ปัญหาเกี่ยวกับรูปฟอร์มประชากร

ธรรมทาน ชนะทานทุกอย่าง
รสพระธรรม ชนะรสทุกอย่าง
ความยินดีในธรรม ชนะความยินดีทุกอย่าง
ความสิ้นตัณหา ชนะทุกข์ทุกอย่าง

พุทธวจนะ

บ่อยครั้งที่เราสนใจรูปร่าง หรือรูปฟอร์มของการแจกแจงประชากร (Population Functional Form) เมื่อไม่ทราบรูปฟอร์มของประชากร และต้องการทดสอบว่าประชากรที่สนใจนั้นมีการแจกแจงตามที่เราคาด หรือเสนอไว้หรือไม่ เราก็ทำได้โดยอาศัยตัวอย่างสุ่มจากประชากรนั้น แล้วใช้วิธีการของการปรับที่ดี (Method of Goodness-of-Fit) มาพิจารณาว่าข้อมูลตัวอย่างที่สังเกตได้นั้นปรับเข้าได้ดีกับตัวแบบหรือฟังก์ชันที่เสนอไว้หรือไม่

สำหรับแบบของปัญหาเกี่ยวกับรูปฟอร์มประชากร หรือการปรับที่ดีนี้ เราจะพิจารณากัน 3 แบบ คือ (1) ปัญหาที่ผู้ศึกษาต้องการทราบว่าข้อมูลตัวอย่างสนับสนุนสมมติฐานที่ว่าประชากรที่สุ่มตัวอย่างมานั้นมีการแจกแจงตามที่ระบุไว้ (2) ปัญหาที่ผู้ศึกษาต้องการทราบว่าสองตัวอย่างขึ้นไปที่เป็นอิสระกันมาจากประชากรที่มีการแจกแจงแบบเดียวกันหรือไม่ และ (3) กระบวนการสร้างแถบเชื่อมั่น (Confidence Band) สำหรับการแจกแจงประชากร

กระบวนการสำหรับปัญหาการปรับที่ดีนั้น มีผู้เสนอไว้หลายแบบ แต่จะขอพูดในรายละเอียดของกระบวนการที่มีชื่อเสียงบางกระบวนการเท่านั้น เช่นแบบทดสอบไคสแควร์เกี่ยวกับการปรับที่ดี และแบบทดสอบโคลโมโกรอฟ-สเมอร์นอฟ เป็นต้น

6.1 แบบทดสอบไคสแควร์เกี่ยวกับการปรับที่ดี (Chi-Square Goodness-of-Fit Test)

แบบทดสอบไคสแควร์นี้จะเป็นเช่นเดียวกับแบบทดสอบไคสแควร์เกี่ยวกับพารามิเตอร์สัดส่วนในประชากรพหุนาม ซึ่งจะใช้การเปรียบเทียบความถี่คาดหวังกับความถี่ที่สังเกตได้ ดังนั้นถ้าเรามีประชากรที่สนใจซึ่งเราคาดว่าจะมีการแจกแจงอย่างหนึ่ง แล้วสมมติฐานที่จะทดสอบจะเป็น

Ho : ประชากรมีการแจกแจงอย่างหนึ่งดังที่ระบุไว้

Ha : ประชากรไม่ได้แจกแจงดังที่ระบุไว้

ในการทดสอบสมมติฐานนี้เราก็อาศัยตัวอย่างสุ่มขนาด n จากประชากรที่สนใจนั้น ถ้าให้ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นค่าสังเกตที่เป็นอิสระกันของตัวอย่างขนาด n โดยมีสเกลการวัดเป็นแบบนามบัญญัติ และค่า

สังเกตเหล่านี้สามารถแยกเป็นประเภทที่ไม่ร่วมกันได้ k ประเภท จำนวนค่าสังเกตที่ตกอยู่ในประเภทใดประเภทหนึ่งจะเรียกว่า ความถี่ที่สังเกตได้ (observed Frequencies) ของประเภทนั้น ดังนั้นค่าสังเกตสามารถสรุปได้ดังตารางต่อไปนี้

ประเภท	1	2	3	...	i	...	k	รวม
ความถี่ที่สังเกตได้	0_1	0_2	0_3		0_i		0_k	n

ในแต่ละประเภทจะมีความน่าจะเป็นที่ค่าสังเกตจากประชากรที่ระบุไว้ในสมมติฐานจะตกอยู่ในประเภทนั้น เราจะให้ $\pi_1, \pi_2, ..., \pi_k$ เป็นความน่าจะเป็นเหล่านั้น เมื่อสมมติฐานหลักเป็นจริง เราจะได้ความถี่คาดหวัง (Expected Frequencies) ของแต่ละประเภท ดังนี้

$$E_i = n\pi_i \ ; i = 1, 2, .., k$$

สำหรับค่า π_i นั้นหาได้โดยอาศัยการแจกแจงของประชากรที่ระบุไว้ในสมมติฐานหลัก แต่ส่วนมากการแจกแจงของประกรนั้นมีพารามิเตอร์บางตัวกำกับอยู่ จึงจำเป็นต้องประมาณค่าพารามิเตอร์เหล่านั้นก่อนที่จะคำนวณค่า E_i นั่นคือค่า π_i นั้นจะประมาณได้เป็น P_i จากตัวอย่าง แล้วค่าความถี่คาดหวัง จะเป็น

$$E_i = nP_i \ ; i = 1, 2, .., k$$

ตัวสถิติทดสอบสำหรับสมมติฐานหลัก Ho นั้นก็อาศัยความถี่ที่สังเกตได้ (0_i) กับความถี่คาดหวัง (E_i) นั่นคือตัวสถิติทดสอบจะเป็น

$$\chi^2 = \Sigma(0_i - E_i)^2/E_i$$

ซึ่งมีการแจกแจงไคสแควร์ ด้วยองศาความเป็นอิสระ k-1-q ถ้าตัวอย่างขนาดโต ในเมื่อ q เป็นจำนวนพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่าของการแจกแจงประชากรที่ระบุไว้ในสมมติฐานหลัก

ถ้าสมมติฐานหลักเป็นจริง หรือประชากรมีการแจกแจงตามที่ระบุไว้จริง แล้วค่าสังเกตกับค่าคาดหวังของความถี่ในแต่ละประเภทจะใกล้กัน นั่นคือค่าของ X^2 จะไม่มาก

ในการทดสอบเกี่ยวกับการปรับที่ดีนั้นต้องใช้ขนาดตัวอย่างอย่างน้อย 30 และความถี่คาดหวังต้องไม่น้อยเกินไป ซึ่งคอคราน (Cochran, 1952, 1954) เสนอว่าต้องไม่น้อยกว่า 1 เมื่อน้อยกว่า 1 ให้รวมกับประเภทที่ติดกันจนทำให้ความถี่คาดหวังไม่น้อยกว่า 1 เมื่อรวมประเภทแล้วต้องคำนวณองศาความเป็นอิสระใหม่

ตัวอย่าง (1) การแจกแจงแบบยูนิฟอร์ม (Uniform Distribution)

ฝ่ายแนะแนวของมหาวิทยาลัยต้องการศึกษาว่าผู้แนะแนวแต่ละวัยจะเป็นที่นิยมของนักศึกษาแตกต่างกันหรือไม่ จึงทำการศึกษากับตัวอย่างของนักศึกษา 40 ราย ได้ผลดังนี้

อายุของผู้แนะแนว	ต่ำกว่า 30	30-40	40-50	มากกว่า 50
จำนวนนักศึกษาที่นิยม	5	14	15	6

Ho : นักศึกษานิยมผู้แนะแนวแต่ละวัยไม่แตกต่างกัน

หรือ Ha : ประชากรมีการแจกแจงแบบยูนิฟอร์ม

ภายใต้สมมติฐานหลัก เราจะได้ว่า $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \pi_4 = 1/4$ ดังนั้นความถี่คาดหวังจึงเป็น $E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = 40(1/4) = 10$ และค่าของตัวสถิติทดสอบ χ^2 จะเป็น

$$\chi^2 = (5-10)^2/10+(14-10)^2/10+(15-10)^2/10+(6-10)^2/10 = 8.20$$

เนื่องจากเราไม่ได้ประมาณพารามิเตอร์ใดๆ จากข้อมูลตัวอย่าง เราจึงมีองศาความเป็นอิสระ 4-1-0 = 3 ดังนั้น $\chi^{2(3)}_{.05} = 7.81$ ซึ่งแสดงว่านักศึกษานิยมผู้แนะแนวแต่ละวัยไม่เท่ากันหมด

ตัวอย่าง (2) การแจกแจงทวินาม (Binomial Distribution)

โรงงานผลิตสินค้าได้สุ่มตัวอย่างสินค้าที่ผลิตออกมาทดสอบครั้งละ 5 ชิ้น จากการทำการทดสอบอยู่ 280 ครั้ง ได้จำนวนสินค้าที่ใช้การไม่ได้ในแต่ละครั้ง ดังนี้

สินค้าที่ใช้การไม่ได้	0	1	2	3	4	5
จำนวนครั้ง	157	69	35	17	1	1

จำนวนสินค้าที่ใช้การไม่ได้ของการทดสอบแต่ละครั้งมีการแจกแจงแบบทวินามหรือไม่

Ho : จำนวนสินค้าที่ใช้การไม่ได้จะมีการแจกแจงทวินาม

Ha : จำนวนสินค้าที่ใช้การไม่ได้นั้นจะไม่แจกแจงแบบทวินาม

ในการคำนวณความถี่คาดหวัง (E_i) เราหาได้ดังนี้

เราทำการทดสอบ 280 ครั้งๆ ละ 5 ชิ้น ดังนั้นจำนวนตัวอย่างทั้งหมดเท่ากับ 5(280) = 1400 ชิ้น และจำนวนสินค้าที่ใช้การไม่ได้ทั้งหมดเท่ากับ

$$0(157)+1(69)+2(35)+3(17)+1(4)+1(5) = 199$$

ภายใต้สมมติฐานหลักนั้น สินค้าแต่ละชนิดจะมีโอกาสที่ใช้การไม่ได้นั้นจะเท่าๆ กัน ดังนั้นเราประมาณโอกาสที่สินค้าจะใช้การไม่ได้ (π) ด้วย P นั่นคือ

$$P = 199/1400 = 0.14$$

แล้วเราจะได้การแจกแจงของจำนวนสินค้าที่ใช้การไม่ได้ (X) ดังนี้

$$f(x) = \binom{5}{x}(0.14)^x(0.86)^{5-x}$$

จากการแจกแจงนี้เราจะได้ความถี่สัมพัทธ์คาดหวังของ X หรือ P เป็น

$P_1 = f(x=0) = 0.4704$, $P_2 = 0.3829$, $P_3 = 0.1247$, $P_4 = 0.0203$, $P_5 = 0.0017$, $P_6 = 0.0001$

ดังนั้นความถี่คาดหวัง จะเป็น

$E_1 = 280(0.4704) = 131.71$, $E_2 = 107.21$, $E_3 = 34.92$, $E_4 = 5.68$, $E_5 = 0.48$, $E_6 = 0.03$

เนื่องจากความถี่คาดหวัง E_5 และ E_6 น้อยกว่า 1 จึงรวมกับ E_4 เป็น 6.19 แล้วเราจะได้ค่าของตัวสถิติทดสอบ χ^2 ดังนี้

$$\chi^2 = \frac{(157-131.71)^2}{131.71} + \frac{(69-107.21)^2}{107.21} + \frac{(35-34.92)^2}{34.92} + \frac{(19-6.19)^2}{6.19}$$
$$= 44.99$$

เนื่องจากเราประมาณพารามิเตอร์ π จำนวนองศาความเป็นอิสระจึงเท่ากับ 4-1-1 = 2 ดังนั้น $\chi^{2(2)}_{.05} = 5.99$ เราจึงสรุปได้ว่า จำนวนสินค้าที่ใช้การไม่ได้นั้นไม่ได้แจกแจงแบบทวินาม

ตัวอย่าง (3) การแจกแจงปัวซอง (Poisson)

จากการศึกษาจำนวนอุบัติเหตุต่อเดือนที่เกิดขึ้นในโรงงานแห่งหนึ่งเป็นเวลา 5 ปี หรือ 60 เดือน ได้ข้อมูลมาดังนี้

จำนวนอุบัติเหตุต่อเดือน	0	1	2	3
จำนวน	33	17	7	3

ข้อมูลเหล่านี้มีการแจกแจงแบบปัวซองหรือไม่ ?

พารามิเตอร์ λ ของการแจกแจงปัวซองประมาณได้จากค่าเฉลี่ยของข้อมูล นั่นคือ

$\hat{\lambda} = \bar{X} = \{0(33)+1(17)+2(7)+3(3)\}/60 = 0.667$

แล้วเราจะได้ $\hat{f}(X) = e^{-0.667}(0.667)^x/x!$, $x = 0, 1, 2, \ldots$

$P_1 = f(x=0) = 0.5314$, $P_2 = 0.3415$, $P_3 = 0.1181$, $P_4 = 0.0090$

ดังนั้น $E_1 = 60(0.5314) = 31.884$, $E_2 = 20.490$, $E_3 = 7.086$, $E_4 = 0.54$

เนื่องจาก $E_4 < 1$ จึงรวมกับ E_3 แล้วเราจะได้ค่าของ χ^2 เป็น

$$X^2 = \frac{(33-31.884)^2}{31.884} + \frac{(17-20.490)^2}{20.490} + \frac{(10-7.626)^2}{7.626} = 3.83$$

เมื่อ a = .05 เราได้ $\chi^{2(3-1-1)} = 3.84$ จึงปฏิเสธ Ho ไม่ได้ นั่นคือจำนวนอุบัติเหตุจะมีการแจกแจงแบบปัวซอง

ตัวอย่าง (4) การแจกแจงเอกซ์โพเนนเชียล (Exponential)

ผู้ผลิตหลอดภาพโทรทัศน์กล่าวว่า อายุใช้งานของหลอดภาพจะมีการแจกแจงแบบเอกซ์โพเนนเชียล ด้วยพารามิเตอร์ = 0.005 ในการทดสอบคำกล่าวนี้ เราใช้ตัวอย่างหลอดภาพ 1000 หลอด ปรากฏว่ามีอายุใช้งาน ดังนี้

อายุ (Y)	จำนวน	อายุ (Y)	จำนวน
$y \le 150$	543	$450 < y \le 600$	48
$150 < y \le 300$	258	$600 < y \le 750$	20
$300 < y \le 450$	120	$y > 750$	11

เราได้การแจกแจงอายุใช้งาน (Y) เป็น

$$f(y) = 0.005\, e^{-0.005}, \; y > 0$$

ดังนั้น $\pi_1 = \int_0^{150} f(y)dy = 0.5277$, $\pi_2 = 0.2492$, $\pi_3 = 0.1177$, $\pi_4 = 0.0263$,

$\pi_5 = 0.0263$, $\pi_6 = 0.0235$

นั่นคือ $E_1 = 1000(0.5277) = 527.7$, $E_2 = 249.2$, $E_3 = 117.7$, $E_4 = 26.3$, $E_5 = 26.3$, $E_6 = 23.5$

ค่าของตัวสถิติทดสอบ χ^2 จะเป็น

$$\chi^2 = (543-527.7)^2/527.7 + \dots + (11-23.5)^2/23.5 = 9.997$$

เนื่องจาก $\chi^{2(6-1)}_{.05} = 11.07$ เราจึงปฏิเสธ Ho ไม่ได้ แสดงว่า อายุใช้งานของหลอดไฟมีการแจกแจงแบบเอกซ์โพเนนเชียล ($\lambda = 0.005$)

ตัวอย่าง (5) การแจกแจงแบบปกติ (Normal Population)

ผู้จัดการโรงงานผลิตอาหารกระป๋องแห่งหนึ่งเชื่อว่าน้ำหนักสุทธิของอาหารแต่ละกระป๋องที่ผลิตออกมาโดยกระบวนการนี้แล้วจะมีการแจกแจงแบบปกติ จากการสุ่มตัวอย่างของอาหาร 300 กระป๋อง ปรากฏว่าได้น้ำหนักสุทธิ ดังนี้

น้ำหนักสุทธิ (Y)	จำนวน	น้ำหนักสุทธิ (Y)	จำนวน
$35.7 < y \le 35.8$	10	$36.0 < y \le 36.1$	97
$35.8 < y \le 35.9$	30	$36.1 < y \le 36.2$	51
$35.9 < y \le 36.0$	104	$36.2 < y \le 36.3$	8

Ho : น้ำหนักสุทธิของอาหารกระป๋องมีการแจกแจงแบบปกติ

เราประมาณพารามิเตอร์ μ และ σ ของการแจกแจกแบบปกติ ได้เป็น

$$\overline{X} = 36.008 \text{ และ } S = 0.1109$$

และหาค่าประมาณ P_i โดยอาศัยตารางปกติมาตรฐาน ได้เป็น

$P_1 = 0.0301$, $P_2 = 0.1359$, $P_3 = 0.3061$, $P_4 = 0.3246$, $P_5 = 0.1615$, $P_6 = 0.0418$

ดังนั้นค่าคาดหวัง (E_i) จะหาค่าได้เป็น

$E_1 = 9.03$, $E_2 = 40.77$, $E_3 = 91.83$, $E_4 = 97.38$, $E_5 = 48.45$, $E_6 = 12.54$

ค่าของ χ^2 จะเป็น

$$\chi^2 = (10-9.03)^2/9.03 + \dots + (8-12.54)^2/12.54 = 6.342$$

เนื่องจาก $\alpha = 0.05$ เราได้ $\chi^{2(6-1-2)}_{.05} = 7.81$ จึงสรุปได้ว่า น้ำหนักสุทธิของอาหารกระป๋องมีการแจกแจงแบบปกติ

NOTHING IS GOOD OR BAD
BUT BY COMPARISON.

Thomas Fuller

6.2 แบบทดสอบโคลโมโกรอฟ (Kolmogorov Test)

แบบทดสอบไคสแควร์เกี่ยวกับการปรับที่ดีนั้นใช้ประยุกต์กับข้อมูลแบบนามบัญญัติ แต่ถ้าข้อมูลเป็นแบบต่อเนื่อง หรือมีสเกลการวัดเป็นแบบอันดับอย่างน้อย เราก็ใช้วิธีการที่ชื่อว่า แบบ

ทดสอบโคลโมโกรอฟ เพื่อทดสอบการปรับที่ดีสำหรับข้อมูลต่อเนื่อง วิธีการนี้นักคณิตศาสตร์รัสเซีย ชื่อ โคลโมโกรอฟ (A.N. Kolmogorov) เสนอไว้เมื่อ ค.ศ. 1933 และในปี 1939 สเมอร์นอฟ (N.V. Smirnov) นักคณิตศาสตร์รัสเซียได้เสนอวิธีการเพื่อใช้กับข้อมูลสองตัวอย่าง นั่นคือใช้ทดสอบว่า สองตัวอย่างมาจากประชากรที่เหมือนกัน (หรือประชากรเดียวกัน) หรือไม่ และวิธีการของสเมอร์นอฟ เหมือนกับวิธีการของโคลโมโกรอฟ

แบบทดสอบการปรับที่ดีชนิดตัวอย่างเดียวของโคลโมโกรอฟ จะสนใจที่ฟังก์ชั่นแจกแจงสะสม (Cdf, Cumulative distribution function) ที่กล่าวไว้ในสมมติฐาน และที่สังเกตได้ เราจะให้ S(x) และ $F_o(x)$ แทนฟังก์ชั่นแจกแจงสะสมที่สังเกตได้ และที่กล่าวไว้ในสมมติฐาน ดังนั้นสมมติฐานที่เกี่ยวกับฟังก์ชั่นแจกแจงสะสมของประชากรที่สนใจ จะเป็นอย่างหนึ่งอย่างใด ดังนี้

(1) Ho : $F(x) = F_o(x)$ ทุกค่าของ x

Ha : $F(x) \neq F_o(x)$ บางค่าของ x

(2) Ho : $F(x) \geq F_o(x)$ ทุกค่าของ x

Ha : $F(x) < F_o(x)$ บางค่าของ x

(3) Ho : $F(x) \leq F_o(x)$ ทุกค่าของ x

Ha : $F(x) > F_o(x)$ บางค่าของ x

ในการทดสอบสมมติฐานหลัก Ho นั้นก็อาศัยตัวอย่างขนาด n ที่เป็นอิสระกันของค่าสังเกต $X_1, X_2, .., X_n$ จากประชากรที่ไม่ทราบฟังก์ชั่นแจกแจง F(x) และให้ S(x) เป็นฟังก์ชั่นแจกแจงตัวอย่างที่สังเกตได้ ซึ่งกำหนดไว้ ดังนี้

S(x) = สัดส่วนของค่าสังเกตตัวอย่างที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ x

= (จำนวนค่าสังเกตตัวอย่างที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ x)/n

ดังนั้นตัวสถิติทดสอบ จึงกำหนดไว้ว่า

$$D = \max_{x} | S(x) - F_o(x) |$$

นั่นคือ D เป็นระยะทางแนวตั้งที่มากสุดระหว่าง S(x) กับ $F_o(x)$

เกณฑ์ตัดสินใจ กำหนดไว้ว่า จะปฏิเสธ Ho ถ้า D มากกว่าค่าวิกฤตจากตาราง 38 ระดับนัยสำคัญ

เมื่อตัวอย่างขนาดโต (n > 40) เราใช้ค่าวิกฤตบันทัดสุดท้ายของตารางนั้น

ตัวอย่าง ในการศึกษาอุปสงค์ต่อวันของสินค้าชนิดหนึ่ง เพื่อทดสอบสมมติฐานที่ว่า อุปสงค์ต่อวันของสินค้าชนิดนี้มีการแจกแจงปกติ ที่มีค่าเฉลี่ย 85 หน่วย และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 15 หน่วย ได้ข้อมูลมาดังนี้

58	78	84	90	97	70	90	86	82	59	90
70	74	83	90	76	88	84	68	93	70	94

70 110 67 68 75 80 68 82 104 92 112

84 98 80

Ho : $F(x) = F_o(x)$ ทุกค่าของ x

Ha : $F(x) \neq F_o(x)$ บางค่าของ x

ในเมื่อ $F_o(x)$ เป็นฟังก์ชั่นแจกแจงของประชากรปกติ ที่มีค่าเฉลี่ยเป็น 85 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น 15

จากข้อมูลที่ได้ เราหาค่า S(x) สำหรับค่าของ X ที่สังเกตได้ เป็นดังนี้

X:	58	59	67	68	70	74	75	76	78
S(x) :	1/36	2/36	3/36	6/36	10136	11/36	12/36	13/36	14/36
	80	82	83	84	86	88	90	92	
	16/36	18/36	19/36	22/36	23/36	24/36	28/36	29/36	
	93	94	97	98	104	110	112		
	30/36	31/36	32/36	33/36	34/36	35/36	36/36		

เมื่อสมมติฐานหลักเป็นจริง เราหาค่า $F_o(x)$ ได้โดยอาศัยการแปลงค่า X เป็นค่า

$$Z = (X-\mu)/\sigma \quad = \quad (X-85)115$$

แล้วหาพื้นที่ $P(0 \leq Z \leq z) = F(z)$ เราจะได้ $F_o(x)$ และผลต่างสัมบูรณ์ระหว่าง F(x) กับ $F_o(x)$ หรือ d = I$F(x) - F_o(x)$I ดังตารางต่อไปนี้

X:	58	59	67	68	70	74	75	76	78	80
$F_o(x)$:	.036	.042	.115	.129	.159	.233	.251	.274	.320	.371
S(x) :	.028	.056	.083	.167	.278	.306	.333	.361	.389	.444
d:	.008	.014	.032	.038	.119	.073	.082	.087	.069	.073
	82	83	84	86	88	90	92	93	94	97
	.421	.448	.472	.528	.579	.629	.681	.702	.726	.788
	.500	.528	.611	.639	,667	.778	.806	.833	.861	.889
	.079	.080	.139	.111	.088	.149	.125	.131	.135	.101
	98	104	110	112						
	.808	.898	.953	.964						
	.917	.944	.972	1.000						
	.109	.046	.019	.036						

$$D = \max_{x} \left| S(x) - F_o(x) \right| = 0.149$$

จากตาราง เมื่อ n = 36 และ $\alpha = 0.05$ เราได้ค่าวิกฤตเป็น 0.221 ดังนั้นสำหรับ D = 0.149 จึงไม่สามารถปฏิเสธสมมติฐานหลัก Ho ได้ แสดงว่าอุปสงค์ต่อวันของสินค้าชนิดนี้มีการแจกแจงปกติ ซึ่งมีค่าเฉลี่ย 85 หน่วย และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 15 หน่วย

ข้อสังเกต (1) เมื่อพิจารณาค่า D ตามวิธีการคำนวณนี้ อาจจะไม่เพียงพอ เพราะระยะทางแนวตั้งที่มากสุดระหว่าง S(x) และ $F_o(x)$ อาจจะไม่เกิดขึ้นในค่าสังเกต x ที่ได้มา แต่จะเกิดขึ้นที่ค่าอื่นของ x ดังนั้นค่าที่ถูกต้องของ D จึงจำเป็นต้องมีการคำนวณผลต่าง $S(x_{i-1}) - F_o(x_i)$ เพิ่มเติมสำหรับทุกค่าของ i = 1, 2, 3, .., r-1 ในเมื่อ r เป็นจำนวนค่าต่าง ๆ ของ x และให้ $S(x_o) = 0$ ค่าที่ถูกต้องจึงกำหนดไว้ดังนี้

$$D = \max_{1 \leq i \leq r} \{\max|S(x_i) - F_o(x_i)|, |S(x_{i-1}) - F_o(x_i)|\}$$

(2) ในการทดสอบการปรับที่ดีด้วยแบบทดสอบไคสแควร์ และแบบทดสอบโคลโมโกรอฟนั้นมีสิ่งที่น่าสนใจในการเลือกใช้แบบทดสอบทั้งสอง ดังนี้

- แบบทดสอบไคสแควร์ใช้กับข้อมูลที่เป็นความถี่ แต่แบบทดสอบโคลโมโกรอฟใช้กับข้อมูลต่อเนื่อง เมื่อใช้กับข้อมูลไม่ต่อเนื่องจะไม่ใช่ค่าจริง
- แบบทดสอบโคลโมโกรอฟ ใช้ทดสอบสมมติฐานรอง ทั้งทางเดียวและสองทาง แต่แบบทดสอบไคสแควร์ไม่ได้บอกทิศทางของความแตกต่างระหว่างการสังเกตได้กับการคาดหวังไว้
- แบบทดสอบโคลโมโกรอฟ ใช้สร้างแถบเชื่อมั่น (Confidence Bands) ของ F(x) ได้ ซึ่งจะได้กล่าวในตอนต่อไป
- การแจกแจงตัวอย่างที่แท้จริงของตัวสถิติทดสอบโคลโมโกรอฟ นั้นทราบได้และสามารถทำเป็นตารางไว้สำหรับกรณีการแจกแจงประชากรแบบต่อเนื่องที่ระบุไว้อย่างสมบูรณ์ในสมมติฐานหลัก Ho ส่วนตัวสถิติไคสแควร์เพียงแต่แจกแจงไคสแควร์โดยประมาณ สำหรับตัวอย่างจำกัด
- แบบทดสอบไคสแควร์ต้องการข้อมูลที่รวมกลุ่มเป็นประเภท ในเมื่อแบบทดสอบโคลโมโกรอฟใช้ข้อมูลที่ไม่รวมกลุ่ม ซึ่งเป็นการใช้ข้อมูลอย่างสมบูรณ์กว่า
- แบบทดสอบไคสแควร์เหมาะกับข้อมูลแบบนามบัญญัติ และเมื่อการแจกแจงที่ระบุไว้ไม่ต่อเนื่อง ในทางปฏิบัติข้อมูลเช่นนี้เกิดขึ้นบ่อยกว่า
- แบบทดสอบไคสแควร์มีวิธีการแก้ไข เมื่อพารามิเตอร์ต้องประมาณจากตัวอย่าง แต่ไม่มีการปรับแก้ ในทำนองเดียว สำหรับแบบทดสอบโคลโมโกรอฟ

6.3 แถบเชื่อมั่นของฟังก์ชั่นแจกแจงประชากร (Confidence band for Population distribution function)

เราสามารถใช้ตัวสถิติสองทางของโคลโมโกรอฟสร้างแถบเชื่อมั่น $100(1-\alpha)\%$ สำหรับฟังก์ชั่นแจกแจงประชากรที่ไม่ทราบได้ดังนี้

ให้ตัวอย่างสุ่มของ n ค่าสังเกต $X_1, X_2, .., X_n$ จากประชากรที่ไม่ทราบรูปฟอร์มฟังก์ชั่น เราจะใช้ S(x) เป็นค่าประมาณแบบจุดของฟังก์ชั่นแจกแจง F(x) ที่ไม่ทราบ S(x) จะเป็นฟังก์ชั่นกระโดด (Step function) แถบเชื่อมั่นที่ต้องการจะประกอบด้วยขอบเขตบนซึ่งอยู่เหนือ S(x) เป็นระยะทางหนึ่ง และขอบเขตล่างซึ่งอยู่ใต้ S(x) เป็นระยะทางหนึ่ง ดังนั้นแถบเชื่อมั่น $100(1-\alpha)\%$ สำหรับฟังก์ชั่นแจกแจงประชากร จะเป็นดังนี้

$$L(x) \le F(x) \le U(x) \text{ สำหรับทุกค่า } x$$

ในเมื่อ L(x) และ U(x) เป็นขอบเขตล่าง และ บน ซึ่งกำหนดไว้ว่า

$$L(x) = S(x) - W_{1-\alpha} \text{ และ } U(x) = S(x) + W_{1-\alpha}$$

ถ้า $L(x) < 0$ จะให้เป็น $L(x) = 0$ และ $U(x) > 1$ จะให้เป็น $U(x) = 1$ และค่า $W_{1-\alpha}$ จะเป็นค่าควอนไทล์ที่ $1-\alpha$ ของตัวสถิติทดสอบโคลโมโกรอฟจากตาราง 38

ตัวอย่าง จากการศึกษารายได้ต่อปีของครอบครัวชาวสวนในตำบลหนึ่ง ได้ข้อมูลซึ่งมีหน่วยเป็นพันบาทดังนี้

77.7 71.4 74.9 73.4 74.2 76.1 72.6 73.6 75.6

76.3 65.4 73.4 72.8 69.8 77.7 75.4 74.8 74.6

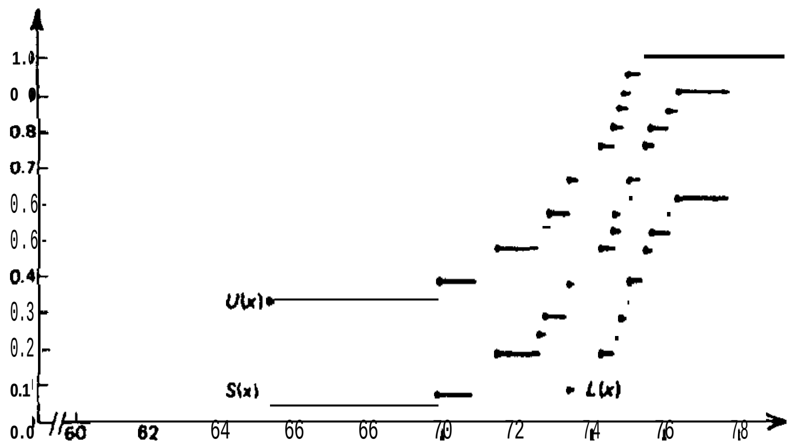
75.0 70.8 75.4

จากตาราง 38 เราได้ควอนไทล์ .95 สำหรับ n = 21 เป็น 0.287 เราได้ค่าประมาณ S(x) และขอบเขตล่าง L(x) กับขอบเขตบน U(x) ดังนี้

x	S(x)	S(x)-0.287	S(x)+0.287	L(x)	U(x)
65.2	0.048	-0.239	0.335	0	0.335
69.8	0.095	-0.192	0.382	0	0.382
70.8	0.143	-0.144	0.430	0	0.430
71.4	0.190	-0.097	0.477	0	0.477
72.6	0.234	-0.049	0.525	0	0.525
72.8	0.286	-0.001	0.573	0	0.573
73.4	0.381	0.094	0.668	0.094	0.668
73.6	0.429	0.142	0.716	0.142	0.716
74.2	0.476	0.189	0.763	0.182	0.763
74.6	0.524	0.237	0.811	0.237	0.811
74.8	0.571	0.258	0.858	0.258	0.858
74.9	0.619	0.332	0.906	0.332	0.906
75.0	0.667	0.380	0.954	0.380	0.954
75.4	0.762	0.475	1.049	0.475	1

X	S(x)	S(x)-0.287	S(x)+0.287	L(x)	U(x)
75.6	0.810	0.523	1.097	0.523	1
76.1	0.857	0.570	1.144	0.570	1
76.3	0.905	0.618	1.192	0.618	1
77.7	1 .000	0.713	1.287	0.713	1

กราฟของแถบเชื่อมั่น 95% สำหรับฟังก์ชั่นแจกแจงประชากร จะเป็นดังนี้



6.4 แบบทดสอบสเมอร์นอฟ (Smirnov Test)

แบบทดสอบสเมอร์นอฟใช้ทดสอบสมมติฐานที่ว่า สองตัวอย่างที่เป็นอิสระกันนั้นมาจากประชากรที่เหมือนกันทั้งค่ากลางและการกระจาย และแบบทดสอบนี้ฉับไว (Sensitive) ต่อความแตกต่างทุกแบบที่อาจจะมีอยู่ระหว่างสองการแจกแจง โดยปกติแบบทดสอบไคสแควร์เกี่ยวกับความเป็นเอกภาพที่กล่าวมาในบทปัญหาสัดส่วน ก็เป็นแบบทดสอบที่จะใช้ประยุกต์ได้เช่นเดียวกับแบบทดสอบสเมอร์นอฟนี้

ให้ F(x) และ G(x) แทนฟังก์ชั่นแจกแจงที่ไม่ทราบค่าของ X และ Y แล้วสมมติฐานเกี่ยวกับฟังก์ชั่นแจกแจงทั้งสองจะเป็นดังนี้

(1) Ho : F(x) = G(x) ทุกค่า x

Ha : F(x) ≠ G(x) บางค่า x

(2) Ho : F(x) ≤ G(x) ทุกค่า x

Ha : F(x) > G(x) บางค่า x

(3) Ho : F(x) ≥ G(x) ทุกค่า x

Ha : F(x) < G(x) บางค่า x

ในการทดสอบสมมติฐานหลักเหล่านี้ก็อาศัยตัวอย่างจากประชากรทั้งสองที่สนใจ โดยที่ตัวอย่างทั้งสองเป็นอิสระกัน และมีขนาดเป็น m และ n ค่าสังเกตของตัวอย่างจะต้องเป็นแบบอันดับเป็นอย่างน้อย ให้ $S_1(x)$ และ $S_2(x)$ แทนฟังก์ชั่นแจกแจงที่สังเกตได้ของ X และ Y ตามลำดับ โดยที่

$S_1(x)$ = (จำนวนค่าสังเกต X ที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ x)/m

$S_2(x)$ = (จำนวนค่าสังเกต Y ที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ x)/n

แล้วตัวสถิติทดสอบสเมอร์นอฟ กำหนดไว้ดังนี้

$$D = \max_{x} |S_1(x) - S_2(x)|$$

ถ้าสองตัวอย่างมาจากประชากรที่เหมือนกันแล้ว $S_1(x)$ และ $S_2(x)$ จะใกล้กันสำหรับทุกค่า x ดังนั้นตัวสถิติทดสอบ D ซึ่งวัดความแตกต่างระหว่าง $s_1(x)$ กับ $S_2(x)$ จะมีค่าน้อย สมมติฐานหลัก Ho จึงได้รับการสนับสนุน แต่ถ้า D มีค่ามากจึงต้องปฏิเสธ Ho นั่นคือเกณฑ์ตัดสินใจ ณ ระดับนัยสำคัญจึงกำหนดไว้ว่า ปฏิเสธ Ho ถ้า D มากกว่าค่าวิกฤตจากตาราง 39 เมื่อ m = n และจากตาราง 34 เมื่อ $m \neq n$

ถ้าสองการแจกแจงเป็นแบบต่อเนื่อง แล้วตัวสถิติทดสอบสเมอร์นอฟจะให้ค่าจริง แต่ถ้าเป็นแบบไม่ต่อเนื่องจะให้ค่าประมาณ

เมื่อตัวอย่างขนาดโต ก็ใช้ค่าประมาณของค่าวิกฤตในท้ายตาราง 39 และ 40 นั้น หรือใช้ตัวสถิติทดสอบที่ กูดแมน (Goodman, 1954) เสนอไว้ ถ้าเป็นการทดสอบทางเดียว ดังนี้

$$\chi^2 = 4D^2 \left(\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}\right)$$

ซึ่งมีการแจกแจงไคสแควร์ ด้วยองศาความเป็นอิสระ 2 ตัวสถิติทดสอบของ กูดแมน นี้ยังใช้ได้ดีกับตัวอย่างขนาดเล็กด้วย

ตัวอย่าง ในการศึกษาถึงวิธีการผลิต 2 แบบ โดยอาศัยตัวอย่าง ได้ข้อมูลซึ่งเป็นผลผลิตต่อชั่วโมง ดังนี้

วิธีที่	1	236	209	278	276	252	251
	2	206	238	224	257	230	

เราพอจะสรุปได้ไหมว่า สองตัวอย่างนี้มาจากประชากรที่มีฟังก์ชั่นแจกแจงแตกต่างกัน

Ho : F(x) = G(x) ทุกค่า x

Ha : $F(x) \neq G(x)$ บางค่า x

เราหาค่าของตัวสถิติทดสอบ D ได้ดังนี้

x	Y	$S_1(x)-S_2(x)$		x	Y	$S_1(x)-S_2(x)$	
206		1/5-0 = 6/30			251	4/5-3/6	9/30
	209	1/5-1/6	1/30		252	4/5-4/6	4/30
224		2/5-1/6	7/30	257		5/5-4/6	10/30
230		3/5-1/6	13/30		276	5/5-5/6	5/30
	236	3/5-2/6	8/30		278	5/5-6/6	0
238		4/5-2/6	14/30				

ดังนั้นค่าของตัวสถิติทดสอบ D จึงเป็น 14/30

จากตาราง สำหรับ Ho เป็นจริง เมื่อ m = 5 และ n = 6 ณ ระดับนัยสำคัญ 0.05 เราได้ค่าวิกฤต ของตัวสถิติทดสอบ D เป็น 2/3 หรือ 20/30 จึงสรุปได้ว่า สองตัวอย่างนั้นมาจากประชากรที่มีฟังก์ชั่นไม่แตกต่างกัน