บทที่ 6
ค่ารายปี
(Annuity)

บทที่ 6
ค่ารายปี
(Annuity)

6.1 นิยาม

ค่ารายปี (Annuity) คือ อนุกรมของการชำระเงินที่มีระยะเวลาของการชำระเงินของแต่ละงวดเท่ากัน ซึ่งจำนวนเงินที่ชำระในแต่ละงวดอาจจะเท่ากัน หรือไม่เท่ากันก็ได้ แต่ส่วนมากแล้วจะกำหนดจำนวนเงินรายงวดของแต่ละงวดเท่ากัน เช่น การผ่อนซื้อ เงินบำนาญ การชำระดอกเบี้ยเงินกู้ การชำระเบี้ยประกันชีวิต การชำระค่าเช่าซื้อ เป็นต้น

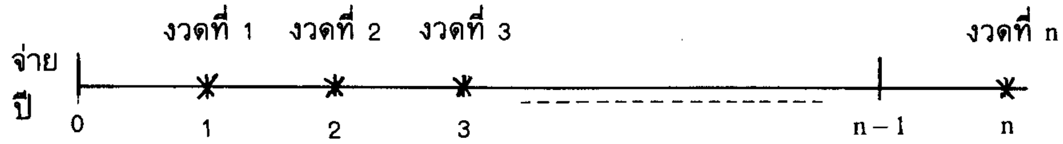
6.2 ค่ารายปีแน่นอน (Annuity Certain)

คือ อนุกรมของการจ่ายเงิน เป็นรายงวด ๆ ละเท่า ๆ กัน เป็นระยะเวลาที่แน่นอน หมายความว่า เมื่อถึงกำหนดเวลาของการจ่ายเงิน จะต้องจ่ายอย่างแน่นอน ไม่มีการบิดพริ้ว หรือผลัดผ่อน สำหรับ Annuity Certain นี้ กำหนดเฉพาะเวลาอย่างเดียว ไม่ได้กำหนดเงื่อนไขอย่างอื่น คือ ไม่มีเงื่อนไขว่า จะตายหรือไม่ตาย ซึ่งต่างจาก life annuity ที่อาศัยการทรงชีพของบุคคลใดบุคคลหนึ่ง หรือหลายคนมาเป็นข้อกำหนดในการชำระเงิน (ซึ่งจะกล่าวถึง life annuity ในตอนหลัง)

สำหรับ Annuity Certain ที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้ เป็น Annuity Certain ที่มีช่วงเวลาระหว่างงวดของการจ่ายเงินเป็น 1 ปี

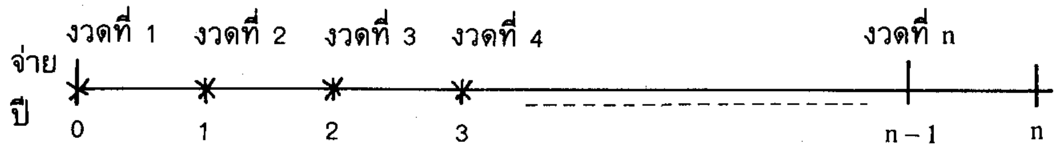
ค่ารายปีที่แน่นอน แบ่งออกเป็น 2 ชนิดคือ

1. Annuity Immediate หมายถึง ค่ารายปีที่แน่นอนจ่ายในตอนสิ้นงวด เขียนแสดงได้ดังนี้



จะเห็นได้ว่า งวดที่ 1 จะเริ่มจ่ายเมื่อสิ้นปีที่ 1 หรือเมื่อเริ่มต้นปีที่ 2

2. Annuity Due หมายถึง ค่ารายปีที่เริ่มจ่ายในตอนต้นงวด เขียนแสดงได้ดังนี้



จะเห็นได้ว่า งวดที่ 1 จะเริ่มจ่ายทันที ณ. จุดเริ่มต้น

การหาค่าปัจจุบัน และเงินรวม

ค่าปัจจุบัน หรือเบี้ยประกันจ่ายครั้งเดียวของค่ารายปี (Present value or single premium) คือ ผลรวมของค่าปัจจุบันของจำนวนเงินที่จ่ายในแต่ละงวด

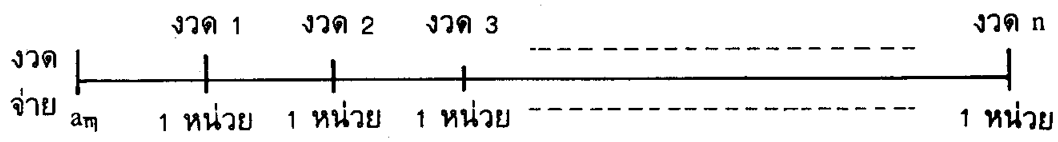
เงินรวมของค่ารายปี (Amount of Annuity)

คือ ผลบวกของเงินรวมของจำนวนเงินที่จ่ายในแต่ละงวด

การคำนวณหาค่าปัจจุบันหรือเงินรวมของค่ารายปี จะคำนวณตามชนิดของค่ารายปีที่แน่นอน ดังนี้

ค่ารายปีชนิดที่จ่ายตอนสิ้นงวด (Annuity Immediate)

ให้ $a_{\overline{n}|}$ เป็นสัญลักษณ์ที่ใช้แทนค่าปัจจุบันของค่ารายปีที่มีการจ่ายเงินรายงวด ๆ ละ 1 หน่วย ที่จ่ายตอนสิ้นงวด เป็นระยะเวลา n งวด
ซึ่งจะมีค่าเท่ากับผลบวกของค่าปัจจุบันของเงิน 1 หน่วย ที่จ่ายแต่ละงวด



จาก $a_{\overline{n}|}$ คือ ค่าปัจจุบันของเงินที่ลงทุนด้วยอัตราดอกเบี้ย i สามารถมีเงินใช้ได้ปีละ 1 หน่วย

การหาค่า $a_{\overline{n}|}$ หาได้ดังนี้

ถ้าต้องการมีเงินในอนาคต 1 หน่วย ใน 1 ปี ค่าปัจจุบัน = v
ถ้าต้องการมีเงินในอนาคต 1 หน่วย ใน 2 ปี ค่าปัจจุบัน = v^2

ถ้าต้องการมีเงินในอนาคต 1 หน่วย ใน 3 ปี ค่าปัจจุบัน $= v^3$

.

.

.

ถ้าต้องการมีเงินในอนาคต 1 หน่วย ใน n ปี ค่าปัจจุบัน $= v^n$

$\therefore$ ถ้าต้องการมีเงินใช้ปีละ 1 หน่วย เป็นเวลา n ปี จะต้องมีเงินปัจจุบัน

$$= v + v^2 + v^3 + \dots + v^n$$

$$= a_{\overline{n}|}$$

$\therefore$ ค่าปัจจุบันของ Annuity Immediate ที่ชำระปีละ 1 หน่วย เป็นเวลา n ปี

$$= a_{\overline{n}|}$$

$$= v + v^2 + v^3 + \dots + v^n \qquad \text{— เป็น G.P.}$$

$$\therefore\ a_{\overline{n}|} = \frac{v(1 - v^n)}{1 - v} \quad \left(\text{จาก } \Sigma ar^{n-1} = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} \text{ ถ้า } r < 1\right)$$

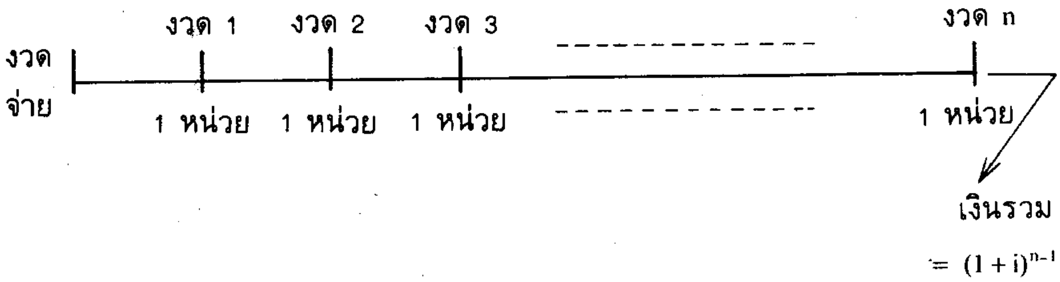
ในที่นี้ $a = v, r = v$ และ $v = \frac{1}{1 + i} < 1$

หารด้วย v ทั้งเศษและส่วนจะได้

$$a_{\overline{n}|} = \frac{\frac{v(1 - v^n)}{v}}{\frac{1 - v}{v}} = \frac{1 - v^n}{\frac{1}{v} - 1} = \frac{1 - v^n}{(1 + i) - 1}$$

$$\boxed{\therefore\ a_{\overline{n}|} = \frac{1 - v^n}{i}}$$

การหาเงินรวมของค่ารายปี (Amount of annuity) ชนิดที่มีการจ่ายเงินตอนสิ้นงวด (Annuity Immediate)ซึ่งใช้สัญญลักษณ์แทนด้วย $s_{\overline{n}|}$ เขียนรูปแสดงได้ดังนี้



ให้ $S_{\overline{n}|}$ = ผลบวกของเงินรวมของเงินจำนวน 1 หน่วย ที่จ่ายแต่ละงวด เป็นระยะเวลา n งวด

การหาค่า $S_{\overline{n}|}$ หาได้ดังนี้

เมื่อจ่ายเงินงวดที่ 1 มีเวลาหาผลประโยชน์ n − 1 ปี $\therefore$ เงินรวม $= (1+i)^{n-1}$

เมื่อจ่ายเงินงวดที่ 2 มีเวลาหาผลประโยชน์ n − 2 ปี $\therefore$ เงินรวม $= (1+i)^{n-2}$

⋮ ⋮

เมื่อจ่ายเงินงวดที่ n − 1 มีเวลาหาผลประโยชน์ 1 ปี $\therefore$ เงินรวม $= (1+i)$

เมื่อจ่ายเงินงวดที่ n ไม่มีเวลาหาผลประโยชน์ $\therefore$ เงินรวม $= (1+i)^0 = 1$

(ไม่มีดอกเบี้ย $\because$ เป็นวันสุดท้ายของสัญญา)

$\therefore$ เงินรวมของ Annuity Immediate ที่ชำระปีละ 1 หน่วย เป็นเวลา n ปี $= S_{\overline{n}|}$

ซึ่งจะได้ $S_{\overline{n}|} = (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \ldots + (1+i) + 1$ — เป็น G.P.

หรือ $S_{\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} (1+i)^{t-1}$ (จาก $\Sigma ar^{n-1} = \frac{(r^n - 1)}{r - 1}, r > 1$)

$$= \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1}$$

$$\therefore \quad S_{\overline{n}|} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

หรือถ้าเอา $(1 + i)^n$ ออกจะได้

$$S_{\overline{n}|} = (1+i)^n\left[\frac{1}{i} - \frac{1}{(1+i)^n}\right] = (1+i)^n\left[\frac{1}{i} - v^n\right]$$

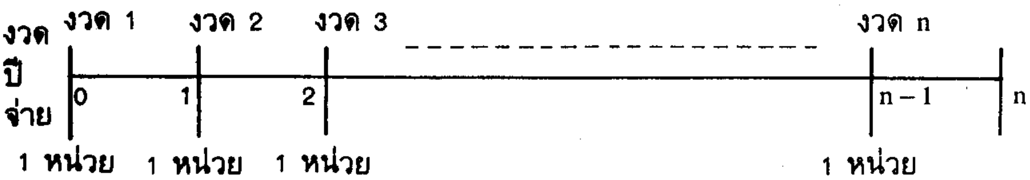
$$= (1+i)^n\left[\frac{1-v^n}{i}\right] = (1+i)^n a_{\overline{n}|}$$

$$\therefore \qquad S_{\overline{n}|} = (1+i)^n a_{\overline{n}|}$$

ซึ่งจะได้ $a_{\overline{n}|} = \frac{1}{(1+i)^n} S_{\overline{n}|} = v^n S_{\overline{n}|}$

2. ค่ารายปีชนิดที่จ่ายตอนต้นงวด (Annuity Due)

ให้ $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ เป็นค่าปัจจุบันของเงินรายงวดที่จ่ายงวดละ 1 หน่วย ตอนต้นงวด เป็นระยะเวลา n งวด ซึ่งเขียนแสดงได้ดังรูป



หา $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ ได้ดังนี้

ถ้าต้องการมีเงินงวดแรกจะต้องมีเงินขณะนี้ $= 1$

ถ้าต้องการมีเงินงวดที่ 2 จะต้องมีเงินขณะนี้ $= v$

ถ้าต้องการมีเงินงวดที่ 3 จะต้องมีเงินขณะนี้ $= v^2$

.
.
.

ถ้าต้องการมีเงินงวด n จะต้องมีเงินขณะนี้ $= v^{n-1}$

$\therefore$ ค่าปัจจุบันของ Annuity Due ที่ชำระเงินปีละ 1 หน่วย $= \ddot{a}_{\overline{n}|}$

$$= 1 + v + v^2 + \ldots + v^{n-1}$$

จาก $\quad \ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + v + v^2 + \ldots + v^{n-1}$ — เป็น G.P.

$$\therefore \quad \ddot{a}_{\overline{n}|} = \frac{1(1 - v^n)}{1 - v}$$

เอา v หารทั้งเศษและส่วนจะได้

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = \frac{\frac{1}{v}(1 - v^n)}{\frac{1}{v} - 1} = \frac{1 - v^n}{v(\frac{1}{v} - 1)}$$

$$= \frac{1 - v^n}{1 - v} = \frac{1 - v^n}{1 - (\frac{1}{1 + i})} = \frac{1 - v^n}{\frac{1 + i - 1}{1 + i}}$$

$$= \frac{1 - v^n}{\frac{i}{1 + i}} = \frac{1 - v^n}{i(\frac{1}{1 + i})}$$

$$\boxed{\therefore \quad \ddot{a}_{\overline{n}|} = \frac{1 - v^n}{iv}}$$

จาก $\quad \ddot{a}_{\overline{n}|} = \dfrac{1 - v^n}{iv}$

$$= \frac{1 - v^n}{i\left[\frac{1}{1 + i}\right]} = \frac{(1 + i)(1 - v^n)}{i}$$

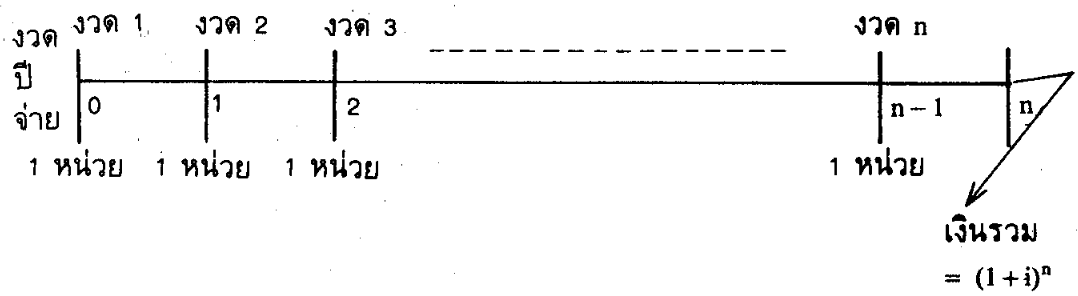
$$\boxed{\therefore \quad \ddot{a}_{\overline{n}|} = (1+i)\, a_{\overline{n}|}}$$

และจาก $\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + v + v^2 + \ldots + v^{n-1}$

$$= 1 + (v + v^2 + \ldots + v^{n-1})$$

$$\boxed{\therefore \quad \ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + a_{\overline{n-1}|}}$$

สำหรับเงินรวมของค่ารายปีที่จ่ายงวดละ 1 หน่วย ตอนต้นงวดเป็นระยะเวลา n งวด ใช้สัญญลักษณ์แทนด้วย $\ddot{s}_{\overline{n}|}$ เขียนรูปแสดงได้ดังนี้



ในการจ่ายเงินรวดแรกต้นปีที่ 1 จะได้ดอกเบี้ย n ปี $\therefore$ เงินรวมมีค่าเท่ากับ $(1+i)^n$ ในปลายปีที่ n

$\therefore$ เมื่อจ่ายเงินงวดที่ 1 มีเวลาหาผลประโยชน์ n ปี $\therefore$ เงินรวม $= (1+i)^n$

เมื่อจ่ายเงินงวดที่ 2 มีเวลาหาผลประโยชน์ n − 1 ปี $\therefore$ เงินรวม $= (1+i)^{n-1}$

เมื่อจ่ายเงินงวดที่ 3 มีเวลาหาผลประโยชน์ n − 2 ปี $\therefore$ เงินรวม $= (1+i)^{n-2}$

.

.

.

เมื่อจ่ายเงินงวดที่ n มีเวลาหาผลประโยชน์ 1 ปี $\therefore$ เงินรวม $= (1+i)$

$\therefore$ **เงินรวมของ Annuity Due ที่ชำระปีละ 1 หน่วย เป็นเวลา n ปี** $= \ddot{S}_{\overline{n}|}$

$$\therefore \quad \ddot{S}_{\overline{n}|} = (1+i)^n + (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \ldots + (1+i) \qquad \text{เป็น G.P.}$$

$$= \frac{(1+i)\left[(1+i)^n - 1\right]}{(1+i) - 1}$$

$$= \frac{(1+i)\left[(1+i)^n - 1\right]}{i}$$

$$\boxed{\therefore \quad \ddot{S}_{\overline{n}|} = \frac{(1+i)^n - 1}{iv}}$$

จาก
$$\ddot{S}_{\overline{n}|} = \frac{(1+i)\left[(1+i)^n - 1\right]}{i}$$

$$= (1+i)\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

$$\boxed{\therefore \quad \ddot{S}_{\overline{n}|} = (1+i)\, S_{\overline{n}|}}$$

หรือ
$$\ddot{S}_{\overline{n}|} = (1+i)(1+i)^n\, a_{\overline{n}|}$$

หรือ
$$\ddot{S}_{\overline{n}|} = (1+i)^n\, \ddot{a}_{\overline{n}|}$$

และจาก
$$\ddot{S}_{\overline{n}|} = (1+i)^n + (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \ldots + (1+i)$$

$$= \left[(1+i)^n + (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \ldots + (1+i) + 1\right] - 1$$

$$\boxed{\therefore \quad \ddot{S}_{\overline{n}|} = S_{\overline{n+1}|} - 1}$$

การหาค่า $a_{\overline{n}|}$, $S_{\overline{n}|}$, $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ $\ddot{S}_{\overline{n}|}$ นั้น หาได้จากตารางที่ I ในภาคผนวก ซึ่งในตารางจะให้เฉพาะค่า $a_{\overline{n}|}$ และ $S_{\overline{n}|}$ เท่านั้น ดำเนินการหาค่า $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ และ $\ddot{S}_{\overline{n}|}$ จะต้องใช้สูตร $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ และ $\ddot{S}_{\overline{n}|}$ ที่อยู่ในรูปของ $a_{\overline{n}|}$ และ $S_{\overline{n}|}$ และเลือกใช้ตามอัตราดอกเบี้ยทบต้นที่โจทย์กำหนดให้ สำหรับในตารางที่ I นั้น ใช้สำหรับดอกเบี้ยทบต้น 3%

ตัวอย่างที่ 1

จงหาค่าปัจจุบันและเงินรวมของ Annuity Immediate ที่จ่ายเงินปีละ 200 บาท เป็นเวลา 20 ปี ใช้อัตราดอกเบี้ยร้อยละ 3 ต่อปี

วิธีทำ

ค่าปัจจุบันของ Annuity Immediate คือ $a_{\overline{n}|}$

$\therefore$ ค่าปัจจุบันของ Annuity Immediate ที่จ่ายเงินปีละ 200 บาท เป็นเวลา 20 ปี คือ $200a_{\overline{20}|}$

เปิดตาราง I อัตราดอกเบี้ยร้อยละ 3 ต่อปี

$$\begin{aligned} \therefore \quad 200a_{\overline{20}|} &= 200 \times 14.8774749 \\ &= 200 \times 14.8775 \\ &= 2975.50 \quad \text{บาท} \qquad \text{Ans} \end{aligned}$$

ค่าเงินรวมของ Annuity Immediate คือ $S_{\overline{n}|}$

เปิดตาราง I จะได้

$$\begin{aligned} \therefore \quad 200S_{\overline{20}|} &= 200 \times 26.870374 = 200 \times 26.8704 \\ &= 5374.08 \quad \text{บาท} \qquad \text{Ans} \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 2

กรมธรรม์ประกันชีวิตฉบับหนึ่ง มีข้อตกลงว่าให้ผู้รับประโยชน์เลือกว่าจะรับผลประโยชน์เป็นเงินสดทันทีเป็นเงิน 100,000 บาท หรือจะรับเป็นรายปีในตอนสิ้นปีของทุกปี เป็นจำนวนเท่า ๆ กัน เป็นเวลา 15 ปี จงหาจำนวนเงินที่จ่ายรายปี (annual payment) ถ้าสมมติว่าใช้อัตรา

ดอกเบี้ย 3% ต่อปี

ให้ k เป็นจำนวนเงินที่จ่ายรายปี ที่จ่ายเท่า ๆ กันทุกสิ้นปี นั่นคือ เราจะได้ว่า ค่าปัจจุบันของค่ารายปีที่จ่ายปีละ k บาทตอนสิ้นงวด (Annuity immediate) เป็นเวลา 15 ปี จะเท่ากับ $k.a_{\overline{15}|}$ ซึ่งค่าปัจจุบันนี้จะมีค่าเท่ากับผู้รับประโยชน์รับเงินสดทันทีเป็นเงิน 100,000 บาท ซึ่งเขียนรูปแสดงได้ดังนี้

ปี	0	1	2	3	------------------	15
จ่าย		ครั้งที่ 1	ครั้งที่ 2	ครั้งที่ 3	------------------	จ่ายครั้งที่ 15
จำนวนเงินจ่ายรายปี		k	k	k	------------------	k

$$\therefore \quad k.a_{\overline{15}|} = 100,000$$

$$k = \frac{100,000}{a_{\overline{15}|}}$$

เปิดตารางที่ I หาค่า $a_{\overline{15}|}$ อัตราดอกเบี้ย 3% แล้วแทนค่าจะได้

$$k = \frac{100,000}{11.9379351} = \frac{100,000}{11.93794}$$

$$= 8376.66 \quad \text{บาท}$$

$\therefore$ จำนวนเงินที่จ่ายรายปี มีค่าเท่ากับ 8376.66 บาท Ans

ตัวอย่างที่ 3

จงพิสูจน์ว่า

ก. $\frac{1}{a_{\overline{n|}}} = \frac{1}{S_{\overline{n|}}} + i$

ข. $\frac{1}{\ddot{a}_{\overline{n|}}} = \frac{1}{\ddot{S}_{\overline{n|}}} + d$

ค. $v^n = 1 - d\,\ddot{a}_{\overline{n|}}$

พิสูจน์

ก. $\frac{1}{a_{\overline{n|}}} = \frac{1}{S_{\overline{n|}}} + i$

$$\therefore \quad \frac{1}{S_{\overline{n|}}} + i = \frac{1}{(1+i)^n a_{\overline{n|}}} + i$$

$$= \frac{v^n}{a_{\overline{n|}}} + i$$

$$= \frac{v^n + i\,a_{\overline{n|}}}{a_{\overline{n|}}}$$

$$= \frac{v^n + \cancel{i}\left(\frac{1 - v^n}{\cancel{i}}\right)}{a_{\overline{n|}}}$$

$$= \frac{v^n + 1 - v^n}{a_{\overline{n|}}}$$

$$= \frac{1}{a_{\overline{n|}}}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{a_{\overline{n|}}} = \frac{1}{S_{\overline{n|}}} + i$$ QED

ข. $\frac{1}{\ddot{a}_{\overline{n}|}} = \frac{1}{\ddot{S}_{\overline{n}|}} + d$

$$\because \quad \frac{1}{\ddot{S}_{\overline{n}|}} + d = \frac{1}{(1+i)S_{\overline{n}|}} + \frac{i}{1+i}$$

$$= \frac{1 + i\,S_{\overline{n}|}}{(1+i)S_{\overline{n}|}}$$

$$= \frac{1 + \cancel{i}\left[\frac{(1+i)^n - 1}{\cancel{i}}\right]}{(1+i)S_{\overline{n}|}}$$

$$= \frac{\cancel{1} + (1+i)^n - \cancel{1}}{(1+\;)S_{\overline{n}|}} = \frac{(1+i)^n}{(1+i)S_{\overline{n}|}}$$

$$= \frac{\cancel{(1+i)^n}}{(1+i)\cancel{(1+i)^n}\,a_{\overline{n}|}} = \frac{1}{(1+i)\,a_{\overline{n}|}}$$

$$= \frac{1}{\ddot{a}_{\overline{n}|}}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{\ddot{a}_{\overline{n}|}} = \frac{1}{\ddot{S}_{\overline{n}|}} + d \qquad \text{QED}$$

ค. $v^n = 1 - d\,\ddot{a}_{\overline{n}|}$

$$\therefore \quad 1 - d\,\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 - \left(\frac{i}{\cancel{1+i}}\right)\cancel{(1+i)}\,a_{\overline{n}|}$$

$$= 1 - i\,a_{\overline{n}|}$$

$$= 1 - \cancel{i}\left[\frac{1 - v^n}{\cancel{i}}\right]$$

$$= 1 - 1 + v^n = v^n$$

$$\therefore \quad v^n = 1 - d\,\ddot{a}_{\overline{n}|} \qquad \text{QED}$$

6.3 เบี้ยประกันสุทธิชำระครั้งเดียว (Net Single Premium)

ในหัวเรื่องที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้ เราสนใจที่จะหาค่าปัจจุบันของเงินผลประโยชน์ที่บริษัทจะต้องจ่ายให้แก่ผู้เอาประกันทั้งหมดในอนาคต โดยการจ่ายเงินดังกล่าวนั้นขึ้นอยู่กับการตายหรือการมีชีวิตอยู่ของบุคคลใดบุคคลหนึ่ง หรือกลุ่มคนใดกลุ่มคนหนึ่งตามที่ระบุไว้ในสัญญา ซึ่งค่าปัจจุบันนี้จะใช้กรณีของการประกันชีวิต และเราจะเรียกค่าปัจจุบันนี้ว่าเป็นเบี้ยประกันสุทธิชำระครั้งเดียว (Net Single Premium)

เบี้ยประกันสุทธิชำระครั้งเดียว (Net Single Premium) คือ จำนวนเงินที่ผู้เอาประกันจะต้องชำระให้กับบริษัทรับประกันชีวิตตามที่ได้ตกลงไว้กับบริษัท โดยชำระเป็นเงินก้อนครั้งเดียวเท่านั้น ไม่ต้องชำระเบี้ยประกันใด ๆ อีกต่อไป

เนื่องจากเบี้ยประกันสุทธิจ่ายครั้งเดียว เป็นเบี้ยประกันที่เราคิดจากอัตราดอกเบี้ย และอัตรามรณะ ดังนั้น ค่าใช้จ่ายอื่น ๆ เช่น ภาษีประกัน กำไรของบริษัท ค่านายหน้า ค่าภาษีอากรแสตมป์ เป็นต้น จะไม่รวมอยู่ในเบี้ยประกันสุทธิจ่ายครั้งเดียว แต่ถ้านำค่าใช้จ่ายดังกล่าวนี้มารวมด้วย จะเรียกว่า เบี้ยประกันรวมยอด (Gross Premium) ซึ่งจะเป็นเบี้ยประกันที่ผู้เอาประกันจะต้องชำระให้กับบริษัทจริง ๆ

6.4 การสะสมทรัพย์ที่แท้จริง (Pure Endowment)

หมายถึง เงินที่จะจ่ายเมื่อสิ้นสุดระยะเวลาใดเวลาหนึ่งที่กำหนดไว้ โดยมีเงื่อนไขว่าในวันที่กำหนดจ่าย บุคคลที่เรากำหนดไว้จะต้องมีชีวิตอยู่ จึงจะมีการจ่ายเงินจำนวนนั้น ถ้าบุคคลนั้นตายไปก่อนเงินจำนวนนั้นก็จะไม่จ่าย บุคคลที่กำหนดไว้นี้จะเป็นใครก็ได้ แล้วแต่ที่จะกำหนดไว้ในเงื่อนไข

ถ้าเงินที่กำหนดจะจ่ายเท่ากับ 1 หน่วย จ่ายในเวลา n ปีข้างหน้า และถ้าบุคคลที่กำหนดนั้น

อายุ x ปี ก็จะจ่ายเงินให้ เมื่อบุคคลนี้อายุครบ x + n ปี ค่าปัจจุบันของเงินจำนวนนี้เราเรียกว่า Pure endowment ซึ่งเป็นเงินที่บริษัทประกันชีวิตจะเรียกเก็บจากผู้เอาประกัน (เบี้ยประกันนี้ยังไม่ได้รวมค่าใช้จ่ายต่าง ๆ)

ให้ $_nE_x$ เป็นค่าปัจจุบัน (Present value) หรือ เบี้ยประกันสุทธิจ่ายครั้งเดียว (NSP) ของ Pure endowment ของเงิน 1 หน่วย ที่จะต้องจ่ายให้กับคนอายุ x ปี ใน n ปีข้างหน้า และบุคคลที่กำหนดไว้นี้จะต้องมีชีวิตอยู่จนถึงวันจ่ายเงินดังกล่าว

จากคนอายุ x ปี ซึ่งมีจำนวน ℓ_x คน เมื่อครบ n ปี จะมีคนที่มีชีวิตเหลืออยู่ ℓ_{x+n} คน ซึ่งบริษัทประกันชีวิตจะจ่ายเงินจำนวน 1 หน่วยให้กับคน ℓ_{x+n} คน ที่เหลืออยู่

$\therefore$ จำนวนเงินที่บริษัทจะต้องจ่ายจะเท่ากับ $= 1 \times \ell_{x+n}$ หน่วย

$= \ell_{x+n}$ หน่วย

และเนื่องจากจำนวนเงิน ℓ_{x+n} หน่วยนี้ บริษัทจะจ่ายให้ผู้เอาประกันอีก n ปีข้างหน้า เพราะฉะนั้นค่าปัจจุบันของเงินจำนวน ℓ_{x+n} หน่วย จะมีค่าเท่ากับ $v^n \cdot \ell_{x+n}$ หน่วย ค่าปัจจุบัน $v^n\ell_{x+n}$ หน่วยนี้ จะต้องเท่ากับจำนวนเบี้ยประกันสุทธิที่จ่ายครั้งเดียว ที่เรียกเก็บจากผู้เอาประกันอายุ x ปี จำนวน ℓ_x คน

จากจำนวนคน ℓ_x คน แต่ละคนจะต้องจ่ายเบี้ยประกันสุทธิครั้งเดียว (Net Single Premium) $_nE_x$ หน่วย

$\therefore$ Net Single Premium หรือ Present value

ที่คน ℓ_x คน จะต้องจ่ายให้บริษัททั้งหมด $= {_nE_x} \times \ell_x$ หน่วย นั่นคือ เราจะได้ว่า

หรือ $$_nE_x \times \ell_x = v^n \ell_{x+n}$$

$\therefore$ $$\boxed{{}_nE_x = v^n \frac{\ell_{x+n}}{\ell_x}}$$

หรือ $${}_nE_x = v^n \cdot {}_np_x$$

Commutation function

เป็น function ที่สร้างขึ้นมา เพื่อความสะดวกในการคำนวณค่าต่าง ๆ ได้โดยไม่ต้องใช้ตารางมรณะ สำหรับตาราง Commutation function แสดงไว้ในตารางที่ III ซึ่งเป็นค่าที่คำนวณมาจากตารางมรณะ 1958 CSO ใช้อัตราดอกเบี้ย 3%

โดยกำหนดให้ $D_x = v^x \cdot \ell_x$, $C_x = v^{x+1} d_x$

$$N_x = \sum_{t=0}^{\infty} D_{x+t} \quad , \quad M_x = \sum_{t=0}^{\infty} C_{x+t}$$

$$S_x = \sum_{t=0}^{\infty} N_{x+t} \quad , \quad R_x = \sum_{t=0}^{\infty} M_{x+t}$$

จาก ${}_nE_x = v^n \frac{\ell_{x+n}}{\ell_x}$ ถ้าคูณและหารสมการนี้ด้วย v^x ก็จะได้

$${}_nE_x = \frac{v^x}{v^x}\left[v^n \frac{\ell_{x+n}}{\ell_x}\right]$$

$$= \frac{v^{x+n}\,\ell_{x+n}}{v^x\,\ell_x}$$

ถ้าใช้ Commutation function เพื่อสะดวกในการคำนวณหาค่า ${}_nE_x$ โดยไม่ต้องเปิดตารางมรณะ หาค่า ℓ_x, ℓ_{x+n} และเปิดตาราง Present value หาค่า v^n

ด้วยการแทนค่า $v^x \cdot \ell_x = D_x$ **และ** $v^{x+n} \ell_{x+n} = D_{x+n}$

$$\boxed{\therefore \quad nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}}$$

ซึ่งเราเปิดตารางที่ III **หาค่า** D_{x+n} **และ** D_x **ก็จะหาค่า** nE_x **ได้ทันที**

ตัวอย่างที่ 1

ชายคนหนึ่งปัจจุบันอายุ 30 ปี ได้ทำสัญญากับบริษัทประกันชีวิตไว้ว่า จะได้รับเงินจำนวน 100,000 บาท เมื่อเขาอายุ 50 ปีเต็ม จงคำนวณหาค่าปัจจุบันของเงินจำนวนนั้น (ใช้อัตราดอกเบี้ย 3%)

ในที่นี้โจทย์ต้องการให้เราหาค่าปัจจุบันของเงิน 100,000 บาท ซึ่งจะจ่ายให้กับชายอายุ 30 ปี ในอีก 20 ปีข้างหน้า

$\because$ ค่าปัจจุบันของเงิน 1 บาท ซึ่งจะจ่ายให้กับชายอายุ 30 ปี ในอีก 20 ปีข้างหน้า คือ $20E_{30}$

$\therefore$ ค่าปัจจุบันของเงิน 100,000 บาท ที่จะจ่ายให้กับชายคนนี้ในอีก 20 ปีข้างหน้า คือ $100{,}000\ 20E_{30}$ ซึ่ง

$$100{,}000\ 20E_{30} = 100{,}000 \frac{D_{30+20}}{D_{30}}$$

$$= 100{,}000 \frac{D_{50}}{D_{30}}$$

เปิดตารางที่ III หาค่า D_{50} และ D_{30} ได้

$$D_{30} = 3{,}905{,}782.0$$

$$D_{50} = 1{,}998{,}744.0$$

$$\therefore \quad 100{,}000\ {}_{20}E_{30} = 100{,}000 \times \frac{1{,}998{,}744}{3{,}905{,}782}$$

$$= 100{,}000 \times 0.5117397$$

$$= 51173.97$$

หรืออาจจะใช้ตารางที่ VII **ที่ให้ค่า** $1{,}000\ {}_nE_x = 1{,}000\ \frac{D_{x+n}}{D_x}$ **ก็ได้ โดยดูที่** $x = 30$ **และ** $n = 20$ **จะได้**

$$1000\ {}_{20}E_{30} = 511.7398$$

$$\therefore \quad 100{,}000\ {}_{20}E_{30} = 100(1000\ {}_{20}E_{30})$$

$$= 100 \times 511.7398$$

$$= 51173.98$$

ตัวอย่างที่ 2

ชายคนหนึ่งอายุ 20 ปี ขณะนี้มีเงินสด 1,000 บาท ต้องการซื้อ Pure endowment เพื่อจะรับเงินในขณะที่เขาอายุ 40 ปีเต็ม โดยมีข้อตกลงว่าจะไม่รับผลประโยชน์ใดๆ จากบริษัท ถ้าเขาตายไปก่อนอายุ 40 ปี จงหาทุนประกัน (คือจำนวนเงินที่บริษัทจะจ่ายให้) โดยใช้อัตราดอกเบี้ย 3%

ถ้าให้ k เป็นจำนวนทุนประกันของ Pure endowment ดังกล่าว ซึ่งเราจะได้ว่า

$$1000 = k \times {}_{20}E_{20}$$

$$\therefore \quad k = \frac{1000}{{}_{20}E_{20}} = \frac{1{,}000}{\frac{D_{40}}{D_{20}}}$$

เปิดตารางที่ III ได้ค่า

$$D_{20} = 5{,}351{,}272.8$$

$$D_{40} = 2,833,001.8$$

แทนค่าจะได้

$$ {}_{20}E_{20} = \frac{2,833,001.8}{5,351,272.8} = 0.529407 $$

$$ \therefore \quad k = \frac{1000}{0.529407} = 1888.906 = 1888.91 \quad \text{บาท} $$

$\therefore$ เงินทุนประกัน = 1888.91 บาท

หรือจะเปิดตารางที่ VIII ซึ่งให้ค่า $\frac{1}{{}_{n}E_x} = \frac{D_x}{D_{x+n}}$ ก็ได้ โดยดูจาก $x = 20$ และ $n = 20$ จะได้

$$ \frac{1}{{}_{20}E_{20}} = 1.888906 $$

$$ \therefore \quad \frac{1000}{{}_{20}E_{20}} = 1000 \times 1.888906 $$

$$ = 1888.906 = 1888.91 \quad \text{บาท} $$

ตัวอย่างที่ 3

จงพิสูจน์ว่า ${}_{m}E_x \cdot {}_{n}E_{x+m} = {}_{m+n}E_x$

$$ \text{จาก} \quad {}_{m}E_x \cdot {}_{n}E_{x+m} = \frac{\cancel{D_{x+m}}}{D_x} \cdot \frac{D_{x+m+n}}{\cancel{D_{x+m}}} $$

$$ = \frac{D_{x+m+n}}{D_x} $$

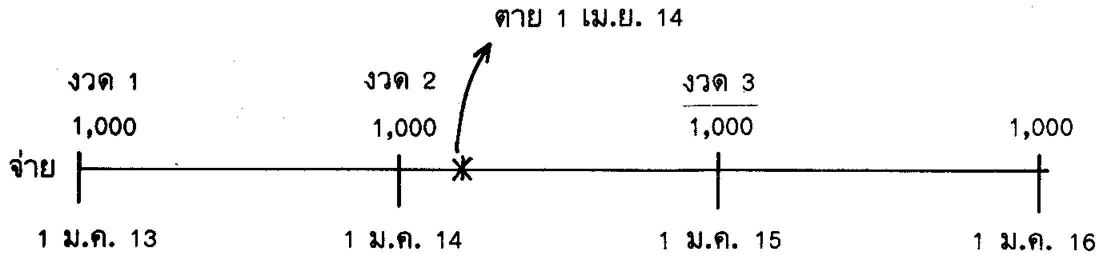
$$ \therefore \quad {}_{m}E_x \cdot {}_{n}E_{x+m} = {}_{m+n}E_x \qquad \text{QED} $$

6.5 เงินได้ประจำรายปี หากมีชีวิตอยู่รอด (Life Annuities)

Life annuity เป็นอนุกรมของการจ่ายเงินเป็นรายงวด ๆ ละเท่า ๆ กัน โดยจะจ่ายเมื่อถึงเวลาที่กำหนด และผู้รับ (annuitant) จะต้องมีชีวิตอยู่ในกำหนดระยะเวลาที่จะจ่ายนั้นด้วย หรือกล่าวอีกอย่างหนึ่งได้ว่า life annuity เป็นการจ่าย annuity ที่อาศัยการทรงชีพของบุคคลใดบุคคลหนึ่งหรือหลายคนมาเป็นข้อกำหนดในการจ่ายเงิน ซึ่งต่างจาก Annuity Certain ที่กล่าวมาแล้วที่กำหนดเฉพาะระยะเวลาในการจ่ายเงินเท่านั้น สำหรับ Life Annuity ที่จะกล่าวถึงนี้จะเป็น Life Annuity ที่อาศัยเฉพาะการทรงชีพของบุคคลคนเดียว และการจ่ายเงินจ่ายเป็นรายปี

Life Annuity ที่มีเงื่อนไขว่า ถ้าบุคคลที่กำหนดไว้ตายก่อนที่จะถึงกำหนดที่จะจ่ายครั้งต่อไป จะต้องมีการจ่ายเงินอีกจำนวนหนึ่งในขณะที่ตาย โดยคิดเทียบส่วนจากระยะเวลาจากการจ่ายครั้งก่อน เรียกว่า Complete life annuity หรือ Apportionate life Annuity

ตัวอย่างเช่น



ถ้าผู้รับตาย เมื่อวันที่ 1 เมษายน 2514

ในกรณีนี้ บริษัทจะต้องจ่ายเงินอีกจำนวนหนึ่งในขณะที่ตาย โดยคิดเทียบส่วนจากระยะเวลาของการจ่ายครั้งก่อน ดังนี้

ระยะเวลาคิดเป็น $= \frac{3}{12}$ (1 ม.ค. - 1 เม.ย. คิดเป็น 3 ส่วน ใน 12 ส่วน)

$\therefore$ เงินที่บริษัทจะต้องจ่ายอีก = $\frac{3}{12} \times 1000 = 250$ บาท

แต่ถ้ามีเงื่อนไขว่า ถ้าบุคคลที่กำหนดไว้ตายแล้วจะไม่มีการจ่ายเงินใด ๆ ทั้งสิ้น เรียกว่า Curtatè Life Annuity หรือ Non - Apportionate Life Annuity สำหรับที่เราจะเรียนกันนั้นเราจะเรียนเฉพาะ Curtate life Annuity

การแบ่งประเภทของ Life Annuity **ตามลักษณะการจ่ายของค่ารายปี** เราแบ่งได้เป็น

1. **ค่ารายปีตลอดชีพ** (Whole Life Annuity) เป็น annuity ที่ไม่มีระยะเวลากำหนดไว้ การจ่ายเงินจะจ่ายไปจนกว่าบุคคลที่กำหนดไว้จะตาย จึงจะหยุดจ่าย ค่ารายปีตลอดชีพ บางทีเขียนแทนด้วย Life annuity เฉย ๆ

2. **ค่ารายปีแบบชั่วระยะเวลา** (Temporary Life Annuity) เป็น annuity ที่กำหนดระยะเวลาไว้ การจ่ายเงินจะจ่ายเมื่อบุคคลที่กำหนดไว้มีชีวิตอยู่ และจะจ่ายไปเรื่อย ๆ จนสิ้นสุดระยะเวลาที่กำหนดไว้เท่านั้น แต่ถ้าบุคคลที่กำหนดไว้ตายลงก่อนครบกำหนด ก็จะหยุดจ่าย

การคำนวณหาค่าปัจจุบัน และเงินรวม สำหรับ Whole life annuity **และ** Temporary life annuity มีดังนี้

6.6 Whole life Annuity แบ่งได้เป็น

ก. ค่ารายปีตลอดชีพที่จ่ายตอนสิ้นปี (Whole life annuity immediate)

ให้ a_x เป็นค่าปัจจุบัน (present value) คือ เบี้ยประกันสุทธิที่จ่ายครั้งเดียว (Net Single premium) ของค่ารายปีตลอดชีพที่จ่ายตอนสิ้นปี (Whole life annuity immediate)

ดังนั้น a_x คือ จำนวนเงินที่คนอายุ x ปี ทุกคนจะต้องจ่ายให้กับบริษัทเพื่อที่จะรับเงินค่ารายปี ๆ ละ 1 บาท ทุก ๆ สิ้นปีไปจนกว่าจะตาย

จากคนอายุ x ปี จำนวน ℓ_x คน แต่ละคนจะจ่ายเงินให้บริษัทคนละ a_x บาท $\therefore$ เบี้ยประกันที่บริษัทจะได้รับจะเท่ากับ $\ell_x \cdot a_x$ บาท

เมื่อสิ้นปีที่ 1 จะมีคนเหลืออยู่ ℓ_{x+1} คน ที่จะมีชีวิตอยู่เพื่อรับเงินค่ารายปีคนละ 1 บาท $\therefore$ จำนวนเงินที่ได้รับทั้งหมดจะเท่ากับ $1 \times \ell_{x+1}$ บาท ซึ่งเท่ากับ ℓ_{x+1} บาท ดังนั้นค่าปัจจุบันของเงิน ℓ_{x+1} บาท จะเท่ากับ $v \cdot \ell_{x+1}$ บาท

เช่นเดียวกัน เมื่อสิ้นปีที่ 2 จะมีคนเหลืออยู่ ℓ_{x+2} คน ที่จะมีชีวิตอยู่เพื่อรับเงินค่ารายปีคนละ 1 บาท $\therefore$ จำนวนเงินที่ได้รับทั้งหมดจะเท่ากับ $1 \times \ell_{x+2}$ บาท ซึ่งเท่ากับ ℓ_{x+2} บาท ดังนั้น ค่าปัจจุบันของเงิน ℓ_{x+2} บาท จะเท่ากับ $v^2 \cdot \ell_{x+2}$ บาท

ทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จนถึงอายุสูงสุด ที่คาดว่าจะมีชีวิตอยู่ ก็จะได้ว่า ค่าปัจจุบันของผลประโยชน์ทุกจำนวนรวมกัน มีค่าเท่ากับ

$$v \cdot \ell_{x+1} + v^2\ell_{x+2} + v^3\ell_{x+3} + \ldots + v^{\omega-x-1}\,\ell_{\omega-1}$$

อายุ	x	x + 1	x + 2	x + 3	------------
งวด		1	2	3	
จ่าย		1	1	1	

ซึ่งค่าปัจจุบันของผลประโยชน์ทุกจำนวนรวมกันที่ได้นี้ จะเท่ากับเบี้ยประกันที่บริษัทได้รับ คือ $\ell_x \cdot a_x$

$$\therefore \qquad \ell_x \cdot a_x \;=\; v\ell_{x+1} + v^2\ell_{x+2} + v^3\ell_{x+3} + \ldots v^{\omega-w-1} \cdot \ell_{\omega-1}$$

$$a_x \;=\; \frac{v\ell x_{x+1} + v^2\ell_{x+2} + v^3\ell_{x+3} + \ldots + v^{\omega-x-1} \cdot \ell_{\omega-1}}{\ell_x}$$

เอา $\frac{v^x}{v^x}$ คูณตลอดจะได้

$$a_x \;=\; \frac{v^{x+1}\ell_{x+1} + v^{x+2}\ell_{x+2} + v^{x+3}\ell_{x+3} + \ldots + v^{\omega-1}\ell_{\omega-1}}{v^x\ell_x}$$

ถ้าให้ $\qquad D_x \;=\; v^x\ell_x$

$\therefore \qquad D_{x+1} \;=\; v^{x+1}\ell_{x+1}$ ทำเช่นนี้ต่อไปเรื่อย ๆ จะได้

$$a_x \;=\; \frac{D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \ldots + D_{\omega-1}}{D_x}$$

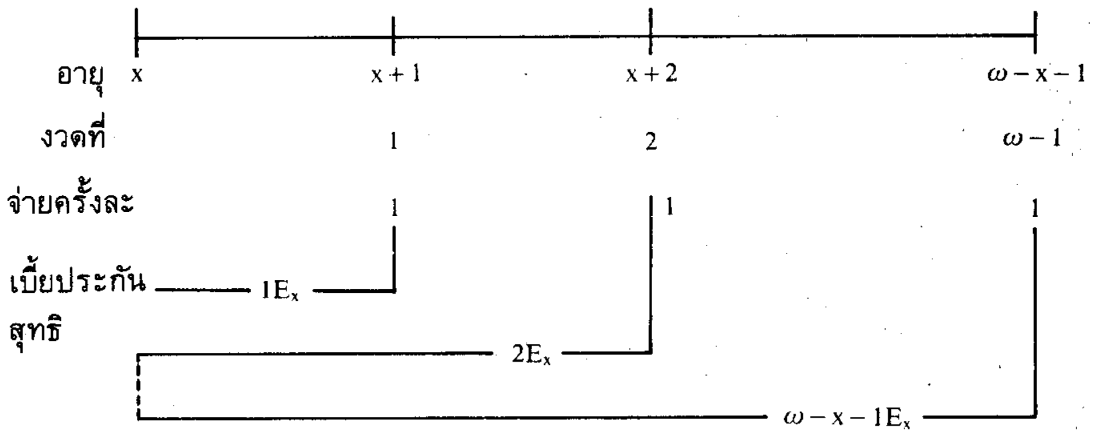
และถ้าให้ $\quad N_x \;=\; D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots + D_{\omega-1}$

$\therefore \qquad N_{x+1} \;=\; D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots + D_{\omega-1}$

$\therefore \qquad \boxed{a_x \;=\; N_{x+1}/D_x}$

การหาค่า a_x นี้ก็ได้จากการเปิดตาราง Commutation function 3% ตารางที่ III

นอกจากนี้ a_x ยังอาจจะหาได้โดยใช้ผลรวมของ Pure endowment ที่มีการจ่ายเงินในวันครบ 1 ปี, 2 ปี, 3 ปี, ไปเรื่อย ๆ ได้



$$\therefore \quad a_x = {}_1E_x + {}_2E_x + {}_3E_x + \ldots + {}_{\omega-x-1}E_x$$

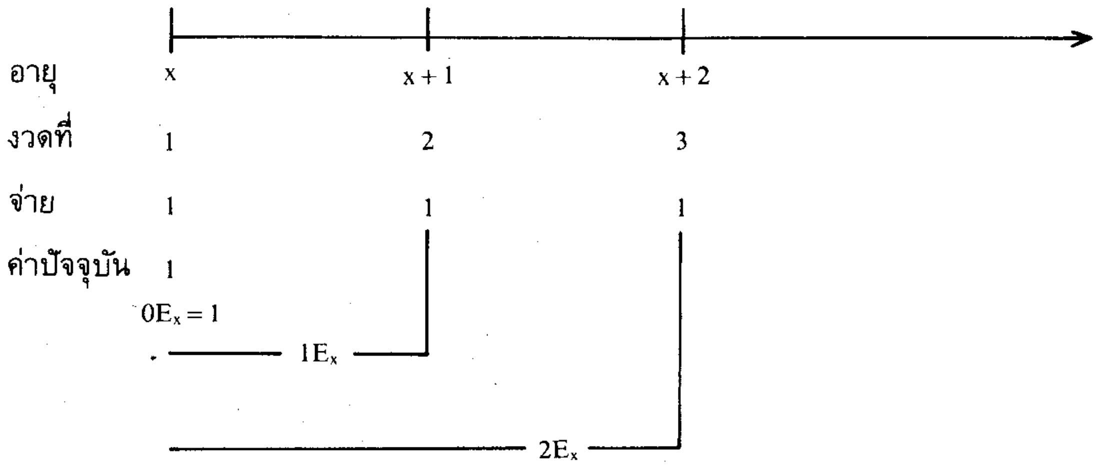
$$= \frac{D_{x+1}}{D_x} + \frac{D_{x+2}}{D_x} + \frac{D_{x+3}}{D_x} + \ldots + \frac{D_{\omega-1}}{D_x}$$

$$= \frac{D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \ldots + D_{\omega-1}}{D_x}$$

$$\therefore \quad a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

ข. ค่ารายปีตลอดชีพที่จ่ายตอนต้นปี (Whole life annuity due) ให้ $\ddot{a}_x$ เป็นค่าปัจจุบัน (present value) หรือเบี้ยประกันสุทธิจ่ายครั้งเดียว (Net Single premium) ของค่ารายตลอดชีพที่มีการจ่ายเงินตอนต้นปี

ดังนั้น $\ddot{a}_x$ คือ จำนวนเงินที่คนอายุ x ปี ทุกคนจะต้องจ่ายให้กับบริษัท เพื่อที่จะรับเงินค่ารายปี ๆ ละ 1 บาท ทุก ๆ ต้นปี ไปจนกว่าจะตาย เขียนแทนได้ดังรูป



จนกระทั่งหมดตารางมรณะ

$$\therefore \quad \ddot{a}_x = {}_{0}E_x + {}_{1}E_x + {}_{2}E_x + \ldots {}_{\omega-x-1}E_x$$

$$= 1 + a_x \qquad (\because {}_{0}E_x = \frac{D_x}{D_x} = 1)$$

$$= 1 + \frac{N_{x+1}}{D_x} = \frac{D_x + N_{x+1}}{D_x}$$

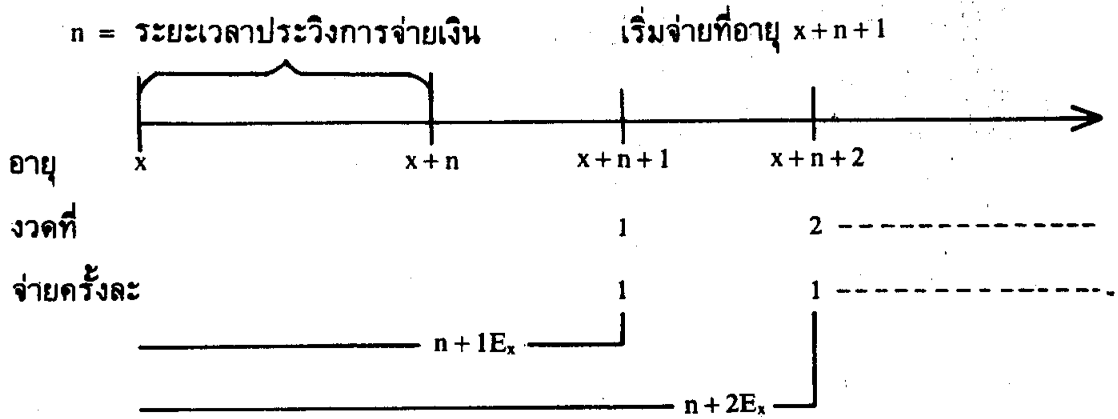
$$\therefore \boxed{\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}} \quad (\because N_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots + D_{\omega-1})$$

ค. ค่ารายปีตลอดชีพที่ประวิงเวลาการจ่ายเงิน และจ่ายตอนสิ้นปี (Deferred Whole life annuity immediate)

ถ้าให้ระยะเวลาประวิงการจ่ายเงิน เป็น n ปี แล้วรอไปอีก 1 ปี จึงจะจ่ายเงินงวดแรก

ให้ ${}_{n/}a_x$ เป็นค่าปัจจุบันเบี้ยประกันสุทธิจ่ายครั้งเดียวของค่ารายปีตลอดชีพที่มีการจ่ายเงินตอนสิ้นปี หลังจากระยะเวลาประวิงการจ่ายเงิน n ปี

ซึ่งก็คือ ค่าปัจจุบันของค่ารายปี ที่จ่ายเงินปีละ 1 บาท โดยเริ่มจ่ายให้แก่คนอายุ x ปี เมื่อเขาอายุ x+n+1 ปี และจ่ายไปเรื่อย ๆ จนกว่าเขาจะตาย นั่นเอง เขียนรูปแสดงได้ดังนี้



$$\therefore\quad n/a_x \;=\; {}_{n+1}E_x + {}_{n+2}E_x + \ldots$$

$$= \frac{D_{x+n+1} + D_{x+n+2} + \ldots}{D_x}$$

$$\boxed{n/a_x = \frac{N_{x+n+1}}{D_x}}$$

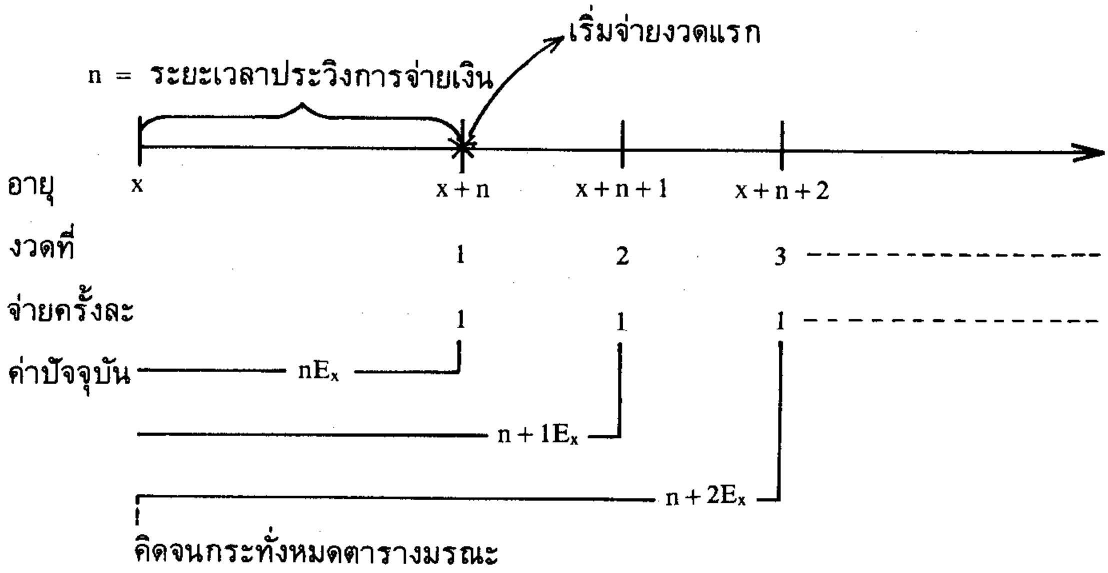
ง. ค่ารายปีตลอดชีพที่ประวิงเวลาการจ่ายเงิน และจ่ายตอนต้นปี (Deferred Whole life annuity due)

ให้ n = ระยะเวลาประวิงการจ่ายเงิน

และงวดแรกจะเริ่มจ่ายเมื่อปลายปีที่ n

ให้ $n/\ddot{a}_x$ เป็นค่าปัจจุบัน หรือเบี้ยประกันสุทธิจ่ายครั้งเดียวของค่ารายปีตลอดชีพที่มีการจ่ายเงินตอนต้นปี และมีระยะเวลาประวิงการจ่ายเงินเป็น n ปี

ซึ่งก็คือ ค่าปัจจุบันของค่ารายปีที่จ่ายเงินปีละ 1 บาท โดยเริ่มจ่ายให้แก่คนอายุ x ปี เมื่อเขาอายุ $x+n$ ปี และจ่ายไปเรื่อย ๆ จนกว่าเขาจะตายนั่นเอง เขียนรูปแสดงได้ดังนี้



$$\therefore \quad n/\ddot{a}_x = nE_x + n+1E_x + n+2E_x + \ldots$$

$$= \frac{D_{x+n}}{D_x} + \frac{D_{x+n+1}}{D_x} + \frac{D_{x+n+2}}{D_x} + \ldots$$

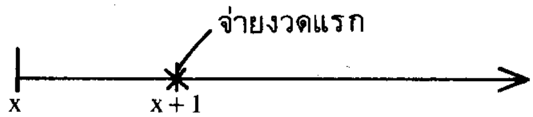
$$\boxed{n/\ddot{a}_x = \frac{N_{x+n}}{D_x}}$$

จาก $n/a_x = \frac{N_{x+n+1}}{D_x}$ จะได้ว่า

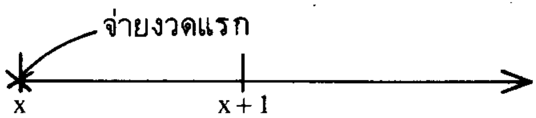
$$n/a_x = n+1/\ddot{a}_x$$

สรุปสูตรในการคำนวณหาค่าปัจจุบันของค่ารายปีแบบตลอดชีพ

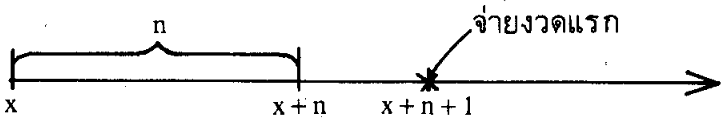
1. $a_x = \dfrac{N_{x+1}}{D_x}$



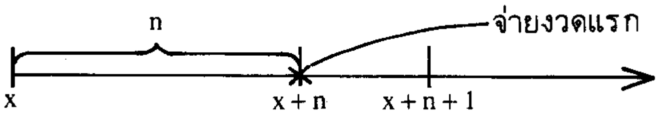
2. $\ddot{a}_x = \dfrac{N_x}{D_x}$



3. $n/a_x = \dfrac{N_{x+n+1}}{D_x}$



4. $n/\ddot{a}_x = \dfrac{N_{x+n}}{D_x}$



Subscript ของ N แทนอายุที่จ่ายงวดแรก

Subscript ของ D แทนอายุที่หาค่าปัจจุบัน