บทที่ 5
องค์ประกอบในการคำนวณเบี้ยประกันชีวิต

บทที่ 5
องค์ประกอบในการคำนวณเบี้ยประกันชีวิต

เบี้ยประกันชีวิต (Premium) เป็นจำนวนเงินที่ผู้เอาประกันจะต้องจ่ายให้กับบริษัท เพื่อความคุ้มครองที่จะได้รับจากการประกันชีวิต จำนวนเบี้ยประกันชีวิตที่ผู้เอาประกันชำระให้กับบริษัท จะต้องมีจำนวนเท่ากับต้นทุนในการดำเนินงานของบริษัทประกันชีวิตบวกด้วยกำไรของบริษัท ซึ่งต้นทุนในการดำเนินงานของบริษัทได้แก่จำนวนเงินเอาประกันที่บริษัทจ่ายให้กับผู้เอาประกัน หรือผู้รับประโยชน์ รวมทั้งค่าใช้จ่ายอื่น ๆ ของบริษัท ได้แก่ ค่าบำเหน็จของตัวแทนประกันชีวิต เงินเดือนพนักงาน และค่าใช้จ่ายในสำนักงาน เป็นต้น

การคำนวณอัตราเบี้ยประกันชีวิต

เนื่องจากการประกันชีวิต เป็นสัญญาที่ผู้รับประกันจะจ่ายเงินเอาประกันให้ต่อเมื่อผู้เอาประกันมรณะ หรือครบกำหนดสัญญา ซึ่งเหตุการณ์ดังกล่าวเป็นเหตุการณ์ในอนาคตที่ไม่แน่นอน ดังนั้น การประกันชีวิตจึงต้องมีหลักเกณฑ์ในการคิดอัตราเบี้ยประกันเพื่อให้เพียงพอกับการดำเนินงานของบริษัท ซึ่งจะต้องมีองค์ประกอบ 3 ประการดังต่อไปนี้

1. **อัตราดอกเบี้ย** เบี้ยประกันชีวิตที่บริษัทเก็บมาจากผู้เอาประกันนั้น บริษัทจะกันส่วนหนึ่งไว้สำหรับจ่ายให้กับผู้เอาประกันรายที่มรณะ และค่าใช้จ่ายอื่น ๆ ของบริษัท ส่วนที่เหลือจะเก็บไว้เป็นเงินสำรองไปลงทุนหาดอกผลเก็บไว้จ่ายให้กับผู้เอาประกันเมื่อสัญญาครบอายุ หรือเมื่อผู้เอาประกันมรณะในอัตราดอกเบี้ยทบต้น ซึ่งการที่บริษัท

นำเงินไปลงทุนหาดอกผลนี้ ทำให้ผู้เอาประกันชำระเงินเบี้ยประกันน้อยกว่าจำนวนเงินที่เอาประกันไว้

2. **อัตรามรณะ** ได้แก่ สถิติอัตรามรณะของคนที่มีอายุต่าง ๆ กันของสถาบันต่าง ๆ ที่ประกอบการประกันชีวิตได้จัดทำขึ้นแสดงอัตรามรณะ และอัตราการอยู่รอดของคนในอายุต่าง ๆ เช่น 100,000 คน หรือ 1,000,000 คน ซึ่งถ้ายิ่งได้จำนวนมากเท่าใดก็ย่อมทำให้เกิดความแน่นอนในการคำนวณอัตราเบี้ยประกันมากขึ้นเท่านั้น

3. **อัตราค่าใช้จ่าย** การดำเนินงานของบริษัทประกันชีวิตจำเป็นต้องมีค่าใช้จ่ายในการดำเนินงาน บริษัทจึงจำเป็นต้องเพิ่มค่าใช้จ่ายจำนวนหนึ่งเข้าไปกับเบี้ยประกันสุทธิด้วย ซึ่งค่าใช้จ่ายต่าง ๆ นี้ได้แก่ ค่าใช้จ่ายในสำนักงาน ค่านายหน้าสำหรับตัวแทนประกันชีวิต ค่าเอกสารสัญญาและกรมธรรม์ ค่าภาษีอากร เป็นต้น ซึ่งต้องรวมเข้าไว้เป็นอัตราเบี้ยประกัน

ในที่นี้จะขอกล่าวถึงองค์ประกอบในส่วนที่เป็นอัตราดอกเบี้ย และอัตรามรณะ เท่านั้น

5.1 อัตราดอกเบี้ย (Rate of interest)

เป็นอัตราของดอกเบี้ยที่จะได้จากการลงทุน หรือเป็นดอกเบี้ยที่ได้จากเงินต้น 1 หน่วยในเวลา 1 ปี

ดอกเบี้ย (Interest) เป็นจำนวนเงินที่ผู้ให้ยืมได้รับจากผู้ขอยืม นอกเหนือจากเงินต้น

เงินต้น (Principal) เป็นจำนวนเงินที่นำมาลงทุนเมื่อเริ่มแรก

เงินรวม (Amount) เป็นจำนวนเงินที่ได้มาจากเงินต้นและดอกเบี้ยที่ได้รับ

การคิดดอกเบี้ย มีวิธีการคิด 2 วิธี คือ

5.1.1 **การคิดดอกเบี้ยเชิงเดี่ยว** (Simple Interest)

เป็นการคิดที่กำหนดให้เงินต้นมีค่าคงที่ตลอดระยะเวลาของการลงทุน

ถ้าให้

P = เงินต้น

I = ดอกเบี้ย

i = อัตราดอกเบี้ย

A = เงินรวม

ดอกเบี้ยที่ได้จากเงินต้น P อัตราดอกเบี้ย i เมื่อครบ n ปี จะเท่ากับ $n \times i \times P$

$$\therefore I = n \cdot i \cdot P$$

และมีครบ n ปี จะได้เงินรวม (A) $= P + I$

$= P + (n \cdot i \cdot P)$

$= P(1 + n \cdot i)$

ตัวอย่างเช่น เงินต้น 100 บาท อัตราดอกเบี้ย 6% จงหาดอกเบี้ยที่จะได้รับ และเงินรวม เมื่อครบกำหนด 5 ปี

P = 100

i = .06

$n = 5$

$\therefore$ ดอกเบี้ยที่จะได้รับ (I) $= n \times i \times P$

$= 5 \times .06 \times 100$

$= 30$ บาท

$\therefore$ เงินรวม (A) $= P(1 + n \times i)$

$= 100(1 + 5 \times .06)$

$= 100(1 + .30)$

$= 100 \times 1.30$

$= 130$ บาท

5.1.2 การคิดดอกเบี้ยทบต้น (Compound Interest)

เป็นการคิดดอกเบี้ยที่กำหนดให้มีการนำเอาดอกเบี้ยที่เกิดขึ้นในแต่ละครั้งที่มีการคิดดอกเบี้ยไปบวกกับเงินต้น เพื่อนำมาเป็นเงินต้นในการคิดดอกเบี้ยของงวดถัดไป ในธุรกิจประกันภัย จะคิดดอกเบี้ยแบบดอกเบี้ยทบต้น

วิธีการคำนวณหาเงินรวม คือ การนำดอกเบี้ยไปรวมกับเงินต้นของงวดนั้น ๆ ไปคำนวณดอกเบี้ยของงวดต่อ ๆ ไป ดังนี้คือ

ถ้าให้ เงินต้น $= P$

$\therefore$ ปลายปีที่ 1 จะได้เงินรวม (A) $= P + P \times i$

$= P(1 + i)$

ปลายปีที่ 2 จะได้เงินรวม $= P(1 + i) + P(1 + i) \times i$

$$= P(1 + i)(1 + i)$$

$$= P(1 + i)^2$$

ปลายปีที่ 3 จะได้เงินรวม $= P(1 + i)^2 + P(1 + i)^2 \times i$

$$= P(1 + i)^2 (1 + i)$$

$$= P(1 + i)^3$$

คำนวณต่อไปเช่นเดียวกัน จนถึง n ปี จะได้

ปลายปีที่ n เงินรวม $= P(1 + i)^{n-1} + P(1 + i)^{n-1} \times i$

$$= P(1 + i)^{n-1} (1 + i)$$

$$= P(1 + i)^n$$

$$\boxed{\therefore \ A = P(1 + i)^n}$$

ตัวอย่าง จงหาเงินรวมของเงินต้น 300 บาท อัตราดอกเบี้ย 3% เมื่อครบกำหนด 10 ปี

จาก $A = P(1 + i)^n$

$A = 300(1 + .03)^{10}$

$= 300 \times 1.34$

$\therefore$ เงินรวม $= 402$ บาท Ans

จาก $A = P(1 + i)^n$

$$\therefore \ P = A(1 + i)^{-n}$$

ซึ่ง P (เงินต้น) นี้ คือ ค่าปัจจุบัน (Present Value) นั่นเอง

$$\underbrace{P \xrightarrow{\text{(เป็นค่าของเงินเมื่อ n ปี)}} A}_{\text{n ปี}}$$

5.1.3 ค่าปัจจุบัน (Present Value)

เราทราบแล้วว่า เมื่อเราลงทุนในระยะเวลาที่แน่นอน เราก็จะสามารถหาเงินรวมได้ แต่ในทางตรงข้าม บางครั้งเราทราบจำนวนเงินที่จะมีในอนาคตแน่นอน เราต้องการหาว่าขณะนี้เราจะต้องมีเงินเท่าไร เมื่อครบกำหนดจึงจะมีเงินที่ต้องการ ค่าที่ต้องการหานี้เราเรียกว่า "ค่าปัจจุบัน" (Present Value) ซึ่งมองในอีกแง่หนึ่งก็คือ เงินต้น นั่นเอง

ถ้าให้ v เป็นค่าปัจจุบันของเงิน 1 หน่วย ที่จะได้รับเมื่อครบกำหนด 1 งวด

จาก $A = P(1 + n \times i)$

$$\therefore \quad 1 = v(1 + i)$$

$$\therefore \quad v = \frac{1}{(1 + i)} = (1 + i)^{-1}$$

$$\therefore \quad v^2 = \frac{1}{(1 + i)^2} = (1 + i)^{-2}$$

$$\vdots$$

$$v^n = \frac{1}{(1 + i)^n} = (1 + i)^{-n}$$

จาก $P = A(1 + i)^{-n}$

$$\boxed{\therefore \; P = Av^n}$$

ตัวอย่าง จงหาค่าปัจจุบันของเงินที่จะได้รับ 1,000 บาท ซึ่งจะได้รับเมื่อครบ 15 ปี โดยใช้อัตราดอกเบี้ย 3%

จากสูตร $P = Av^n$

$\therefore$ ค่าปัจจุบันของเงิน 1,000 บาท ที่ได้รับเมื่อครบ 15 ปี $= 1000 \times v^{15}$

$$= 1000 \times \frac{1}{(1 + i)^{15}}$$

$$= 1000 \times (1 + .03)^{-15}$$

$$= 1000 \times .64$$

$$= 640 \text{ บาท}$$

ชนิดของอัตราดอกเบี้ย (Kind of rate of interest)

แบ่งออกได้เป็น 3 ชนิดคือ

ก. Effective rate

ข. Nominal rate

ค. Force of interest

Effective rate คือ อัตราดอกเบี้ยที่เราสามารถนำไปคำนวณหาดอกเบี้ยหรือเงินรวมได้โดยตรง ตัวอย่างเช่น อัตราดอกเบี้ยร้อยละ 4 ต่อปี อัตราดอกเบี้ยร้อยละ $3\frac{1}{2}$ ต่องวด 6 เดือน อัตราดอกเบี้ยร้อยละ 2 ต่องวด 3 เดือน เป็นต้น แต่โดยปกติแล้วเรามักจะนิยมเรียกเป็นอัตราดอกเบี้ยร้อยละต่อปี

ในการคำนวณหาเงินรวม เราจะกำหนดให้เงินต้นเป็น 1 หน่วย

ถ้าให้ i = อัตราดอกเบี้ยต่อเงินต้น 1 หน่วย ต่อ 1 หน่วยระยะเวลา

ปีที่	เงินต้น	ดอกเบี้ย	เงินรวม
1	1	i	$1 + i$
2	$1 + i$	$i(1 + i)$	$(1 + i) + i(1 + i) = (1 + i)^2$
3	$(1 + i)^2$	$i(1 + i)^2$	$(1 + i)^3$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
n	$(1 + i)^{n-1}$	$i(1 + i)^{n-1}$	$(1 + i)^n$

$\therefore$ เงินต้น 1 หน่วย อัตราดอกเบี้ย i ต่อปี เมื่อครบ n ปี จะได้

เงินรวม $= (1 + i)^n$

$\therefore$ **ดอกเบี้ย = เงินรวม – เงินต้น**

$= (1 + i)^n - 1$

ที่กล่าวมาข้างต้นนี้ เป็นการหาเงินรวม ในกรณีที่กำหนดอัตราดอกเบี้ยเดียวกันตลอดระยะเวลา ถ้าหากว่ากำหนดอัตราดอกเบี้ยต่าง ๆ กันในระยะเวลาเดียวกัน เราก็สามารถหาเงินรวมได้ ดังนี้

ถ้าให้ i_1 = อัตราดอกเบี้ยสำหรับระยะเวลา n_1

i_2 = อัตราดอกเบี้ยสำหรับระยะเวลา n_2

i_3 = อัตราดอกเบี้ยสำหรับระยะเวลา n_3

$\therefore$ **จะได้เงินรวม** $= (1 + i_1)^{n_1} (1 + i_2)^{n_2} (1 + i_3)^{n_3}$

$$= \overset{t=3}{\underset{t=1}{\pi}} (1 + i_t)^{n_t}$$

$$1 \overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{n_1,\ i_1} (1+i_1)^{n_1} \overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{n_2,\ i_2} (1+i_1)^{n_1}(1+i_2)^{n_2} \overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{n_3,\ i_3} (1+i_1)^{n_1}(1+i_2)^{n_2}(1+i_3)^{n_3}$$

ตัวอย่าง จงหาเงินรวมของเงินต้น 1 หน่วย เมื่อครบระยะเวลา 25 ปี โดยที่ใน 10 ปีแรก คิดอัตราดอกเบี้ย 7% ต่อปี ระยะที่ 2 ช่วง 8 ปี คิดอัตราดอกเบี้ย 5% ต่อปี และระยะสุดท้ายช่วง 7 ปี คิดอัตราดอกเบี้ย 4% ต่อปี

$\therefore$ เงินรวมของ 10 ปีแรก $= (1 + .07)^{10} = (1.07)^{10}$

เงินรวมของช่วง 8 ปี $= (1 + .05)^{8} = (1.05)^{8}$

เงินรวมของช่วง 7 ปีหลัง $= (1 + .04)^{7} = (1.04)^{7}$

$\therefore$ เงินรวมของเงินต้น 1 หน่วย เมื่อครบ 25 ปี $= (1.07)^{10}(1.05)^{8}(1.04)^{7}$ Ans

Nominal rate เป็นดอกเบี้ยที่บอกจำนวนที่ได้รับทั้งปี โดยคิดเสมือนว่าเงินที่ได้ในระหว่างปี ไม่มีการลงทุน และการทบต้นใน 1 ปี มีมากกว่า 1 ครั้ง เช่น อัตราดอกเบี้ยร้อยละ 7 ต่อปี ทบต้นปีละ 2 ครั้ง (Convertible half yearly) อัตราดอกเบี้ยร้อยละ 8 ต่อปี ทบต้นปีละ 4 ครั้ง (Convertible quarterly yearly)

สัญลักษณ์ที่ใช้ คือ $i^{(M)}$ หมายถึง อัตราดอกเบี้ยต่อปีของเงินต้น 1 หน่วย ทบต้นปีละ M ครั้ง เช่น

$i^{(2)} = 0.07$

$i^{(4)} = 0.08$

การคำนวณหาเงินรวม

จะต้องเปลี่ยนอัตราดอกเบี้ย แบบ Nominal ให้อยู่ในแบบ Effective rate เสียก่อน โดยการเอาจำนวนครั้งที่ทบต้นใน 1 ปี ไปหารดอกเบี้ยที่กำหนดให้ ก็จะได้อัตราดอกเบี้ยชนิด Effective- ซึ่งจะทบต้นทุก ๆ $\frac{1}{M}$ ปี

$\therefore$ จะได้ $\frac{i^{(M)}}{M}$ เป็น Effective rate ที่ทบต้นทุก ๆ $\frac{1}{M}$ ปี

เมื่อแปลง Nominal rate เป็น Effective rate แล้วก็นำอัตราดอกเบี้ยที่ได้ไปคำนวณหาเงินรวมได้เลย ดังนี้

ครั้งที่	เงินต้น	ดอกเบี้ย	เงินรวม
1	1	$\frac{i^{(M)}}{M}$	$1 + \frac{i^{(M)}}{M}$
2	$1 + \frac{i^{(M)}}{M}$	$\frac{i^{(M)}}{M}(1 + \frac{i^{(M)}}{M})$	$(1 + \frac{i^{(M)}}{M})^2$
⋮	⋮	⋮	⋮
M	$(1 + \frac{i^{(M)}}{M})^{M-1}$	$\frac{i^{(M)}}{M}(1 + \frac{i^{(M)}}{M})^{M-1}$	$(1 + \frac{i^{(M)}}{M})^M$

$\therefore$ **เงินต้น 1 หน่วย เมื่อครบ 1 ปี ได้เงินรวม** $= (1 + \frac{i^{(M)}}{M})^{M}$

ดังนั้น เงินต้น 1 หน่วย เมื่อครบ n ปี ได้เงินรวม $= (1 + \frac{i^{(M)}}{M})^{Mn}$

ตัวอย่าง จงหาเงินรวมของเงินต้น 1 หน่วย อัตราดอกเบี้ยร้อยละ 4 ต่อปี ทบต้นปีละ 2 ครั้ง

$i^{(2)} = 0.04$

$$\therefore \text{เงินรวม} = (1 + \frac{.04}{2})^2$$

$$= (1 + .02)^2$$

$$= (1.02)^2 = 1.0404$$

นอกจากนี้ เรายังสามารถหาดอกเบี้ยได้

ดอกเบี้ย = เงินรวม – เงินต้น

$= 1.0404 - 1 = .0404$

ซึ่งจะเห็นว่าอัตราดอกเบี้ยร้อยละ 4 ต่อปี ทบต้นปีละ 2 ครั้ง จะเท่ากับอัตราดอกเบี้ย .0404 ต่อปี ทบต้นปีละ 1 ครั้ง

$\therefore$ $i = .0404$ เป็นค่าที่สอดคล้องกับ $i^{(2)} = .04$ Ans

ความสัมพันธ์ระหว่าง i กับ $i^{(M)}$

จาก เงินต้น 1 หน่วย อัตราดอกเบี้ย $i^{(M)}$ เมื่อครบ 1 ปี จะได้เงินรวมเท่ากับ $(1 + \frac{i^{(M)}}{M})^{M}$

$\therefore$ ดอกเบี้ยที่ได้ใน 1 ปี $=$ เงินรวม $-$ เงินต้น

$$= (1 + \frac{i^{(M)}}{M})^M - 1$$

ให้ i เป็น effective rate ที่สอดคล้องกับค่าของ $i^{(M)}$

$$\therefore \quad i = (1 + \frac{i^{(M)}}{M})^M - 1$$

$$(1 + \frac{i^{(M)}}{M})^M = 1 + i$$

ถอดรากที่ M ทั้ง 2 ข้าง

$$(1 + i)^{1/M} = 1 + \frac{i^{(M)}}{M}$$

$$\frac{i^{(M)}}{M} = (1 + i)^{1/M} - 1$$

$$\therefore \quad \boxed{i^{(M)} = M\left[(1 + i)^{1/M} - 1\right]}$$

ตัวอย่าง ให้ $i = .05$ จงหา $i^{(2)}$ และ $i^{(4)}$

จาก $\quad i^{(M)} = M\left[(1 + i)^{1/M} - 1\right]$

$$\therefore \quad i^{(2)} = 2\left[(1 + .05)^{1/2} - 1\right]$$

$$= 2\left[(1.05)^{1/2} - 1\right]$$

$$= 0.049390$$

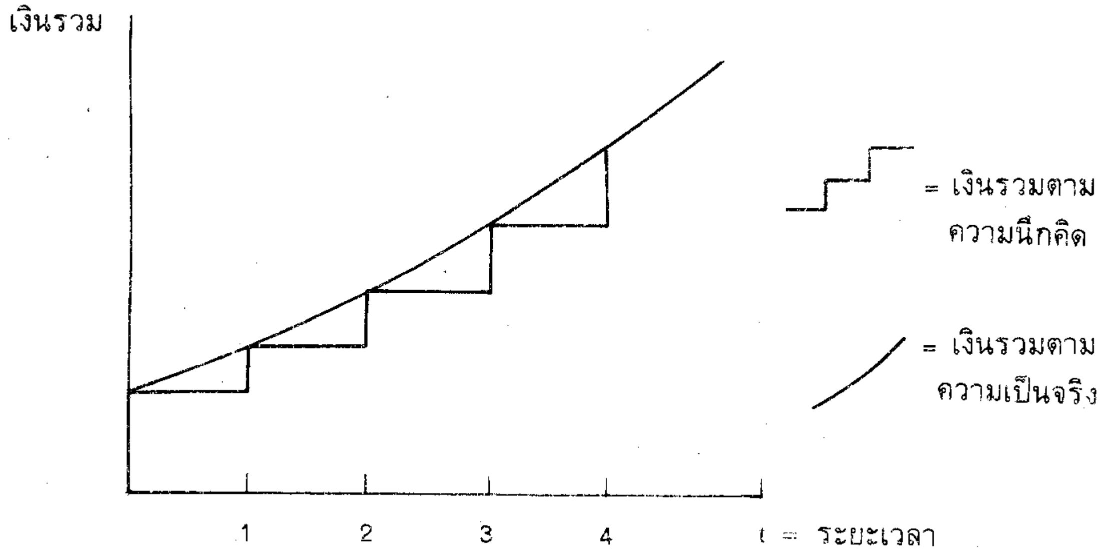
$$\therefore \quad i^{(4)} = 4\left[(1 + .05)^{1/4} - 1\right]$$

$$= \quad 4\left[(1.05)^{1/4} - 1\right]$$

$$= \quad 0.049089$$

Force of Interest

จากอัตราดอกเบี้ย Effective และ Nominal ทำให้เรารู้สึกว่า เงินรวมจะมีค่าเพิ่มขึ้นเฉพาะตอนที่ครบงวดหรือครบปีเท่านั้น แต่ในระหว่างนั้น จะมีค่าเท่ากับเงินต้นตอนต้นงวดนั้น ๆ ซึ่งเขียนเป็นกราฟแสดงได้ ดังนี้



จะเห็นได้ว่า ดอกเบี้ยจะทบต้นทุก ๆ วินาที ดังนั้น Force of Interest จึงเป็นการคิดดอกเบี้ยทบต้นปีละจำนวนมาก ๆ ครั้ง และในทางปฏิบัติเรามักไม่ค่อยนิยมใช้ สำหรับการคำนวณหาเงินรวมนั้น หาได้จาก

$$\lim_{M\to\infty} i^{(M)}$$

จาก $\quad i^{(M)} = M\left[(1+i)^{1/M} - 1\right]$

$$= M\left[\left\{1 + \frac{1}{M}i + \frac{\frac{1}{M}\left(\frac{1}{M}-1\right)i^2}{2!} + \frac{\frac{1}{M}\left(\frac{1}{M}-1\right)\left(\frac{1}{M}-2\right)i^3}{3!} + \dots\right\} - 1\right]$$

$$= i + \frac{\left(\frac{1}{M}-1\right)i^2}{2!} + \frac{\left(\frac{1}{M}-1\right)\left(\frac{1}{M}-2\right)i^3}{3!} + \dots$$

$$\therefore \lim_{M\to\infty} i^{(M)} = i - \frac{i^2}{2} + \frac{i^3}{3} - \frac{i^4}{4} + \frac{i^5}{5} \dots$$

$$= \log_e(1+i)$$

ถ้าให้ $\quad \delta = \log_e(1+i)$

$\therefore \quad (1+i) = e^{\delta}$

หรือ $\quad i = e^{\delta} - 1$

5.1.4 ส่วนลด (Discount)

ในการหาค่าปัจจุบัน นอกจากจะหาโดยตรงจากอัตราดอกเบี้ยแล้ว ยังมีอีกวิธีหนึ่งที่ปฏิบัติกันอยู่เสมอ คือ กำหนดจำนวนเงินขึ้นจำนวนหนึ่ง เพื่อไปหักจำนวนเงินที่จะได้รับ จำนวนเงินที่เอาไปหักนี้ เรียกว่า "ส่วนลด" และอัตราที่ใช้คือ "อัตราส่วนลด"

ส่วนลดนี้มีลักษณะเดียวกับดอกเบี้ย แต่ต่างกันตรงดอกเบี้ยเราคำนึงถึงเงินที่ลงทุน แต่ส่วนลดคิดจากเงินที่จะได้รับจากอนาคต และในทางปฏิบัติส่วนลดจะกำหนดให้ใกล้เคียงกับดอกเบี้ย

ตัวอย่างเช่น ตั๋วแลกเงินฉบับหนึ่งจ่ายให้1000 บาท เมื่อครบ 1 ปี ซื้อมาในขณะที่ราคา 952.38 บาท

ถ้าพิจารณาทางด้านอัตราดอกเบี้ย

ลงทุน 952.38 บาท ได้ดอกเบี้ย $= 1000 - 952.38 = 47.62$

ลงทุน 100 บาท ได้ดอกเบี้ย $= \dfrac{47.62}{952.38} \times 100 \approx 5\%$

ถ้าพิจารณาทางด้านอัตราส่วนลด

เงิน 1000 บาท ได้ส่วนลด $= 47.62$ บาท

เงิน 100 บาท ได้ส่วนลด $= \dfrac{47.62 \times 100}{1000} \approx 5\%$

ชนิดของอัตราส่วนลด (Kind of rate of discount)

แบ่งออกได้เป็น 3 ชนิด คือ

1. Effective rate of discount
2. Nominal rate of discount
3. The force of discount

Effective rate of discount คือ อัตราส่วนลดที่นำไปคำนวณหาค่าปัจจุบันได้โดยตรง

ถ้าให้ d = อัตราส่วนลดของเงินที่จะได้รับ 1 หน่วย เมื่อครบ 1 หน่วยระยะเวลา

การหาค่าปัจจุบัน

ขอรับก่อน (t) ปี	**จำนวนที่ได้รับ เมื่อครบ (n – t + 1) ปี**	**ส่วนลด**	**ค่าปัจจุบัน**
1	1	d	$1 - d$
2	$1 - d$	$d(1 - d)$	$(1 - d)^2$
3	$(1 - d)^2$	$d(1 - d)^2$	$(1 - d)^3$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
n	$(1 - d)^{n-1}$	$d(1 - d)^{n-1}$	$(1 - d)^n$

ถ้ากำหนดให้ $(1 - d)^n = v^n$ (เป็นค่าที่สอดคล้องกัน)

$$\therefore 1 - d = v$$

$$d = 1 - v$$

$$\boxed{\therefore d = \frac{i}{1 + i}}$$

Nominal rate of discount เป็นอัตราส่วนลดต่อปีที่ลดปีละ M ครั้ง

ให้ $d^{(M)}$ เป็น Norminal rate of discount การคำนวณหาค่าปัจจุบัน จะต้องเปลี่ยน Nominal rate of discount ให้เป็น Effective rate of discount ก่อน โดยเอาจำนวนครั้งที่ลดใน 1 ปี ไปหารอัตราส่วนลดที่กำหนดให้ ซึ่งจะได้ $\frac{d^{(M)}}{M}$ เป็นอัตราส่วนลดต่อ $\frac{1}{M}$ ปี

การคำนวณหาค่าปัจจุบัน หาได้ดังนี้

แปลง $d^{(M)}$ ที่กำหนดให้เป็น $\frac{d^{(M)}}{M}$

ดังนั้น ค่าปัจจุบันที่ได้ใน 1 ปี คำนวณได้จาก

ขอรับก่อน (t) **งวด**	**จำนวนเงินที่ได้รับ เมื่อครบ** (n−t+1) **งวด**	**ส่วนลด**	**ค่าปัจจุบัน**
1	1	$\frac{d^{(M)}}{M}$	$1 - \frac{d^{(M)}}{M}$
2	$1 - \frac{d^{(M)}}{M}$	$\frac{d^{(M)}}{M}(1 - \frac{d^{(M)}}{M})$	$(1 - \frac{d^{(M)}}{M})^2$
3	$(1 - \frac{d^{(M)}}{M})^2$	$\frac{d^{(M)}}{M}(1 - \frac{d^{(M)}}{M})^2$	$(1 - \frac{d^{(M)}}{M})^3$
⋮	⋮	⋮	⋮
M	$(1 - \frac{d^{(M)}}{M})^{M-1}$	$\frac{d^{(M)}}{M}(1 - \frac{d^{(M)}}{M})^{M-1}$	$(1 - \frac{d^{(M)}}{M})^M$

$\therefore$ ค่าปัจจุบันของเงิน 1 หน่วย ที่จะได้รับใน 1 ปีข้างหน้า $= (1 - \frac{d^{(M)}}{M})^M$

$\therefore$ ค่าปัจจุบันของเงิน 1 หน่วย ที่จะได้รับใน n ปีข้างหน้า $= (1 - \frac{d^{(M)}}{M})^{Mn}$

ความสัมพันธ์ระหว่าง d กับ $d^{(M)}$

จากค่าปัจจุบันของเงิน 1 หน่วย ที่จะได้รับใน 1 ปีข้างหน้า $= (1 - \frac{d^{(M)}}{M})^M$ และ d.

เป็น effective rate of discount ที่สอดคล้องกับค่า nominal rate of discount

$\therefore$ ค่าปัจจุบันของเงิน 1 หน่วย ที่จะได้รับใน 1 ปีข้างหน้า $= 1 - d$

$$\therefore \quad 1 - d = \left(1 - \frac{d^{(M)}}{M}\right)^M$$

$$d = 1 - \left(1 - \frac{d^{(M)}}{M}\right)^M$$

$$\boxed{\therefore \quad d^{(M)} = M\left[1 - (1 - d)^{1/M}\right]}$$

The force of discount

หาได้จาก $\lim\limits_{M\to\infty} d^{(M)}$

จาก $$d^{(M)} = M\left[1 - (1 - d)^{1/M}\right]$$

$$= M\left[1 - \left\{1 - \frac{1}{M}d + \frac{\frac{1}{M}\left(\frac{1}{M} - 1\right)d^2}{2!} - \frac{\frac{1}{M}\left(\frac{1}{M} - 1\right)\left(\frac{1}{M} - 2\right)d^3}{3!} + \dots\right\}\right]$$

$$= d - \frac{\left(\frac{1}{M} - 1\right)d^2}{2!} + \frac{\left(\frac{1}{M} - 1\right)\left(\frac{1}{M} - 2\right)d^3}{3!} - \dots$$

$$\therefore \lim_{M\to\infty} d^{(M)} = d + \frac{d^2}{2} + \frac{d^3}{3} + \dots$$

$$= \log_e (1 - d)^{-1}$$

$$= \log_e (v)^{-1}$$

$$= \log_e (1 + i) = \delta$$

จะเห็นได้ว่า The force of discount มีค่าเท่ากับ The force of interest ในกรณีที่ $M \rightarrow \infty$

5.2 ตารางมรณะ (Mortality table)

5.2.1 นิยามและสัญลักษณ์ต่าง ๆ

ตารางมรณะ (Mortality Table) หรือเรียกว่า ตารางชีพ (Life Table) เป็นประวัติชีวิตของกลุ่มคนที่สมมติขึ้นมากลุ่มหนึ่ง (hypothetical group or cohort) โดยที่จำนวนคนในกลุ่มนี้จะค่อย ๆ ลดลงไปเนื่องจากการตาย การบันทึกเกี่ยวกับคนกลุ่มนี้จะเริ่มต้นตั้งแต่เกิดและตายไปเป็นส่วน ๆ ตามที่กำหนดไว้ในแต่ละกลุ่มอายุ โดยมีข้อสมมติต่าง ๆ ดังนี้ คือ

1. ประชากรกลุ่มนี้เป็นแบบ "ปิด" คือ ไม่มีการย้ายเข้าหรือออก ดังนั้นจึงไม่มีการเปลี่ยนแปลงเกี่ยวกับจำนวนสมาชิก นอกจากการตายเท่านั้น

2. ประชากรในกลุ่มนี้ตายไปในแต่ละหมวดอายุตามตารางที่กำหนดไว้ล่วงหน้า และไม่มีการเปลี่ยนแปลง

3. จำนวนประชากรจะเริ่มต้นเมื่อแรกเกิดตามจำนวนมาตรฐาน คือ 10000 หรือ 100000 หรือ 1000 คน ซึ่งเรียกว่า เป็นจุดเริ่มต้นของตารางชีพ (Radix of Mortality)

4. ในแต่ละอายุ (ยกเว้น 2-3 ปี เมื่อแรกเกิด) การตายได้กระจายออกไปเท่ากันหมด ระหว่างวันเกิดปีหนึ่งถึงปีหนึ่ง

5. โดยปกติจะแยกกลุ่มคนออกตามแต่ละเพศ

อัตรามรณะ (Mortality rates) **หรือ** อัตรามรณะของแต่ละอายุ คือ อัตราส่วนของจำนวน**คนที่มรณะในปีนั้น** กับจำนวนผู้ที่มีชีวิตอยู่เมื่อต้นปีนั้น หรือก็คือ ความน่าจะเป็นที่คนที่มีชีวิตอยู่ในอายุหนึ่งจะตายภายใน 1 ปีนั่นเอง ซึ่งอัตรามรณะจะสูงในหมู่ทารก (Infant) และจะค่อยต่ำลงในหมู่เด็ก และจะค่อย ๆ เพิ่มขึ้นตามลำดับ เมื่อมีอายุสูงขึ้น

แหล่งที่มาของข้อมูลที่นำมาสร้างตารางมรณะ คือ สถิติเกี่ยวกับประชากร ซึ่งได้มาจากการทำสำมะโนประชากร และจากการบันทึกเกี่ยวกับการตายของบริษัทประกันชีวิต ตารางมรณะที่ได้จากการทำสำมะโนประชากรนั้นไม่เหมาะสมสำหรับงานทางด้านการประกันชีวิต เนื่องจากอัตรามรณะในหมู่ผู้เอาประกันแตกต่างจากอัตรามรณะของประชากร เพราะบริษัทประกันชีวิตรับประกันเฉพาะบุคคลที่มีสุขภาพ อนามัย การประกอบอาชีพ และมีความเอาใจใส่ในการรักษาตัวดีเท่านั้น ซึ่งถือว่าบุคคลเหล่านี้ได้ผ่านการคัดเลือก (Selection) จากบริษัทแล้วทั้งนั้น จึงทำให้อัตรามรณะในหมู่ผู้เอาประกันชีวิต ในแต่ละอายุต่ำกว่าอัตรามรณะของประชากรทั่ว ๆ ไป เพราะอัตรามรณะของประชากรทั่ว ๆ ไปนั้นจะรวมทั้งผู้ที่มีสุขภาพดีและไม่ดี มีความเสี่ยงต่อภัยสูง และมีอาชีพที่เป็นอันตรายต่อสุขภาพและชีวิตรวมอยู่ด้วย จึงทำให้อัตรามรณะที่ได้สูงกว่า

ดังนั้น ในการประกันชีวิตตารางมรณะที่ใช้จะเป็นตารางมรณะที่ได้มาจากการบันทึกเกี่ยวกับการตายของบริษัทประกันชีวิตหลาย ๆ บริษัท ซึ่งอัตรามรณะจะหาได้จากผลหารของจำนวนคนตาย ณ. อายุต่าง ๆ กันกับจำนวนคนในอายุนั้น ๆ ที่ทำการสำรวจ จากประสบการณ์อัตรามรณะที่ได้ อาจจะมีอัตราการเปลี่ยนแปลงไม่สม่ำเสมอเท่าที่ควรจะเป็น จึงต้องทำ

การปรับปรุงตัวเลขที่ได้มาให้เป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงสม่ำเสมอ ซึ่งนักคณิตศาสตร์ประกันภัยจะเป็นผู้ทำการปรับปรุงตัวเลขที่ได้มา โดยวิธีที่เรียกว่า Graduation ซึ่งเป็นวิธีการตบแต่งความไม่สม่ำเสมอของข้อมูลที่ได้จากสถิติให้มีความราบเรียบ โดยเพิ่มและลดส่วนที่มีอัตรามรณะผิดปกติ ทั้งนี้จะต้องไม่ทำให้ข้อมูลหรือลักษณะที่แท้จริงเปลี่ยนแปลงไป

ตารางมรณะที่รู้จักกันมากที่สุด ที่ใช้ในการประกันชีวิตของสหรัฐอเมริกา มีหลายตารางด้วยกัน เช่น

1. The American Experience Table ตารางนี้ พิมพ์ครั้งแรกในปี ค.ศ. 1868 และได้นำมาใช้เป็นเวลาหลายปีด้วยกัน

2. The American Men Mortality Table ตารางนี้ สร้างโดยนำข้อมูลของบริษัทประกันชีวิตหลาย ๆ บริษัท ที่เก็บในปี ค.ศ. 1900 ถึง 1915

3. The Commissioners'1941 Standard Ordinary Mortality Table ตารางนี้บางทีเรียกสั้น ๆ ว่า 1941 CSO Table ต่อมาก็ได้สร้าง 1958 CSO Mortality Table โดยใช้ข้อมูลจากสถิติการตายของผู้เอาประกันชีวิตจากบริษัทหลาย ๆ บริษัท ในปี ค.ศ. 1950 ถึง 1954 สำหรับกรมธรรม์ที่มีผลบังคับเกิน 5 ปี

ตารางมรณะที่ใช้ในธุรกิจการประกันชีวิตในประเทศไทย นั้น ใช้ตารางมรณะ CSO 1941 และ CSO 1958 สำหรับตัวอย่างต่าง ๆ ในหนังสือเล่มนี้จะใช้ตารางมรณะ CSO 1958 เท่านั้น ซึ่งดูได้จากในภาคผนวก ตารางที่ 2

ความหมายของค่าต่าง ๆ ในตารางมรณะ (ดูจากตารางมรณะในภาคผนวกเป็นตาราง CSO 1958 สำหรับผู้ชาย)

ตารางมรณะโดยทั่ว ๆ ไปแล้วจะแบ่งเป็น 5 ช่อง และแต่ละช่องมีความหมายดังนี้

ช่องแรก ของตารางคือ x หมายถึง คน ๆ หนึ่งที่มีอายุ x ปี

ช่องที่ 2 ของตาราง คือ ℓ_x หมายถึง จำนวนคนที่มีชีวิตอยู่รอด จนถึงอายุ x ปี เช่น ℓ_0 คือ จำนวนคนซึ่งเกิดในปีใดปีหนึ่ง ซึ่งคนจำนวน ℓ_0 คนนี้จะมีบางคนที่ตายไปก่อนที่จะอายุครบ 1 ปี และจะมีบางคนที่มีชีวิตอยู่จนอายุครบ 1 ปี

ℓ_1 คือ จำนวนคน ℓ_0 คน ซึ่งมีอายุอยู่จนถึง 1 ปี ซึ่งในจำนวนคน ℓ_1 คนนี้ จะมีบางคนที่ตายไปก่อนที่จะอายุครบ 2 ปี และจะมีบางคนมีชีวิตอยู่จนอายุครบ 2 ปี

ℓ_2 คือ จำนวนคน ℓ_1 คน ซึ่งมีอายุอยู่จนถึงอายุ 2 ปี เป็นอย่างนี้ไปเรื่อย ๆ ดังนั้น ℓ_x จึงหมายถึง จำนวนคนที่มีชีวิตอยู่จนถึงอายุ x ปี

ตัวอย่างเช่น จากตาราง CSO 1958 จะเห็นว่า

$$\ell_0 = 10,000,000$$

ในจำนวนคน 10,000,000 จะมีคนที่ตายไปก่อนที่จะอายุครบ 1 ปี เท่ากับ 70,800 คน และจะมีคนที่มีอายุอยู่จนครบ 1 ปี เท่ากับ 9,929,200 คน เช่นเดียวกัน จากจำนวนคน ℓ_1 = 9,929,200 คน จะมีคนที่ตายไปก่อนที่จะอายุครบ 2 ปี เท่ากับ 17,475 คน และจะมีคนที่มีอายุอยู่จนครบ 2 ปี เท่ากับ 9,911,725 คน เป็นต้น สำหรับอายุสูงสุด (limiting age) ของตาราง CSO 1958 นั้น มีค่าเท่ากับ 100 ซึ่งเราจะแทนอายุสูงสุดนี้ด้วยสัญลักษณ์ "ω" เป็นอายุสูงสุดของตารางที่ทำให้ $\ell_\omega = 0$ ดังนั้นในตาราง CSO 1958 $\ell_{100} = 0$ แสดงว่า จำนวนคนที่มีอายุถึง 100 ปี จะไม่มีชีวิตเหลืออยู่เลย คือ ทุกคนตายหมด ค่า ω ที่กำหนดขึ้นนี้เรากำหนดเพื่อนำมาใช้ประโยชน์ในการ

คำนวณเบี้ยประกัน เพราะในชีวิตจริง ๆ แล้ว อาจจะมีคนที่มีอายุมากกว่า ω ที่เรากำหนดขึ้นไว้เหลืออยู่บ้าง แต่ก็เป็นจำนวนน้อยมาก ดังนั้นค่า ω นี้ อาจจะไม่ใช่อายุสูงสุดที่คนจะมีชีวิตอยู่ในชีวิตจริง ๆ

ช่องที่ 3 คือ d_x หมายถึง จำนวนคนอายุ x ปี ที่ตายไปก่อนที่จะอายุครบ x + 1 ปี โดยที่ d_x หาได้จาก ℓ_x ดังนี้

$$d_x = \ell_x - \ell_{x+1}$$

ตัวอย่างเช่น จากตาราง CSO 1958 ถ้าต้องการหาจำนวนคนอายุ 25 ปี ที่จะตายไปก่อนที่จะอายุครบ 26 ปี คือ ต้องการหา d_{25} ว่า มีค่าเท่ากับเท่าใด

จาก $\quad d_x = \ell_x - \ell_{x+1}$

$\therefore \quad d_{25} = \ell_{25} - \ell_{26}$

แทนค่า ℓ_{25} และ ℓ_{26} จากตาราง CSO 1958 จะได้

$$\begin{aligned} d_{25} &= 9{,}575{,}636 - 9{,}557{,}155 \\ &= 18{,}481 \end{aligned}$$

ช่องที่ 4 คือ q_x หมายถึง ความน่าจะเป็นที่คนอายุ x ปี จะตายไปก่อนที่อายุจะครบ x + 1 ปี หรือความน่าจะเป็นที่คนอายุ x ปีจะตายภายใน 1 ปี ซึ่งก็คืออัตรามรณะ (Mortality rate) นั่นเอง โดยที่ q_x หาได้ดังนี้

$$q_x = \frac{\text{จำนวนคนอายุ x ปี ที่ตายไปก่อนที่จะอายุครบ x + 1 ปี}}{\text{จำนวนคนอายุ x ปีที่ได้สำรวจไว้}}$$

$$= \frac{\ell_x - \ell_{x+1}}{\ell_x}$$

$$= \frac{d_x}{\ell_x}$$

ตัวอย่างเช่น จาก CSO 1958 จะหา q_{25}

$$\therefore \quad q_{25} = \frac{d_{25}}{\ell_{25}}$$

$$= \frac{18,481}{9,575,636} = .00193$$

จากสูตร $q_x = \frac{d_x}{\ell_x}$ ถ้าเราทราบค่า q_x และ ℓ_x

เราก็จะสามารถหา d_x ได้จาก

$$d_x = \ell_x \cdot q_x$$

เช่นจะหา d_{25}

$$\begin{aligned} d_{25} &= \ell_{25} \cdot q_{25} \\ &= 9,575,636 \times .00193 \\ &= 18,481 \end{aligned}$$

นอกจากหา q_x แล้ว เรายังสามารถหาความน่าจะเป็นที่คนอายุ x ปี จะมีชีวิตอยู่จนถึงอายุ x + 1 ปี หรือจะมีชีวิตอยู่ภายใน 1 ปีได้อีกด้วย

ถ้าให้ P_x = ความน่าจะเป็นที่คนอายุ x ปี จะมีชีวิตอยู่จนถึงอายุ x+1 ปี

$$= \frac{\text{จำนวนคนอายุ x ปี ที่มีชีวิตอยู่จนถึงอายุ x + 1 ปี}}{\text{จำนวนคนอายุ x ปี ที่ได้สำรวจไว้}}$$

$$= \frac{\ell_{x+1}}{\ell_x}$$

และจะได้ว่า $p_x + q_x = \frac{\ell_{x+1}}{\ell_x} + \frac{\ell_x - \ell_{x+1}}{\ell_x} = \frac{\ell_x}{\ell_x} = 1$

ซึ่งเป็นไปตามกฎของความน่าจะเป็นที่ได้กล่าวไว้ในบทที่ 3

ช่องที่ 5 คือ e_x^0 หมายถึง จำนวนปีโดยเฉลี่ยที่คนอายุ x ปี จะมีชีวิตอยู่ต่อไปในอนาคต เช่น e_{20}^0 จากตาราง CSO 1958 มีค่าเท่ากับ 50.37 หมายถึง คนอายุ 20 ปี จะมีชีวิตอยู่โดยเฉลี่ย 50.37 ปี ซึ่งคนบางคนอาจจะอยู่ได้นานกว่านี้ หรือบางคนอาจจะตายไปก่อน วิธีการคำนวณหาค่า e_x^0 จะกล่าวถึงอย่างละเอียดอีกครั้งหนึ่ง

ค่าต่าง ๆ ในตารางมรณะ CSO 1958 ที่กล่าวถึงข้างต้นเป็นตารางมรณะแบบสมบูรณ์ (Complete Mortality Table) คือ เป็นตารางที่มีช่วงห่างของแต่ละอายุเพียง 1 ปี ในกรณีที่ตารางมรณะเป็นแบบย่อ (Abridged Mortality Table) คือ เป็นตารางที่มีช่วงห่างของแต่ละอายุมากกว่า 1 ปี เช่น อาจจะเป็น 5 ปี หรือ 10 ปี หรือทั่ว ๆ ไปใช้ n ปี สัญญลักษณ์ต่าง ๆ ที่ใช้ และความหมายมีดังนี้

nq_x = ความน่าจะเป็นที่คนอายุ x ปี จะตายก่อนที่จะอายุครบ x + n ปี หรือจะตายในช่วง n ปี

$$= \frac{\text{จำนวนคนอายุ x ปี ที่ตายไปก่อนที่จะอายุครบ x + n ปี}}{\text{จำนวนคนอายุ x ปี ที่ได้สำรวจไว้}}$$

$$= \frac{\ell_x - \ell_{x+n}}{\ell_x}$$

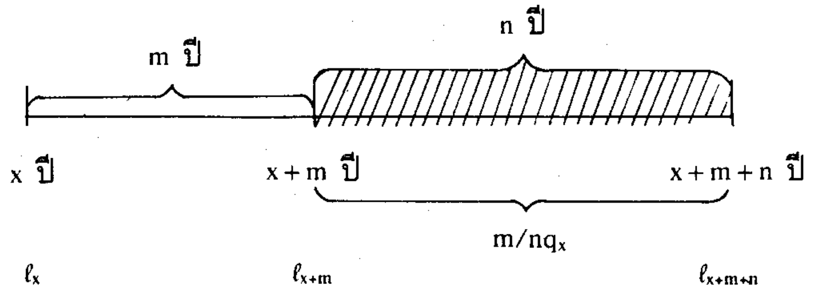
$$= \frac{{}_nd_x}{\ell_x}$$

${}_np_x$ = ความน่าจะเป็นที่คนอายุ x ปี จะมีชีวิตอยู่จนถึงอายุ x + n ปี หรือจะมีชีวิตอยู่ในช่วง n ปี

$$= \frac{\ell_{x+n}}{\ell_x}$$

หรือ $\quad {}_np_x = 1 - {}_nq_x$

${}_{m/n}q_x$ = ความน่าจะเป็นที่คนอายุ x ปี ในช่วง m ปีแรกจะมีชีวิตอยู่และจะเริ่มตาย เมื่ออายุ x + m ปี จนถึงอายุ x + m + n ปี หรือความน่าจะเป็นที่คนอายุ x ปี จะตายในช่วงอายุ x + m ปี ถึง x + m + n ปี ซึ่งถ้าดูจากรูป จะเห็นได้ว่า ${}_{m/n}q_x$ คือ ตรงที่แรเงาไว้

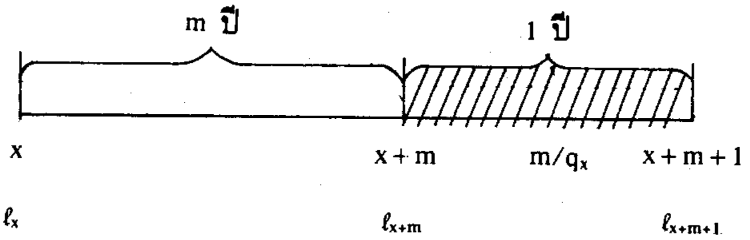


$$\therefore {}_{m/n}q_x = \frac{\text{จำนวนคนอายุ x ปี ที่ตายในช่วงอายุ x+m ปี ถึง x+m+n ปี}}{\text{จำนวนคนอายุ x ปี ที่ได้สำรวจไว้}}$$

$$= \frac{\ell_{x+m} - \ell_{x+m+n}}{\ell_x} = \frac{{}_nd_{x+m}}{\ell_x}$$

ถ้า n = 1 ปี m/nq_x จะเขียนได้เป็น

m/q_x ซึ่งหมายถึงความน่าจะเป็นที่คนอายุ x ปี จะตายในช่วงอายุ x + m ปี ถึง x + m + 1 ปี เขียนแสดงได้ดังรูป



$$\therefore\ m/q_x \quad = \quad \frac{\ell_{x+m} - \ell_{x+m+1}}{\ell_x}$$

$$= \quad \frac{d_{x+m}}{\ell_x}$$

ถ้า m = 0สัญญลักษณ์m/nq_x จะเขียนได้เป็น $0/nq_x$ ซึ่งคือ nq_x นั่นเอง

และถ้า m = 0, n = 1 สัญญลักษณ์m/nq_x จะเขียนได้เป็น $0/1q_x$ ซึ่งคือ q_x

จากสัญญลักษณ์ ความหมาย และการหาค่าต่าง ๆ ในตารางมรณะ เราจะนำข้อมูลต่าง ๆ ที่ได้จากตารางมรณะมาคำนวณหาความน่าจะเป็นของคนอายุหนึ่ง ๆ ที่จะมีชีวิตอยู่ หรือจะตายไปเมื่ออายุหนึ่ง ๆ หรือในช่วงอายุใดอายุหนึ่งได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้ (ใช้ข้อมูลจากตารางมรณะ CSO 1958)

ตัวอย่างที่ 1

จงหาความน่าจะเป็นที่คนอายุ 25 ปี จะตายภายใน 1 ปี หรือจะตายก่อนที่จะอายุครบ

26 ปี นั่นคือ ต้องการให้หา q_{25}

จาก $$q_x = \frac{\ell_x - \ell_{x+1}}{\ell_x} = \frac{d_x}{\ell_x}$$

$$\therefore \quad q_{25} = \frac{d_{25}}{\ell_{25}}$$

อ่านค่า ℓ_{25} และ d_{25} จากตารางมรณะ CSO 1958 แล้วแทนค่าจะได้

$$q_{25} = \frac{18,481}{9,575,636} = 0.00193$$

ตัวอย่างที่ 2

จงหาความน่าจะเป็นที่คนอายุ 25 ปี จะตายภายใน 5 ปี หรือจะตายก่อนที่จะอายุครบ 30 ปี

จาก $$nq_x = \frac{\ell_x - \ell_{x+n}}{\ell_x} = \frac{nd_x}{\ell_x}$$

$$\therefore \quad 5q_{25} = \frac{\ell_{25} - \ell_{30}}{\ell_{25}} = \frac{5d_{25}}{\ell_{25}}$$

หรือ $$5q_{25} = \frac{d_{25} + d_{26} + d_{27} + d_{28} + d_{29}}{\ell_{25}}$$

อ่านค่า ℓ_{25} และ ℓ_{30} จากตารางมรณะ CSO 1958 แล้ว แทนค่าจะได้

$$5q_{25} = \frac{9,575,636 - 9,480,358}{9,575,636}$$

$$= \frac{95,278}{9,575,636} = 0.00995$$

หรือหาจากช่อง d_x จากตารางมรณะ CSO 1958 ได้ค่า

$$d_{25} = 18{,}481,\ d_{26} = 18{,}732,\ d_{27} = 18{,}981,\ d_{28} = 19{,}324,\ d_{29} = 19{,}760$$

$$\therefore\ 5d_{25} = d_{25} + d_{26} + d_{27} + d_{28} + d_{29} = 18{,}481 + 18{,}732 + 18{,}981 + 19{,}324 + 19{,}760$$

$$= 95{,}278$$

จาก $$5q_{25} = \frac{5d_{25}}{\ell_{25}}$$

$$\therefore\ 5q_{25} = \frac{95{,}278}{9{,}575{,}636} = 0.00995$$

ตัวอย่างที่ 3

จงหาความน่าจะเป็นที่คนอายุ 30 ปี จะมีชีวิตอยู่ภายใน 1 ปี หรือจะมีชีวิตอยู่จนถึงอายุ 31 ปี

นั่นคือให้เราหา p_{30} จาก

$$p_x = \frac{\ell_{x+1}}{\ell_x}$$

$$\therefore\ p_{30} = \frac{\ell_{30+1}}{\ell_{30}} = \frac{\ell_{31}}{\ell_{30}}$$

อ่านค่า ℓ_{30} และ ℓ_{31} จากตาราง CSO 1958 แล้วแทนค่าจะได้

$$p_{30} = \frac{9{,}460{,}165}{9{,}480{,}358} = 0.99787$$

ตัวอย่างที่ 4

จงหาความน่าจะเป็นที่คนอายุ 30 ปี จะมีชีวิตอยู่ต่อไปอีก 5 ปี หรือจะมีชีวิตอยู่จนถึงอายุ 35 ปี

นั่นคือ ให้เราหา $_5p_{30}$

จาก $\quad {}_np_x = \dfrac{\ell_{x+n}}{\ell_x}$

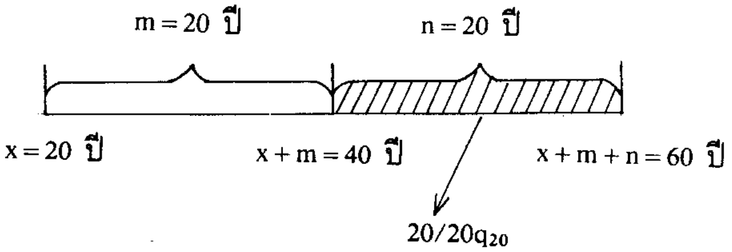
$\therefore \quad {}_5p_{30} = \dfrac{\ell_{30+5}}{\ell_{30}} = \dfrac{\ell_{35}}{\ell_{30}}$

อ่านค่า ℓ_{30} และ ℓ_{35} จากตาราง CSO 1958 แล้วแทนค่าจะได้

$${}_5p_{30} = \frac{9,373,807}{9,480,358} = 0.9887608$$

ตัวอย่างที่ 5

จงหาความน่าจะเป็นที่คนอายุ 20 ปี จะตายระหว่างอายุ 40 ถึง 60 ปี นั่นคือ โจทย์ต้องการให้เราหา $_{20/20}q_{20}$ ซึ่งเขียนภาพแสดงได้ดังนี้



จาก $\quad {}_{m/n}q_x = \dfrac{\ell_{x+m} - \ell_{x+m+n}}{\ell_x}$

$$\therefore \qquad {}_{20/20}q_{20} = \frac{\ell_{40} - \ell_{60}}{\ell_{20}}$$

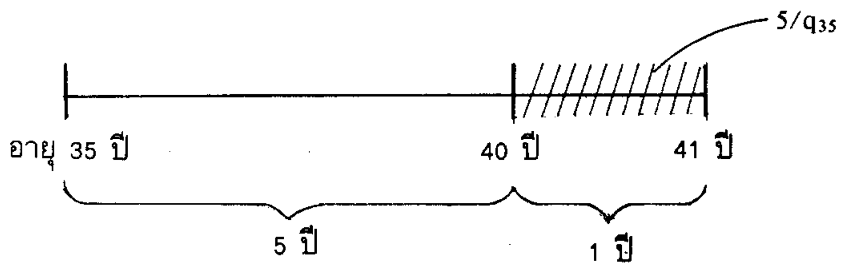
อ่านค่า ℓ_{20}, ℓ_{40} และ ℓ_{60} จากตารางมรณะ CSO 1958 แล้วแทนค่าจะได้

$$20/20q_{20} = \frac{9,241,359 - 7,698,698}{9,664,994}$$

$$= \frac{1,542,661}{9,664,994} = 0.1596132$$

ตัวอย่างที่ 6

จงหาความน่าจะเป็นที่คนอายุ 35 ปี จะตายระหว่างอายุ 40 ถึง 41 ปี นั่นคือ โจทย์ต้องการให้เราหา $5/q_{35}$ เขียนแสดงได้ดังรูป



$$\text{จาก} \qquad m/q_x = \frac{\ell_{x+m} - \ell_{x+m+1}}{\ell_x}$$

$$\therefore \qquad 5/q_{35} = \frac{\ell_{40} - \ell_{41}}{\ell_{35}}$$

เปิดค่า ℓ_{35}, ℓ_{40} และ ℓ_{41} จากตารางมรณะ CSO 1958 แล้วแทนค่าจะได้

$$5/q_{35} = \frac{9,241,359 - 9,208,737}{9,373,807}$$

$$= \frac{32,622}{9,373,807} = 0.0034801$$

ตัวอย่างที่ 7

จงพิสูจน์ว่า

$$m/nq_x = mp_x \cdot nq_{x+m}$$

พิสูจน์

จาก $$mp_x \cdot nq_{x+m} = \left[\frac{\cancel{\ell_{x+m}}}{\ell_x}\right]\left[\frac{\ell_{x+m} - \ell_{x+m+n}}{\cancel{\ell_{x+m}}}\right]$$

$$= \frac{\ell_{x+m} - \ell_{x+m+n}}{\ell_x}$$

$$\therefore \quad mp_x \cdot nq_{x+m} = m/nq_x$$ QED

ตัวอย่างที่ 8

จงพิสูจน์ว่า

$$mq_x = mp_x \cdot q_{x+m}$$

พิสูจน์

จาก $$mp_x \cdot q_{x+m} = \left[\frac{\cancel{\ell_{x+m}}}{\ell_x}\right]\left[\frac{\ell_{x+m} - \ell_{x+m+1}}{\cancel{\ell_{x+m}}}\right]$$

$$= \frac{\ell_{x+m} - \ell_{x+m+1}}{\ell_x}$$

$$\therefore \quad {}_mp_x \cdot q_{x+m} = {}_mq_x \qquad \text{QED}$$

ตัวอย่างที่ ๑

ถ้า $\ell_x = k(100 - x)$ **จงหาค่าของ** p_{35}

$$\because \quad p_{35} = \frac{\ell_{36}}{\ell_{35}}$$

จาก $\ell_x = k(100 - x)$

$$\therefore \quad \ell_{35} = k(100 - 35), \; \ell_{36} = k(100 - 36)$$

แทนค่า ℓ_{35} และ ℓ_{36} จะได้

$$p_{35} = \frac{\cancel{k}(100 - 36)}{\cancel{k}(100 - 35)} = \frac{64}{65} = 0.9846$$

5.2.2 การสร้างตารางมรณะ (Construction of a mortality table)

การสร้างตารางมรณะ มีวิธีการสร้างง่าย ๆ โดยแบ่งเป็น 3 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นแรก ทำการตรวจสอบข้อมูล (ได้จากการเก็บตัวเลขจำนวนผู้มีอายุใดอายุหนึ่งและจำนวนผู้ที่ตายภายในเวลา 1 ปีของคนกลุ่มนั้น) เพื่อดูว่ามีความไม่แนบนัย ความเอียงเฉ และความคลาดเคลื่อนหรือไม่ แล้วจึงทำการปรับข้อมูลตามเท่าที่จำเป็น

ขั้นที่ 2 **คำนวณหาอัตรามรณะ (Mortality rate) ซึ่งได้จากการหาอัตราส่วนของคนที่ตายต่อจำนวนคนทั้งหมดในอายุนั้นที่ได้สำรวจไว้ แล้วทำการปรับให้เรียบโดยวิธี Graduation**

ขั้นที่ 3 คำนวณหาค่าต่าง ๆ ของตารางมรณะ คือ ℓ_x, d_x, q_x, e_x^0 ดังนั้น จะเห็นได้ว่าถ้าเราทราบอัตรามรณะของแต่ละอายุ เราก็จะสามารถสร้างตารางมรณะได้โดยไม่ยากนัก โดยการกำหนดอายุเริ่มต้น (initial age) ของตาราง หรืออายุต่ำสุดของตาราง พร้อมทั้งจำนวนคนที่อายุเริ่มต้นสำหรับอายุที่เริ่มต้นของตารางนั้นไม่จำเป็นจะต้องเริ่มต้นจากอายุ 0 ปี จะเริ่มต้นจากอายุเท่าใดก็ได้ ที่คิดว่ามีประโยชน์ต่อธุรกิจประกันภัย ส่วนจำนวนคนที่อายุเริ่มต้นนั้นทำได้โดยเลือกตัวเลขขึ้นมาจำนวนหนึ่งที่เรียกว่า "Radix" โดยตัวเลขนี้มักจะกำหนดให้เป็นเลขจำนวนเต็ม เช่น 10,000, 100,000, 1,000,000 หรือ 10,000,000 สำหรับตารางมรณะ CSO 1958 จำนวนคนที่อายุเริ่มต้น (Radix of Mortality) คือ 10,000,000 คน และอายุเริ่มต้นของตาราง คือ 0 ปี $\therefore \ell_0 =$ 10,000,000 คน จากอัตรามรณะของแต่ละอายุที่เราหาได้ และค่า ℓ_0 ที่เรากำหนดขึ้นมาก็จะทำให้เราสามารถหาค่า ℓ ของอายุต่าง ๆ ได้ ดังนี้ (ดูอัตรามรณะจากตารางมรณะ CSO 1958)

จาก $\ell_0 = 10{,}000{,}000$ คน

และ $q_0 = 0.00708$

เราสามารถหา ℓ_1 ได้ โดยหาจำนวนคนอายุ 0 ปี ที่ตายภายใน 1 ปี (ซึ่งคือ d_0) ก่อนแล้วจึงหาจำนวนคนอายุ 0 ปี (ℓ_0) ที่มีชีวิตอยู่ภายใน 1 ปี ได้ดังนี้

$$d_0 = \ell_0 \times q_0$$

$$= 10{,}000{,}000 \times 0.00708$$

$= 70800$ คน

เมื่อทราบ d_0 เราก็จะหาจำนวนคนที่มีชีวิตอยู่เมื่ออายุครบ 1 ปีได้จาก

$$
\begin{aligned}
\ell_1 &= \ell_0 - d_0 \\
&= 10{,}000{,}000 - 70800 \text{ คน} \\
&= 9{,}929{,}200 \text{ คน}
\end{aligned}
$$

การหา ℓ_2 ก็ทำเช่นเดียวกัน คือ หา d_1 ก่อน จาก

$$
\begin{aligned}
d_1 &= \ell_1 \times q_1 \\
&= 9{,}929{,}200 \times 0.00176 \\
&= 17{,}475 \text{ คน}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore \quad \ell_2 &= \ell_1 - d_1 \\
&= 9{,}929{,}200 - 17{,}475 \\
&= 9{,}911{,}725 \text{ คน}
\end{aligned}
$$

ทำเช่นนี้ต่อไปเรื่อย ๆ จนถึงอายุสูงสุดของตาราง (ω) ก็จะได้ตารางมรณะ (สำหรับในช่อง e_x^0 จะกล่าวถึงวิธีการหาในหัวข้อต่อไป)

สรุปสูตรทั่ว ๆ ไป ในการหาจำนวนคนที่มีอายุต่าง ๆ คือ

$$\ell_{x+1} = \ell_x - d_x$$

สรุปขั้นตอนในการสร้างตารางมรณะ

1. จากข้อมูลจำนวนผู้ที่มีอายุใดอายุหนึ่ง และจำนวนผู้ที่ตายภายในเวลา 1 ปี ของคนกลุ่มนั้น นำข้อมูลนี้มาหาความน่าจะเป็นที่คนอายุหนึ่ง ๆ จะตายภายใน 1 ปี นั่นคือ หา q_x

2. กำหนด Radix of Mortality

3. หา d_x ซึ่งคือ จำนวนคนอายุ x ปี ที่ตายภายใน 1 ปี โดยใช้ q_x ที่ได้ในขั้นที่ 1 จาก

$$q_x = \frac{d_x}{\ell_x}$$

$$\therefore \quad d_x = q_x \cdot \ell_x$$

4. หา ℓ_{x+1} จาก

$$\ell_{x+1} = \ell_x - d_x$$

5. นำค่าที่ได้ใส่ลงในตารางมรณะ และหาค่าต่าง ๆ ที่ต้องการได้ในทุกอายุ

x	q_x	ℓ_x	d_x	p_x	e_x^0

ตัวอย่างที่ 1

กำหนดให้ ℓ_{15} = 100,000 และจากการเก็บข้อมูลของบริษัทประกันชีวิต พบว่า อัตรามรณะที่อายุ 15, 16, 17, 18 และ 19 เป็น 0.0020, 0.0021, 0.0023, 0.0026 และ 0.0030 ตามลำดับ จงสร้างตารางมรณะ (สร้างช่อง ℓ_x, d_x, q_x, p_x)

จากอัตรามรณะที่กำหนดให้ เราสามารถสร้างตารางมรณะได้ดังนี้ อายุต่ำสุดของตารางนี้คือ 15 ปี และโจทย์กำหนด Radix ให้เท่ากับ 100,000

จาก ℓ_{15} = 100,000 เราหา จำนวนคนอายุ 15 ปี ที่ตายไปก่อนที่จะอายุครบ 16 ปี ได้จาก

จำนวนคนอายุ 15 ปี คูณด้วยความน่าจะเป็น (หรืออัตรามรณะ) ที่คนอายุ 15 ปี จะตายภายใน 1 ปี

$$
\begin{aligned}
\therefore \quad d_{15} &= \ell_{15} \times q_{15} \\
&= 100{,}000 \times 0.0020 \\
&= 200 \quad \text{คน} \\
\therefore \quad \ell_{16} &= \ell_{15} - d_{15} = 100{,}000 - 200 \\
&= 99{,}800 \\
d_{16} &= \ell_{16} \times q_{16} \\
&= 99{,}800 \times 0.0021 \\
&= 209.58 \quad \text{(ปัดให้เป็นเลขจำนวนเต็ม)} \\
&\approx 210 \\
\therefore \quad \ell_{17} &= \ell_{16} - d_{16} \\
&= 99{,}800 - 210 \\
&= 99{,}590 \\
d_{17} &= \ell_{17} \times q_{17} \\
&= 99{,}590 \times 0.0023 \\
&= 229.057 \approx 229 \\
\therefore \quad \ell_{18} &= \ell_{17} - d_{17} \\
&= 99{,}590 - 229 \\
&= 99{,}361 \\
d_{18} &= \ell_{18} \times q_{18} \\
&= 99{,}361 \times 0.0026 \\
&= 258.3386 \approx 258
\end{aligned}
$$

$$\ell_{19} = \ell_{18} - d_{18}$$
$$= 99{,}361 - 258$$
$$= 99{,}103$$
$$d_{19} = \ell_{19} \times q_{19}$$
$$= 99{,}103 \times 0.0030$$
$$= 297.309 \approx 297$$
$$\therefore \quad \ell_{20} = \ell_{19} - d_{19}$$
$$= 99{,}103 - 297$$
$$= 98{,}806$$

ค่าต่าง ๆ ที่คำนวณได้ นำมาใส่ในตารางมรณะได้ดังนี้

x	ℓ_x	q_x	d_x	$p_x = 1 - q_x$
15	100,000	0.0020	200	0.9980
16	99,800	0.0021	210	0.9979
17	99,590	0.0023	229	0.9977
18	99,361	0.0026	258	0.9974
19	99,103	0.0030	297	0.9970
20	98,806	—	—	—

5.2.3 ค่าคาดหวังของการมีชีวิตอยู่ (Expectation of life)

The expectation of life at age x หมายถึง ระยะเวลาโดยเฉลี่ยที่คนอายุ x จะมีชีวิตอยู่ต่อไปเป็นเวลานานเท่าใด เช่น จากตารางมรณะ CSO 1958 $e^0_{30} = 41.25$ หมายความว่า ชายอายุ

30 ปี จะมีชีวิตอยู่ต่อไปโดยเฉลี่ยอีก 41.25 ปี

e_{55}^{0} = 19.71 หมายความว่า ชายอายุ 55 ปี จะมีชีวิตอยู่ต่อไปโดยเฉลี่ยอีก 19.71 ปี ค่าคาดหวังของการมีชีวิตอยู่มักจะนำมาใช้ในการคำนวณเบี้ยประกันชีวิตอย่างหยาบ ๆ ในบางปัญหาเท่านั้น

วิธีการหา expectation of life เช่น จะหา expectation of life ของคนอายุ 25 ปี วิธีการก็คือ เราจะสังเกตคนอายุ 25 ปี กลุ่มหนึ่ง ตั้งแต่คนแรกจนถึงคนสุดท้ายว่าแต่ละคนจะมีชีวิตรอดอยู่อีกกี่ปีจึงจะตาย แล้วนำเอาจำนวนปีที่ได้ทั้งหมดบวกกันหารด้วยจำนวนคนอายุ 25 ปี ที่เราทำการสังเกต ผลหารที่ได้จะเป็นค่าของ expectation of life ของคนอายุ 25 ปี ดังนี้

สมมติว่า จำนวนคนอายุ 25 ปี ที่สังเกตมี 10,000 คน

คนที่ 1	มีชีวิตรอดอยู่	=	70.25 ปี
คนที่ 2	"———"	=	69.50 ปี
คนที่ 3	"———"	=	69.00 ปี
คนที่ 4	"———"	=	68.00 ปี
คนที่ 5	"———"	=	71.50 ปี
.			.
.			.
.			.
คนที่ 10,000	"———"	=	65.75 ปี
			Σ ปี (ผลรวมของจำนวนปีที่ได้)

นำผลรวมของจำนวนปีที่ได้ หารด้วยจำนวนคนอายุ 25 ปี ที่ทำการสังเกต (10,000 คน) ก็จะได้จำนวนปี โดยเฉลี่ยที่คนอายุ 25 ปี จะมีชีวิตอยู่รอดต่อไปในอนาคตซึ่งก็คือ ค่า expectation of life ของคนอายุ 25 ปี นั่นเอง แต่วิธีนี้ในทางปฏิบัติเราไม่นิยมเพราะทำลำบากมาก และใช้เวลาในการสังเกตนาน ดังนั้นในทางปฏิบัติ เราจะหาค่า expectation of life ของคนอายุต่าง ๆ จากตารางมรณะ โดยวิธีดังต่อไปนี้

ให้ e_x = Curtate expectation of life at age x

= จำนวนปีเต็ม (ปัดเศษของปีทิ้ง) โดยเฉลี่ยที่คนอายุ x จะมีชีวิตรอดอยู่ คือ ปัดเศษทิ้งก่อนแล้วจึงนำมาหาค่าเฉลี่ย

ถ้าเราสมมติว่าการตายของแต่ละคนเกิดขึ้นในตอนต้น ๆ ของปีนั้น ดังนั้น จากคนกลุ่มหนึ่งที่มีอายุ x ปี จำนวน ℓ_x คน จะได้ว่า คนอายุ x ปี

จะตายระหว่างอายุ x ถึง x + 1 เท่ากับ d_x ซึ่งจะมีชีวิตอยู่ = 0 ปี ∴ จำนวนปีที่มีชีวิตอยู่ = $d_x \times 0$

จะตายระหว่างอายุ x + 1 ถึง x + 2 เท่ากับ d_{x+1} ซึ่งจะมีชีวิตอยู่ = 1 ปี ∴ จำนวนปีที่มีชีวิตอยู่ = $d_{x+1} \times 1$

จะตายระหว่างอายุ x + 2 ถึง x + 3 เท่ากับ d_{x+2} ซึ่งจะมีชีวิตอยู่ = 2 ปี ∴ จำนวนปีที่มีชีวิตอยู่ = $d_{x+2} \times 2$

ทำไปเรื่อย ๆ

∴ จำนวนปีทั้งหมดที่คนกลุ่มนี้มีชีวิตอยู่รวมกันจะเท่ากับ

$$d_{x+1} + 2d_{x+2} + 3d_{x+3} + \dots$$

ซึ่ง
$$\begin{aligned} d_{x+1} + 2d_{x+2} + 3d_{x+3} + \dots &= (\ell_{x+1} - \ell_{x+2}) + 2(\ell_{x+2} - \ell_{x+3}) + 3(\ell_{x+3} - \ell_{x+4}) + \dots \\ &= \ell_{x+1} + \ell_{x+2} + \ell_{x+3} + \dots \end{aligned}$$

ถ้าให้ ω = อายุสูงสุดของตารางมรณะ

∴ จำนวนปีเฉลี่ยที่คนอายุ x ปี จะมีชีวิตอยู่ต่อไปในอนาคตคือ

$$e_x = \frac{\ell_{x+1} + \ell_{x+2} + \ell_{x+3} + \ldots + \ell_\omega}{\ell_x}$$

ถ้าเราสมมติว่า การตายในช่วงระหว่างปีใด ๆ มีการกระจายเป็น uniform ซึ่งเราจะได้ว่า ในปีที่เขาตายเขาจะมีชีวิตอยู่โดยเฉลี่ยประมาณ $\frac{1}{2}$ ปี

การหา expectation of life เรากำหนดให้

e_x^0 = Complete expectation of life atage x

= จำนวนปีโดยเฉลี่ย (โดยเอาเศษของปีมาคิดด้วย) ที่คนอายุ x จะมีชีวิตรอดอยู่

วิธีหา e_x^0 จากคน ℓ_x คน

จะตายระหว่างอายุ x กับ x + 1 = d_x มีชีวิตอยู่เฉลี่ย = $\frac{1}{2}$ ปี $\therefore$ จำนวนปีที่มีชีวิตอยู่ = $d_x \times \frac{1}{2}$

จะตายระหว่างอายุ x + 1 กับ x + 2 = d_{x+1} มีชีวิตอยู่เฉลี่ย = $1\frac{1}{2}$ ปี $\therefore$ จำนวนปีที่มีชีวิตอยู่ = $d_{x+1} \times 1\frac{1}{2}$

จะตายระหว่างอายุ x + 2 กับ x + 3 = d_{x+2} มีชีวิตอยู่เฉลี่ย = $2\frac{1}{2}$ ปี $\therefore$ จำนวนปีที่มีชีวิตอยู่ $d_{x+2} \times 2\frac{1}{2}$

$$\therefore e_x^0 \doteqdot \frac{\frac{1}{2}dx + 1\frac{1}{2}d_{x+1} + 2\frac{1}{2}d_{x+2} + \ldots}{\ell_x}$$

$$\doteqdot \frac{\frac{1}{2}(d_x + d_{x+1} + d_{x+2} + \ldots) + (d_{x+1} + 2d_{x+2} + 3d_{x+3} + \ldots)}{\ell_x}$$

$$\doteqdot \frac{\frac{1}{2}\ell_x + (d_{x+1} + 2d_{x+2} + 3d_{x+3} + \dots)}{\ell_x}$$

$$\therefore\ e_x^0 \doteqdot \frac{1}{2}\frac{\ell_x}{\ell_x} + e_x = \frac{1}{2} + e_x$$

สำหรับตารางมรณะโดยทั่ว ๆ ไป จะให้ค่า e_x^0 แต่ก็มีบางตารางที่ให้ค่า e_x ซึ่งถ้าเราต้องการค่า expectation of life ที่มีค่าใกล้เคียงยิ่งขึ้น เราควรใช้ e_x^0

5.2.4 การคัดเลือก (Selection)

กลุ่มที่ได้รับการคัดเลือก คือ กลุ่มคนซึ่งไม่ได้ถูกเลือกมาอย่างสุ่ม ๆ (Random) ในกรณีของการประกันชีวิต บริษัทประกันชีวิตจะทำการคัดเลือกผู้เอาประกันที่มีสุขภาพดีเท่านั้น โดยการตรวจสุขภาพของผู้ขอเอาประกันก่อนที่จะตัดสินใจทำการรับประกัน ดังนั้น กลุ่มที่ได้รับการคัดเลือกจะเป็นกลุ่มที่คิดว่าจะมีชีวิตอยู่โดยเฉลี่ยนานกว่ากลุ่มที่ได้มาโดยไม่ได้คัดเลือก

และผลของการยอมรับว่าเป็นผู้มีสุขภาพดีพอที่จะทำประกันชีวิตได้เมื่อครั้งแรกนั้นอาจจะไม่มีผลเหลืออยู่เลยภายหลังจาก 5 ปีผ่านไปแล้ว ตัวอย่างเช่น อัตรามรณะของคนอายุ 30 ปี ที่ได้เอาประกันชีวิตมาเป็นระยะเวลา 10 ปีแล้ว จะมีค่าเท่ากับอัตรามรณะของคนอายุ 30 ปี ที่ได้เอาประกันชีวิตมาแล้วเป็นระยะเวลา 15 ปี เพราะต่างก็ได้เอาประกันชีวิตมาเกิน 5 ปี ซึ่งผลของการผ่านการตรวจสุขภาพในตอนเอาประกันครั้งแรกนั้นหมดไปแล้ว

ตารางมรณะที่นำมาใช้ในเรื่อง Selection นี้ คือ "Anderson's Select Modification of Mortality Table X_{18}" ซึ่งแสดงไว้ดังตารางต่อไปนี้

ตารางมรณะ X_{18}

(With Anderson's Select Modification)

อายุขณะออกกรมธรรม์	อัตรามรณะต่อพันคน ปีกรมธรรม์ที่ 1	2	3	4	5	6	อายุขณะนี้
30	.78	.88	.99	1.10	1.25	1.41	35
31	.80	.91	1.02	1.17	1.33	1.53	36
32	.82	.94	1.08	1.24	1.44	1.68	37
33	.84	.98	1.14	1.33	1.57	1.87	38
34	.88	1.03	1.22	1.45	1.74	2.10	39
35	.92	1.10	1.33	1.61	1.95	2.36	40
36	.97	1.19	1.46	1.79	2.19	2.64	41
37	1.04	1.30	1.62	2.00	2.44	2.95	42
38	1.13	1.44	1.80	2.22	2.72	3.28	43
39	1.24	1.59	1.99	2.47	3.01	3.63	44
40	1.36	1.74	2.20	2.72	3.32	4.02	45
41	1.48	1.91	2.41	2.99	3.67	4.45	46
42	1.61	2.09	2.64	3.29	4.05	4.92	47
43	1.74	2.27	2.89	3.61	4.46	5.46	48
44	1.87	2.46	3.16	3.97	4.93	6.06	49

ช่องแรก เป็นอายุเมื่อตอนเริ่มทำประกันชีวิต (age at issue)

ช่องที่ 2-6 เป็นอัตรามรณะของผู้เอาประกันที่ทำประกันมาแล้ว 1-5 ปี

ช่องที่ 7 เป็นอัตรามรณะที่เรียกว่า "Ultimate rate" ซึ่งเป็นอัตรามรณะของผู้ที่ได้ทำประกันชีวิตมาแล้วไม่ต่ำกว่า 5 ปี ซึ่งถือว่าผลของการผ่านการตรวจสุขภาพในตอนแรกที่ทำประกันนั้นหมดไปแล้ว ดังนั้น ช่องที่ 7 นี้จึงเป็นอัตรามรณะของคนที่ปัจจุบันอายุ x ปี (คือ อายุในช่องที่ 8 ซึ่งคือ Adtained Age) และได้ทำประกันมาแล้วไม่ต่ำกว่า 5 ปี

ตัวอย่างเช่น จากตาราง ความน่าจะเป็นที่คน ๆ หนึ่ง ปัจจุบันอายุ 42 ปี ซึ่งได้รับการยอมรับให้ทำประกันชีวิตได้ เมื่ออายุ 40 ปี มีค่าเท่ากับ 2.20 ต่อพันคน ซึ่งเท่ากับ 0.0022 หรือกล่าวได้ว่าตัวเลข 0.0022 เป็นอัตรามรณะของคนอายุ 40 ปี ซึ่งได้ทำประกันมาแล้ว 3 ปี นั่นเอง

จากตารางตัวเลข 4.02 (หรือเท่ากับ 0.0042) เป็นความน่าจะเป็นที่คน ๆ หนึ่ง ปัจจุบันอายุ 45 ปี และได้รับการยอมรับให้เอาประกันชีวิตมาแล้วกว่า 5 ปี จะตายก่อนที่จะถึงอายุ 46 ปี

สำหรับตาราง X_{18} นี้ เราสามารถนำมาคำนวณหาความน่าจะเป็นที่คนอายุต่าง ๆ จะตาย หรือจะมีชีวิตอยู่ในช่วงเวลาใดเวลาหนึ่งได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1

จงหาความน่าจะเป็นที่คน ๆ หนึ่ง ปัจจุบันอายุ 40 ปี และได้ทำประกันชีวิตมาแล้ว 1 ปี

ก. จะตายระหว่างอายุ 41 ถึง 42 ปี

2. จะตายระหว่างอายุ 46 ถึง 47 ปี

โดยใช้ตาราง X_{18}

วิธีทำ

ก) ชายคนนี้ปัจจุบันอายุ 40 ปี และทำประกันชีวิตมาแล้ว 1 ปี [อายุตอนเริ่มที่ทำประกันของชายคนนี้คือ 39 ปี]

ความน่าจะเป็นที่ชายคนหนึ่งปัจจุบันอายุ 40 ปี จะตายระหว่างอายุ 41 - 42 ปี คือ P[ชายอายุ 40 ปี จะตายระหว่างอายุ 41 - 42 ปี]

ซึ่ง = P[ชายอายุ 40 ปี มีชีวิตอยู่ระหว่างอายุ 40 - 41 ปี] ×
P[ชายอายุ 40 ปี จะตายระหว่างอายุ 41 - 42 ปี]
(หลังจากที่มีอายุ 41 ปี)

อ่านจากตาราง X_{18} (ดูที่อายุเริ่มทำประกัน 39 ปี)

P[ชายอายุ 40 ปี จะตายระหว่างอายุ 40-41 ปี] = 0.00159

∴ P[ชายอายุ 40 ปี จะมีชีวิตอยู่ระหว่างอายุ 40 - 41 ปี] = 1 − 0.00159

P[ชายอายุ 40 ปี จะตายระหว่างอายุ 41 - 42 ปี] = 0.00199
(หลังจากที่มีอายุ 41 ปี)

∴ P[ชายอายุ 40 ปี จะตายระหว่างอายุ 41 - 42 ปี] = (1 − 0.00159) × (0.00199)

ข) ชายคนนี้ปัจจุบันอายุ 40 ปี ทำประกันเมื่ออายุ 39 ปี ต้องการหาความน่าจะเป็นที่เขาจะตายระหว่าง อายุ 46 ถึง 47 ปี

จากตาราง X_{18}

ความน่าจะเป็นที่ต้องการ = P[มีชีวิตอยู่ระหว่างอายุ 40 - 41 ปี] ×
P[มีชีวิตอยู่ระหว่างอายุ 41 - 42 ปี] ×
P[มีชีวิตอยู่ระหว่างอายุ 42 - 43 ปี] ×
P[มีชีวิตอยู่ระหว่างอายุ 43 - 44 ปี] ×
P[มีชีวิตอยู่ระหว่างอายุ 44 - 45 ปี] ×
P[มีชีวิตอยู่ระหว่างอายุ 45 - 46 ปี] ×
P[ตายระหว่างอายุ 46 - 47 ปี]

$$= (1 - 0.00159)(1 - 0.00199)(1 - 0.0024)(1 - 0.00301)$$
$$(1 - 0.00363)(1 - 0.00402)(0.00445)$$

ตัวอย่างที่ 2

จงหาความน่าจะเป็นที่ผู้ชายคนหนึ่งอายุ 36 ปี ทำประกันชีวิตมาแล้ว 1 ปี จะมีชีวิตอยู่จนถึงอายุ 38 ปี

∴ อายุที่ทำประกันคือ 35 ปี จากตาราง X_{18}

ความน่าจะเป็นที่คนอายุ 36 ปี จะตายระหว่างอายุ 36 - 37 ปี = 0.00110

∴ ความน่าจะเป็นที่คนอายุ 36 ปี จะมีชีวิตอยู่ระหว่างอายุ 36 - 37 ปี = 1 − 0.00110

= 0.99890

ความน่าจะเป็นที่คนอายุ 37 ปี ซึ่งทำประกันมาแล้ว 2 ปีจะตาย = 0.00133

∴ ความน่าจะเป็นที่คนอายุ 37 ปี ซึ่งทำประกันมาแล้ว 2 ปี จะมีชีวิตอยู่ = 1 − 0.00133

= 0.99867

∴ ความน่าจะเป็นที่คนอายุ 36 ปี ทำประกันมาแล้ว 1 ปี จะมีชีวิตอยู่จนถึงอายุ 38 ปี

= (0.99890)(0.99867)

แบบฝึกหัดบทที่ 5

1. จงแสดงว่า

    ก) $i - d = id$

    ข) $\lim\limits_{M\to\infty} (i^{(M)} - d^{(M)}) = \lim\limits_{M\to\infty} \dfrac{i^{(M)} \times d^{(M)}}{M}$

2. กำหนดให้ $d = 0.05$ จงหาค่า i, $i^{(2)}$ และ $i^{(4)}$

3. กำหนดให้ $i = 0.06$ จงหา $i^{(2)}$ และ $i^{(4)}$

4. จงหาสูตรอย่างย่อสำหรับหาระยะเวลาที่จะทำให้เงินรวมเป็น 3 เท่าของเงินต้น กำหนดดอกเบี้ยร้อยละ r ต่อปี

5. จงหาค่าปัจจุบันของเงิน 10,000 บาท ซึ่งถึงกำหนดได้รับเมื่อครบ 10 ปี ถ้าหากว่าสามารถหาผลประโยชน์ร้อยละ 3 ต่อปี สำหรับระยะเวลา 5 ปีแรก และ $3\frac{1}{2}\%$ ต่อปีสำหรับระยะเวลาที่เหลือ

6. จงหาเงินรวมของเงินต้น 100 บาท สะสมในเวลา 20 ปี โดยใช้

    ก) ส่วนลด 4% ต่อปีลดปีละ 2 ครั้ง

    ข) อัตราดอกเบี้ย 6% ต่อปี ทบต้นปีละ 3 ครั้ง สำหรับระยะเวลา 12 ปีแรก และ $2\frac{1}{2}\%$ ทบต้นทุก ๆ 2 ปี สำหรับระยะเวลาที่เหลือ

7. เงินต้น 50,000 บาท กำหนดให้ดอกเบี้ยร้อยละ 5 ต่อปี ตั้งแต่ปีที่ 1-5 และ 16-20 และร้อยละ 5 ต่อปี ทบต้นปีละ 2 ครั้ง ตั้งแต่ปีที่ 6-15 จงหาผลต่างระหว่างดอกเบี้ย 10 ปีแรก และ 10 ปีหลัง

8. ธนากรต้องการที่จะมีเงินจำนวน 10,000 บาท ในเวลา 15 ปีข้างหน้า เขาจึงนำเงินจำนวนหนึ่งไปฝากธนาคาร โดยได้ดอกเบี้ยร้อยละ $4\frac{1}{2}$ ต่อปี ครั้นเมื่อฝากเงินไปได้ครบ 4 ปี ทางธนาคาร แจ้งให้ทราบว่าตั้งแต่ปีที่ 5 เป็นต้นไป จะคิดดอกเบี้ยให้ร้อยละ 4 ต่อปี ทบต้นปีละ

2 ครั้ง ถ้าหากว่า เขายังมีความประสงค์ที่จะมีเงินจำนวน 10,000 บาท ตามเดิม

ก) เขาจะต้องฝากเงินเพิ่มในวันต้นปีที่ 5 เท่าใด

ข) ถ้าเขาไม่ฝากเพิ่มในปีที่ 5 เขาจะต้องฝากเพิ่มในปีที่ 10 เท่าใด

9. ชายผู้หนึ่งมีบุตร 3 คน อายุ 13, 10, และ 8 ปี ตามลำดับขณะนี้ เขามีเงินอยู่ในธนาคารจำนวนหนึ่งซึ่งทางธนาคารคิดดอกเบี้ยให้ร้อยละ 6 ต่อปี ทบต้นปีละ 2 ครั้ง เขาตั้งใจที่จะมอบเงินให้เป็นของขวัญในวันที่บุตรอายุครบ 21 ปีบริบูรณ์ทุกคน คนละ 20,000 บาท ในวันที่ที่บุตรคนสุดท้องอายุครบ 21 ปีบริบูรณ์ เขาได้ถอนเงินออกจากธนาคารจำนวน 20,000 บาท มามอบให้เป็นของขวัญ และปรากฏว่าเงินในธนาคารหมดพอดี อยากทราบว่าขณะนี้เขามีเงินอยู่จำนวนเท่าใด

10. จงหาเงินรวมของเงินต้น 1 หน่วย เมื่อครบเวลา 20 ปี ถ้าใน 10 ปีแรกคิดอัตราดอกเบี้ย $4\frac{1}{2}\%$ ต่อปี ระยะที่สองช่วง 6 ปี คิดอัตราดอกเบี้ย 4% ต่อปี และระยะสุดท้าย 4 ปีหลังคิดอัตราดอกเบี้ย $3\frac{1}{2}\%$ ต่อปี

11. ถ้า $i^{(4)} = 0.029668$ จงหาค่าของ $d^{(2)}$

โจทย์ต่อไปให้ใช้ตารางมรณะ CSO 1958

12. จงหาความน่าจะเป็นที่คนอายุ 25 ปีจะตาย ระหว่างอายุ 60 ถึง 70 ปี

13. จงหาความน่าจะเป็นที่คนอายุ 30 ปีจะมีชีวิตอยู่จนถึงอายุ 50 ปี

14. จงหาความน่าจะเป็นที่เด็กอายุ 1 ปี จะ

ก) มีชีวิตอยู่จนถึงอายุ 80 ปี

ข) จะตายระหว่างอายุ 60 - 70 ปี

15. เด็กคู่หนึ่งอายุ 1 ปี กับอายุ 11 ปี จงหาความน่าจะเป็นที่มี 1 คนเท่านั้น ที่ตายก่อน อายุ 50 ปี

16. จงพิสูจน์ว่า

ก) $m + np_x = mp_x - m/nq_x$

ข) $\ell_x - \ell_{x+n} = d_x + d_{x+1} + \ldots + d_{x+n-1}$

ค) $e_x = p_x + 2p_x + 3p_x + \ldots + \omega - xp_x$

ง) $e_x = p_x(1 + e_{x+1})$

17. จงอธิบายความหมายของสัญลักษณ์ ต่อไปนี้พร้อมทั้งบอกวิธีการหาจากตารางมรณะ

p_{40} q_{25} $6/q_{30}$ $10/5q_{40}$ $5q_{40}$ $10p_{30}$

18. ถ้าให้ $\ell_x = 200(100 - x)$ จงหา $2/q_x$

19. จงแสดงว่า

ก) $\ell_x = d_x + d_{x+1} + \ldots + d_{\omega-1}$

ข) $\ell_{x+n} = \ell_x \cdot p_x \cdot p_{x+1} \cdot \ldots \cdot p_{x+n-1}$

ค) $m + 1p_x + m/q_x = mp_x$

ง) $m + np_x + m/nq_x = mp_x$

จ) $m + np_x = mp_x \cdot np_{x+m} = np_x \cdot mp_{x+n}$

20. กำหนดให้ ℓ_{15} = 100,000 และอัตรามรณะที่อายุ 15, 16, 17, 18 และ 19 เท่ากับ 0.0020, 0.0021, 0.0023, 0.0026 และ 0.0030 ตามลำดับ จงคำนวณหาคอลัมน์ ℓ_x, d_x และ p_x สำหรับอายุดังกล่าว

21. จงตรวจสอบจากตารางมรณะ CSO 1958 ว่า

$\ell_{20} - \ell_{25} = d_{20} + d_{21} + d_{22} + d_{23} + d_{24}$ จริง

22. จงใช้ผลจากการตรวจสอบที่ได้ในข้อ (21) หาความน่าจะเป็นที่คนอายุ 20 ปี จะตายก่อนที่จะถึงอายุ 25 ปี

23. กำหนดให้

x	92	93	94	95	96	97	98
ℓ_x	1000	500	230	92	29	6	0

จงสร้างคอลัมน์ d_x, q_x และ p_x

24. จากตารางมรณะ CSO 1958 จงหาความน่าจะเป็นที่ผู้ชายคนหนึ่งอายุ 40 ปี จะตายระหว่างอายุ 40 ถึง 49 ปี, 50 ถึง 59ปี และ 60 ถึง 69 ปี

25. จากตารางมรณะที่สร้างได้ในข้อ (23) จงหาความน่าจะเป็นที่คนอายุ 92 ปี จะตายระหว่างอายุ 94 ถึง 96 ปี

26. จากตารางมรณะ CSO 1958 จงหาความน่าจะเป็น

ก) ที่ชายคนหนึ่งอายุ 20 ปี จะมีชีวิตอยู่อย่างน้อยที่สุด 25 ปี

ข) ที่ชายคนหนึ่งอายุ 30 ปี จะตายใน 1 ปี หลังจากที่เขาอายุ 45 ปี

ค) ที่ชายคนหนึ่งอายุ 35 ปี จะตายระหว่างอายุ 60 ถึง 70 ปี

ง) ที่ชายคนหนึ่งอายุ 40 ปี จะมีชีวิตอยู่จนถึงอายุ 55 ปี แต่ไม่ถึงอายุ 60 ปี

จ) ที่ชายคนหนึ่งอายุ 45 ปี จะตายภายใน 5 ปี

27. จงพิสูจน์ว่า

ก) $m/q_x = mp_x \, . \, q_{x+m}$

ข) $m/nq_x = mp_x \, . \, nq_{x+m}$

ค) $np_x = \dfrac{np_x - n+1\,p_x}{q_{x+n}}$

28. ถ้าความน่าจะเป็นที่ชายคนหนึ่งอายุ 30 ปี และอีกคนหนึ่งอายุ 50 ปี จะมีชีวิตอยู่ภายใน 20 ปี เท่ากับ 0.4 จากคนอายุ 30 ปี จำนวน 48,000 คน มี 3,000 คน ที่ตายไปก่อนที่จะอยู่ครบ 40 ปี จงหาความน่าจะเป็นที่ชายอายุ 40 ปี จะตายภายใน 30 ปีข้างหน้า

29. จงใช้ตารางมรณะ CSO 1958 เปรียบเทียบ ความน่าจะเป็นที่ชายคนหนึ่งอายุ 25 ปี จะตายระหว่างอายุ 65 ถึง 70 ปี กับความน่าจะเป็นที่ผู้ชายคนหนึ่งอายุ 50 ปี จะตายระหว่างอายุช่วงเดียวกัน

30. ถ้าให้ $q_x = 0.02x - 1.5$ เมื่อ x อยู่ระหว่าง 85 ถึง 95 และถ้า $\ell_{85} = 1000$

ก) จงสร้างคอลัมน์ ℓ_x และ d_x จากอายุ 85 ถึง 95

ข) จงหาความน่าจะเป็นที่คนอายุ 85 ปี จะมีชีวิตอยู่จนถึงอายุ 92 ปี

ค) จงหาความน่าจะเป็นที่คนอายุ 85 ปี จะตายระหว่างอายุ 90 ถึง 92 ปี

ง) จงหาความน่าจะเป็นที่คนอายุ 88 ปี จะตายภายใน 1 ปี หลังจากที่มีอายุครบ 91 ปี

31. จงตรวจสอบค่าของ expectation of life ที่กำหนดไว้ในตารางมรณะ CSO 1958 สำหรับอายุ 75, 85 และ 90

32 จากตารางมรณะ ในข้อ 23 จงหา e_{92} และ e^0_{93}

33. กำหนดตารางต่อไปนี้ให้ จงสร้างคอลัมน์ d_x, q_x, p_x, e_x และ e^0_x

x	90	91	92	93	94	95	96
ℓ_x	850	450	210	75	20	4	0

34. ถ้า $\ell_x = k\ (86 - x)$ เมื่อ k เป็นค่าคงที่ใด ๆ จงแสดงว่า $d_k = k$, $p_x = \dfrac{85 - x}{86 - x}$ และ

$$q_x = \frac{1}{86 - x}$$

35. จงใช้ตารางมรณะ CSO 1958 หาความน่าจะเป็นต่อไปนี้

ก) คนอายุ 30 ปี จะตายระหว่างอายุ 65 ถึง 70 ปี

ข) คนอายุ 50 ปี จะมีชีวิตอยู่จนถึงอายุ 70 ปี

ค) คนอายุ 20 ปี จะตายระหว่างอายุ 80 ถึง 85 ปี

36. ถ้า $\ell_x = k(100 - x)$ จงหาค่าของ ${}_5p_{60}$, ${}_{5/10}q_{45}$

37. จงเติมตารางให้สมบูรณ์ พร้อมทั้งหาค่า e_{98} และ e^0_{98} ด้วย

x	ℓ_x	d_x	p_x	q_x
98	160			
99		40		
100	24			0.667
101			0.250	
102				1.000

โจทย์ต่อไปนี้ให้ใช้ตาราง Select Mortality Table X_{18}

38. จงหาความน่าจะเป็นที่ชายคนหนึ่งในปัจจุบันอายุ 36 ปี ซึ่งทำประกันมาแล้ว 1 ปี จะมีชีวิตอยู่จนถึงอายุ 38 ปี

39. จงหาความน่าจะเป็นที่ชายคนหนึ่งอายุ 32 ปี ที่เพิ่งจะซื้อประกันชีวิต
    ก) จะมีชีวิตอยู่ถึงอายุ 35 ปี
    ข) จะตายระหว่างอายุ 33 ปี และ 34 ปี
    ค) จะมีชีวิตอยู่จนถึงอายุ 34 ปี

40. จงหาความน่าจะเป็นที่ชายอายุ 41 ปี ที่ซึ่งประกันชีวิตขณะนี้ จะมีชีวิตอยู่รอดจนถึงอายุ 45 ปี

41. จงหาความน่าจะเป็นที่ชายอายุ 35 ปีขณะนี้ที่ซื้อประกันมาแล้ว 2 ปี จะตายระหว่างอายุ 36 ถึง 37 ปี

42. จงหาความน่าจะเป็นที่ชายอายุ 40 ปีขณะนี้ที่ซื้อประกันเมื่ออายุ 32 ปี
    ก) จะตายภายในปีหน้า
    ข) จะตายก่อนที่จะมีอายุครบ 45 ปี