้อมูลจากตารางที่ 7.2 เพื่อทดสอบ $H_o: \beta_1 = 0$

$$\underline{X}'\underline{X} = \begin{bmatrix} 15 & 1012 \\ 1012 & 83918 \end{bmatrix}, \quad \underline{X}'\underline{Y} = \begin{bmatrix} 434.20 \\ 24151.20 \end{bmatrix}, \quad \underline{Y}'\underline{Y} = 16735.54$$

และ

$$(\underline{X}'\underline{X})^{-1} = \begin{bmatrix} 0.3576670982 & -0.0043132475 \\ -0.0043132475 & 0.0000639315 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น

$$\hat{\underline{\beta}}' = \begin{bmatrix} 0.3576670982 & -0.0043132475 \\ -0.0043132475 & 0.0000639315 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 434.20 \\ 24151.20 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 51.1289510164 \\ -0.3287896217 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_o \\ b_1 \end{bmatrix}$$

$$R(\underline{\beta}) = \hat{\underline{\beta}}'\underline{X}'\underline{Y} = [\ 51.1289510164 \quad -0.3287896217\ ]\begin{bmatrix} 434.20 \\ 24151.20 \end{bmatrix}$$

$$= 14259.5266$$

$$\underline{E} = \underline{Y}'\underline{Y} - \hat{\underline{\beta}}'\underline{X}'\underline{Y} = SSE = 16735.54 - 14259.5266 = 2476.0134$$

ดังนั้น $\underline{A}'\hat{\underline{\beta}} = [\ 0 \quad 1\ ]\begin{bmatrix} 51.1289510164 \\ -0.3287896217 \end{bmatrix}$

$$= -0.3287896217$$

$$(\underline{A}'\hat{\underline{\beta}} - D) = -0.3287896217 - 0 = -0.3287896217$$

$$[\underline{A}'(\underline{X}'\underline{X})^{-1}\underline{A}]^{-1} = 15641.7415515043$$

ดังนั้น

$$\underline{H} = (-0.3287896217)(15641.7415515043)(-0.3287896217)$$
$$= 1690.9132$$

$$u_c = \left|2476.0134\right| / \left|2476.0134 + 1690.9132\right| = 0.5942$$

จากตาราง $u_{(1,1,13),.05} = 0.7358 > u_c$ ดังนั้นเราปฏิเสธ H_o ที่ $\alpha = .05$

ต่อไปจะแสดงว่าวิธีการในหัวข้อ 7.3 นั้นเหมือนกับในหัวข้อ 7.2 เราทราบมาแล้วว่า $u_{(p,\nu_H,\nu_E)}$ เมื่อ $\nu_H = 1$ นั้นเกี่ยวข้องกับตัวสถิติ F ดังนี้

$$\boxed{F_{[p,(\nu_E + \nu_H - p)]} = [(1 - U)/U][\nu_E + \nu_H - p]/p}$$

หมายเหตุ ดูตารางที่ 3.10

ดังนั้นเมื่อ $p = 1$, $\nu_E = n - 2 = 15 - 2 = 13$

$$\begin{aligned} f_c &= [(1 - 0.5942)/0.5942](13/1) \\ &= 8.88 \end{aligned}$$

ซึ่งเป็นค่าของตัวสถิติ $F \sim F_{1,13}$ และเท่ากับค่าของ f_c จากตัวอย่างในหัวข้อ 7.2 นั่นเอง

สำหรับการทดสอบ H_o: $\beta_o = \beta_{oo}$ เรากำหนด

$\underline{A}' = [\,1 \quad 0\,]$ และ $D = \beta_{oo}$ ...(17)

เราอาจเขียน H_o ใหม่ได้ดังนี้ H_o: $\underline{A}'\underline{\beta} = D$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} \underline{A}'\hat{\underline{\beta}} &= [\,1 \quad 0\,]\begin{bmatrix} 51.1289510164 \\ -0.3287896217 \end{bmatrix} \\ &= 51.1289510164 \end{aligned}$$

และ $(\underline{A}'\hat{\underline{\beta}} - D) = 51.1289510164 - 0 = 51.1289510164$

$[\underline{A}'(\underline{X}'\underline{X})^{-1}\underline{A}]^{-1} = 2.7958959743$

ดังนั้น $\underline{H} = (51.1289510164)(2.7958959743)(51.1289510164)$

$= 7308.9464$

$$u_c = \left|2476.0134\right| / \left|2476.0134 + 7308.9464\right| = 0.2534$$

และ $f_c = [(1 - 0.2534)/0.2534](13/1) = 38.37$

ซึ่งเป็นค่าเดียวกับ f_c จากตัวอย่างในหัวข้อ 7.2 นั่นเอง

7.4 การวิเคราะห์การถดถอยของตัวแปรพหุ

วิธีการในหัวข้อ 7.3 นั้นอาจถูกใช้เมื่อเราสังเกต

$$\underline{Y}_j' = [y_j^{(1)} \quad y_j^{(2)} \ \ldots \ y_j^{(k)} \ \ldots \ y_j^{(p)}]$$

สำหรับแต่ละ x_j โปรดสังเกตว่า $\underline{X}'\underline{X}$ ไม่เปลี่ยนแปลง แต่ $\hat{\underline{\beta}}$, $\underline{X}'\underline{Y}$, $\underline{Y}'\underline{Y}$,$\underline{E}$ และ $\underline{H}$ จะกลายเป็นเมตริกซ์ และ $\underline{D}$ คือเวคเตอร์

เพื่อเป็นตัวอย่าง ใช้ x และ $y^{(1)}$ จากตารางที่ 7.2 และ $y^{(2)}$ คือ Cu concentration mg./g. dry liver/g. body weight จาก

$$\underline{X}' = \begin{bmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & \ldots & x_n \end{bmatrix} \text{ และ } \underline{Y} = \begin{bmatrix} y_1^{(1)} & y_1^{(2)} \\ y_2^{(1)} & y_2^{(2)} \\ \vdots & \vdots \\ y_n^{(1)} & y_n^{(2)} \end{bmatrix}$$

ดังนั้น

$$\underline{X}'\underline{Y} = \begin{bmatrix} \Sigma y_j^{(1)} & \Sigma y_j^{(2)} \\ \Sigma x_j y_j^{(1)} & \Sigma x_j y_j^{(2)} \end{bmatrix},$$

$$\underline{Y}'\underline{Y} = \begin{bmatrix} \Sigma (y_j^{(1)})^2 & \Sigma y_j^{(1)} y_j^{(2)} \\ \Sigma y_j^{(1)} y_j^{(2)} & \Sigma (y_j^{(2)})^2 \end{bmatrix}$$

ให้

$$\underline{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_o^{(1)} & \beta_o^{(2)} \\ \beta_1^{(1)} & \beta_1^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\beta}_o' \\ \underline{\beta}_1' \end{bmatrix}$$

ดังนั้น

$$\hat{\underline{\beta}} = \begin{bmatrix} b_o^{(1)} & b_o^{(2)} \\ b_1^{(1)} & b_1^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\underline{\beta}}_o' \\ \hat{\underline{\beta}}_1' \end{bmatrix}$$

โดยที่

$$\hat{\underline{\beta}}_o = \begin{bmatrix} b_o^{(1)} \\ b_o^{(2)} \end{bmatrix}, \quad \hat{\underline{\beta}}_1 = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_1^{(2)} \end{bmatrix}$$

ตารางที่ 7.3

Weight Gain, Mo Concentration, and Cu Concentration

	x	$y^{(1)}$	$y^{(2)}$
	147	9.4	8.7
	103	24.7	11.6
	102	14.2	7.6
	102	8.6	7.1
	75	27.0	13.0
	69	24.3	19.0
	65	17.0	14.0
	61	43.0	21.0
	53	27.0	17.0
	49	30.0	25.0
	46	32.0	24.0
	45	41.0	34.0
	42	27.0	19.0
	31	80.0	64.0
	22	29.0	29.0
Total	1012	434.2	314.0

เนื่องจากว่า $(\underline{X}'\underline{X})^{-1}$ คงเดิม

และ $\underline{X}'\underline{Y} = \begin{bmatrix} 434.2 & 314.0 \\ 24151.2 & 16630.1 \end{bmatrix}$, $\underline{Y}'\underline{Y} = \begin{bmatrix} 16735.54 & 12335.98 \\ 12335.98 & 9429.42 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $\hat{\underline{\beta}} = (\underline{X}'\underline{X})^{-1}\underline{X}'\underline{Y}$

$$= \begin{bmatrix} 0.3576670982 & -0.0043132475 \\ -0.0043132475 & 0.0000639315 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 434.2 & 314.0 \\ 24151.2 & 16630.1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 51.1289510164 & 40.5777315850 \\ -0.3287896217 & -0.2911724768 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_o^{(1)} & b_o^{(2)} \\ b_1^{(1)} & b_1^{(2)} \end{bmatrix}$$

ดังนั้นเราได้ว่า

$$\hat{y}^{(1)} = b_o^{(1)} + b_1^{(1)}\, x = 51.1290 - 0.3288\, x$$
$$\hat{y}^{(2)} = b_o^{(2)} + b_1^{(2)}\, x = 40.5777 - 0.2912\, x$$

จาก $\boxed{\underline{E} = \underline{Y}'\underline{Y} - \hat{\underline{\beta}}'\underline{X}'\underline{Y}}$

$$\hat{\underline{\beta}}'\underline{X}'\underline{Y} = \begin{bmatrix} 51.1289510164 & 40.5777315850 \\ -0.3287896217 & -0.2911724768 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 434.2 & 314.0 \\ 24151.2 & 16630.1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 14259.52662 & 10586.68633 \\ 10586.68633 & 7899.18031 \end{bmatrix}$$

$$\underline{E} = \begin{bmatrix} 16735.54 & 12335.98 \\ 12335.98 & 9429.42 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 14259.52662 & 10586.68633 \\ 10586.68633 & 7899.18031 \end{bmatrix}$$

$$\underline{E} = \begin{bmatrix} 2476.01338 & 1749.29367 \\ 1749.29367 & 1530.23969 \end{bmatrix}$$

ในการทดสอบ H_o: $\underline{\beta}_1 = \underline{\beta}_{10} = \begin{bmatrix} \beta_{10}^{(1)} \\ \beta_{10}^{(2)} \end{bmatrix}$

เราใช้ $\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ และ $\underline{D} = \begin{bmatrix} \beta_{10}^{(1)} \\ \beta_{10}^{(2)} \end{bmatrix}$

ดังนั้นถ้าเราทำการทดสอบ H_o: $\underline{\beta}_1 = \underline{0}$ หรือ H_o: $\underline{A}'\underline{\beta} = \underline{D}'$

เราจะหา

$$\underline{A}'\hat{\underline{\beta}} = [\ 0 \quad 1\ ] \begin{bmatrix} 51.1289510164 & 40.5777315850 \\ -0.3287896217 & -0.2911724768 \end{bmatrix}$$

$$= [\ -0.3287896217 \quad -0.2911724768\ ]$$

$$\underline{A}'\hat{\underline{\beta}} - \underline{D}' = [\ -0.3287896217 \quad -0.2911724768\ ] - [\ 0 \quad 0\ ]$$

$$= [\ -0.3287896217 \quad -0.2911724768\ ]$$

$$[\underline{A}'(\underline{X}'\underline{X})^{-1}\underline{A}]^{-1} = \left[[\ 0 \quad 1\ ] \begin{bmatrix} 0.3576670982 & -0.0043132475 \\ -0.0043132475 & 0.0000639315 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right]^{-1}$$

$$= \left[[\ -0.0043132475 \quad 0.0000639315\ ] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right]^{-1}$$

$$= 15641.7415515$$

ดังนั้น

$$\boxed{\underline{H} = [\underline{A}'\hat{\underline{\beta}} - \underline{D}']'[\underline{A}'(\underline{X}'\underline{X})^{-1}\underline{A}]^{-1}[\underline{A}'\hat{\underline{\beta}} - \underline{D}']}$$

$$\underline{H} = \begin{bmatrix} -0.3287896217 \\ -0.2911724768 \end{bmatrix}(15641.7415515)[\,-0.3287896217 \quad -0.2911724768\,]$$

$$= \begin{bmatrix} -5142.84228745 \\ -4554.44462902 \end{bmatrix}[\,-0.3287896217 \quad -0.2911724768\,]$$

$$= \begin{bmatrix} 1690.91317015 & 1497.45412663 \\ 1497.4512663 & 1326.12892308 \end{bmatrix}$$

$$\underline{E} + \underline{H} = \begin{bmatrix} 4166.92655 & 3246.74780 \\ 3246.74780 & 2856.36861 \end{bmatrix}$$

และ $\left|\underline{E}\right| = 728865.6031$, $\left|\underline{E} + \underline{H}\right| = 1360906.92079$

$$u_c = \left|\underline{E}\right| / \left|\underline{E} + \underline{H}\right| = 0.5356$$

จากตาราง $u_{[p,1,(n-s)],\alpha} = u_{(2,1,13),.05} = 0.6069$

ดังนั้นเราปฏิเสธ H_o: $\underline{\beta}_1 = \underline{0}$ ที่ $\alpha = .05$

7.6 การหาช่วงความเชื่อมั่น (Simultaneous Confidence Intervals)

ในหัวข้อ 7.2 สำหรับ $y^{(1)}$ เราได้ $t_c = -2.9783$ เมื่อเราทดสอบ $H_0: \beta_1 = 0$, $H_1: \beta_1 \neq 0$ และเนื่องจากว่า $t_{13,.05} = 2.16$ เราปฏิเสธ H_0 ที่ $\alpha = .10$ และ 90% ช่วงความเชื่อมั่นของ β_1 [$\beta_1^{(1)}$] คือ

$$b_1 \pm s_{B_1} t_{13,.05} = -0.3288 \pm (0.1104)(2.16)$$
$$= (-0.5673, -0.0903)$$

ก่อนที่จะหาช่วงความเชื่อมั่นในกรณีของตัวแปรพหุ จะแสดงว่าช่วงความเชื่อมั่นของ β_1 ในกรณีของตัวแปรเดี่ยวนั้นเราอาจหาได้จากสูตร

$$\boxed{b_1^{(k)} \pm \sqrt{e_{kk}[\underline{A}'(\underline{X}'\underline{X})^{-1}\underline{A}]}\sqrt{(1-u_\alpha)/u_\alpha}} \qquad \ldots(18)$$

โดยที่ e_{kk} คือสมาชิกบน diagonal ของเมตริกซ์ $\underline{E}$ และ u_α คือค่าจากตาราง U

เนื่องจากว่า $u_{(1,1,13),.05} = 0.73584$
ดังนั้นจากค่าในหัวข้อ 7.3 และสูตร (17) เราจะได้ว่า

90% ช่วงความเชื่อมั่นของ β_1 คือ

$$-0.3288 \pm \sqrt{(2476.0134)(0.0000639315)}\sqrt{(1-0.73584)/0.73584)}$$
$$= -0.3288 \pm (0.3979)(0.5992)$$
$$= (-0.5672, -0.0904)$$

ซึ่งต่างกับที่หามาแล้วเล็กน้อยเนื่องจากการปัดเศษ

จากสูตร (17) ช่วงความเชื่อมั่น (Simultaneous Confidence Intervals) สำหรับ $\beta_1^{(1)}$ และ $\beta_1^{(2)}$ ตามลำดับคือ $[u_{(2,1,13),.05} = 0.606971]$

$$\beta_1^{(1)}: \quad -0.3288 \pm \sqrt{(2476.01338)(0.0000639315)}\sqrt{(1-0.606971)/0.606971}$$
$$= (-0.6940,\ -0.0086)$$

$$\beta_1^{(2)}: \quad -0.2912 \pm \sqrt{(1530.23969)(0.0000639315)}\sqrt{(1-0.606971)/0.606971}$$
$$= (-0.5429,\ -0.0395)$$

แบบฝึกหัดที่ 7

7.1 ในการสำรวจเกี่ยวกับ physical และ thermodynamic properties ของ olifin polymers

ความดัน (x) การขยายตัวเชิงเส้น ($y^{(1)}$) และปริมาตรที่เพิ่มขึ้น ($y^{(2)}$) ของตัวอย่าง 10 ตัวอย่างแสดงในตารางต่อไปนี้

จงหา $\hat{\underline{\beta}}$ และทดสอบ ที่ $\alpha = .05$ $H_o: \underline{\beta}_1 = [\beta_1^{(1)} \quad \beta_1^{(2)}]' = \underline{0} = [0 \quad 0]'$

x	$y^{(1)}$	$y^{(2)}$
50	13.1	12.5
75	12.0	11.7
100	14.5	14.3
125	17.2	17.7
150	27.3	27.2
160	19.1	18.9
168	27.7	27.1
200	17.3	17.6
210	10.0	9.9
250	31.8	31.0

7.2 จากข้อมูลที่กำหนดให้ จงทดสอบ H_o $\underline{\beta}_1' = [1.5 \quad 2.0]$

x	$y^{(1)}$	$y^{(2)}$
2	7.2	5.0
2	5.4	5.6
2	9.0	5.1
2	9.2	5.2
5	11.1	11.9
5	11.0	10.2
5	10.2	11.7
5	10.3	10.7
6	11.8	14.3
6	13.0	12.3
6	13.5	12.6
6	11.5	13.9
10	16.0	20.9
10	16.9	21.4
10	16.9	20.7
10	17.7	20.1
13	17.8	28.0
13	20.6	26.8
13	20.5	25.6
13	17.8	26.8