บทที่ 3
ความน่าจะเป็น
(Probability)

บทที่ 3
ความน่าจะเป็น
(Probability)

ความน่าจะเป็น เป็นองค์ประกอบเบื้องต้นสำหรับการคิดอัตราเบี้ยประกันของการประกัน ซึ่งในบทนี้จะกล่าวถึงนิยามความน่าจะเป็น กฎเบื้องต้นและสมมติฐานของความน่าจะเป็น ค่าคาดหมายและกฎแห่งจำนวนมาก

ความน่าจะเป็น (Probability) คนโดยทั่ว ๆ ไปมักจะให้นิยามความน่าจะเป็นแบบง่าย ๆ เช่น เป็นโอกาสที่เหตุการณ์จะเกิดขึ้น หรือโอกาสที่เหตุการณ์จะเกิดขึ้นในระยะยาว แต่อย่างไรก็ตาม นิยามดังกล่าวนี้เราไม่อาจจะนำมาใช้ประโยชน์ในการวิเคราะห์ หรือแก้ปัญหาทางวิทยาศาสตร์ได้ เพราะมันคลุมเคลือเกินไป เราจึงใช้นิยามที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้

3.1 นิยาม

นิยามของความน่าจะเป็นนั้น เราจะเริ่มต้นด้วยแนวความคิดเกี่ยวกับผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดของการทดลอง ที่เรียกว่า Sample Space (หรือ S) และ เหตุการณ์ (Events) โดยที่ Sample Space คือ เซทของผลลัพธ์ที่จะเป็นไปได้ทั้งหมดของการทดลอง หรือของรายการที่กำหนดไว้ทั้งหมด เช่น S เป็นเซทที่ประกอบด้วยเลขทะเบียนของรถยนต์ที่เกิดชนกันทั้งหมด ในปีหนึ่ง ๆ ของกรุงเทพมหานคร หรือ S เป็นเซทที่ประกอบไปด้วย จำนวนคนอายุ 21 ปี ทั้งหมดที่ตายในประเทศไทย หรือ S คือ จำนวนเรือที่จมทั้งหมดในขณะที่เดินทางท่องเที่ยวในทะเล เป็นต้น

ถ้าเราจะพิจารณาเซทที่เล็กกว่า Sample Space ซึ่งเราเรียกเซทที่เล็กกว่านั้นเป็นเซทย่อย (Subsets) ของ Sample Space หรือเรียก Subset ว่า เหตุการณ์ (Events) เราจะแทนด้วย E ตัวอย่าง

เช่น ในเรื่องของการประกันรถยนต์ เซทย่อยหรือเหตุการณ์อาจจะเป็นจำนวนรถที่ชนกันเป็นรถที่มีราคาสูง เช่น ราคา 5 แสน หรือมากกว่า 5 แสน ในเมื่อ Sample Space คือ จำนวนรถที่ชนกันทั้งหมดในช่วงระยะเวลาที่กำหนดไว้ ซึ่งเราต้องการที่จะทราบว่า ความน่าจะเป็นที่รถที่มีราคาเท่ากับ 5 แสนหรือมากกว่า 5 แสน จะชนกันจะมีค่าเท่าใด ซึ่งในการที่เรากำหนดความน่าจะเป็นให้กับเหตุการณ์ดังกล่าวนั้น เราจะต้องกำหนดจำนวนขึ้นมาจำนวนหนึ่ง ที่เรียกว่า "weight" ให้แก่แต่ละเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นในเซท S และ "weight" นี้ อาจจะกำหนดขึ้นตามหลักฐานที่เกิดขึ้นซึ่งเกี่ยวข้องกับความรู้ในอดีตของเราในเรื่องความเสียหายที่ได้รับทั้งหมดของรถยนต์ที่ชนกัน

ถ้าให้ W(S) เป็นผลรวมของ "weight" ทั้งหมดในเซท S

และ W(E) เป็นผลรวมของ "weight" ทั้งหมดใน Subset E

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่รถราคาสูง (5 แสนหรือมากกว่า) จะถูกชน คือ P(E) จะมีค่าเท่ากับ

$$P(E) = \frac{W(E)}{W(S)}$$

ในกรณีที่เป็นเรื่องของเหตุการณ์อย่างง่ายทั้งหมดใน Sample Space S และมีความน่าจะเป็นที่จะเกิดขึ้นได้เท่า ๆ กัน สูตรความน่าจะเป็นก็จะได้เป็น

$$P(E) = \frac{E}{S}$$

เมื่อ E = จำนวนของผลลัพธ์การทดลอง (outcomes) ในเหตุการณ์ E

และ S = จำนวนของผลลัพธ์การทดลองใน S

ในทางตรงกันข้าม เราสามารถหาความน่าจะเป็น q ได้ ซึ่งให้ q แทนความน่าจะเป็นที่รถราคาสูงจะไม่ได้รับความเสียหาย

$$\therefore \quad q = \frac{S - E}{S}$$

ซึ่งเราสามารถแสดงเป็นตัวเลขให้เห็นได้ดังนี้

ถ้าให้ S **ประกอบด้วยรถยนต์ทั้งหมด** 10,000 **คัน มี** 9,000 **คัน** ที่ราคาต่ำกว่า 5 แสนบาท **และอีก** 1,000 **คันเป็นรถที่มีราคาสูง** (5 แสนหรือมากกว่า)

$$\text{จากสูตร} \quad P(E) = \frac{W(E)}{W(S)}$$

ถ้าเรากำหนดให้ Weight **ของรถที่ราคาต่ำกว่า 5 แสน** เท่ากับ 1 Weight **ของรถที่มีราคามากกว่า** 5 **แสน** เท่ากับ 2

$\therefore$ **ความน่าจะเป็นที่รถราคา 5 แสนหรือมากกว่า จะถูกจะชน**

$$= \frac{2 \times 1000}{(2 \times 1000) + (1 \times 9000)}$$

$$= \frac{2000}{11000} = \frac{2}{11}$$

ถ้าเหตุการณ์ทั้งหมดมี weight เท่า ๆ กันจะได้

$$P(E) = \frac{E}{S} = \frac{1,000}{10,000} = \frac{1}{10}$$

$$q(E) = \frac{S - E}{S} = \frac{10,000 - 1,000}{10,000} = \frac{9,000}{10,000} = \frac{9}{10}$$

จากตัวอย่างข้างต้นนี้ จะเห็นได้ว่า ถ้ากำหนดให้ weight ของแต่ละเหตุการณ์ต่างกัน ความน่าจะเป็นที่รถราคา 5 แสนหรือมากกว่า 5 แสนจะถูกชน = $\frac{2}{11}$ และ

ความน่าจะเป็นที่รถราคาต่ำกว่า 5 แสนบาทจะถูกชน = $\frac{9}{11}$

แต่ถ้ากำหนดให้ weight ของแต่ละเหตุการณ์เท่ากัน ความน่าจะเป็นที่รถราคา 5 แสน หรือมากกว่า 5 แสนจะถูกชน = $\frac{1}{10}$ และ

ความน่าจะเป็นที่รถราคาต่ำกว่า 5 แสนจะถูกชน = $\frac{9}{10}$

ดังนั้น การกำหนด weight ให้แต่ละเหตุการณ์ จึงจำเป็นมากสำหรับการทำสัญญาประกันภัย เพราะเป็นผลทำให้การตีราคาในเหตุการณ์ที่สนใจ และเหตุการณ์ที่คาดว่าจะเกิดขึ้นได้ถูกต้องด้วยการนำความน่าจะเป็นเข้ามาช่วย

3.2 กฎเบื้องต้นและสมมติฐานของความน่าจะเป็น

(Basic rules and assumption of probability)

3.2.1 Mutually exclusive events (เหตุการณ์ที่แยกต่างหากจากกัน) เป็นเหตุการณ์ที่ไม่สามารถเกิดขึ้นได้ในเวลาเดียวกันหรือพร้อม ๆ กัน ตัวอย่างเช่น เหตุการณ์ที่รถราคาสูงจะเสียหาย กับเหตุการณ์ที่รถทุกคันจะเสียหาย ทั้ง 2 เหตุการณ์นี้ไม่เป็น Mutually exclusive เพราะว่ารถทุกคันที่เสียหาย อาจรวมรถที่มีราคาสูงรวมอยู่ด้วย ดังนั้นเหตุการณ์ทั้งสองนี้อาจเกิดขึ้นได้ในเวลาเดียวกัน หรือเกิดขึ้นพร้อม ๆ กันได้

จาก $P(E) = \frac{W(E)}{W(S)}$ นั้น ค่าของ W(E) เป็นค่าของเหตุการณ์ที่เป็น Mutually exclusive

ตัวอย่างเช่น จะหาความน่าจะเป็นของการตาย ถ้าเราพิจารณาดูจะเห็นว่า เหตุการณ์ที่คน ๆ หนึ่งจะตาย กับเหตุการณ์ที่คน ๆ หนึ่งจะมีชีวิตอยู่รอด เป็นเหตุการณ์ที่ไม่สามารถเกิดขึ้นได้พร้อม ๆ กัน หรือในเวลาเดียวกัน (Mutually exclusive events) เพราะว่าคน ๆ หนึ่งสามารถที่จะมีชีวิตอยู่หรือตายอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น เขาไม่สามารถทำได้ทั้ง 2 เหตุการณ์ได้ในเวลาเดียวกัน

ดังนั้นความน่าจะเป็นที่จะตาย สามารถแสดงได้ด้วยอัตราส่วนของจำนวนคนที่ตายในช่วงเวลาหนึ่ง กับจำนวนคนที่มีชีวิตอยู่ทั้งหมดในตอนเริ่มต้นของช่วงเวลานั้น ๆ ตัวอย่างเช่น ถ้ามีคนที่มีชีวิตในตอนเริ่มต้นของปีหนึ่ง เท่ากับ 100,000 คน และตายไป 2,000 คน

$$\therefore \text{ ความน่าจะเป็นที่จะตายสำหรับคนกลุ่มนี้ } = \frac{2{,}000}{100{,}000} = \frac{2}{100} = .02$$

$$\text{และ ความน่าจะเป็นที่คนกลุ่มนี้จะมีชีวิตอยู่ } = \frac{100{,}000 - 2{,}000}{100{,}000} = \frac{98{,}000}{100{,}000} = \frac{98}{100} = 0.98$$

ในกรณีอื่น ๆ เช่น ถ้ามีคนบอกเราว่า มีคนโรคไอ 2,000 คน และคนเป็นไข้หวัด 5,000 คน จากคนทั้งหมด 100,000 คน ซึ่งเหตุการณ์เช่นนี้เราไม่สามารถบอกได้ว่าความน่าจะเป็นที่คนกลุ่มนี้จะเป็นโรคไอหรือเป็นไข้หวัด เท่ากับ $\frac{7{,}000}{100{,}000}$ หรือเท่ากับ 0.07 ได้ เนื่องจากว่าเหตุการณ์ทั้ง 2 นี้ ไม่เป็น Mutually exclusive เพราะอาจจะเป็นไปได้ว่า คนเป็นโรคไอ อาจจะ

เป็นไข้หวัดด้วยก็ได้ ซึ่งเราไม่สามารถที่จะหาความน่าจะเป็นที่คนกลุ่มนี้จะเป็นโรคไอ หรือไข้หวัดได้ นอกเสียจากว่าเราจะทราบจำนวนคนที่เป็นทั้งไข้หวัดและไอ

จากความหมายและวิธีการหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่เป็น Mutually exclusive ดังกล่าวข้างต้น เราได้กฎความน่าจะเป็นในการบวก (Additive rule) ดังนี้

3.2.2 Additive rule กล่าวว่า ความน่าจะเป็นทั้งหมดของเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นตั้งแต่ 2 เหตุการณ์ หรือมากกว่าที่เป็น Mutually exclusive events คือ ผลบวกของความน่าจะเป็นของแต่ละเหตุการณ์

ถ้าเหตุการณ์ทั้งหลายนั้นไม่เป็น Mutually exclusive การหาความน่าจะเป็นของผลรวมของเหตุการณ์ จะต้องใช้วิธีการหรือกฎข้ออื่น สำหรับตัวอย่างของ Additive rule มีดังนี้ เช่น มีไพ่อยู่สำรับหนึ่งต้องการที่จะหาความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้ Ace หรือ King ในการหยิบไพ่ครั้งหนึ่ง ๆ

จากตัวอย่างนี้ จะเห็นได้ว่า ไพ่สำรับหนึ่งเรามี 52 ใบ ซึ่งใน 52 ใบนี้มี Ace อยู่ 4 ใบ และมี King อยู่ 4 ใบ

$\therefore$ ความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้ Ace $= \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

และ ความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้ King $= \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

พิจารณาดูจะเห็นว่าเหตุการณ์ที่จะหยิบได้ Ace หรือได้ King เป็นเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นพร้อม ๆ กันไม่ได้ (Mutually exclusive)

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้ Ace หรือ King = $\frac{1}{13} + \frac{1}{13} = \frac{2}{13}$

อีกตัวอย่างหนึ่ง เช่น การโยนเหรียญ 1 เหรียญ เหตุการณ์ที่เหรียญจะหงายหน้าหัว กับเหตุการณ์ที่เหรียญจะหงายหน้าก้อย เป็น Mutually exclusive กัน เพราะการโยนเหรียญ เราจะให้เกิดหน้าหัวและหน้าก้อยพร้อม ๆ กันไม่ได้ ดังนั้น เราสามารถที่จะหาความน่าจะเป็น ที่จะเกิดหน้าหัวหรือหน้าก้อยได้ โดยใช้ Additive rule ดังนี้

การโยนเหรียญ 1 เหรียญ อาจจะได้ผลลัพธ์เป็นหัวหรือเป็นก้อย ถ้าให้โอกาสที่เกิดหัว หรือก้อย มีค่าเท่ากัน

$\therefore$ ความน่าจะเป็นที่จะได้หน้าหัว = $\frac{1}{2}$

และ ความน่าจะเป็นที่จะได้หน้าก้อย = $\frac{1}{2}$

$\therefore$ ความน่าจะเป็นที่จะได้หน้าหัวหรือหน้าก้อย = $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

3.2.3 Positive Weights

ทฤษฎีความน่าจะเป็นกำหนดว่า Weight ที่เรากำหนดให้แก่แต่ละเหตุการณ์ในเซทหนึ่ง ๆ จะต้องเป็นบวกเสมอ เมื่อความน่าจะเป็นแสดงได้ด้วยอัตราส่วนระหว่างเหตุการณ์ในเซทย่อย กับเหตุการณ์ในเซททั้งหมด ซึ่งความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ทั้งหมด เมื่อรวมกันแล้วจะมีค่า เท่ากับ 1 และจะได้ว่า ถ้าเหตุการณ์นั้นเกิดขึ้นแน่นอน ความน่าจะเป็นจะมีค่าเท่ากับ 1 แต่ถ้า เหตุการณ์นั้นไม่เกิดขึ้นแน่นอนความน่าจะเป็นจะมีค่าเท่ากับ 0

ถ้าให้ p เป็นความน่าจะเป็นที่เหตุการณ์จะเกิดขึ้น

และ q เป็นความน่าจะเป็นที่เหตุการณ์นั้นจะไม่เกิดขึ้น

จะได้ว่า ผลรวมของ p และ q จะมีค่าเท่ากับ 1 เสมอ

นั่นคือ $p + q = 1$

ดังนั้น เราสามารถสรุปเป็นสัจจพจน์ ซึ่งได้มาจากนิยามความน่าจะเป็น ได้ 3 ข้อด้วยกัน ดังนี้

1. ความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์หนึ่ง ๆ มีค่าอยู่ระหว่าง 0 กับ 1 คือ $0 \leqslant p \leqslant 1$
2. $p + q = 1$
3. ความน่าจะเป็นทั้งหมดของเหตุการณ์ที่เป็น Mutually exclusive จะเท่ากับความน่าจะเป็นของแต่ละเหตุการณ์รวมกัน

โดยปกติแล้ว ความน่าจะเป็นที่แท้จริงนั้น เรามักจะไม่ทราบแน่นอน ตัวอย่างเช่น ในการหยิบลูกบอลจากกล่องซึ่งมีลูกบอลสีแดง 6 ลูก และสีขาว 4 ลูก อย่างสุ่ม ๆ เราสามารถบอกได้ว่า ความน่าจะเป็นที่จะหยิบลูกบอล 1 ลูกให้เป็นสีขาว มีค่าเท่ากับ 0.40 จาก

$$p(\text{ลูกบอลสีขาว}) = \frac{W(E)}{W(S)} = \frac{E}{S} = \frac{4}{10} = .40$$

ซึ่งในความเป็นจริงแล้ว การที่จะได้ค่านี้อย่างถูกต้องเป็นไปได้ยากมาก อย่างไรก็ดี เนื่องจากเป็นการยากที่จะพิจารณาถึงความเที่ยงตรง เราจึงหาความน่าจะเป็นโดยวิธีที่เรียกว่า empirical probability จากนิยามดังต่อไปนี้

ถ้าเหตุการณ์หนึ่งสามารถเกิดขึ้นได้ w ครั้ง จากจำนวนที่เป็นไปได้ทั้งหมด n ครั้ง

empirical probability จะมีค่าเท่ากับ

$$\lim_{n \to \infty} \frac{w}{n}$$

สำหรับความน่าจะเป็นที่หาโดยวิธีนี้จะต้องอาศัยประสบการณ์หรือข้อมูลในอดีต และการที่จะนำความน่าจะเป็นโดยวิธีนี้ไปใช้ เพื่อพยากรณ์เหตุการณ์ในอนาคตจะต้องมีสมมติฐานว่า เหตุการณ์ที่จะเกิดในอนาคตจะเกิดซ้ำกับเหตุการณ์ในอดีต ซึ่งอันนี้โดยความเป็นจริงแล้วอาจจะเป็นไปไม่ได้ แต่เราก็สามารถแก้ไขได้โดยใช้กฎแห่งจำนวนมาก ซึ่งจะทำให้เกิดความคลาดเคลื่อนน้อยลงไปได้

3.2.4 Independent events (**เหตุการณ์ที่เป็นอิสระต่อกัน**)

ส่วนสำคัญอีกส่วนหนึ่งของความน่าจะเป็น และได้นำมาประยุกต์ใช้ในการประกันภัย คือ เหตุการณ์ที่เป็นอิสระต่อกัน (Independent events) ถ้าเรามีเหตุการณ์ 2 เหตุการณ์ เราจะเรียกว่า เหตุการณ์ทั้งสองนั้นเป็นอิสระต่อกันก็ต่อเมื่อการเกิดของเหตุการณ์หนึ่งไม่เกี่ยวข้องกับการเกิดของอีกเหตุการณ์หนึ่ง ตัวอย่างเช่น โยนเหรียญอันหนึ่งครั้งแรกได้หัว จะไม่เกี่ยวข้องกับการโยนเหรียญครั้งต่อไป ถึงแม้เราจะโยนได้หัวติดต่อกัน 10 ครั้งก็ตาม เมื่อโยนเหรียญครั้งต่อไป ความน่าจะเป็นที่จะโยนเหรียญแล้วได้หัวก็จะไม่เปลี่ยนแปลงไป คือ จะมีค่าเท่ากับ $\frac{1}{2}$

แต่ถ้าเป็นการหยิบลูกบอลจากกล่องแบบไม่ใส่คืน เช่น ในกล่องใบหนึ่งมีลูกบอลสีขาว 5 ลูก และสีแดง 5 ลูก ความน่าจะเป็นที่จะหยิบลูกบอลลูกแรกให้เป็นสีขาวจะเท่ากับ $\frac{5}{10}$ แต่ถ้าจะหยิบลูกบอลครั้งที่ 2 ให้ได้เป็นสีขาวอีก ความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้จะเท่ากับ $\frac{4}{9}$ ทั้งนี้เพราะการหยิบลูกบอลครั้งที่ 2 ขึ้นอยู่กับการหยิบลูกบอลครั้งที่ 1 จึงทำให้ความน่าจะเป็นเปลี่ยนแปลงไปจากเดิม ลักษณะเช่นนี้เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เป็นอิสระต่อกัน (Dependent events)

การหาความน่าจะเป็นของการเกิดเหตุการณ์ทั้งคู่ที่เป็นอิสระต่อกัน (independent events) **หาได้จากเอาความน่าจะเป็นที่เกิดแต่ละเหตุการณ์มาคูณกัน**

ตัวอย่างที่ 1 การโยนเหรียญ 1 เหรียญ 2 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้หน้าหัว ทั้ง 2 ครั้ง

$\therefore$ ความน่าจะเป็นที่ได้หน้าหัวทั้ง 2 ครั้ง $= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

ตัวอย่างที่ 2 ถ้าความน่าจะเป็นที่นายแดงกับนายดำ จะตายภายในช่วง 20 ปีข้างหน้า เป็น 0.02 และ 0.03 ตามลำดับ จงคำนวณหาความน่าจะเป็นที่นายแดงและนายดำจะตายภายใน 20 ปีข้างหน้า

ความน่าจะเป็นที่นายแดงจะตายภายใน 20 ปีข้างหน้า = 0.02

ความน่าจะเป็นที่นายดำจะตายภายใน 20 ปีข้างหน้า = 0.03

$\therefore$ ความน่าจะเป็นที่นายแดงและนายดำจะตายภายใน 20 ปีข้างหน้า $= 0.02 \times 0.03$

$= .0006$

ตัวอย่างที่ 3 นายสรชัย เป็นเจ้าของบ้าน 2 หลัง บ้านหลังหนึ่งของเขาอยู่ในกรุงเทพฯ และอีกหลังหนึ่งอยู่ในต่างจังหวัด ถ้าความน่าจะเป็นที่ไฟจะไหม้บ้านที่อยู่ในกรุงเทพฯ เท่ากับ 0.10 และความน่าจะเป็นที่ไฟจะไหม้บ้านที่อยู่ในต่างจังหวัด เท่ากับ 0.05 จงหาความน่าจะเป็นที่ไฟจะไหม้บ้านของนายสรชัย ทั้ง 2 หลัง

จากโจทย์ จะเห็นได้ว่า เหตุการณ์ที่ไฟจะไหม้บ้านที่อยู่ในกรุงเทพฯ กับเหตุการณ์ที่ไฟ

จะไหม้บ้านที่อยู่ในต่างจังหวัด ไม่ขึ้นอยู่กับกันและกัน คือ เป็นอิสระต่อกันนั่นเอง

∴ ความน่าจะเป็นที่ไฟจะไหม้บ้านทั้ง 2 หลัง = 0.10 × 0.05

= 0.005 Ans.

3.3 ค่าคาดหมาย (Expected Value)

ค่าคาดหมายของเหตุการณ์ใด ๆ คือ ค่าที่กำหนดขึ้นมาจากผลลัพธ์ที่จะเป็นไปได้ทั้งหมด และ weight ที่ให้กับแต่ละผลลัพธ์ การคูณด้วยความน่าจะเป็นที่จะเกิดผลลัพธ์นั้น ๆ ผลบวกของผลคูณดังกล่าว คือ ค่าคาดหมายที่ต้องการ

ตัวอย่างเช่น ในเรื่องการประกันอัคคีภัย สมมติว่า ค่าเสียหายโดยเฉลี่ยที่ได้รับเท่ากับ 100,000 บาทต่อหลัง และผู้รับประกันทราบว่า

ความน่าจะเป็นที่ไฟจะไหม้บ้าน 1 หลัง = .37
ความน่าจะเป็นที่ไฟจะไหม้บ้าน 2 หลัง = .19
ความน่าจะเป็นที่ไฟจะไหม้บ้าน 3 หลัง = .06

ดังนั้น ผู้รับประกันสามารถหาค่าคาดหวังที่เขาจะต้องจ่ายค่าชดใช้ให้กับผู้เอาประกันเนื่องจากอัคคีภัย ได้ดังนี้

ค่าคาดหวังที่เขาจะต้องจ่ายเนื่องจากไฟไหม้บ้าน 1 หลัง = .37 × 100,000

= 37,000 บาท

ค่าคาดหวังที่เขาจะต้องจ่ายเนื่องจากไฟไหม้บ้าน 2 หลัง = .19 × 2 × 100,000

= 38,000 บาท

ค่าคาดหวังที่เขาจะต้องจ่ายเนื่องจากไฟไหม้บ้าน 3 หลัง = .06 × 3 × 100,000

= 18,000 บาท

การคำนวณหาค่าคาดหมายนี้ นำไปใช้ในการประมาณค่าเสียหายทั้งหมดที่จะได้รับและการกำหนดอัตราเบี้ยประกันให้เหมาะสม

3.4 กฎแห่งจำนวนมาก (Law of large number)

การเสี่ยงภัยของผู้รับประกันที่สำคัญอันหนึ่ง คือ เขาไม่สามารถทราบได้ว่าความน่าจะเป็นของการเกิดความเสียหายที่แท้จริงมีค่าเท่าใดแน่ เขาต้องประมาณความน่าจะเป็นที่แท้จริงนี้โดยการทำการทดลอง ซึ่งผลที่ได้ออกมามักจะมีค่าไม่ถูกต้องนัก และขึ้นอยู่กับขนาดความไม่แน่นอน กฎแห่งจำนวนมากจะช่วยแก้ปัญหานี้ได้ เพราะกฎนี้จะบอกผู้รับประกันได้ว่าเขาสามารถจะได้ค่าตอบแทนที่เขาต้องการอย่างถูกต้อง โดยการเพิ่มจำนวนค่าสังเกตให้มากขึ้นโดยไม่จำกัดจำนวน (infinity)

กฎแห่งจำนวนมากนี้จะบอกเราว่า ถ้าเราไม่ทราบความน่าจะเป็นของการเกิดของเหตุการณ์ที่แน่นอนแล้ว เราสามารถที่จะประมาณค่าของมันให้ถูกต้องได้มากขึ้นโดยการเพิ่มจำนวนการสังเกตของเราในวิธีการสุ่มตัวอย่างได้ ค่าเฉลี่ยของจำนวนที่มากของค่าสังเกตทั้งหมดจะประมาณได้ใกล้เคียงกับค่าเฉลี่ยที่แท้จริงของประชากร ตัวอย่างเช่น สมมติว่า เราไม่ทราบความน่าจะเป็นที่คนอายุ 25 ปี จะตายในช่วงเวลาที่กำหนดให้ว่ามีค่าเท่าใด แต่เราก็พยายามที่จะประมาณค่านี้ออกมาว่ามีค่าเท่าใดแน่ เราจึงทำการสังเกตคนกลุ่มหนึ่งที่มีอายุ 25 ปี จำนวน 500 คน ปรากฏว่าในปีแรกไม่มีผู้ใดตายเลย ในปีต่อมาเราก็ทำการสังเกตคนอายุ 25 ปี อีกกลุ่ม

หนึ่ง จำนวน 500 คนเหมือนกัน และปรากฏมีคนตาย 2 คน ในปีที่ 3 เราก็ทำการสังเกตคนอีกกลุ่มหนึ่งที่มีลักษณะคล้ายคลึงกัน อายุ 25 ปี จำนวน 500 คน ปรากฏว่ามีคนตาย 1 คน ซึ่งถ้าเราทำการทดลองต่อไปในลักษณะเดียวกันนี้จำนวนมากครั้ง และถึงแม้ว่าจำนวนคนตายของแต่ละกลุ่มจะไม่เท่ากัน เราก็สามารถบอกได้ว่า โดยเฉลี่ยแล้วคนอายุ 25 ปี จะตาย 1 คน จากคน 500 คน หรือจากนิยามของ empirical probability เราจะได้ว่า ความน่าจะเป็นที่คนอายุ 25 ปี จะตายมีค่าเท่ากับ $\frac{1}{500}$ พื้นฐานเบื้องต้นของการประกันภัยอาศัยกฎแห่งจำนวนมากทั้งนั้น

แบบฝึกหัดบทที่ 3

1. ในการแข่งขันกีฬาประเภทหนึ่ง ถ้าโอกาสที่ทีม A จะชนะทีม B ในการแข่งขันแต่ละเกม เท่ากับ $\frac{3}{5}$ จงหาความน่าจะเป็นที่ทีม A จะชนะ 2 เกม หรือมากกว่าในการแข่งขัน 3 เกม

2. หยิบไพ่ 3 ใบจากไพ่สำรับหนึ่ง จงหาความน่าจะเป็น
   - ก) ที่หยิบได้ไพ่ทั้ง 3 ใบ เป็น Ace
   - ข) ที่หยิบได้ไพ่ Ace 2 ใบ ตามด้วย King

3. ถ้าความน่าจะเป็นที่คนอายุ 30 ปี จะมีชีวิตรอดอยู่อีก 10 ปี เป็น 0.9 และความน่าจะเป็นที่คนอายุ 40 ปี จะมีชีวิตรอดอยู่อีก 10 ปี เป็น 0.8 จงหาความน่าจะเป็นที่คนอายุ 30 ปี
   - ก) จะมีชีวิตอยู่ถึงอายุ 50 ปี
   - ข) จะตายระหว่างอายุ 40 ปี และอายุ 50 ปี
   - ค) จะตายก่อนที่จะถึงอายุ 40 ปี

4. ถ้าความน่าจะเป็น นายดำ, ขาว, เขียว, แดง จะมีชีวิตอยู่รอดในช่วงระยะเวลาหนึ่งเป็น $\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$ และ $\frac{6}{7}$ ตามลำดับ จงหาความน่าจะเป็นที่
   - ก) ทั้ง 4 คน มีชีวิตรอดในช่วงเวลาที่กำหนดไว้
   - ข) ทั้ง 4 คน จะตายในช่วงระยะเวลาที่กำหนดไว้
   - ค) ตายอย่างน้อยที่สุด 1 คน
   - ง) มีชีวิตรอดอยู่อย่างน้อย 1 คน

5. สุ่มเลือกคน ๆ หนึ่งจากคนทั้งหมด 6 คน ถ้าความน่าจะเป็นที่จะได้คนที่มีอายุระหว่าง 20 ถึง 35 ปี เป็น $\frac{3}{5}$ ความน่าจะเป็นที่จะได้คนอายุระหว่าง 20 ถึง 25 ปี เป็น $\frac{1}{4}$ จงหาความน่าจะเป็นที่คน ๆ นั้น จะมีอายุระหว่าง 25 ถึง 35 ปี

6. ถ้าความน่าจะเป็นที่จะมีชีวิตอยู่ในช่วงเวลา 10 ปี ของคนอายุ 30 ปี, 40 ปี และ 50 ปี เป็น 0.8, 0.7 และ 0.6 ตามลำดับ จงหาความน่าจะเป็นที่คน ๆ หนึ่งอายุ 30 ปี จะตายระหว่างอายุ 50 ถึง 60 ปี

7. ถ้าความน่าจะเป็นที่จะเลือกได้ชายอายุระหว่าง 20 ถึง 35 ปี จากชายกลุ่มหนึ่งเป็น $\frac{2}{3}$ และความน่าจะเป็นที่จะเลือกได้ชายอายุระหว่าง 20 ถึง 25 ปี เป็น $\frac{1}{4}$ จงหาความน่าจะเป็นที่จะเลือกได้ชายอายุระหว่าง 25 ถึง 35 ปี

8. ความน่าจะเป็นที่ชายคนหนึ่งอายุ 20 ปี และอีกคนหนึ่งอายุ 40 ปี จะมีชีวิตอยู่ทั้งคู่ในช่วงเวลา 20 ปี เป็น 0.6 และจากคนอายุ 20 ปี จำนวน 50,000 คน จะตายก่อนที่จะอายุถึง 25 ปี จำนวน 3,000 คน จงหาความน่าจะเป็นที่ชายคนหนึ่งอายุ 25 ปี จะตายภายใน 35 ปีต่อมา

9. บริษัทธุรกิจแห่งหนึ่งจ่ายค่าจ้างปีละ 40 ล้านบาท ต้องเสียเงินค่าช่วยเหลือคนงานที่บาดเจ็บทุพพลภาพ ปีละ 120,000 บาท จงหาความน่าจะเป็นของความเสียหายในการที่คนงานจะต้องบาดเจ็บ ทุพพลภาพ

10. โยนลูกเต๋า 2 ลูก จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้
    ก) หน้า 3 ทั้ง 2 ลูก
    ข) หน้า 4 ทั้ง 2 ลูก
    ค) หน้า 3 กับหน้า 4

11. ชายคนหนึ่งจะได้รับเงิน 30 บาท ถ้าเขาโยนลูกเต๋า 2 ลูก แล้วได้ผลรวมเป็น 7 จงหาค่าคาดหวังที่ชายคนนี้จะได้รับเงิน

12. ความน่าจะเป็นที่อย่างน้อย 1 คน จาก 2 คน คือ นาย ก. และ ข. จะตายใน 10 ปีข้างหน้าเท่ากับ 0.44 ความน่าจะเป็นที่อย่างน้อย 1 คน จาก 2 คน จะมีชีวิตอยู่ในช่วงเวลาเดียวกันเท่ากับ 0.94 จงหาความน่าจะเป็นที่นาย ก. จะอยู่จนถึงสิ้นระยะเวลา 10 ปี

13. บริเวณแห่งหนึ่ง มีบ้าน 100 หลัง ราคารวมกันทั้งสิ้น 100,000,000 บาท ปรากฏจากสถิติไฟไหม้ปีละ 2 ครั้ง ค่าเสียหายรวมทั้งสิ้น 500,000 บาท จงหาความน่าจะเป็นของความเสียหายที่เกิดจากไฟไหม้ใน 1 ปี

14. สมมติมีคนอยู่ 9,373,807 คน ที่มีชีวิตอยู่เมื่ออายุ 35 ปี และคนจำนวนนี้จะตายไป 23,528 คน ใน 1 ปี จงหาความน่าจะเป็นที่คนอายุ 35 ปี กลุ่มนี้จะตายภายใน 1 ปี