ปัญหาเกี่ยวกับความสัมพันธ์

ใจเป็นผู้นำทุกสิ่งทุกอย่าง ใจเป็นใหญ่
ทุกอย่างสำเร็จได้ด้วยใจ ถ้าคนเรามีใจชั่วเสียแล้ว
การพูด การกระทำก็พลอยชั่วไปด้วย
เพราะการพูดชั่วทำชั่วนั้นทุกข์ย่อมตามสนองเขา
เหมือนล้อหมุนตามรอยโค

พุทธวจนะในธรรมบท

ในการศึกษาประชากรนั้น เมื่อกำหนดตัวแปรที่สนใจขึ้นมาตั้งแต่สองตัวขึ้นไป นอกจากเราจะศึกษาพารามิเตอร์ค่ากลาง และการกระจายของตัวแปรแล้ว สิ่งที่น่าสนใจต่อไปก็คือความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรนั้น มาตราวัดดีกรีความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรมีอยู่หลายมาตราวัด แต่ละมาตราวัดก็อาศัยสเกลการวัดในค่าตัวแปรต่าง ๆ กัน

มาตราวัดดีกรีความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรแบบช่วงในเชิงพารามิเตอร์ที่เรารู้จักกันดีก็คือสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบผลคูณโมเมนต์ของเพียร์สัน (Pearson Product - Moment Correlation Coefficient) ซึ่งกำหนดไว้ว่า

$$\rho = \sigma_{xy} / \sigma_x \sigma_y = \frac{\Sigma(X-\mu_x)(Y-\mu_y)/(N-1)}{\sqrt{\frac{\Sigma(X-\mu_x)^2}{N-1}}\sqrt{\frac{\Sigma(Y-\mu_y)^2}{N-1}}}$$

$$= \frac{N\Sigma XY - (\Sigma X)(\Sigma Y)}{\sqrt{N\Sigma X^2-(\Sigma X)^2}\sqrt{N\Sigma Y^2-(\Sigma Y)^2}}$$

ในเมื่อ X และ Y เป็นตัวแปรที่น่าสนใจ σ_{xy} เป็นความแปรปรวนร่วมของ X และ Y, σ_x และ σ_y เป็นส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของ X และ Y และ ρ เป็นค่าประมาณของสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ประชากร

สำหรับมาตรวัดดีกรีความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรในเชิงไร้พารามิเตอร์นั้นมีอยู่หลายมาตราวัด แต่ที่รู้จักกันดีก็คือ สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบอันดับของสเปียร์แมน (Spearman Rank Correlation Coefficient, ρ_s) และสัมประสิทธิ์เชิงเงื่อนไขของเพียร์สัน (Pearson Contingency Coefficient, C)

5.1 ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรนามบัญญัติ (Association between Nominal Variables)

สำหรับสองตัวแปร (หรือมากกว่า) ที่สนใจนั้นกำหนดข้อมูลแบบนามบัญญัติ เรามีมาตราวัดดีกรีความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรอยู่หลายแบบ ดังจะได้กล่าวในรายละเอียดพร้อมกับมาตราวัดและแบบทดสอบอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องด้วยดังต่อไปนี้

5.1.1 สัมประสิทธิ์ความเกี่ยวพันแบบยูล (Yule's Q and Y)

สัมประสิทธิ์ Q นี้ ยูล (Yule, 1900) ได้เสนอขึ้น แต่ใช้อักษร Q เพื่อเป็นเกียรติแก่ Quetelet นักสถิติชาวเบลเยียม สัมประสิทธิ์ Q นี้จะบอกถึงดีกรีความถี่ซึ่งสังเกตได้ในการแจกแจงแบบสองค่า (Dichotomous Distribution) นั้นเบี่ยงเบนจากเงื่อนไขของความเป็นอิสระเชิงสถิติ และกำหนดไว้ดังนี้

$$Q = \frac{P_{11}P_{22} - P_{12}P_{21}}{P_{11}P_{22} + P_{12}P_{21}}$$

ในเมื่อ P_{ij}, (i, j = 1, 2) ความน่าจะเป็นของค่าสังเกตในเซลล์ (i, j) ของตารางจรณ์ 2x2

ตัวประมาณค่าของ Q กำหนดไว้ดังนี้

$$\hat{Q} = (f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21}) / (f_{11}f_{22} + f_{12}f_{21})$$

ในเมื่อ f_{ij}, (i, j = 1, 2) เป็นความถี่หรือเปอร์เซ็นต์ที่สังกตได้จากตารางจรณ์ 2x2 ดังนี้

	Y	Y_1	Y_2	รวม
X	X_1	f_{11}	f_{12}	$f_{1.}$
	X_2	f_{21}	f_{22}	$f_{2.}$
	รวม	$f_{.1}$	$f_{.2}$	n

โดยที่ $f_{i.}$ และ $f_{.j}$ (i, j = 1, 2) เป็นผลรวมของค่า X และ Y ตามลำดับ

สำหรับสัมประสิทธิ์ Q นี้ ถ้าตัวแปรทั้งสองกำหนดข้อมูลแบบอันดับ (Ordinal Data) แล้ว Q จะเหมือนกับสัมประสิทธิ์ G ของกูดแมน และครัสคัล (Goodman and Kruskal) ซึ่งจะได้กล่าวต่อไป

ค่าของสัมประสิทธิ์ $\hat{Q}$ จะอยู่ระหว่าง –1 ถึง 1 เมื่อ $\hat{Q}$ = 0 ก็จะแสดงว่า ความถี่ที่สังเกตได้เป็นไปตามเงื่อนไขของความเป็นอิสระเชิงสถิติ สำหรับตารางจรณ์ 2x2 นั้นเงื่อนไขของความเป็นอิสระจะแสดงถึงคุณสมบัติต่อไปนี้

(1) $f_{11} / (f_{.1}) = f_{12} / (f_{.2}) = (f_{1.}) / n$

(2) $f_{21} / (f_{.1}) = f_{22} / (f_{.2}) = (f_{2.}) / n$

(3) $f_{11} / (f_{1.}) = f_{21} / (f_{2.}) = (f_{.1}) / n$

(4) $f_{12} / (f_{1.}) = f_{22} / (f_{2.}) = (f_{.2}) / n$

(5) $f_{11}/f_{22} = f_{12}f_{21}$ หรือ $f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21} = 0$

ตัวสถิติ $\hat{Q}$ มีความแปรปรวนที่ประมาณได้ดังนี้

$$S^2_{\hat{Q}} = \frac{(1-\hat{Q}^2)^2}{4} (1/f_{11} + 1/f_{21} + 1/f_{12} + 1/f_{22})$$

ในเมื่อ $f_{ij} > 0$ (ทุกค่า i, j) ดังนั้นในการประมาณช่วงเชื่อมั่น หรือทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับ เมื่อใช้ตัวอย่างขนาดโต เราจึงใช้ตัวสถิติ Z ซึ่งมีการแจกแจงปกติมาตรฐาน N(0, 1)

$$Z = \hat{Q}/S_{\hat{Q}}$$

ตัวอย่าง ในการศึกษาถึงความสัมพันธ์ระหว่างเพศของนักศึกษา (X) และทัศนคติในการทำแท้งของหญิงมีครรภ์ (Y) โดยอาศัยตัวอย่างสุ่มของนักศึกษา ม.ร. 40 ราย ได้ข้อมูลซึ่งเป็นความถี่ดังนี้

ทัศนคติ (Y)	Y_1 : เห็นด้วย	Y_2 : ไม่เห็นด้วย	รวม
เพศ (X) X_1 : หญิง	9	16	25
X_2 : ชาย	11	4	15
รวม	20	20	40

$$\hat{Q} = \frac{9(4) - 16(11)}{9(4) + 16(11)} = -140/212 = -0.66$$

$$S^2_{\hat{Q}} = \frac{\{1 - (-.66)^2\}^2}{4} (1/9 + 1/16 + 1/11 + 1/4) = 0.041$$

$$S_{\hat{Q}} = 0.201$$

เมื่อเกี่ยวข้องกับสองตัวอย่างและประชากร เราก็สนใจความแตกต่างระหว่างพารามิเตอร์ของสองประชากร Q_1 และ Q_2 ความแตกต่างระหว่าง Q_1 และ Q_2 จะให้เป็น δ_q ตัวประมาณค่าของ Q_1, Q_2 และ δ_p จะให้เป็น $\hat{Q}_1$, $\hat{Q}_2$ และ d_q

ถ้าตัวอย่างจากประชากรทั้งสองมีขนาดโต แล้วเราจะได้ว่า

$$Z = (d_q - \delta_q) / S_{d_q}$$

มีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน ในเมื่อ $S^2_{d_q}$ กำหนดไว้ว่า

$$S^2_{d_q} = S^2_{\hat{Q}_1} + S^2_{\hat{Q}_2}$$

ดังนั้นในการทดสอบความแตกต่างของพารามิเตอร์ Q_1 และ Q_2 หรือทดสอบสมมติฐานหลัก

$$Ho : Q_1 - Q_2 = \Delta$$

เราจึงใช้ตัวสถิติทดสอบ Z

สำหรับช่วงเชื่อมั่นของ $Q_1 - Q_2 = \delta_q$ ก็อาศัยตัวสถิติ Z เช่นเดียวกัน ซึ่งจะเป็น

$$Q_1 - Q_2 = d_q \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{S^2_{d_q}}$$

สำหรับสัมประสิทธิ์ยูล Y ซึ่งบางทีเรียกว่า สัมประสิทธิ์ของการร่วมกัน (Coefficient of Colligation) นั้นกำหนดไว้ดังนี้

$$Y = \frac{\sqrt{P_{11}P_{22}} - \sqrt{P_{12}P_{21}}}{\sqrt{P_{11}P_{22}} + \sqrt{P_{12}P_{21}}}$$

$$= \frac{1 - \sqrt{P_{12}P_{21}/P_{11}P_{22}}}{1 + \sqrt{P_{12}P_{21}/P_{11}P_{22}}}$$

ตัวประมาณค่า $\hat{Y}$ กำหนดไว้ว่า

$$\hat{Y} = \frac{1-\sqrt{f_{12}f_{21}/f_{11}f_{22}}}{1+\sqrt{f_{12}f_{21}/f_{11}f_{22}}}$$

สัมประสิทธิ์ Y จะมีคุณสมบัติเช่นเดียวกับสัมประสิทธิ์ Q ถึงแม้ว่าในข้อมูลชุดเดียวกันจะมีค่าไม่เท่ากัน โดยปกติ $|Y|<|Q|$ ยกเว้นแต่ตัวแปรทั้งสองเป็นอิสระ หรือมีความสัมพันธ์กันอย่างสมบูรณ์

ความแปรปรวนที่ประมาณได้ของตัวสถิติ Y จะกำหนดไว้ดังนี้

$$S^2_{\hat{Y}} = \frac{(1-\hat{Y}^2)^2}{16}\,(1/f_{11} + 1/f_{12} + 1/f_{21} + 1/f_{22})$$

ในเมื่อ $f_{ij} > 0$ (ทุกค่า i, j)

5.1.2 แบบทดสอบที่แท้จริงเกี่ยวกับความเป็นอิสระของสองตัวแปรชนิดสองค่า (Exact Test of Indepence for Two Dichotomous Variables)

สำหรับสองตัวแปร X และ Y ที่แต่ละตัวแปรมีเพียงสองค่านั้น เมื่อเป็นอิสระกัน เราจะได้ว่า

$$P(X_1/Y_1) = P(X_1/Y_2) = P(X_1)$$

หรือ $P(X_1 \cap Y_1) = P(X_1)\,P(Y_1)$

และยังได้ความสัมพันธ์อื่นๆ อีกดังนี้

$$P(X_1 \cap Y_2) = P(X_1)P(Y_2),\ P(X_2 \cap Y_1) = P(X_2)P(Y_1)$$

$$P(X_2 \cap Y_2) = P(X_2)P(Y_2)$$

ความสัมพันธ์เหล่านี้ใช้พิจารณาการแจกแจงน่าจะเป็นของค่า f_{11}, f_{12}, f_{21} และ f_{22} จากตัวอย่างขนาด n ที่ว่า

$$f(f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22}) - \binom{n}{f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22}} P_{11}^{f_{11}} P_{12}^{f_{12}} P_{21}^{f_{21}} P_{22}^{f_{22}}$$

ในเมื่อ $P_{11} = P(X_1 \cap Y_1)$, $P_{12} = P(X_1 \cap Y_2)$, $P_{21} = P(X_2 \cap Y_1)$ และ $P_{22} = P(X_2 \cap Y_2)$

ถ้าสมมติฐานเกี่ยวกับความเป็นอิสระเป็นจริง แล้วการแจกแจงดังกล่าว แต่มีเงื่อนไขกับ $f_{1.}$, $f_{2.}$, $f_{.1}$, $f_{.2}$ จะเป็น

$$f(f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22} / f_{1.}, f_{2.}, f_{.1}, f_{.2}) = \binom{f_{1.}}{f_{11}}\binom{f_{2.}}{f_{22}} / \binom{n}{f_{.1}}$$

ซึ่งการแจกแจงเงื่อนไขนี้เป็นแบบไฮเปอร์จีโอเมทริคนั่นเอง ดังนั้นการทดสอบความเป็นอิสระจึงอาศัยการแจกแจงเงื่อนไขซึ่งเป็นแบบไฮเปอร์จีโอเมทริคนี้ช่วยพิจารณาเขตปฏิเสธ เมื่อ n = 15 เราจะอาศัยตาราง 34 เมื่อ n = 15 เราอาศัยการแจกแจงดังกล่าว หรืออาศัยการประมาณค่าด้วยตัวสถิติเพียร์สัน χ^2

แบบทดสอบดังกล่าวนี้มีอำนาจทดสอบมาก (Most powerful) สำหรับสมมติฐานเกี่ยวกับความเป็นอิสระ ถึงแม้ว่าจะขึ้นอยู่กับการแจกแจงไฮเปอร์จีโอเมทริค

ตัวอย่าง ในการศึกษาเกี่ยวกับการยอมรับทางสังคม (X) และการมีส่วนร่วมทางศาสนา (Y) ของเด็กที่เป็นตัวอย่าง 17 ราย โดยตั้งคำถามเกี่ยวกับตัวแปรทั้งสอง แต่ละคำถามจะมีคำตอบว่า เคย และไม่เคย ให้เด็กตอบ ปรากฏว่าได้ข้อมูลซึ่งเป็นความถี่ ดังนี้

Y	เคย	ไม่เคย	
X เคย	5	1	6
ไม่เคย	5	6	11
	10	7	17

Ho : การยอมรับทางสังคมและการมีส่วนร่วมทางศาสนไม่มีความสัมพันธ์กัน เนื่องจาก n = 17 ซึ่งมากกว่า 15 เราจึงต้องคำนวณความน่าจะเป็นจริงจากการแจกแจงไฮเปอร์จีโอเมทริค และสมมติฐานรองไม่ได้บ่งทิศทางของความสัมพันธ์ ดังนั้นทั้งสองหางของการแจกแจงจะเป็นเขตวิกฤต

ถ้า f_{11} เป็นจำนวนความถี่ที่ตอบว่า เคยทั้งสองคำถาม แล้วค่าที่เป็นไปได้จะเป็น 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 ความน่าจะเป็นของค่าเหล่านั้นจะคำนวณได้ดังนี้

$$f(f_{11}) = \binom{6}{f_{11}}\binom{11}{10-f_{11}}\Big/\binom{17}{10} \;;\quad f_{11} = 0, 1, .., 6$$

f(0) = 0.00056, f(1) = 0.01696,

f(2) = 0.12726, f(3) = 0.33936,

f(4) = 0.35633, f(5) = 0.14253,

f(6) = 0.01699

เมื่อ $\alpha \leq 0.05$ เขตวิกฤตจะเป็น {0, 1, 6} เนื่องจาก f_{11} = 5 จึงปฏิเสธ Ho ไม่ได้

การปฏิเสธ Ho ไม่ได้สำหรับข้อมูลเหล่านี้ เกิดขึ้นเพราะสองตัวแปรเป็นอิสระกันจริงในประชากรของเด็ก หรือเป็นเพราะขนาดตัวอย่างเล็ก และเซทของค่า f_{11} น้อยไปที่จะกำหนดเขตปฏิเสธ ซึ่งจะป้องกันการค้นหาความสัมพันธ์ระหว่างสองตัวแปรเหล่านี้

5.1.3 สัมประสิทธิ์ความเกี่ยวพันที่อาศัยตัวสถิติไคสแควร์ของเพียร์สัน (Association Coefficient based on Pearson Chi-Square Statistic)

สำหรับสองตัวแปรที่กำหนดข้อมูลแบบนามบัญญัตินั้น ถ้าต้องการทดสอบความเป็นอิสระของมัน นั่นคือทดสอบสมมติฐานหลักที่ว่า

Ho : ตัวแปร X กับตัวแปร Y เป็นอิสระกัน

เราก็อาศัยตัวสถิติทดสอบไคสแควร์ ซึ่งเป็นแบบทดสอบที่รู้จักกันดี นั่นคือตัวสถิติทดสอบไคสแควร์กำหนดไว้ดังนี้

$$\chi^2 = \sum^{r,c}(f_{ij} - e_{ij})^2/e_{ij}$$

$$= n\{\sum^{r,c} f_{ij}^2 / f_{i.} f_{.j} - 1\}$$

ในเมื่อ f_{ij} เป็นความถี่ที่สังเกตได้ในค่าที่ i ของ X (แถวนอน) และค่าที่ j ของ Y (แถวตั้ง) โดยที่ i = 1, 2, ., r และ j = 1, 2, .., c เป็นความถี่คาดหวังภายใต้สมมติฐานหลักที่ว่าตัวแปรทั้งสองเป็นอิสระกัน และคำนวณได้จาก $e_{ij} = f_{i.}(f_{.j})/n$ โดยที่ $f_{i.}$ เป็นผลรวมความถี่ในค่าที่ i ของ X และ $f_{.j}$ เป็นผลรวมความถี่ในค่าที่ j ของ Y และ n เป็นขนาดตัวอย่าง

ถ้าตัวแปรทั้งสองเป็นอิสระกันจริง แล้วตัวสถิติทดสอบไคสแควร์จะมีการแจกแจงไคสแควร์ด้วยองศาความเป็นอิสระ (r-1) (c-1)

สำหรับองศาความเป็นอิสระนี้พิจารณาได้ดังนี้ – เนื่องจากเราทราบขนาดตัวอย่างก่อน จำนวนเซลล์ความถี่ที่เป็นอิสระจึงเป็น (rc-1) จำนวนพารามิเตอร์ที่เป็นอิสระ $P(X_i) = P_{i.}$ ซึ่งต้องประมาณสำหรับตัวแปร X จะเป็น (r-1) เนื่องจากผลรวมของความน่าจะเป็นทางเดียว $P(X_i)$ เหล่านั้นรวมกันต้องเป็น 1 ความรู้เกี่ยวกับความน่าจะเป็นจำนวน (r-1) นี้จึงจะช่วยพิจารณาความน่าจะเป็นที่ r ได้ในทำนองเดียวกัน จำนวนพารามิเตอร์ที่เป็นอิสระ $P(Y_j) = P_{.j}$ ซึ่งต้องประมาณสำหรับตัวแปร Y จะเป็น (c-1) ดังนั้นจำนวนองศาความเป็นอิสระของตัวสถิติจึงเป็น

$$\begin{aligned} \nu &= (rc-1) - (r-1) - (c-1) = rc - r - c + 1 \\ &= (r-1)(c-1) \end{aligned}$$

กรณีที่ r = 2 และ c = 2 หรือข้อมูลในรูปตาราง 2x2 ตัวสถิติไคสแควร์จะสามารถเขียนได้เป็น

$$\chi^2 = \frac{n(f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21})^2}{f_{1.}f_{2.}f_{.1}f_{.2}}$$

เมื่อทดสอบความสัมพันธ์ด้วยตัวสถิติทดสอบไคสแควร์ แล้วพบว่าความสัมพันธ์มีจริง ถ้าเราต้องการทราบดีกรีความสัมพันธ์ เราก็ไม่ได้ใช้ χ^2 เป็นมาตราวัดโดยตรง เพราะค่าของมันไม่จำกัด นั่นคือ $0 < \chi^2 < \infty$ เมื่อ χ^2 ใกล้ 0 จึงถือว่าตัวแปรเป็นอิสระกัน เนื่องจากขีดจำกัดของ χ^2 ไม่จำกัด จึงทำให้ยากที่จะหาดีกรีของความสัมพันธ์ ดังนั้นจึงมีวิธีการที่จะจำกัดให้ค่าของ χ^2 อยู่ระหว่าง 0 กับ 1 วิธีการเหล่านั้นจะให้มาตราวัดความสัมพันธ์

(1) ฟายสแควร์ (Phi-Square, ϕ^2) สัมประสิทธิ์ ϕ^2 กำหนดไว้เป็น

$$\phi^2 = \sum \frac{P(X_i Y_j)}{P(X_i)P(Y_j)} - 1$$

ซึ่งประมาณด้วยตัวอย่างขนาด n ได้เป็น

$$\hat{\phi}^2 = \sum f_{ij}^2 / f_{i.} f_{.j} - 1 = \chi^2/n$$

เมื่อ r = c = 2 หรือในรูปของตารางจรณ์ 2x2 เราได้

$$\hat{\phi}^2 = \frac{(f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21})^2}{f_{1.}f_{2.}f_{.1}f_{.2}}$$

ค่าสูงสุดของ $\hat{\phi}^2$ จะเท่ากับ q - 1 ในเมื่อ q = min(r, c) ดังนั้นค่าของ $\hat{\phi}^2$ จึงเป็นดังนี้ $0 \leq \hat{\phi}^2 \leq q-1$

(2) สัมประสิทธิ์เชิงเงื่อนไขของเพียร์สัน (Pearson's Contingency Coefficient, C) ซึ่งกำหนดไว้ดังนี้

$$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{\chi^2 + n}} \sqrt{\frac{\hat{\phi}^2}{\hat{\phi}^2 + 1}}$$

ค่าของ C จะเป็นดังนี้ $0 \leq C \leq \sqrt{\frac{q-1}{q}} < 1.0$ ในเมื่อ q = min (r, c)

เมื่อ r = c เราได้ max $C = \sqrt{(r-1)/r}$ เราจึงปรับปรุงสัมประสิทธิ์ C ได้เป็น

$$C_c = C/\max C$$

(3) สัมประสิทธิ์เชิงเงื่อนไขของชูโพร (Tschuprow's Contingency coefficient, T) ชูโพรได้เสนอมาตราวัดความสัมพันธ์โดยอาศัยตัวสถิติไคสแควร์อีกแบบหนึ่ง ซึ่งมีค่าอยู่ระหว่าง 0 กับ 1 แต่ค่าสูงสุดจะเป็น 1 ก็ต่อเมื่อ r = c ถ้า r ≠ c แล้ว T < 1 สัมประสิทธิ์ T กำหนดไว้เป็น

$$T = \sqrt{\frac{\chi^2/n}{(r-1)(c-1)}} = \sqrt{\frac{\hat{\phi}^2}{(r-1)\quad(c-1)}}$$

(4) สัมประสิทธิ์เชิงเงื่อนไขของเครเมอร์ (Cramer's Contingency Coefficient, V) เครเมอร์ (Cramer, 1946) ได้แก้ไขข้อบกพร่องบางประการในสัมประสิทธิ์ C และ T เพื่อให้ได้ค่าสูงสุดในตารางจรณ์ rxc ใดๆ แต่การแปลความหมายก็ยังค่อนข้างยาก สัมประสิทธิ์ V กำหนดไว้ดังนี้

$$V = \sqrt{\frac{\chi^2/n}{q-1}} = \sqrt{\hat{\phi}^2/(q-1)}$$

ในเมื่อ q = min (r, c) และการแปลความหมายของค่า V จะกำหนดไว้เป็น

ค่า V	การแปลความหมาย
0-.25	น้อย (Weak)
.26-.50	ปานกลาง (Moderate)
.51-.75	ค่อนข้างมาก (Moderate Strong)
.76-1.00)	มาก (Strong)

ตัวอย่าง ในการศึกษาถึงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรนามบัญญัติสองตัว ได้ข้อมูลสมาดังนี้

	Y_1	Y_2	Y_3	
X_1	7	14	39	60
X_2	8	5	8	21
X_3	9	7	29	45
X_4	5	12	15	32
	29	38	91	158

สมมติฐานที่จะทดสอบจะเป็นดังนี้

Ho : ตัวแปร X เป็นอิสระกับตัวแปร Y

ค่าของตัวสถิติไคสแควร์จะเป็น

$$\chi^2 = 158\{7^2/60(29) + 14^2/60(38) + 39^2/60(91) + 8^2/21(29) + .. + 15^2/32(91) - 1\}$$
$$= 12.82$$

สำหรับ $\alpha = .05$ เราได้ $\chi^{2(4-1)(3-1)}_{.05} = 12.59$ จึงปฏิเสธ Ho

ในแบบทดสอบความเป็นอิสระหรือความเป็นเอกภาพ จะไม่หยุดที่คำนวณค่าของตัวสถิติ χ^2 เพราะค่าของมันสัมพันธ์โดยตรงกับขนาดตัวอย่าง นั่นคือเมื่อเพิ่มขนาดตัวอย่าง มันจะเพิ่ม χ^2 แต่ไม่เพิ่ม ϕ^2 หรือ V ซึ่งสามารถแสดงได้ดังนี้

สำหรับตัวอย่างขนาด n เราได้ $\chi^2_{(n)}$ สมมติว่าขนาดตัวอย่างเพิ่มเป็น K เท่า ซึ่งหมายความว่า ภายใต้สมมติฐานหลัก Ho นั้น แต่ละ f_{ij} จะเพิ่มโดยเฉลี่ยเป็น Kf_{ij} และแต่ละ e_{ij} จะเพิ่มเป็น Ke_{ij} ดังนั้น $\chi^2_{(Kn)}$ จะเป็น

$$\chi^2_{(Kn)} = \sum^{r,c}(Kf_{ij} - Ke_{ij})^2/Ke_{ij}$$
$$= K\Sigma(f_{ij} - e_{ij})^2/e_{ij} = K\chi^2_{(n)}$$

และ $\phi^2_{(Kn)} = \chi^2_{(Kn)}/Kn = K\chi^2_{(n)}/Kn = \chi^2_{(n)}/n = \phi^2_{(n)}$

ในการทดสอบความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรจากตารางจรณ์ขนาด rxc โดยใช้แบบทดสอบไคสแควร์นั้น ถ้ามีหลาย ๆ ตาราง เราก็สามารถรวมข้อมูลจากหลาย ๆ ตารางที่เป็นอิสระกันได้ สำหรับวิธีการรวมแบบทดสอบเครื่องหมาย และวิธีการรวมตารางเออร์วิน-ฟิชเชอร์นั้นก็สามารถใช้รวมหลายตารางขนาด rxc ได้ ถ้าสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

ก. สมมติฐานที่เกี่ยวพันกับตารางต่าง ๆ เหมือนกัน

ข. สมมติฐานรองเหมือนกันและมีทิศทาง (Directional)

ค. ตารางมีมิติหรือขนาดเดียวกัน

แต่อย่างไรก็ตาม ถ้าตารางเหล่านั้นไม่เป็นตารางจรณ์ 2x2 แล้วเกณฑ์ (1), (2) และ (3) ของวิธีการรวมตารางเออร์วิน-ฟิชเชอร์จะใช้ไม่ได้ แต่เกณฑ์ (4) อันเป็นเกณฑ์แลมบ์ดาของเพียร์สันยังใช้ได้อยู่

จากคุณสมบัติเชิงบวกของตัวสถิติไคสแควร์จึงสามารถใช้รวมข้อมูลจากตารางจรณ์ที่เป็นอิสระได้ นั่นคือภายใต้สมมติฐานหลักของแต่ละตาราง หรือ $\phi^2_{(h)} = 0$, h = 1, 2, .., k เราทราบว่าตัวสถิติทดสอบ $\chi^2_{(h)}$ จะมีการแจกแจงไคสแควร์ ด้วยองศาความเป็นอิสระ ν_h ดังนั้นผลรวม

$$T = \chi^2_1 + \chi^2_2 + ... + \chi^2_k$$

จึงมีการแจกแจงไคสแควร์ (โดยประมาณ) ด้วยองศาความเป็นอิสระ $\nu = \nu_1 + \nu_2 + .. + \nu_k$

ตัวอย่าง ในการศึกษาถึงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรนามบัญญัติ X และ Y ของเด็กรุ่นเดียวกันที่บิดามีระดับรายได้ต่าง ๆ กัน ได้ผลสรุปดังตารางในหน้าต่อไปนี้

สำหรับ α = .05 เราจะเห็นได้ว่า กลุ่มสูงเท่านั้นที่มีความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร X และ Y เมื่อใช้เกณฑ์แลมบ์ดา λ เราจะได้

$$P_1 = P(\chi^2 > 4.92) = 0.0895, \quad P_2 = P(\chi^2 > 5.71) = 0.0598$$

$$P_3 = P(\chi^2 > 9.59) = 0.0086$$

รายได้บิดา		ต่ำ			ปานกลาง			สูง		
	Y	Y_1			Y_2			Y_3		
X	X_1	8	10	18	10	10	20	10	12	22
	X_2	4	23	27	5	23	28	5	22	27
	X_3	3	7	10	5	8	13	6	2	8
		15	40	55	20	41	61	21	36	57
	χ^2		4.92			5.71			9.59	
	ϕ^2		0.090			0.094			0.168	

ดังนั้น $\lambda = -4.605 \sum \log(P_k) = -4.605\{\log(0.0895) + \log(0.0598) + \log(0.0098)\}$

$= 19.97$

เนื่องจาก k = 3 และ $v = 2k = 6$ เราจึงปฏิเสธ Ho เพราะค่าวิกฤตสำหรับ $\alpha = 0.05$ คือ $\chi^{2(6)}_{.05} = 12.59$

ถ้าใช้คุณสมบัติเชิงบวกของไคสแควร์ เราจะได้

$$T = 4.92 + 5.71 + 9.59 = 20.22$$

เนื่องจาก $v = 2 + 2 + 2 = 6$ และ $\alpha = .05$ เราได้ค่าวิกฤตเป็น $\chi^{2(6)} = 12.59$ จึงปฏิเสธ Ho : $\phi^2 = 0$

5.1.4 มาตราวัดแบบลดสัดส่วนความคลาดเคลื่อน (Proportional – Reduction-in – Error Measures, PRE)

เพื่อที่จะหลีกเลี่ยงจุดอ่อนของดัชนีหรือมาตราวัดที่ขึ้นอยู่กับตัวสถิติไคสแควร์ นักสถิติจึงได้พัฒนาวิธีการต่างๆ ขึ้นมา วิธีการหนึ่งซึ่งเป็นที่รู้จักกันมากก็คือ เหตุผลเชิงลดสัดส่วนความคลาดเคลื่อน (Proportional-Reduction-in-Error (PRE) Logic)

มาตราวัดแบบลดสัดส่วนความคลาดเคลื่อนนี้อาศัยแนวคิดง่ายๆ ของความสัมพันธ์ดังนี้ สมมติว่าเล่นเกมโดยการสุ่มคนมาจากประชากรหนึ่ง และเดาคะแนนใน X ซึ่งเป็นตัวแปรตามการทำนายทำได้ตามกฎ 2 กฎ ภายใต้กฎข้อแรกนั้นจะไม่มีข้อมูลข่าวสารอื่นเพื่อใช้ทำนายคะแนนใน X ส่วนภายใต้กฎข้อที่สองผู้สำรวจจะพิจารณาแต่ละประเภทใน Y และอาศัยข้อมูลข่าวสารนั้นไปช่วยทำนายค่าใน X เมื่อเปรียบเทียบความน่าจะเป็นของการทำความคลาดเคลื่อนแบบแยกประเภทผิดภายใต้กฎนั้น แล้วเราจะได้ว่า มาตราวัดความเกี่ยวพันแบบลดความคลาดเคลื่อนเนื่องจากใช้กฎที่สองที่ตรงข้ามกับกฎแรก จึงเป็นดังนี้

$$PRE = \frac{P(1) - P(2)}{P(1)}$$

ในเมื่อ P(1) และ P(2) เป็นความน่าจะเป็นของการแยกประเภทหน่วยทดลองผิดตามกฎข้อแรกและกฎข้อสองตามลำดับ

จะเห็นได้ว่ามาตราวัด PRE จะให้ค่าอยู่ระหว่าง 0 และ 1 ถ้าตัวแปรเป็นอิสระกันเชิงสถิติ แล้ว PRE = 0 ซึ่งหมายความว่าความน่าจะเป็นของการแยกประเภทหน่วยทดลองผิดภายใต้กฎข้อแรกนั้นเท่ากับความน่าจะเป็นของการทำความคลาดเคลื่อนภายใต้กฎที่สอง และ PRE = 1 ถ้า P(2) = 0 ซึ่งเป็นกรณีที่ความรู้ใน Y จะให้การทำนายที่ถูกต้องต่อ X ถ้า P(1) = 0 แล้ว PRE จะกำหนดไม่ได้ (Undefined) แต่กรณีเช่นนี้จะไม่เกิดขึ้นเพราะถ้าไม่มีความเป็นไปได้ในการแยกประเภทผิดตามกฎข้อแรก แล้วหน่วยทดลองทั้งหมดจะต้องอยู่ในประเภทเดียวกัน และไม่มีความผันแปรใน X

เนื่องจากเหตุผลเชิงลดสัดส่วนความคลาดเคลื่อน (PRE logic) เป็นที่ใช้กันอย่างกว้างขวาง มาตราวัดแบบนามบัญญัติต่าง ๆ เกี่ยวกับความเกี่ยวพันจึงขึ้นอยู่กับเหตุผลนั้น ความหมายและการคำนวณของมาตราต่าง เหล่านั้นก็อาศัยนิยามความคลาดเคลื่อนนั่นเอง

(1) สัมประสิทธิ์การทำนายของกัทแมน (Guttman's Coefficient of Optimal Predictability) กัทแมน (Guttman, 1941) ได้พัฒนามาตราวัดความสัมพันธ์ ซึ่งกูดแมน และครัสคัล เรียกว่า สัมประสิทธิ์การทำนายที่เหมาะสม มาตราวัดนี้ใช้นิยามของความคลาดเคลื่อนการทำนายโดยตรง

ตามกฎข้อแรก ถ้าทำนายประเภทหนึ่งใน X โดยไม่อาศัยความรู้ในการแยกประเภทใน Y แล้วการทำนายจะทำอย่างไร วิธีหนึ่งในการทำนายก็คือ เดาประเภท X ที่เกิดขึ้นบ่อยที่สุด (X's Model Category) ซึ่งจะให้สัดส่วนสูงสุด เพราะค่าสังเกตส่วนมากจะอยู่ในประเภทนี้ และในระยะยาวความคลาดเคลื่อนจะเกิดขึ้นน้อย

สำหรับตาราง rxc ให้ $P_{m\cdot}$ แทนความน่าจะเป็น หรือสัดส่วนตามแถวนอนริมสุดที่มากสุด (Maximum marginal row probability) เมื่อไม่ทราบ Y เราควรจะเดาประเภทที่สอดคล้องกับความน่าจะเป็น $P_{m\cdot}$ ความน่าจะเป็นที่จะทำการทำนายถูกต้องคือ $P_{m\cdot}$ ในเมื่อความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อน คือ

$$P(1) = 1 - P_{m\cdot}$$

ตามกฎที่สอง ผู้สำรวจจะเลือกหน่วยแบบสุ่ม และพิจารณาประเภทของหน่วยใน Y แล้วจึงทำนายประเภท X ในการทำนายนั้นก็ต้องพิจารณาแต่ละแถวตั้ง (หรือแต่ละประเภทของ Y) แล้วผู้สำรวจก็จะเลือกประเภท X ที่เกิดขึ้นบ่อยที่สุด หรืออาจจะกล่าวได้ว่า เมื่อกำหนดประเภทใน Y ให้ก็จะเลือกประเภท X ที่มีสัดส่วนสูงสุด ความคลาดเคลื่อนจะเกิดขึ้นได้แต่ก็จะน้อยกว่าเลือกประเภทอื่นของ

ในตาราง rxc จะให้ P_{mj} แทนความน่าจะเป็นหรือสัดส่วนที่มากสุดของเซลล์ในแถวตั้งที่ j ความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนภายใต้กฎที่สอง, P(2), จะเป็น

$$P(2) = 1 - \Sigma P_{mj},\ j = 1, 2, .., c$$

ดังนั้นเราจะได้มาตราวัดแบบลดสัดส่วนความคลาดเคลื่อน ที่ชื่อว่า แลมบ์ดา, $_x$ หรือ $_a$ ดังนี้

$$\lambda_x = \frac{(1 - P_{m\cdot}) - (1 - \Sigma P_{mj})}{1 - P_{m\cdot}}$$

$$= \frac{\Sigma P_{mj} - P_{m\cdot}}{1 - P_{m\cdot}}, \quad j = 1, 2, .., c$$

ในเมื่อ λ_x จะแสดงว่าประเภทของ X จะได้รับการทำนายจากข้อมูลข่าวสารของ Y

ด้วยเหตุผลเดียวกัน เมื่อเราให้ Y เป็นตัวแปรตาม แล้วเราจะได้มาตราวัด λ_y หรือ λ_b ดังนี้

$$\lambda_y = \frac{(1 - P_{.m}) - (1 - \Sigma P_{im})}{1 - P_{.m}}$$

$$= \frac{\Sigma P_{im} - P_{.m}}{1 - P_{.m}}$$

ในเมื่อ $P_{.m}$ เป็นสัดส่วนหรือความน่าจะเป็นที่สูงสุดทางด้านข้างของแถวตั้ง และ P_{im} เป็นความน่าจะเป็นที่สูงสุดในเซลล์ของแถวนอนที่ i

มาตราวัด λ_x และ λ_y นี้ถือว่าเป็นมาตราวัดแบบไม่สมมาตร (Asymmetric Measure) ดังนั้น λ_x จะไม่เท่ากับ λ_y

ในบางครั้งผู้สำรวจไม่ทราบหรือไม่ตั้งใจจะสมมติว่าตัวแปรไหนเป็นตัวแปรตาม (ตัวแปรที่จะทำนาย) ในกรณีนี้ก็จำเป็นต้องใช้มาตราวัดแบบสมมาตร λ ซึ่งจะได้จากการปรับปรุงเหตุผลเชิงลดสัดส่วนความคลาดเคลื่อนนั่นเอง

สัมประสิทธิ์แบบสมมาตร λ จะรวมเหตุผลของการคำนวณทั้ง λ_x และ λ_y ดังนั้นเราจะได้ P(1) และ P(2) ดังนี้

$$P(1) = 1 - (P_{m\cdot} + P_{.m}) / 2$$

$$P(2) = 1 - (\Sigma P_{mj} + \Sigma P_{im}) / 2$$

นั่นคือจะได้ λ เป็น

$$\lambda = \frac{P(1) - P(2)}{P(1)}$$

$$= \frac{1 - (P_{m\cdot} + P_{.m})/2 - \{1 - (\Sigma P_{mj} - \Sigma P_{im})/2\}}{1 - (P_{m\cdot} + P_{.m})/2}$$

$$= \frac{(\Sigma P_{mj} - P_{m\cdot}) + (\Sigma P_{im} - P_{.m})}{(1 - P_{m\cdot}) + (1 - P_{.m})}$$

ตัวประมาณค่าของ λ_x, λ_y และ λ กำหนดไว้ดังนี้

$$\hat{\lambda}_x = \frac{\Sigma f_{mj} - f_{m\cdot}}{n - f_{m\cdot}} \qquad \hat{\lambda}_y = \frac{\Sigma f_{im} - f_{.m}}{n - f_{.m}}$$

และ $$\hat{\lambda} = \frac{(\Sigma f_{mj} - f_{m\cdot}) + (\Sigma f_{im} - f_{.m})}{(n - f_{m\cdot}) + (n - f_{.m})}$$

ในเมื่อ f_{mj}, $f_{m\cdot}$, f_{im} และ $f_{.m}$ เป็นความถี่ที่มากสุด ซึ่งสอดคล้องกับสัดส่วน P_{mj}, $P_{m\cdot}$, P_{im} และ $P_{.m}$ ที่กล่าวมาแล้วนั่นเอง

ตัวอย่าง ในการศึกษาถึงความสัมพันธ์ระหว่างแผนการศึกษา (X) และการนับถือศาสนา (Y) ของนักเรียนมัธยมต้น ได้ข้อมูลซึ่งเป็นจำนวนนักเรียนมาดังนี้

	การนับถือศาสนา(Y)	คริสต์	พุทธ	อิสลาม	รวม
แผนการศึกษา	X_1 ไม่มีแผน	0	40	20	10
(X)	X_2 จบอาชีวศึกษา	5	10	1	16
	X_3 จบมหาวิทยาลัย	20	0	4	24
	รวม	25	50	25	100

$$\lambda_x = \frac{(20 + 40 + 20) - 60}{100 - 60} = 0.50$$

$$\lambda_y = \frac{(40 + 10 + 20) - 50}{100 - 50} = 0.40$$

และ $$\lambda = \frac{(80 - 60) + (70 - 50)}{(100 - 60) + (100 - 50)} = 0.44$$

กูดแมน และครัสคัล (Goodman and Kruskal, 1963) ได้ประมาณค่าความแปรปรวนของ $\hat{\lambda}_x$ ไว้ดังนี้

$$S^2_{\hat{\lambda}_x} = \frac{(n - \Sigma f_{mj})(\Sigma f_{mj} + f_{m\cdot} - 2\,\Sigma^* f_{mj})}{(n - f_{m\cdot})^3}$$

ในเมื่อ $\Sigma^* f_{mj}$ แทนผลรวมของ f_{mj} ต่างๆ ที่เกิดขึ้นในแถวนอนเดียวกันกับ $f_{m\cdot}$

ดังนั้นในการทดสอบ หรือประมาณค่าแบบช่วงของ λ_x เราก็อาศัยตัวสถิติ

$$Z = (\hat{\lambda}_x - \lambda_x) / S_{\hat{\lambda}_x}$$

ซึ่งมีการแจกแจงปกติมาตรฐาน N(0, 1) ถ้าตัวอย่างขนาดโต

บางครั้งเราสนใจที่จะเปรียบเทียบสัมประสิทธิ์ λ_x จากสองประชากรที่ให้ตัวอย่างเป็นอิสระกัน เราก็อาศัยตัวสถิติ

$$Z = \frac{(\hat{\lambda}_{x_1} - \hat{\lambda}_{x_2}) - (\lambda_{x_1} - \lambda_{x_2})}{S(\hat{\lambda}_{x_1} - \hat{\lambda}_{x_2})}$$

ซึ่งมีการแจกแจงปกติมาตรฐาน N(0, 1) ถ้าขนาดตัวอย่าง n_1 และ n_2 โตพอ สำหรับ $S^2_{(\hat{\lambda}_{x_1} - \hat{\lambda}_{x_2})}$ กำหนดไว้ดังนี้

$$S^2_{(\hat{\lambda}_{x_1} - \hat{\lambda}_{x_2})} = S^2_{\hat{\lambda}_{x_1}} + S^2_{\hat{\lambda}_{x_2}}$$

กูดแมน และครัสคัล ยังได้พัฒนาการแจกแจงของ $\hat{\lambda}$ ไว้ด้วย แต่ยุ่งยากในสูตร จึงไม่ขอกล่าวไว้

ตัวอย่าง ในการศึกษาถึงความสัมพันธ์ของตัวแปรนามบัญญัติสองตัว (X, Y) จากกลุ่มสองกลุ่ม ได้ข้อมูลมาดังนี้

	1				2			
Y \ X	Y_1	Y_2	Y_3		Y_1	Y_2	Y_3	
X_1	1	1	13	15	30	0	0	30
X_2	0	9	6	15	10	15	0	25
X_3	15	12	3	30	0	0	25	25
	16	22	22	60	40	15	25	80

$$\hat{\lambda}_{x_1} = \frac{(15+12+13)-30}{60-30} = 0.333$$

$$\hat{\lambda}_{x_2} = \frac{(30+15+25)-30}{80-30} = 0.80$$

$$S^2_{\hat{\lambda}_{x_1}} = \frac{\{60-(15+12+13)\}\{(15+12+13)+30-2(12+15)\}}{(60-30)^3} = 0.0119$$

$$S^2_{\hat{\lambda}_{x_2}} = \frac{\{80-(30+15+25)\}\ \{(30+15+25)+30-2(30)\}}{(80-30)^3} = 0\ 0032$$

เมื่อต้องการทดสอบสมมติฐานที่ว่า

$$Ho : \lambda_{x_1} = \lambda_{x_2} \text{ หรือ } \lambda_{x_1} - \lambda_{x_2} = 0$$

เราได้ค่าตัวสถิติทดสอบ z ดังนี้

$$Z = \frac{(0.333 - 0.80) - 0}{\sqrt{0.0119+0.0032}} = -3\ 80$$

และสรุปได้ว่า $\lambda_{x_1} \neq \lambda_{x_2}$ เพราะว่า $|Z| > Z_{.05/2} = 1.96$

สำหรับช่วงเชื่อมั่น 95% ของผลต่าง $\lambda_{x_1} - \lambda_{x_2}$ กำหนดไว้ดังนี้

$$\hat{\lambda}_{x_1} - \hat{\lambda}_{x_2} = (\hat{\lambda}_{x_1} - \hat{\lambda}_{x_2}) \pm Z_{\alpha/2} S(\hat{\lambda}_{x_1} - \hat{\lambda}_{x_2})$$

$$= (0.333-0.80) \pm 1.96\ 0.0119 - 0.0032$$

$$= -0.467 \pm 1.96(0.123) = -0.467 \pm 0.241$$

$$= -0.708,\ -0.226$$

ซึ่งแสดงว่า λ_{x_1} c λ_{x_2}

(2) *สัมประสิทธิ์เทา (τ) ของกูดแมนและครัสคัล (Goodman and Kruskal's Tau)* มาตราวัดนี้เป็นการแก้ไขของการเดาเกมที่สมมติไว้ ในตอนที่แล้วเราสุ่มหน่วยทดลอง แล้วกำหนดให้แก่ x (ตัวแปรตาม) ด้วยการทราบหรือไม่ทราบตัวแปรอิสระ แต่ตอนนี้การกำหนดจะคงรักษาการแจกแจงเดิมอยู่

การรักษาการแจกแจง หมายความว่าการแจกแจงของการกำหนดจะเป็นเช่นเดียวกับการแจกแจงเดิม ตัวอย่างเช่น ถ้าหน่วยทดลองจำนวน $f_{1\cdot}$ และ $f_{2\cdot}$ อยู่ในสองประเภทแรกของ x แล้วกระบวนการกำหนดก็ยังคงไว้ซึ่งจำนวน $f_{1\cdot}$ และ $f_{2\cdot}$ ในประเภทนั้นอยู่ เมื่อคำนวณ λ ภายใต้กฎข้อแรกทุกหน่วยจะกำหนดให้ประเภทที่มากสุดของ X (X's Modal Category) และดังนั้นแบบแผนของการเดาจะไม่เป็นเช่นเดียวกับการแจกแจงที่สังเกตได้ ด้วยเหตุนี้เอง กูดแมนและครัสคัล (1954) ได้เสนอมาตราวัดความสัมพันธ์ซึ่งขึ้นอยู่กับการรักษาการแจกแจงเดิมไว้ และแทนด้วย τ

มาตราวัด τ ต้องการการกำหนดซึ่งเป็นสัดส่วนกับจำนวนหน่วยทดลองในประเภทต่างๆ ให้ประเภทของ X และ Y เป็น $X_1, X_2, .., X_r$ และ $Y_1, Y_2, .., Y_c$ ภายใต้กฎข้อแรก จะเดาประเภทแรกของ X หรือ X_1 ด้วยความน่าจะเป็น $P_{i\cdot}$ ประเภทที่สองด้วยความน่าจะเป็น $P_{2\cdot}$ และเรื่อยๆ ไปสำหรับ r ประเภทของ X อัตราความคลาดเคลื่อนคาดหวังระยะยาว (Long-run Expected error rate) จะเป็น P(1)

$$P(1) = 1 - \Sigma P_{i\cdot}^2$$

ภายใต้กฎที่สอง จะเดา X_1 ด้วยความน่าจะเป็น $P_{1j}/p_{.j}$ (ความน่าจะเป็นเงื่อนไขของ X_1 เมื่อกำหนด Y_j ให้) X_2 ด้วยความน่าจะเป็น $P_{2j}/P_{.j}$ และต่อๆ ไปสำหรับทุกค่าของ r และ c อัตราความคลาดเคลื่อนคาดหวังสำหรับวิธีการนี้ก็คือ P(2)

$$P(2) = 1 - \Sigma P_{ij}^2/P_{.j}$$

ดังนั้นการลดเชิงสัดส่วนในความคลาดเคลื่อนที่ขึ้นอยู่กับเงื่อนไขของการรักษาผลรวมด้านข้างเดิมก็จะเป็น

$$\tau_x = \frac{\Sigma P_{ij}^2/P_{.j} - \Sigma P_{i\cdot}^2}{1 - \Sigma P_{i\cdot}^2}$$

เช่นเดียวกับ λ ค่า τ_x จะอยู่ระหว่าง 0 กับ 1 และ τ_x จะไม่สมมาตร

ตัวประมาณค่าของ τ_x จะให้เป็น $\hat{\tau}_x$ ซึ่งจะเกี่ยวข้องกับตัวประมาณค่าใน P(1) และ P(2) ดังนี้

$$\hat{P}(1) = 1 - \Sigma(f_{i\cdot}/n)^2$$
$$= 1 - \Sigma f_{i\cdot}^2/n^2$$
$$\hat{P}(2) = 1 - \Sigma(f_{ij}/n)^2/(f_{.j}/n)$$
$$= 1 - \Sigma f_{ij}^2/nf_{.j}$$

ดังนั้น

$$\tau_x = \frac{P(1) - P(2)}{P(1)} = \frac{\Sigma f_{ij}^2/f_{.j} - \Sigma f_{i\cdot}^2/n}{n - \Sigma f_{i\cdot}^2/n}$$

ในทำนองเดียวกัน $\hat{\tau}_y$ ก็จะหาได้เป็น

$$\hat{\tau}_y = \frac{\Sigma f_{ij}^2/f_{i\cdot} - \Sigma f_{.j}^2/n}{n - \Sigma f_{.j}^2/n}$$

ดังนั้นเราจะได้ $\hat{\tau} = \dfrac{\{\Sigma f_{ij}^2/f_{.j} - \Sigma f_{i.}^2/n\} + \{\Sigma f_{ij}^2/f_{i.} - \Sigma f_{.j}^2/n\}}{\{n - \Sigma f_{i.}^2/n\} + \{n - \Sigma f_{.j}^2/n\}}$

ในเมื่อ $f_{i.}$, $f_{.j}$ และ f_{ij} เป็นความถี่ซึ่งสอดคล้องกับ $P_{i.}$, $P_{.j}$ และ P_{ij} ตามลำดับ

สำหรับมาตรา τ นั้น เป็นมาตราวัดแบบสมมาตร ค่าของ τ อยู่ระหว่าง 0 กับ 1 เช่นเดียวกับ τ_x และ τ_y แต่ τ_x และ τ_y นั้นเป็นมาตราวัดแบบไม่สมมาตร

ไลท์ และมาร์โกลิน (Light and Margolin, 1971) ได้เสนอมาตราวัดความเกี่ยวพันโดยใช้วิธีการวิเคราะห์ความแปรปรวน สมมติว่า ตัวแปรแถวตั้ง Y เป็นแฟคเตอร์ที่จะศึกษา และตัวแปรตาม X เป็นการตอบสนอง แล้วเราจะได้ผลรวมกำลังสองทั้งหมด (SST) ใน X เป็นดังนี้

$$SST = n/2 - (1/2n)\Sigma f_r^2$$

ตามวิธีวิเคราะห์ความแปรปรวนทางเดียว เราจะได้ว่า

$$SST = SSB + SSW$$

ในเมื่อ SSB เป็นผลรวมกำลังสองระหว่างกลุ่ม และ SSW เป็นผลรวมกำลังสองภายในกลุ่ม

$$SSW = n/2 - (1/2)\Sigma f_{ij}^2/f_{.j}$$

$$SSB = SST + SSW$$

มาตราวัดความเกี่ยวพันที่คล้ายคลึงกับกำลังสองของสหสัมพันธ์แบบผลคูณโมเมนต์ (r^2) และเหมือนกับ τ ที่ ไลท์และมาร์โกลินเสนอไว้ คือ

$$R_A^2 = SSB/SST$$

เช่นเดียวกับ r^2 ที่ R_A^2 จะแสดงว่าสัดส่วนของความผันแปรใน X อธิบายได้ด้วย Y แต่ไม่เหมือนกับ r^2 โดยที่ R_A^2 เป็นมาตราวัดแบบไม่สมมาตร และ R_A^2 มีค่าเท่ากับ $\hat{\tau}_x$ และยังให้การแปลความหมายเช่นเดียวกันอีก แต่ R_A^2 มีข้อได้เปรียบที่ง่ายต่อการทดสอบนัยสำคัญ เพราะเมื่อตัวอย่างขนาดโตและภายใต้สมมติฐานที่ว่า มีความเป็นอิสระกันระหว่าง X กับ Y แล้วตัวสถิติ

$$M = (n-1)(r-1)R_A^2$$

จะมีการแจกแจงไคสแควร์ ด้วยองศาความเป็นอิสระ (r–1) (c–1)

ตัวอย่าง จากตัวอย่างเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างแผนการศึกษา (X) และการนับถือศาสนา (Y) นั้นเราจะได้ τ_x τ_y และ τ ดังนี้

$$\Sigma f_r^2/n = (60'' + 16' + 24^2) / 100 = 44.32$$

$$\Sigma f_{ij}^2/f_{.j} = (0^2 + 5^2 + 20') / 25 + (40^2 + 10^2 + 0^2) / 50 + (20^2 + 1^2 + 4^2) \text{ I } 25 = 67.68$$

$$\tau_x = \frac{67.68 - 44.32}{100 - 44.32} = 0.42$$

$$\Sigma f_{.j}^2/n = (25^2 + 50^2 + 25^2) / 100 = 37.50$$

$$\Sigma f_{ij}^2/f_{i.} = (0^2 + 40^2 + 20^2) / 60 + (5^2 + 10^2 + 1') / 16 + (20^2 + 0^2 + 4^2) / 24$$

$$= 58.55$$

$$\tau_y = \frac{58.55 - 37.50}{100 - 37.50} = 0.34$$

$$\tau_x = \frac{(67.68 - 44.32) + 58.55 - 37.50}{(100 - 44.32) + (100 - 37.50)}$$

$$= 0.38$$

SST = (100/2) - (1/2) (44.32) = 27.84

SSW = (100/2) - (1/2) (67.68) = 16.16

SSB = 27.84 - 16.16 = 11.68

R^2_A = 11.68/27.84 = 0.42

M = (100-1) (3-1) (0.42) = 83.16

ดังนั้น M มีนัยสำคัญ ($\chi^{2(3-1)(3-1)}_{.05}$ = 9.49) นั่นคือความสัมพันธ์ระหว่างแผนการศึกษากับการนับถือศาสนาน่าจะมีจริง

(3) สหสัมพันธ์บางส่วนแบบกูดแมนและครัสคัล (Goodman and Kruskal's Partial Lambda) กูดแมน และครัสคัล (1954) ได้เสนอมาตราวัดความเกี่ยวพันบางส่วนระหว่างตัวแปรแบบนามบัญญัติหรือแบบอันดับไว้ จากการใช้เหตุผลแบบลดสัดส่วนความคลาดเคลื่อน (PRE) เขาแนะนำในการทำนาย Y ไว้ 2 วิธี คือ (1) โดยการทราบแต่เพียงคะแนนของ Z (ตัวแปรควบคุม) และ (2) โดยการทราบคะแนนทั้ง Z และ Y (ตัวแปรอิสระ) มาตราวัดนี้เป็นรูปทั่วไปของ λ (ในเมื่อใช้แต่ Y เท่านั้น) ซึ่งกำหนดไว้ดังนี้

$$\lambda_{xy.z} = \frac{\Sigma P_{mjk} - \Sigma P_{m.k}}{1 - \Sigma P_{m.k}}$$

โดยที่ $P_{m.k}$ เป็นความน่าจะเป็นแถวนอนด้านข้างที่มากสุดในค่าที่ k ของ Z และ P_{mjk} เป็นความน่าจะเป็นสูงสุดในแถวตั้งที่ k ของค่าที่ k ในตัวแปร Z (i = 1, 2, .., r; j = 1, 2, .., c; k = 1, 2, .., s)

ตัวประมาณค่าของ $\lambda_{xy.z}$ กำหนดไว้ดังนี้

$$\hat{\lambda}_{xy.z} = \frac{\Sigma f_{mjk} - \Sigma f_{m.k}}{n - \Sigma f_{m.k}}$$

ในเมื่อ f_{mjk} และ $f_{m.k}$ จะเป็นความถี่ที่สอดคล้องกับ P_{mjk} และ $P_{m.k}$

เมื่อตัวอย่างขนาดโต เราได้ค่าประมาณของความแปรปรวนของ $\hat{\lambda}_{xy.z}$ ได้เป็น

$$S^2_{\hat{\lambda}_{xy.z}} = (n - \Sigma f_{mjk})(\Sigma f_{mjk} + \Sigma f_{m.k} - 2\Sigma f_{mjk}) / (n - \Sigma^* f_{m.k})^3$$

ในเมื่อ $\Sigma^* f_{mjk}$ เป็นผลรวมของ f_{mjk} ต่าง ๆ ที่อยู่ในแถวนอนเดียวกับ $f_{m.k}$ สำหรับทุกค่า k

เนื่องจาก $\hat{\lambda}_{xy.z}$ มีการแจกแจงปกติ (โดยประมาณ) ที่มีค่าเฉลี่ย $\lambda_{xy.z}$ และมีความแปรปรวน $S^2_{\hat{\lambda}_{xy.z}}$ (ค่าประมาณ) เราจึงใช้คุณสมบัตินี้ทดสอบสมมติฐาน และสร้างช่วงเชื่อมั่นของ $\lambda_{xy.z}$ ได้

สำหรับความเกี่ยวพันบางส่วนของ λ และ τ นั้นสามารถจะหาได้โดยการเฉลี่ยสัมประสิทธิ์ความเกี่ยวพันของตัวแปรสองตัว (X, Y) ในค่าของตัวแปรที่สาม (Z) ที่ควบคุมไว้ การเฉลี่ยอาจจะเป็นการเฉลี่ยธรรมดา หรือโดยการถ่วงน้ำหนักก็ได้ ดังนี้

(ก) ไม่ถ่วงน้ำหนัก

$$\text{Statistic}_{xy.z} = (1/k)\sum_{i=1}^{k}\text{Statistic}_i$$

ในเมื่อ k เป็นจำนวนค่าของตัวแปรที่สาม (Z)

(ข) ถ่วงน้ำหนักด้วยจำนวนตัวอย่างในค่าต่าง ๆ ของตัวแปรควบคุม

$$\text{Statistic}_{xy.z} = \Sigma\text{Statistic}_i\,(n_i) \,/\, (\Sigma n_i)$$

ในเมื่อ n_i เป็นจำนวนตัวอย่างในค่าที่ i ของ Z

(ค) ถ่วงน้ำหนักด้วยส่วน (Conditional Denominators)

$$\text{Statistic}_{xy.z} = \frac{\Sigma\text{Statistic}_i\,(\text{Denominator}_i)}{\Sigma\text{Denominator}_i}$$

ตัวอย่าง ในการศึกษาเกี่ยวกับการวางแผนการศึกษา (X) การนับถือศาสนา (Y) และชนชั้นทางสังคม (Z) ของนักเรียนมัธยม ได้อาศัยตัวอย่าง แล้วได้ข้อมูลซึ่งเป็นความถี่ดังนี้

		Z_1 ชนชั้นต่ำ				Z_2 ชนชั้นสูง			
	Y	Y_1	Y_2	Y_3		Y_1	Y_2	Y_3	
X	X_1	0	11	9	20	0	29	11	40
	X_2	0	5	1	6	5	5	0	10
	X_3	~~8~~	~~0~~	~~0~~	8	~~12~~	~~0~~	~~4~~	16
	รวม	8	16	10	34	17	34	15	66

ในเมื่อ X_1: ไม่มีแผนการเรียนต่อ X_2: เรียนอาชีพ X_3: เรียนมหาวิทยาลัย และ Y_1: คริสต์ Y_2: พุทธ Y_3: อิสลาม

$$\hat{\lambda}_{xy.z} = \frac{(8 + 11 + 9) + (12 + 29 + 11) - (20 + 40)}{100 - (20 + 40)} = 0.50$$

$$\hat{\tau}_{X_1} = \frac{(0^2+0^2+8^2)/8+(11^2+5^2+0^2)/16+(9^2+1^2+0^2)/10+(20^2+6^2+8^2)/34}{34 - (20^2+6^2+8^2)/34} = 0.55$$

$$\hat{\tau}_{X_2} = \frac{(5^2+12^2)/17+(29^2+5^2)/34+(11^2+4^2)/15+(40^2+10^2+16^2)/66}{66-(40^2+10^2+16^2)/66} = 0.41$$

ดังนั้นเราจะได้ (ก) $\hat{\tau}_{x(yx.z)} = (0.55 + 0.41)/2 = 0.48$

(ข) $\hat{\tau}_{x(yx.z)} = \dfrac{0.55(34) + 0.41(66)}{34 + 66} = 0.46$

(ค) $\hat{\tau}_{x(yx.z)} = \dfrac{0.55(19.30) + 0.41(36.36)}{19.36 + 36.36} = 0.46$

ในเมื่อส่วน คือ $34 - (20^2+6^2+8^2)/34 = 19.30$ และ $66 - (40^2+10^2+16^2)/66 = 36.36$

5.1.5 มาตราวัดความเกี่ยวพันของกูดแมน (Goodman's as a measure of Association on a 2x2 Table)

กูดแมน (1964) ได้เสนอมาตราวัดความเกี่ยวพันสำหรับตาราง 2x2 ตามที่ฟิชเชอร์ (Fisher) ได้พัฒนาไว้ดังนี้

$$g = P_{11}P_{22}/P_{12}P_{21}$$

ถ้าตัวแปรที่ศึกษาเป็นอิสระกัน แล้วเราจะได้ว่า

$$g = (P_{1.}P_{.1})(P_{2.}P_{.2}) / (P_{1.}P_{.2})(P_{2.}P_{.1}) = 1$$

แต่นักสถิตินิยมกำหนดให้มาตราวัดสำหรับความเป็นอิสระนั้นเท่ากับศูนย์ (0) ดังนั้นจึงกำหนด γ

$$\gamma = \ln g = \ln P_{11} + \ln P_{22} - \ln P_{12} - \ln P_{21}$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่า เมื่อเป็นอิสระจะได้ $\gamma = 0$ เมื่อสหสัมพันธ์เป็นบวก จะได้ $\gamma > 0$ และเมื่อสหสัมพันธ์เป็นลบ จะได้ $\gamma < 0$

กูดแมนได้กำหนดตัวประมาณค่าของ γ ไว้ดังนี้

$$\begin{aligned}\hat{\gamma} &= \ln (f_{11}f_{22}/f_{12}f_{21}) \\ &= \ln f_{11} + \ln f_{22} - \ln f_{12} - \ln f_{21}\end{aligned}$$

ซึ่งมีความแปรปรวนดังนี้

$$V(\hat{\gamma}) = 1/f_{11} + 1/f_{22} + 1/f_{12} + 1/f_{21}$$

ตามปกติเรามักจะไม่คุ้นเคยกับ log ฐาน e แต่คุ้นเคยกับ log ฐาน 10 ดังนั้นเราจึงได้ตัวประมาณค่าของ γ ดังนี้

$$\begin{aligned}\hat{\gamma} &= 2.3026 \log (\hat{g}) \\ &= 2.3026 \log (f_{11}f_{22}/f_{12}f_{21})\end{aligned}$$

เมื่อตัวอย่างขนาดโต $\hat{\gamma}$ มีแนวโน้มที่จะแจกแจงแบบปกติ ที่มีค่าเฉลี่ย γ และความแปรปรวน $V(\hat{\gamma})$ ดังนั้นในการทดสอบ และการประมาณค่าเกี่ยวกับ γ เราจึงอาศัยตัวสถิติ

$$Z = (\hat{\gamma}-\gamma)/\sigma_{\hat{\gamma}}$$

ซึ่งมีการแจกแจงปกติมาตรฐาน N(0, 1)

ตัวอย่าง ในการศึกษาตัวแปรนามบัญญัติชนิดสองค่าเพื่อหาความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรที่ศึกษานี้ ได้อาศัยตัวอย่างขนาด 100 ได้ผลสรุปดังตารางต่อไปนี้

Y		Y_1	Y_2	
X	X_1	50	20	70
	X_2	10	20	30
รวม		60	40	100

$\hat{g} = f_{11}f_{22}/f_{12}/f_{12}f_{21} = 50(20)/10(20) = 5$

$\hat{\gamma} = 2.3026 \log (5) = 2.3026 (0.6990) \approx 1.6095$

$V(\hat{\gamma}) = 1/50 + 1/20 + 1/10 + 20 = 0.22$

ในการทดสอบนัยสำคัญของ $\hat{\gamma}$ เรามีสมมติฐานดังนี้

$$Ho : \gamma = 0, \quad Ha : \gamma \neq 0$$

$$Z = \frac{\hat{\gamma} - 0}{\sigma_{\hat{\gamma}}} \qquad \frac{1.6095 - 0}{\sqrt{0.22}} = 3.43$$

ซึ่งสรุปได้ว่า $\hat{\gamma}$ มีนัยสำคัญ ($Z_{.025} = 1.96$)

ช่วงเชื่อมั่น 95% สำหรับ γ จะเป็น

$$\gamma = \hat{\gamma} \pm Z_{.025}\sqrt{V(\hat{\gamma})} = 1.6095 \pm 1.96\sqrt{0.22} = 0.69,\ 2.53$$

เนื่องจาก $\gamma = 0$ ไม่รวมอยู่ในช่วงนี้ เราจึงสรุปได้ว่า X กับ Y มีความสัมพันธ์กัน

ในบางครั้งเราต้องการเปรียบเทียบสหสัมพันธ์ γ_1 และ γ_2 จากสองประชากรโดยอาศัยตัวอย่างที่เป็นอิสระจากประชากรทั้งสอง เราก็อาศัยตัวสถิติ

$$Z = \frac{(\hat{\gamma}_1 - \hat{\gamma}_2) - (\gamma_1 - \gamma_2)}{\sqrt{V(\hat{\gamma}_1) - V(\hat{\gamma}_2)}}$$

ซึ่งมีการแจกแจงปกติมาตรฐาน N(0, 1)

นอกจากนี้เรายังสามารถทดสอบสมมติฐานที่ว่า หลายตารางจรณ์ 2x2 นั้นมีสัมประสิทธิ์ความเกี่ยวพันเท่ากันได้ และสามารถวิเคราะห์สมมติฐานเกี่ยวกับความเป็นอิสระในตารางทั่วไปได้โดยใช้วิธีการช่วงเชื่อมั่นเชิงพร้อม ทั้งสองหัวข้อจะได้กล่าวดังต่อไปนี้

(1) ทดสอบการเท่ากันของความเกี่ยวพันในหลายประชากรที่เป็นอิสระกัน (Test of Equality of Association over k Independent Populations) ถ้า $\gamma_1, \gamma_2, .., \gamma_k$ เป็นสัมประสิทธิ์ความเกี่ยวพันระหว่างสองตัวแปรชนิดสองค่าของประชากร 1, 2, .., k ตามลำดับ และเราต้องการทดสอบสมมติฐานที่ว่า สัมประสิทธิ์ความเกี่ยวพันระหว่างสองตัวแปรในประชากรต่าง ๆ จะเท่ากันหมด แล้วสมมติฐานหลักจะเป็น

$$Ho : \gamma_1 = \gamma_2 = ... = \gamma_k = \gamma_0$$

สมมติฐานหลักนี้จะเหมือนกับสมมติฐานหลักที่ว่า ไม่มีความแตกต่างในผลร่วม

ในการทดสอบสมมติฐานหลักนี้ก็อาศัยตัวอย่างที่เป็นอิสระกันขนาด $n_1, n_2, .., n_k$ จากประชากรต่างๆ เหล่านั้น เมื่อกำหนดตัวแปรสองตัว (X, Y) โดยที่แต่ละตัวเป็นตัวแปรชนิดสองค่า แล้วค่าสังเกตจะสรุปได้ในตาราง 2x2 จำนวน k ตาราง ดังหน้าต่อไป ในเมื่อ f_{11j} เป็นจำนวนหน่วย (หรือความถี่) ในตัวอย่าง j ที่มีลักษณะทั้ง X_1 และ Y_1 , (j = 1, 2, .., k) f_{12j}, f_{21j} และ f_{22j} ก็เป็นความถี่เช่นเดียวกัน

สำหรับตัวอย่างที่ j (j = 1, 2, .., k) นั้น สัมประสิทธิ์ความเกี่ยวพันระหว่างตัวแปร X

ตัวอย่าง		1		2			k	
Y		Y_1	Y_2	Y_1	Y_2		Y_1	Y_2
X	X_1	f_{111}	f_{121}	f_{112}	f_{122}	..	f_{11k}	f_{12k}
	X_2	f_{211}	f_{221}	f_{212}	f_{222}	..	f_{21k}	f_{22k}
รวม		$f_{.11}$	$f_{.21}$	$f_{.12}$	$f_{.22}$		f.1k	$f_{.2k}$

และ Y จะเป็น $\hat{\gamma}_j = \ln (f_{11j}f_{22j}/f_{12j}f_{21j})$

$$= \ln f_{11j} + \ln f_{22j} - \ln f_{12j} - \ln f_{21j}$$

เมื่อตัวอย่างขนาดโต $\hat{\gamma}_j$ จะมีการแจกแจงปกติ (โดยประมาณ) ซึ่งมีค่าเฉลี่ย และความแปรปรวน ดังนี้

$$E(\hat{\gamma}_j) = \gamma_j$$

$$V(\hat{\gamma}_j) = 1/f_{11j} + 1/f_{22j} + 1/f_{12j} + 1/f_{21j}$$

ดังนั้น
$$Z_j = \frac{\hat{\gamma}_j - \gamma_j}{\sqrt{V(\hat{\gamma}_j)}} \quad \text{หรือ} \quad Z_j^2 = \frac{(\hat{\gamma}_j - \gamma_j)^2}{V(\hat{\gamma}_j)}$$

จะมีการแจกแจงปกติมาตรฐาน หรือการแจกแจงไคสแควร์ที่มีองศาความเป็นอิสระ 1

เพราะฉะนั้นเราจะได้ว่า

$$U = \frac{\Sigma(\hat{\gamma}_j - \gamma_0)^2}{V(\hat{\gamma}_j)} = \Sigma W_j(\gamma_j - \gamma_0)^2$$

มีการแจกแจงไคสแควร์ ด้วยองศาความเป็นอิสระ $\nu = k$ โดยที่ $W_j = 1/V(\gamma_j)$

เนื่องจาก $V(\hat{\gamma}_j)$ นั้นทราบค่า แต่ γ_0 ไม่ได้ระบุไว้ในสมมติฐาน จึงต้องประมาณจากข้อมูล ดังนี้

$$\hat{\gamma}_0 = \Sigma W_j\gamma_j/\Sigma W_j$$

ตัวสถิติทดสอบสำหรับสมมติฐานหลัก จึงเป็น

$$U = \Sigma W_j(\hat{\gamma}_j - \hat{\gamma}_0)^2$$

ซึ่งมีการแจกแจงไคสแควร์ ด้วยองศาความเป็นอิสระ k-1

ถ้าสมมติฐานหลักได้รับการปฏิเสธ แล้วเราสามารถวิเคราะห์หลังทดลองของสัมประสิทธิ์ได้ โดยการสร้างช่วงเชื่อมั่นของความแตกต่างกัน φ ใน γ_j ซึ่งกูดแมน (1964) ได้แสดงว่าเซทของช่วงเชื่อมั่นเชิงพร้อม (Simultaneous Confidence Interval) $100(1-\alpha)\%$ สำหรับ φ กำหนดไว้ว่า

$$\varphi = \hat{\varphi} \pm \sqrt{\chi^{2(2k-1)}_{\alpha}}\sqrt{V(\hat{\varphi})}$$

ในเมื่อ $\varphi = a_1\gamma_j + a_2\gamma_2 + .. + a_k\gamma_k$, $\hat{\varphi} = a_1\hat{\gamma}_j + a_2\hat{\gamma}_2 + .. + a_k\hat{\gamma}_k$ โดยที่ $a_1 + a_2 + .. + a_k = 0$ และ $V(\hat{\varphi}) = \Sigma a_j V(\hat{\gamma}_j)$

ในเมื่อ k โตพอ และจำนวนความแผกกันใน γ_j ที่วางแผนไว้ก่อนเท่ากับ Q เท่านั้น แล้วเรามักจะแทน $\sqrt{\chi^{2(k-1)}_{\alpha}}$ ด้วยค่าจากตารางปกติมาตรฐาน $Z_{\alpha/2Q}$ ซึ่งกำหนดไว้ในแถวตั้งสุดท้ายของตาราง g

ตัวอย่าง ในการศึกษาถึงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรชนิดสองค่าของประชากรต่างๆ 3 กลุ่ม โดยอาศัยตัวอย่าง ได้ข้อมูลสรุปดังนี้

	ตัวอย่าง	1		2		3	
	Y	Y_1	Y_2	Y	2Y	, Y	Y_2
X	X_1	135	25	102	75	59	40
	X_2	35	12	108	9	139	8
	รวม	170	37	210	84	198	48

$$\hat{\gamma}_j = 2.3026 \log (f_{11j}f_{22j}/f_{12j}f_{21j})$$

$\hat{\gamma}_1 =$ 2.3026 log 135 (12)/25(35) = 0.6159

$\hat{\gamma}_2 =$ 2.3026 log 102 (9)/75(108) = -2.1778

$\hat{\gamma}_3 =$ 2.3026 log 59(8)/139(40) = -2.4663

$V(\hat{\gamma}_1)$ = l/135+1/25+1/12+1/35 = 0.1593

$V(\hat{\gamma}_2)$ = 1/102+1/9+1/108+1/75 = 0.1435

$V(\hat{\gamma}_3)$ = l/59+1/8+1/139+1/40 = 0.1741

ค่าประมาณของมาตราวัดความเกี่ยวพัน γ_0 คำนวณได้เป็น

$$\hat{\gamma}_0 = \frac{(0.6159/0.1593)+(-2.1778/0.1435)+(-2.4463/0.1741)}{1/0.1593+1/0.1435+1/01741}$$

$= -1.3416$

ตัวสถิติทดสอบ u คำนวณได้เป็น

$$U = \frac{(0.6159-1.3416)'}{0.1593} + \frac{(-2.1778-1.3416)'}{0.1435} + \frac{(-2.4663-1.3416)^2}{0.1741}$$

$= 36.19$

เนื่องจาก $\chi^{2(2)}_{.05} = 5.99$ จึงสรุปได้ว่า การเท่ากันของมาตราวัดความเกี่ยวพันจะได้รับการปฏิเสธ

การเปรียบเทียบเป็นคู่ของมาตราวัดความเกี่ยวพันที่สนใจจะเป็น

$\hat{\varphi}_1 = \hat{\gamma}_1 - \hat{\gamma}_2 = 0.6159-(-2.1778) = 2.7937$

$\hat{\varphi}_2 = \hat{\gamma}_1 - \hat{\gamma}_3 = 0.6159-(-2.4663) = 3.0822$

$\hat{\varphi}_3 = \hat{\gamma}_2 - \hat{\gamma}_3 = -2.1778-(-2.4663) = 0.2885$

ซึ่งมีความแปรปรวนเป็นดังนี้

$V(\hat{\varphi}_1) = V(\hat{\gamma}_1) + V(\hat{\gamma}_2) = 0.1593+0.1435 = 0.3028$

$V(\hat{\varphi}_2) = V(\hat{\gamma}_1) + V(\hat{\gamma}_3) = 0.1593+0.1741 = 0.3334$

$V(\hat{\varphi}_3) = V(\hat{\gamma}_2) + V(\hat{\gamma}_3) = 0.1435+0.1741 = 0.3176$

ดังนั้นช่วงเชื่อมั่นเชิงพร้อมสำหรับ φ ที่มี α = .05 จะเป็น

$\varphi_1 = 2.7937 \pm 5.99\ 0.3028 = 2.7937 \pm 1.3468$

$\varphi_2 = 3.0822 \pm 5.99\ 0.3334 = 3.0822 \pm 1.4132$

$\varphi_3 = 0.2885 \pm 5.99\ 0.3176 = 0.2885 \pm 1.3793$

ซึ่งเราจะสรุปได้ว่า φ_1 และ φ_2 มีนัยสำคัญ นั่นคือตัวอย่าง 1 แตกต่างทั้งตัวอย่าง 2 และ 3

ในการทดสอบนัยสำคัญของ γ_1, γ_2 และ γ_3 ว่าแตกต่างจากศูนย์ (0) หรือไม่ ก็โดยการคำนวณตัวสถิติทดสอบ

$$Z_j = (\hat{\gamma}_j - 0)/\sqrt{V(\hat{\gamma}_j)}$$

$Z_1 = 0.6159/\sqrt{0.1593} = 1.54$

$Z_2 = -2.1778/\sqrt{0.1435} = -5.75$

$Z_3 = -2.4663/\sqrt{0.3176} = -5.91$

ซึ่งแสดงว่า γ_1 ไม่แตกต่างจาก 0 แต่ทั้ง γ_2 และ γ_3 แตกต่างจาก 0 นั่นคือความสัมพันธ์ระหว่างสองตัวแปรในกลุ่มตัวอย่าง 2 และ 3 มีจริง แต่ในตัวอย่าง 1 ไม่มีความสัมพันธ์

(2) วิธีการช่วงเชื่อมั่นเชิงพร้อมแบบกูดแมนสำหรับตารางจรณ์ทั่วไปโดยใช้อัตราส่วนผลคูณไขว้ (Goodman's Confidence- Interval Procedure for rxc Contingency Tables using Cross- Product Rations) สำหรับตารางจรณ์ 2x2 นั้น สัมประสิทธิ์

$$g = P_{11}P_{22}/P_{12}P_{21}$$

มักเรียกกันว่า อัตราส่วนผลคูณไขว้ (Cross-Product Ratio) หรืออัตราส่วนเชิงได้เปรียบ (Odds Ratio) ซึ่งจะเท่ากับ 1 เมื่อตัวแปรทั้งสองเป็นอิสระกัน ส่วนมาตราวัด $\gamma = \ln g$ นั้นเรียกว่า ส่วนประกอบแบบผลร่วมอันดับแรก (First-order Interaction Component) ในตารางจรณ์ จะมีส่วนประกอบแบบผลร่วมอันดับแรกเป็นจำนวน $Q = \binom{r}{2}\binom{c}{2}$ ส่วน

กูดแมน (1964) ได้อธิบายวิธีการวิเคราะห์ตารางจรณ์ rxc ในรายละเอียด (Indept Analysis) ของสมมติฐานเกี่ยวกับความเป็นอิสระโดยวิธีความแผกกันในค่า g หรือในเทอมของค่า γ นั่นคือพิจารณาความแผกกันในค่า γ ของตารางจรณ์ rxc ในการวิเคราะห์หลังทดลองเกี่ยวกับความเป็นอิสระนี้ ค่าคงที่สำหรับช่วงเชื่อมั่นแต่ละช่วงกำหนดไว้เป็น

$$S^{*} = \sqrt{\chi^{2}_{\alpha(r-1)(c-1)}}$$

ส่วนการวิเคราะห์ที่วางแผนไว้แล้ว ให้นับจำนวนความแผกกัน φ ที่สนใจ แล้วเลือกค่าวิกฤตจากแถวตั้งสุดท้ายของตารางดันน์หรือตาราง 9 เนื่องจากวิธีการความแผกกันนี้เป็นอิสระกับเงื่อนไขที่อยู่ด้านข้างของตารางจรณ์ชนิดสองตัวประกอบ เราจึงใช้วิธีการของกูดแมนตรวจสอบหลังทดลองเกี่ยวกับสมมติฐานของความเป็นเอกภาพที่ได้รับการปฏิเสธแล้วได้ ดังนั้นเราจึงสรุปได้ว่า วิธีการกูดแมนนี้สามารถใช้เป็นวิธีการหลังทดลองสำหรับแบบทดสอบเพียร์สัน (Karl Pearson Test) ที่ใช้ทดสอบความเป็นเอกภาพและความเป็นอิสระได้ในเทอมของความแผกกันของค่า γ ต่างๆ วิธีการดังว่านี้จะได้กล่าวต่อไปในตัวอย่าง

กูดแมน ยังได้แสดงว่า ตัวประมาณค่าความแผกกันเชิงเส้นใน $\ln f_{ij}$ หรือ

$$\hat{\varphi} = \Sigma a_{ij} \ln f_{ij}$$

นั้นเป็นความแผกกันในส่วนประกอบผลร่วมอันดับแรกที่มีความแปรปรวนเป็น

$$V(\hat{\varphi}) = \Sigma a_{ij}^{2}/f_{ij}$$

โดยที่ $\Sigma a_{ij} = 0$ สำหรับทุกค่าของ j และ $\Sigma a_{ij} = 0$ สำหรับทุกค่าของ i

ความแผกกันเหล่านี้สามารถทดสอบแบบเชิงพร้อมสำหรับนัยสำคัญ α ได้โดยการพิจารณาช่วงเชื่อมั่น

$$\varphi = \hat{\varphi} \pm S^{*}\sqrt{V(\hat{\varphi})}$$

ถ้าช่วงเชื่อมั่นรวม 0 ไว้ด้วย ก็แสดงว่า $\varphi = 0$ ถ้าไม่รวมก็แสดงว่า $\varphi \neq 0$

ตัวอย่าง ในการศึกษาถึงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรนามบัญญัติ (X, Y) ได้อาศัยตัวอย่าง 158 รายได้ข้อมูลซึ่งเป็นความถี่ดังนี้

	Y	Y_1	Y_2	Y_3	รวม
X	X_1	7	14	39	60
	X_2	8	5	8	21
	X_3	9	7	29	45
	X_4	5	12	15	32
		29	38	91	158

เราคำนวณตัวสถิติไคสแควร์ ได้เป็น

$$\chi^{2} = \{7^{2}/60(29)+14^{2}/60(38)+...+12^{2}+2/32(38)+15^{2}/32(91) - 1\}158$$
$$= 12.82$$

จึงสรุปได้ว่าตัวแปร X และ Y ไม่เป็นอิสระกัน ($\chi^{2} > \chi^{2(6)}_{.05} = 12.59$)

จากการวิเคราะห์ความแผกกันในค่า γ ต่างๆ ที่ได้จากตาราง 2x2 เป็นจำนวน $\binom{r}{2}\binom{c}{2} = \binom{4}{2}\binom{3}{2} = 18$ ตาราง เราจะได้ค่า $\hat{g}$, $\hat{\gamma}$, $\sigma_{\hat{\gamma}}$ และขีดจำกัดเชื่อมั่นสำหรับ ดังตารางต่อไปนี้

ตาราง		ตัวแปร						
2x2		X	Y	$\hat{g}$	γ	$\sigma_{\hat{\gamma}}$	$3.55\sigma_{\gamma}$	การตัดสินใจ
7	14	X_1	Y_1	0.313	-1.1633	0.7343	2.6068	ไม่มีนัยสำคัญ
8	5	X_2	Y_2					
7	39	X_1	Y_1	0.179	-1.7203	0.6469	2.2965	ไม่มีนัยสำคัญ
8	8	X_2	Y_3					
14	39	X_1	Y_2	0.574	-0.5551	0.6496	2.3061	ไม่มีนัยสำคัญ
5	8	X_2	Y_3					
7	14	X_1	Y_1	0.389	-0.9443	0.6843	2.4293	ไม่มีนัยสำคัญ
9	7	X_3	Y_2					
7	39	X_1	Y_1	0.578	-0.5482	0.5604	1.9894	ไม่มีนัยสำคัญ
9	29	X_3	Y_3					
14	39	X_1	Y_2	1.467	0.3970	0.5238	1.8595	ไม่มีนัยสำคัญ
7	29	X_3	Y_3					
7	14	X_1	Y_1	1.200	0.1824	0.7054	2.5042	ไม่มีนัยสำคัญ
5	12	X_5	Y_2					
7	39	X_1	Y_1	0.538	-0.6199	0.6597	2.3419	ไม่มีนัยสำคัญ
5	15	X_4	Y_3					
14	39	X_1	Y_2	0.449	-0.8008	0.4971	1.7647	ไม่มีนัยสำคัญ
12	15	X_4	Y_3					
8	5	X_2	Y_1	1.244	0.2183	0.7609	2.7012	ไม่มีนัยสำคัญ
9	7	X_3	Y_2					
8	8	X_2	Y_1	3.222	1.1702	0.6289	2.2326	ไม่มีนัยสำคัญ
9	29	X_3	Y_3					
5	8	X_2	Y_2	2.590	0.9517	0.7088	2.5162	ไม่มีนัยสำคัญ
7	29	X_3	Y_3					
8	5	X_2	Y_1	3.840	1.3454	0.7800	2.7689	ไม่มีนัยสำคัญ
5	12	X_4	Y_2					
8	8	X_2	Y_1	3.000	1.0986	0.7187	2.5514	ไม่มีนัยสำคัญ
5	15	X_4	Y_3					
5	8	X_2	Y_2	0.781	-0.2471	0.6892	2.4467	ไม่มีนัยสำคัญ
12	15	X_4	Y_3					
9	7	X_3	Y_1	3.086	1.1269	0.7330	2.6022	ไม่มีนัยสำคัญ
5	12	X_4	Y_2					
9	29	X_3	Y_1	0.931	-0.0716	0.6420	2.2791	ไม่มีนัยสำคัญ

ตาราง		ตัวแปร						
2x2		X	Y	$\hat{g}$	$\gamma_{,}$	$\sigma_{\hat{\gamma}}$	$3.55\sigma_{\gamma}$	การตัดสินใจ
5	15	X_4	Y_3					
7	29	X_3	Y_2	0.302	-1.1973	0.5721	2.0310	ไม่มีนัยสำคัญ
12	15	X_4	Y_3					

ในเมื่อ $S^{*} = \sqrt{\chi^{2(6)}_{.05}} = \sqrt{12.59} = 3.55$

เราจะเห็นได้ว่า ไม่มีส่วนประกอบผลร่วมใดเลยที่แตกต่างจาก 0 แต่สมมติฐานเกี่ยวกับความเป็นอิสระได้รับการปฏิเสธ ซึ่งจะหมายความว่า มีบางความแผกกันในผลร่วมอันดับแรก จะแตกต่างจาก 0 ที่เป็นเช่นนี้ก็เพราะตัวสถิติ $\chi^2 = 12.82$ แตกต่างเล็กน้อยจากค่าวิกฤต $\chi^{2(6)}_{.05} = 12.59$ และยิ่งกว่านั้นถ้าเราหา $\hat{\phi}^2$ ก็จะได้เพียง 0.041

ตัวอย่างนี้ได้แสดงให้เห็นว่า วิธีการความแผกกันของกูดแมนที่ใช้ทดสอบความเป็นอิสระนั้นจะเหมือนกับวิธีการความแผกกันของเชฟฟี (Scheffé) ที่ใช้ทดสอบการเท่ากันของค่าเฉลี่ยในตัวแบบวิเคราะห์ความแปรปรวน (ANOVA) การปฏิเสธสมมติฐานหลัก Ho ไม่ได้ประกันว่าความแผกกันที่มีความหมายนั้นจะมีนัยสำคัญทางสถิติ ความแผกกันที่มีนัยสำคัญอาจจะไม่มีการแปลความหมายที่มีเหตุผลภายในขอบเขตของการศึกษา ถึงแม้ว่าจะมีเหตุผลสำหรับการปฏิเสธสมมติฐานหลัก Ho ในตัวอย่างนี้เราจะไม่แปลกใจที่ไม่มี ใดที่แตกต่างจาก 0 ทั้งนี้ก็เพราะ $\chi^2 = 12.82$ นั้นแตกต่างจากค่าวิกฤต 12.59 เพียงเล็กน้อย ยิ่งกว่านั้น $\hat{\phi}^2 = 0.041$ ก็มีค่าจริงเป็นศูนย์ (0)

สำหรับ X_2 และ X_4 นั้น ถ้าเราใช้ Y_1 เปรียบเทียบกับ Y_2 และ Y_3 เราจะได้สัมประสิทธิ์ของความแผกกัน เป็นดังนี้

	แถวตั้ง Y_1	Y_2	Y_3	รวม
แถวนอน X_2	+2	-1	-1	0
X_4	-2	+1	+1	0
รวม	0	0	0	0

นั่นคือตัวประมาณค่าของความแผกกันจะได้เป็น

$$\hat{\varphi} = 2\ln f_{21} - \ln f_{22} - \ln f_{23} - 2\ln f_{41} + \ln f_{42} + \ln f_{43}$$

เมื่อใช้ log ฐาน 10 เราจะได้

$$\hat{\varphi} = 2.3026\,(2\log 8 - \log 5 - \log 8 - 2\log 5 + \log 12 + \log 15)$$

$$= 2.4442$$

ความแปรปรวนของความแผกกัน $\hat{\varphi}$ จะได้

$$V(\hat{\varphi}) = 2^2/8 + (-1)^2/5 + (-1)^2/8 + (-2)^2/5 + 1^2/12 + 1^2/15$$

$$= 1.7750$$

ดังนั้นช่วงเชื่อมั่นหลังทดลองสำหรับความแผกกัน φ จะเป็น

$$\varphi = \hat{\varphi} \pm \sqrt{\chi^{2(r-1)(c-1)}_{\alpha}}\sqrt{V(\hat{\varphi})}$$

$$= 2.4442 \pm 3.55\sqrt{1.7750} = 2.4442 \pm 4.7297$$

เนื่องจากช่วงนี้รวม 0 ไว้ด้วย สมมติฐานจึงไม่ได้รับการสนับสนุน

5.1.6 สัมประสิทธิ์ความไม่แน่นอน (Uncertainty Coefficient, UC)

สัมประสิทธิ์ความไม่แน่นอนนี้พัฒนามาจากทฤษฎีข่าวสารหรือข้อสนเทศ (Information Theory) ซึ่งใช้เป็นมาตราวัดความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรนามบัญญัติ สัมประสิทธิ์นี้มีทั้งแบบสมมาตรและไม่สมมาตร สำหรับสัมประสิทธิ์แบบไม่สมมาตรนั้นเป็นสัดส่วนที่ความไม่แน่นอนในตัวแปรตามจะลดลงเนื่องจากความรู้เกี่ยวกับตัวแปรอิสระ วิธีการของสัมประสิทธิ์นี้จะคล้ายคลึงกับวิธีการที่ใช้ในแลมบ์ดา λ ยกเว้นแต่ว่าสัมประสิทธิ์ความไม่แน่นอนนั้นพิจารณาการแจกแจงทั้งหมด ไม่เพียงแต่ฐานนิยม เท่านั้น

สัมประสิทธิ์แบบไม่สมมาตรที่ X เป็นตัวแปรอิสระ และ Y เป็นตัวแปรตามนั้นกำหนดไว้ดังนี้

$$UC_y = \frac{U(Y) - U(Y/X)}{U(Y)}$$

ในเมื่อ U(Y) แทนความไม่แน่นอนเฉลี่ยในการแจกแจงทางเดียวของ Y และคำนวณได้จาก

$$U(Y) = -\Sigma P(Y_i)\log P(Y_i)$$

โดยที่ $P(Y_i)$ แทนความน่าจะเป็นของประเภทหนึ่งใน Y หรือเป็นสัดส่วนของ Y

ส่วน U(Y/X) จะเป็นความไม่แน่นอนเงื่อนไขของ Y เมื่อกำหนด X ให้ และคำนวณได้จาก

$$U(Y/X) = -\Sigma P(Y_i/X_k)\log P(Y_i/X_k)$$

ในทำนองเดียวกัน มาตราวัดแบบไม่สมมาตรเมื่อ X เป็นตัวแปรตาม จะกำหนดไว้ว่า

$$UC_x = \frac{U(X) - U(X/Y)}{U(X)}$$

ค่าสูงสุดสำหรับสัมประสิทธิ์ความไม่แน่นอนนั้นจะเท่ากับ 1.00 ซึ่งแสดงถึงการขจัดความไม่แน่นอนอย่างสมบูรณ์ ในทำนองเดียวกันกับแลมบ์ดา λ นั่นคือ UC = 1.00 ก็ต่อเมื่อแต่ละประเภทของตัวแปรอิสระเกี่ยวพันกับประเภทเดียวในตัวแปรตาม ถ้าไม่มีการปรับปรุงเกิดขึ้น UC จะเป็น 0 ซึ่งกรณีนี้เกิดขึ้นก็ต่อเมื่อการแจกแจงตัวแปรตามของหน่วยต่างๆ มีสัดส่วนเท่ากันภายในแต่ละประเภทของตัวแปรอิสระ และเป็นเช่นเดียวกับเซทรวมของหน่วยต่างๆ นั่นคือถ้าตัวแปรที่กำหนดแถวนอนของตารางเป็นตัวแปรตาม แล้วเปอร์เซ็นต์แถวตั้งสำหรับแต่ละแถวตั้งจะต้องเท่ากับเปอร์เซ็นต์ของผลรวมแถวนอน

สำหรับสัมประสิทธิ์ความไม่แน่นอนแบบสมมาตรจะเป็นมาตราวัดการลดลงแบบสัดส่วนในความไม่แน่นอน ซึ่งได้จากการทราบการแจกแจงร่วมของหน่วยต่างๆ อันตรงข้ามกับความไม่แน่นอนรวมของการแจกแจงทางเดียวตามแถวนอนและแถวตั้ง สัมประสิทธิ์แบบสมมาตรกำหนดไว้ว่า

$$UC = \frac{U(Y) + U(X) - U(Y,X)}{U(Y) + U(X)}$$

ในเมื่อ U(Y, X) แทนความไม่แน่นอนร่วม ซึ่งคำนวณได้ดังนี้

$$U(Y,X) = -\Sigma P(Y_j,X_k)\log P(Y_j,X_k)$$

5.1.7 มาตราวัดการสอดคล้อง (Measures of Agreement)

ในบางครั้งเรามีความสนใจการสอดคล้องกันระหว่างสองกลุ่ม (เช่นสามี และภรรยา พ่อแม่ และบุตร) หรือสองผู้ตัดสิน ซึ่งจะประเมินผลแต่ละคน เช่นสนใจว่าสามีและภรรยามีทัศนคติต่อพฤติกรรมบางอย่างของเด็กนั้นสอดคล้องกันหรือไม่ การสอดคล้องจะสูงสุดเมื่อสมาชิกทั้งสองของแต่ละคู่ (สามีและภรรยา) ให้คำตอบเดียวกัน วิธีที่จะกำหนดการสอดคล้องก็คือคำนวณสัดส่วนของหน่วยทดลองที่อยู่ในแถวทะแยงหลัก (main diagonal) ของตารางจัตุรัส r r

ให้ $P_o = \Sigma P_{ii}$ (i = 1, 2, .., r) เป็นสัดส่วนของหน่วยทดลองที่อยู่ในแถวกลางของตารางจัตุรัสที่มี r แถวนอน และแถวตั้ง P_o ไม่เป็นดัชนีของการสอดคล้องที่สมบูรณ์ เพราะว่าบางหน่วยอาจจะอยู่ในแถวกลางเพราะโศลก (by chance) จึงจำเป็นต้องแก้ไขการเกิดขึ้นแบบโศลก โดยใช้ $P_o - P_c$ ในเมื่อ $P_c = \Sigma P_{i.}P_{.i}$ และ $P_{i.}$ กับ $P_{.i}$ เป็นสัดส่วนด้านข้างในแถวนอน และแถวตั้งที่ i ตามลำดับ หรืออาจจะกล่าวได้ว่า P_c นั้นเป็นผลรวมของสัดส่วนที่หวังไว้ภายใต้ตัวแบบของการเป็นอิสระ อย่างไรก็ตาม มาตรานี้ยังขึ้นอยู่กับผลรวมด้านข้าง จึงต้องหารด้วย $1-P_c$ ซึ่งเป็นค่าที่เป็นไปได้ที่สูงสุดสำหรับผลรวมด้านข้างที่กำหนดให้ $P_{i.}$ และ $P_{.i}$ ดังนั้นมาตราวัดการสอดคล้อง K จึงกำหนดไว้เป็น

$$K = \frac{P_o - P_c}{1 - P_c}$$

โคเฮน (Cohen, 1960) เป็นผู้เสนอมาตราวัด K นี้ และ K เป็นมาตราวัดสัดส่วนของการสอดคล้องระหว่างสองกลุ่มหรือสองผู้ตัดสิน ซึ่งจะประเมินผลแต่ละคน และได้แก้ไขการสอดคล้องเนื่องจากโศลกแล้ว ค่าของ K เป็น 0 เมื่อจำนวนของการสอดคล้องเท่ากับจำนวนคาดหวังตามโศลก และ K จะเป็น 1 เมื่อกลุ่มหรือผู้ตัดสินเห็นด้วยอย่างสมบูรณ์ และมันจะเป็นลบ (-) ถ้าการสอดคล้องที่สังเกตได้น้อยกว่าการสอดคล้องที่คาดหวังโดยโศลก

ตัวประมาณค่าของ K กำหนดไว้ดังนี้

$$\hat{K} = \frac{\Sigma f_{ii} - \Sigma f_{i.}f_{.i}/n}{n - \Sigma f_{i.}f_{.i}/n}$$

ในบางครั้งการไม่สอดคล้องกันสำหรับสองกลุ่มอาจจะมีความสำคัญต่างกัน จึงจำเป็นต้องถ่วงน้ำหนักแต่ละเซลล์ของตารางตามความสำคัญของการไม่สอดคล้องกัน ดังนั้นมาตราวัด K จึงเป็น K_w

$$K_w = \frac{P'_o - P'_c}{1 - P'_c}$$

ในเมื่อ $P'_o = \Sigma W_{ij} P_{ij}$, $P'_c = \Sigma W_{ij} P_{i.} P_{.j}$ และ W_{ij} เป็นน้ำหนักถ่วงในเซลล์ที่ i, j ของตารางที่มี r=c สำหรับ P'_o และ P'_c นั้นเป็นสัดส่วนของการสอดคล้องที่สังเกตได้ และที่คาดหวัง (ภายใต้ความเป็นอิสระ) โดยการถ่วงน้ำหนัก ตัวประมาณค่าของ K_w จะเป็น

$$\hat{K}_w = \frac{\Sigma W_{ij} f_{ij} - (\Sigma W_{ij} f_{i.} f_{.j})/n}{n - (\Sigma W_{ij} f_{i.} f_{.j})/n}$$

เมื่อตัวอย่างขนาดโตที่สุ่มจากประชากรพหุนาม แล้วค่าประมาณของความแปรปรวนของ $\hat{K}_w$ จะเป็น

$$S^2_{\hat{K}_w} = (1/n(1-\hat{P}_c)^4)[\{(1/n)\Sigma f_{ij}(W_{ij}(1-\hat{P}_c)-(\overline{W}_{i.}+\overline{W}_{.j})(1-\hat{P}_o))^2\}-(\hat{P}_o\hat{P}_c-2\hat{P}_c+\hat{P}_o)^2]$$

ในเมื่อ W_{ij} เป็นน้ำหนักถ่วงที่ปรับปรุงให้มีค่าอยู่ระหว่าง 0 กับ 1

$\hat{P}_o = (\Sigma W_{ij} f_{ij})/n$, $\hat{P}_c = (\Sigma W_{ij} f_{i.} f_{.j})/n^2$, $\overline{W}_{i.} = (\Sigma W_{ij} f_{.j})/n$, $\overline{W}_{.j} = (\Sigma W_{ij} f_{i.})/n$,

$\overline{W}_{.j} = (\Sigma W_{ij} f_{i.})/n$

การแจกแจงตัวอย่างของ $\hat{K}_w$ จะเป็นแบบปกติ เมื่อตัวอย่างขนาดโต ดังนั้น $S^2_{\hat{K}_w}$ จึงใช้สร้างช่วงเชื่อมั่นได้ ภายใต้ข้อสมมติของความเป็นอิสระ $S^2_{\hat{K}_w}$ จะลดลงเป็น

$$S^2_{\hat{K}_w} = (1/n(1-\hat{P}_c)^2\{(1/n)\Sigma f_{i.} f_{.j}(W_{ij}-(\overline{W}_{i.}-\overline{W}_{.j}))^2-\hat{P}_c^2\}$$

ซึ่งจะทดสอบสมมติฐานที่ว่า $K_w = 0$ ได้ เพราะเราถือว่า $Z = \hat{K}_w/S_{\hat{K}_w}$ มีการแจกแจงปกติมาตรฐาน N(0, 1)

สำหรับ $\hat{K}$ นั้นเมื่อตัวอย่างขนาดโตก็จะได้ S^2_K เช่นเดียวกับ $S^2_{K_w}$ แต่ $W_{ij} = 1$ สำหรับ $i = j$ และ $W_{ij} = 0$ สำหรับ $i \neq j$

ตัวอย่าง ในการศึกษาพฤติกรรมการออกเสียงเลือกตั้งของสามี ภรรยาที่อยู่ในเขตบางกะปิ ได้ข้อมูลมาดังนี้

การออกเสียงของภรรยา		ประชาธิปัตย์	พลังใหม่	ชาติไทย	
การออกเสียงของสามี	ประชาธิปัตย์	1586	117	49	1752
		(1)	(.5)	(.5)	
	พลังใหม่	103	1540	40	1683
		(0)	(1)	(0)	
	ชาติไทย	34	17	359	410
		(.5)	(.5)	(1)	
	รวม	1723	1674	448	3845

ตัวเลขในวงเล็บ ( ) เป็นน้ำหนักถ่วง

$$\Sigma f_{i.}f_{.j} = 1752(1723) + 1683(1674) + 410(448) = 6019718$$

$$\hat{K} = \frac{(1586 + 1540 + 359) - 6019718/3845}{3845 - 601971813845} = 0.842$$

$$\Sigma W_{ij}f_{ij} = (1)1586 + (.5)117 + ... + (1)359 = 3593.5$$

$$\Sigma W_{ij}f_{i.}f_{.j} = (1)(1752)1723 + (.5)(1752)1674 + ... + (1)(410)448 = 8574975$$

$$\hat{K}_w = \frac{3593.5 - 8574975/3845}{3845 - 8574975/3845} = 0.844$$

สำหรับความแปรปรวนของ $\hat{K}$ และ $\hat{K}_w$ เราจะได้

$$S^2_{\hat{K}} = 0.001, \quad S^2_{\hat{K}_w} = 0.0006$$

5.2 ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรแบบอันดับ (Association between Ordinal Variables)

ในกรณีตัวแปรที่สนใจตั้งแต่สองตัวขึ้นใน โดยต้องการศึกษาดีกรีความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรเหล่านั้น และตัวแปรแต่ละตัวที่สนใจจะให้ข้อมูลแบบอันดับเป็นอย่างน้อย แล้วเรามีมาตราวัดความสัมพันธ์ที่น่าสนใจหลายมาตรา ซึ่งจะได้กล่าวต่อไปร่วมกับมาตราวัดและแบบทดสอบอื่นๆ ที่เกี่ยวข้องด้วย

5.2.1 สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบอันดับของสเปียร์แมน (Spearman Rank Correlation Coefficient, ρ_s)

มาตราวัดแบบนี้เป็นที่รู้จักกันแพร่หลาย ซึ่งสเปียร์แมน (1904) ได้เสนอไว้ และมักจะเรียกกันว่า Spearman's rho, ρ_s สัมประสิทธิ์ ρ_s นี้กำหนดไว้ว่า

$$\rho_s = 1 - \frac{6\Sigma d_i^2}{N(N^2-1)}$$

ในเมื่อ $d_i = R(X_i) - R(Y_i)$; i = 1, 1, .., N ซึ่งเป็นผลต่างของอันดับที่ในค่าสังเกตที่ i ของตัวแปร X และ Y

ค่าของ ρ_s จะอยู่ระหว่าง -1 และ 1 นั่นคือ $-1 \leq \rho_s \leq 1$

ค่าประมาณของ ρ_s ประมาณได้โดยอาศัยตัวอย่างสุ่มขนาด n คู่ จากประชากรที่ประกอบด้วยค่าสังเกต $(X_1, Y_1), (X_2 Y_2), .., (X_n, Y_n)$ โดยที่ค่าเหล่านี้จะเป็นตัวเลขหรือไม่เป็นตัวเลขก็ได้ เมื่อให้ $R(X_i)$ และ $R(Y_i)$ เป็นอันดับที่ของ X และ Y ซึ่งเรียงตามลำดับจากน้อยไปมาก แล้วตัวสถิติ r_S ซึ่งเป็นตัวประมาณค่าของ ρ_s จะกำหนดไว้ดังนี้

$$r_S = 1 - \frac{6\Sigma d_i^2}{N(N^2-1)}$$

กรณีค่าสังเกตของ X หรือของ Y เท่ากัน แล้วอันดับที่ซึ่งกำหนดให้นั้นจะเป็นอันดับที่เฉลี่ย แต่ถ้ามีการเท่ากันมาก จำต้องปรับปรุงตัวสถิติ r_s เป็น

$$r_s^c = \frac{\Sigma X^2 + \Sigma Y^2 - \Sigma d^2}{2\sqrt{(\Sigma X^2)(\Sigma Y^2)}}$$

ในเมื่อ $\Sigma X^2 = (n^3 - n)/12 - \Sigma T_x,\ T_x = (t_x^3 - t_x)/12$

$\Sigma Y^2 = (n^3 - n)/12 - \Sigma T_y,\ T_y = (t_y^3 - t_y)/12$

โดยที่ t_x เป็นจำนวนของค่าสังเกตที่เท่ากันสำหรับอันดที่หนึ่ง ๆ และ t_y ก็เป็นเช่นเดียวกัน

ในการทดสอบนัยสำคัญของ r_s หรือทดสอบสมมติฐานที่ว่า

Ho : $\rho_s = 0$ หรือ Ho : X กับ Y เป็นอิสระกัน

Ho : $\rho_s \neq 0$, Ha : $\rho_s > 0$ หรือ Ha : $\rho_s < 0$

เราก็อาศัยค่าวิกฤตจากตาราง 35 แต่ถ้าตัวอย่างขนาดโตเท่ากับหรือมากกว่า 10 เราใช้ตัวสถิติทดสอบ

$$T = r_s\sqrt{\frac{1 - r_s^2}{n - 2}}$$

ซึ่งมีการแจกแจงแบบที (Student t) ด้วยองศาความเป็นอิสระ n-2

ตัวอย่าง ในการศึกษาถึงความสัมพันธ์ระหว่างคะแนนเหตุผล (X) กับผลการสอบวิชาสถิติ (Y) ได้คะแนนมาดังนี้

X	Y	R(X)	R(Y)	d	d^2
30	42	1.5	3	-1.5	2.25
30	46	1.5	4	-2.5	6.25
35	39	3.5	2	1.5	2.25
35	37	3.5	1	2.5	6.25
40	65	5	8	-3.0	9.00
45	88	6	11	-5.0	25.00
50	86	7	10	-3.0	9.00
60	56	8	6	2.0	4.00
70	62	9	7	2.0	4.00
80	92	10.5	12	1.5	2.25
80	54	10.5	5	-5.5	30.25
90	81	12	9	3.0	9.00
					10.9.50

$$r_s = 1 - \frac{6((109.5)}{12(12^2-1)} = 0.617$$

สำหรับค่า x เราได้ t_1 = 2, t_2 = 2, t_3 = 2

$$T_x = (1/12)\{(2^3-2) + (2^3-2) + (2^3-2)\} = 1.5$$

$$\Sigma X^2 = (12^3-12)/12 - 1.5 = 141.5$$

สำหรับค่า Y ไม่มีค่าเท่ากัน ดังนั้น $\Sigma T_y = 0$

$$\Sigma Y^2 = (12^3-12)/12 - 0 = 143$$

$$\text{ดังนั้น } r_s^c = \frac{141.5 + 143 + 109.5}{2\sqrt{(141.5)(143)}} = 0.616$$

เราจะเห็นได้ว่า เมื่อมีค่า (หรืออันดับที่) เท่ากันน้อยจะทำให้ r_s กับ r_s^c แตกต่างกันเล็กน้อยเท่านั้น ฉะนั้นจะใช้ r_s^c ก็ต่อเมื่อมีค่าหรืออันดับที่เท่ากันมากๆ

เมื่อทดสอบนัยสำคัญของ r_s เราสรุปว่ามีนัยสำคัญจริง หรือ Ha : $\rho_s \neq 0$ น่าจะเป็นจริง (ดูค่าวิกฤตจากตาราง 35)

สำหรับค่าประมาณแบบช่วงของ ρ_s จะหาได้จากตัวแปลงฟิชเชอร์ (Fisher Z) ซึ่งกำหนดไว้ว่า

$$Z(r_s) = \tanh^{-1} r_s = (1/2)\ln(1+r_s)\,(1-r_s)$$

และสมมติว่าตัวอย่างสุ่มมาจากประชากรแบบปกติชนิดสองตัวแปร นั่นคือช่วงเชื่อมั่น $100(1-\alpha)\%$ สำหรับ $Z(\rho_s) = \tanh^{-1}\rho_s$ กำหนดไว้ว่า

$$Z(\rho_s) = Z(r_s) \pm Z_{\alpha/2}\ \sigma_{z(r_s)}$$

ในเมื่อ $\sigma_{z(r_s)} = 1.03/\sqrt{n-3}$ จากช่วงเชื่อมั่นของ $Z(\rho_s)$ เราสามารถแปลงกลับไปสู่ช่วงเชื่อมั่นของ ρ_s ได้

ดังนั้นเมื่อต้องการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับค่าเฉพาะของ ρ_s คือ ρ_{s_o} เราก็ใช้ตัวสถิติทดสอบ

$$Z = \frac{Z(r_s) - Z(\rho_{s_o})}{1.03/\sqrt{n-3}}$$

ซึ่งมีการแจกแจงปกติมาตรฐาน

บางครั้งเราต้องการเปรียบเทียบสองสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบอันดับจากสองประชากร ซึ่งมีข้อจำกัดว่าเป็นประชากรแบบปกติ นั่นคือสมมติฐานหลักจะเป็น

$$Ho : \rho_{s_1} - \rho_{s_2} = \rho_o$$

เราก็อาศัยตัวสถิติทดสอบ Z ซึ่งมีการแจกแจงปกติมาตรฐาน N(0. 1) และ Z กำหนดไว้ว่า

$$Z = \frac{d - Z(\rho_o)}{\sigma_d}$$

ในเมื่อ $d = Z(r_{s1}) - Z(r_{s2})$, $Z(\rho_o) = Z(\rho_{s_1}) - Z(\rho_{s_2})$,

$$\sigma_d = \sqrt{1.06/(n_1 - 3)} + \sqrt{1.06/(n_2 - 3)}\ ,\ n_1, n_2 = 10$$

5.2.2 สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบอันดับของเคนดาลล์ (Kendall Rank Correlation Coefficient, τ)

เคนดาลล์ (1938) ได้เสนอมาตราวัดสหสัมพันธ์ที่เรียกว่า Kendall's Tau, τ ไว้ ซึ่งเป็นมาตราวัดแบบอาศัยอันดับที่ มาตราวัด τ นี้เป็นที่รู้จักและนิยมใช้กันพอสมควร

ค่าของ τ จะอยู่ระหว่าง -1 และ 1 เช่นเดียวกับ ρ_s ตัวประมาณค่าของ τ จะให้เป็น $\hat{\tau}$ สำหรับ τ นั้นกำหนดในเทอมของการสอดคล้องและการไม่สอดคล้อง (Concordance disconcordance) นั่นคือ

$$\tau = P_c - P_d$$

ในเมื่อ P_c เป็นความน่าจะเป็นของการสอดคล้อง และ P_d เป็นความน่าจะเป็นของการไม่สอดคล้อง

ค่าสังกต (X_i, Y_i) กับ (X_j, Y_j) จะเรียกว่าสอดคล้องกัน ถ้าผลต่างระหว่าง X_i กับ X_j มีทิศทางเช่นเดียวกับผลต่างระหว่าง Y_i กับ Y_j หรือกล่าวได้อีกอย่างว่า ถ้า $X_i > X_j$ และ $Y_i > Y_j$ หรือ $X_i < X_j$ และ $Y_i < Y_j$ แล้วจะเรียกว่าสอดคล้องกัน ส่วนค่าสังเกต (X_i, Y_i) กับ (X_j, Y_j) จะเรียกว่า ไม่สอดคล้องกัน ถ้าทิศทางของผลต่างไม่เป็นแบบเดียวกัน

ถ้า $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), .., (X_n, Y_n)$ เป็นค่าสังเกตของตัวอย่างสุ่มขนาด n จากประชากรชนิดสองตัวแปร (X, Y) ที่มีสเกลการวัดในค่าสังเกตเป็นแบบอันดับอย่างน้อย แล้วเราสามารถหาตัวสถิติซึ่งเป็นมาตราวัดความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร X และ Y ได้ดังนี้

(1) เรียงค่าสังเกต (X_i, Y_i) ตามขนาดของ X โดยให้ค่าน้อยสุดของ X เป็นอันดับ 1 ค่าน้อยรองลงไปเป็นอันดับ 2 และต่อ ๆ ไป สำหรับค่าของ Y จะตามค่าของ X ดังนั้นจะอยู่ในลำดับธรรมชาติ (Natural Order)

(2) เปรียบเทียบค่า Y เป็นคู่ ๆ ด้วยกันจำนวน $\binom{n}{2} = n(n-1)/2$ ครั้ง โดยเริ่มต้นจากค่า Y ที่คู่กับ X ที่มีอันดับเป็น 1 ถ้าค่า Y ที่นำไปเปรียบเทียบนั้นน้อยกว่าค่า Y ที่คู่กับค่า X อันดับสูง ๆ เราจะเรียกคู่ของค่า Y นั้นอยู่ในลำดับธรรมชาติ แต่ถ้ามากกว่าก็แสดงว่าคู่ของค่า Y นั้นไม่อยู่ในลำดับธรรมชาติ (Reverse natural order)

(3) ให้ f_c เป็นจำนวนคู่ของลำดับธรรมชาติ และ f_d เป็นจำนวนคู่ของลำดับไม่เป็นธรรมชาติ และให้ $S = f_c - f_d$

เคนดาลล์แสดงให้เห็นว่าค่าที่มากสุดของ S เท่ากับ n(n-1)/2 และได้กำหนดตัวสถิติ $\hat{\tau}$ ไว้ดังนี้

$$\hat{\tau} = \frac{S}{n(n-1)/2} = \frac{\text{ค่าของ S ที่สังเกตได้}}{\text{ค่าที่มากสุดของ S}}$$

ถ้าค่าของ Y เรียงลำดับตาม X เราจะได้ค่า S สูงสุด คือ $S = n(n-1)/2$ ดังนั้น $\hat{\tau} = 1$ ซึ่งแสดงว่ามีสหสัมพันธ์ทางตรงอย่างสมบูรณ์ แต่ถ้าค่าของ Y เรียงลำดับกลับกันกับของ X เราจะได้ค่า S สูงสุดแต่เป็นลบ นั่นคือ $S = -n(n-1)/2$ ซึ่งจะได้ค่า $\hat{\tau} = -1$ ซึ่งแสดงว่ามีสหสัมพันธ์ทางกลับกันอย่างสมบูรณ์ ดังนั้นค่าของ $\hat{\tau}$ จึงอยู่ระหว่าง -1 กับ 1

ในการทดสอบนัยสำคัญของ $\hat{\tau}$ หรือทดสอบความเป็นอิสระของ X และ Y นั่นคือสมมติฐานหลักที่จะทดสอบจึงเป็น

$$Ho : \tau = 0 \text{ หรือ } Ho : X \text{ กับ } Y \text{ เป็นอิสระกัน}$$

เกณฑ์ตัดสินใจกำหนดค่าวิกฤตไว้ในตาราง

เคนดาลล์ (1984) แสดงไว้ว่า เมื่อ n = 8 การแจกแจงตัวอย่างของ $\hat{\tau}$ จะไม่แตกต่างจากการแจกแจงแบบปกติ โดยมีค่าเฉลี่ย และความแปรปรวนดังนี้

$$E(\hat{\tau}) = 0$$

$$V(\hat{\tau}) = 2(2n + 5)/9n\ (n-1)$$

ดังนั้นในการทดสอบนัยสำคัญของ $\hat{\tau}$ จึงใช้ตัวสถิติทดสอบ

$$Z = \frac{\tau - E(\hat{\tau})}{V(\hat{\tau})}$$

ซึ่งมีการแจกแจงปกติมาตรฐาน หรือใช้ตัวสถิติ S โดยตรงก็ได้ โดยแก้ไขความต่อเนื่อง ดังนี้

$$Z_o = \frac{|S| - 1}{n(n-1)(2n+5)/18}$$

ซึ่งมีการแจกแจงปกติมาตรฐาน N(0, 1)

กรณีที่ค่าสังเกตเท่ากัน เราปรับปรุงค่าของ $\hat{\tau}$ ได้เป็น

$$\hat{\tau} = \frac{S}{\sqrt{n(n-1)/2 - T_x}\sqrt{n(n-1)/2 - T_y}}$$

ในเมื่อ $T_x = (1/2)\Sigma t_x(t_x-1)$ และ $T_y = (1/2)\Sigma t_y(t_y-1)$ โดยที่ t_x และ t_y เป็นจำนวนของค่าสังเกต X และ Y ที่เท่ากันสำหรับอันดับที่กำหนดไว้

เมื่อการเท่ากันเกิดขึ้นเฉพาะค่า X (ไม่เกิดในค่า Y) หรือเฉพาะค่า Y (ไม่เกิดในค่า X) แล้วความแปรปรวนของ S จะเป็น

$$V(S) = (1/18)\{n(n-1)(2n+5) - \Sigma(t-1)(2t+5)\}$$

แต่ถ้าการเท่ากันเกิดขึ้นทั้งค่า X และค่าY แล้วความแปรปรวนของ S จะเป็น

$$V(S) = (1/18)\{n(n-1)(2n+5) - \Sigma t_x(t_x-1)(2t_x+5) - \Sigma t_y(t_y-1)(2t_y+5)\}$$
$$+ \frac{1}{9n(n-1)(n-2)}\{\Sigma t_x(t_x-1)(t_x-2)\}\{\Sigma t_y(t_y-1)(t_y-2)\} + \frac{1}{2n(n-1)}$$
$$\{\Sigma t_x(t_x-1)\}\{\Sigma t_y(t_y-1)\}$$

ตัวอย่าง นักภาษาศาสตร์ได้เสนอวิธีปรับปรุงการอ่านภาษาไทย จากการทดลองกับเด็กนักเรียน 10 คน ได้คะแนนการอ่านที่เพิ่มขึ้น (X) และเชาวน์ปัญญา (Y) ดังนี้

X	0.6	0.2	1.6	0.5	0.9	0.5	0.8	0.8	0.8	0.4
Y	86	107	102	104	104	89	109	109	101	96

คะแนนการอ่านที่เพิ่มขึ้น มีความสัมพันธ์กับเชาวน์ปัญญาหรือไม่ ?

Ho : คะแนนการอ่านที่เพิ่มขึ้นกับเชาวน์ปัญญาเป็นอิสระกัน

ในการคำนวณตัวสถิติทดสอบ $\hat{\tau}$ เราเรียงค่า X จากน้อยไปมากได้ดังนี้

X	0.2	0.4	0.5	0.5	0.6	0.8	0.8	0.8	0.9	1.6
Y	107	96	104	89	86	109	109	101	104	102

f_c = จำนวนคู่ Y ที่เรียงลำดับตามธรรมชาติ

$= 2+6+2+5+5+0+0+2+0 = 22$

f_d = จำนวนคู่ Y ที่ไม่เรียงลำดับตามธรรมชาติ

$= 7+2+4+1+0+3+3+0+1 = 21$

$$S = f_c - f_d = 22 - 21 = 1$$

$$\hat{\tau} = \frac{S}{n(n-1)/2} = \frac{1}{10(9)/2} = 0.022$$

โดยที่ $T_x = (1/2)\{2(2-1)+3(3-1)\} = 4$ และ $T_y = (1/2)\{2(2-1)+2(2-1)\} = 2$

$$\hat{\tau} = \frac{1}{\sqrt{10(9)/2 - 4}\sqrt{10(9)/2 - 2}} = 0.024$$

จากตาราง 37 เมื่อ $\alpha = .05$ และ $n = 10$ เราได้ค่าวิกฤตเป็น 0.511 ซึ่งมากกว่า ดังนั้นจึงปฏิเสธ Ho ไม่ได้ แสดงว่าคะแนนการอ่านที่เพิ่มขึ้นไม่มีความสัมพันธ์กับเชาวน์ปัญญา

ถ้าเกิดการเท่ากันในค่าของ X และในค่าของ Y มากๆ หรือถ้าค่าของ X และ Y เป็นประเภทเชิงอันดับ (Ranked Categories) แล้วเราสามารถสร้างตารางความถี่แบบ 2 ทางของค่าX และ Y ได้ดังนี้

	Y	Y_1	Y_2	...	Y_c	รวม (R_i)
X	X_1	f_{11}	f_{12}		f_{1c}	R_1
	X_2	f_{21}	f_{22}		f_{2c}	R_2
	:			f_{ij}		
	X_r	f_{r1}	f_{r2}		f_{rc}	R_r
รวม (C_j)		C_1	C_2		C_c	$n=\Sigma f_{ij}$

ในเมื่อ $X_1 < X_2 < ... < X_r$ และ $Y_1 < Y_2 < ... < Y_c$; f_{ij} เป็นความถี่ในค่าที่ i ของ X และค่าที่ j ของ Y; R_i และ C_j เป็นผลรวมของความถี่ในค่า X ที่ i และค่า Y ที่ j (j = 1, 2, .., c และ i = 1, 2, .., r)

สำหรับค่าของ f_c, f_d และ S หาได้ดังนี้

(1) $f_c = \Sigma a_{ij}$

ในเมื่อ $a_{ij} = f_{ij} \{\Sigma f_i+1, j+1\}$

= ความถี่ (i, j) ผลรวมของความถี่ที่อยู่ใต้และขวามือของความถี่ (i, j)

(2) $f_d = \Sigma b_{ij}$

ในเมื่อ $b_{ij} = f_{ij}\{\Sigma f_i-1, j+1\}$

= ความถี่ (i, j) ผลรวมของความถี่ที่อยู่เหนือและขวามือของความถี่ (i, j)

(3) $S = f_c - f_d$

ดังนั้นสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบอันดับของเคนดาลล์ที่ยังไม่ปรับปรุงกรณีเท่ากัน ซึ่งจะให้เป็น $\hat{\tau}_a$ และกำหนดไว้ดังนี้

$$\hat{\tau}_a = \frac{S}{n(n-1)/2}$$

เมื่อปรับปรุงกรณีการเท่ากัน จะได้ $\hat{\tau}_b$ ดังนี้

$$\hat{\tau}_b = \frac{S}{\sqrt{(1/2)(n^2-\Sigma R_i^2)}\ \sqrt{(1/2)(n^2-\Sigma C_j^2)}}$$

$$= \frac{2s}{\sqrt{(n^2-\Sigma R_i^2)\ (n^2-\Sigma C_j^2)}}$$

เป็นที่น่าสังเกตว่า $\hat{\tau}_b$ นี้จะเท่ากับ Pearson's r ถ้าประยุกต์กับตารางความถี่สองทางชนิด 2x2

ตัวอย่าง ในการศึกษาเกี่ยวกับชนชั้นทางสังคม (X) และการหนีงาน (Y) ของข้าราชการกรมหนึ่ง ปรากฏว่าได้ข้อมูลตัวอย่างซึ่งเป็นจำนวนคนมาดังนี้

	การหนีงาน (Y)	น้อย	ปานกลาง	มาก	รวม
	ต่ำ	2	2	6	10
ชนชั้นทางสังคม	กลาง	2	6	2	10
(X)	สูง	5	3	2	10
	รวม	9	11	10	30

เราคำนวณค่า f_c, f_d และ S ได้ดังนี้

a_{ij} : แถวนอนแรก 2(6+2+3+2), 2(2+2), 6(0)

: แถวนอนที่สอง 2(3−2), 6(2), 2(0)

: แถวนอนที่สาม 5(0), 3(0), 2(0) แถวนอนสุดท้ายไม่จำเป็นต้องคำนวณค่า a_{ij} เพราะจะเป็นศูนย์หมด

ดังนั้น $f_c = \Sigma a_{ij}$ = 2(13)+2(4)+6(0)+2(5)+6(2)+2(0) = 56

b_{ij} : แถวนอนแรก 2(0), 2(0), 6(0) ไม่จำเป็นต้องคำนวณเช่นกัน

: แถวนอนที่สอง 2(2-6), 6(6), 2(0)

: แถวนอนที่สาม 5(6+2+2+6), 3(2+6), 2(0)

ดังนั้น $f_d = \Sigma b_{ij} = 2(8)+6(6)+2(0)+5(16)+3(8)+2(0) = 156$

สำหรับ $\hat{\tau}_a$ และ $\hat{\tau}_b$ คำนวณได้ดังนี้

$$\hat{\tau}_a = \frac{56 - 156}{30(29)/2} = -0.23$$

$$\hat{\tau}_b = \frac{2(56 - 156)}{\sqrt{\{30^2-(10^2+10^2+10^2)\}\{30^2-(9^2+11^2+10^2)\}}} = -0.33$$

โนเธอร์ (Noether, 1976) ได้เสนอวิธีสร้างช่วงเชื่อมั่นสำหรับ τ ไว้ แต่จะขอกล่าวเฉพาะกรณีที่ตัวแปร X และ Y ไม่มีค่าที่เท่ากัน เพราะกรณีที่ค่าเท่ากันการคำนวณจะยุ่งยาก ช่วงเชื่อมั่นที่โนเธอร์ เสนอไว้สำหรับ τ ก็คือ

$$\hat{\tau} = \hat{\tau} \pm Z_{\alpha/2}\left(\frac{2}{n(n-1)}\right) \hat{\sigma}$$

ในเมื่อ $\hat{\sigma}^2 = 4\ q^2-2\Sigma C_i-2(2n-3)(\Sigma C_i^2)/n(n-1)$ โดยที่ C_i เป็นจำนวนค่าสังเกต (X_j, Y_j) ที่สอดคล้องกับค่าสังเกต (X_i, X_j) เนื่องจากค่าสังเกต (X_i, X_j) จำนวน (n−1) ครั้ง เราจึงมีจำนวนการเปรียบเทียบทั้งหมดเป็น n(n−1)

ตัวอย่าง ในการศึกษาถึงความสัมพันธ์ระหว่างบุคลิกภาพของบุคคล 2 ประเภท คือการยอมจำนนต่ออิทธิพลของกลุ่ม (X) และการแสวงหาสถานภาพทางสังคม (Y) โดยอาศัยตัวอย่างของนักศึกษา 11 ราย จากการวัดบุคลิกภาพทั้งสอง (X, Y) ได้ข้อมูลมาดังนี้

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Y	42	46	39	37	65	88	86	56	62	92	54

เราหาค่า f_c, f_d และ S ได้ดังนี้

f_c = 8+7+7+7+3+1+1+3+1+0 = 38

f_d = 2+2+0+3+4+3+1+1+1 = 17

$$\hat{\tau} = \frac{38 - 17}{11(10)/2} = 0.38$$

เมื่อหาค่า C_i (i = 1, 2, .., n) จะได้เป็นดังนี้

C_i = 1+0+0+1+1+1+1+1+1+1 = 8

C_2 = 1+0+0+1+1+1+1+1+1+1 = 8

C_3 = 0+0+0+1+1+1+1+1+1+1 = 7

$C_4 = 7$, $C_5 = 7$, $C_6 = 6$, $C_7 = 6$, $C_8 = 6$, $C_9 = 6$, $C_{10} = 9$, $C_{11} = 4$

$$\hat{\sigma}^2 = 4\Sigma C_i^2 - 2\Sigma C_i - 2(2n-3)(\Sigma C_i^2)/n(n-1)$$

$$= 4(516)-2(74)-2(22-3)(516)/11(10) = 1699.7455$$

$$\hat{\sigma} = 41.228$$

ดังนั้นช่วงเชื่อมั่น 95% สำหรับ τ จะเป็น

$$\tau = \hat{\tau} \pm Z_{.025}\left(\frac{2}{11(10)}\right)(41.228)$$

$$= 0.38 \pm 1.96(0.7496) = 0.38 \pm 1.469$$

ซึ่งแสดงว่า ตัวแปรทั้งสองไม่สัมพันธ์กัน (เพราะ τ คาบเกี่ยว 0 ไว้ด้วย)

ข้อสังเกต (1) การใช้เลือกระหว่าง r_s และ $\hat{\tau}$ ซึ่งทั้งสองต่างก็เป็นมาตราวัดความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรอันดับด้วยกันนั้น เรามีเกณฑ์ในการเลือกใช้ดังนี้

ก. เมื่อคำนวณด้วยมือ แล้ว $\hat{\tau}$ จะลำบากกว่า

ข. การแจกแจงของ $\hat{\tau}$ จะเข้าใกล้การแจกแจงแบบปกติได้เร็วกว่าการแจกแจงของ r_s ดังนั้นเมื่อใช้การประมาณค่าแบบปกติด้วยตัวอย่างขนาดกลาง แล้วก็ควรใช้ $\hat{\tau}$ เพราะน่าจะเชื่อมั่นได้มากกว่า

ค. ในการทดสอบสมตติฐานด้วยตัวสถิติทั้งสองจะให้ค่าประสิทธิภาพสัมพัทธ์ชนิดตัวอย่างขนาดโต (Asymptotic Relative Efficiency, ARE) เหมือนกัน เมื่อเทียบกับแบบทดสอบเพียร์สันที่ไว้ใจได้

ง. โดยทั่วไปเมื่อคำนวณ r_s และ $\hat{\tau}$ จากข้อมูลเดียวกัน จะให้ค่าต่างกัน แต่ในการทดสอบสมมติฐานจะให้ผลการตัดสินใจเหมือนกัน

จ. $\hat{\tau}$ ถือได้ว่าเป็นตัวประมาณค่าของพารามิเตอร์ประชากร แต่ r_s ไม่เป็นเช่นนั้น ดังนั้นการใช้ $\hat{\tau}$ จึงน่าจะเป็นที่สนใจมากกว่า

(2) ตัวสถิติ $\hat{\tau}$ และ r_s ต่างก็สามารถใช้ทดสอบแนวโน้ม (Test for Trend) ได้ ซึ่งเป็นอีกแบบหนึ่งของแบบทดสอบคอกซ์-สจวร์ท (Cox-Stuart Test for Trend) ที่จะได้กล่าวต่อไปในข้อมูลอนุกรมเวลา ถ้าให้ X เป็นตัวแปร เวลา และ Y เป็นข้อมูลที่สอดคล้องกับ X โดยมีสเกลการวัดอย่างน้อยแบบอันดับ ถ้า X กับ Y มีความสัมพันธ์กันทางตรงจริง โดยการทดสอบความสัมพันธ์ด้วยตัวสถิติ หรือ r แล้วก็จะถือว่าข้อมูลมีแนวโน้มเพิ่มขึ้น (Upward Trend) แต่ถ้ามีความสัมพันธ์แบบผกผันก็ถือว่าข้อมูลมีแนวโน้มลดลง (Downward Trend)

(3) สำหรับตาราง 2x2 เราจะได้ว่า $|\hat{\tau}_b| = \phi$ แต่ $\hat{\tau}_b$ จะให้ค่าที่มีเครื่องหมายกำกับด้วย

THE SCARCEST MATERIAL OF ALL IS NOT
TIN, NOT MERCURY, NOT TUNGSTEN, BUT
STATISTICAL KNOWLEDGE . . .

W. Edwards Deming

5.2.3 สัมประสิทธิ์ความเกี่ยวพันเชิงอันดับของกูดแมนและครัสคัล (Goodman and Kruskal's Coefficient of Order Association, Gamma γ)

กูดแมน และ ครัสคัล (1954, 1963) ได้เสนอมาตราวัดความเกี่ยวพันสำหรับตารางจรณ์แบบอันดับ (Ordered Contingency Tables) ซึ่งเรียกว่า แกมมะ γ มาตราวัดนี้คล้ายกับของเคนดาลล์ τ แต่การหาการสอดคล้องนั้นต้องพิจารณาถึง n^2 คู่ หรือเป็นการเปรียบเทียบเป็นคู่ชนิดแทนที่ ในเมื่อการสอดคล้องของเคนดาลล์พิจารณาเพียง $\binom{n}{2}$ คู่ หรือเป็นการเปรียบเทียบเป็นคู่ชนิดไม่แทนที่ กูดแมนและครัสคัล ได้กำหนด γ ไว้ดังนี้

$$\gamma = (P_c - P_d)/(P_c + P_d)$$

ในเมื่อ P_c และ P_d เป็นโอกาสที่คู่เปรียบเทียบจะสอดคล้อง และไม่สอดคล้องกัน

สำหรับตัวอย่าง เราได้ตัวประมาณค่าของ γ เป็น G และกำหนดไว้เป็น

$$G = (f_c - f_d)/(f_c + f_d)$$

ในเมื่อ f_c และ f_d เป็นจำนวนคู่ที่สอดคล้อง และไม่สอดคล้องกัน

ในกรณีที่ไม่มีอันดับที่เท่ากัน แล้ว $f_c - f_d = n(n-1)/2$ แล้วเราจะได้ว่า $|\gamma| = |\tau|$ และถ้าจำนวนคู่ที่เท่ากันมีมาก แล้ว $|\gamma|$ จะมากกว่า $|\tau|$ มากๆ

ในการคำนวณค่า G นั้น เราอาศัยวิธีการคำนวณ f_c และ f_d แบบเคนดาลล์ ซึ่งเป็นการเปรียบเทียบเป็นคู่ชนิดไม่แทนที่ ค่า G ที่คำนวณแบบนี้จะเป็นเช่นเดียวกับคำนวณ f_c และ f_d แบบแทนที่หรือแบบกูดแมนและครัสคัล ทั้งนี้ก็เพราะ f_c และ f_d แบบกูดแมนและครัสคัลจะเป็น 2 เท่าของแบบเคนดาลล์

ตัวอย่าง ในการศึกษาถึงความสัมพันธ์ระหว่างทัศนคติ 2 ประเภท ของนักศึกษากลุ่มหนึ่งโดยอาศัยตัวอย่างของนักศึกษา 100 ราย ได้ข้อมูลมาดังนี้

ทัศนคติ		ก	ข	ค	ง	รวม
ทัศนคติ	ก	7	1	8	6	22
	ข	2	8	10	5	25
	ค	14	8	2	4	28
	ง	10	12	2	1	25
	รวม	33	29	22	16	100

ในเมื่อ ก ไม่เห็นด้วยอย่างมาก ข ไม่เห็นด้วย ค เห็นด้วย ง เห็นด้วยอย่างมาก

เราหา f_c และ f_d ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} f_c &= 7(52)+1(24)+8(10)+6(0)+2(29)+8(9)+10(5)+5(0)+14(15)+8(3)+2(1)+4(0) \\ &= 884 \\ f_d &= 2(15)+8(14)+10(6)+5(0)+14(38)+8(29)+2(11)+4(0)+10(52)+12(35)+2(15) \\ &\quad +1(0) \\ &= 1958 \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$G = \frac{884-1958}{884+1958} = \mathbf{-0.378}$$

$$\hat{\tau}_a = -0.217, \quad \hat{\tau}_b = -0.291$$

เราจะเห็นได้ว่า เมื่อค่าสังเกตเท่ากันแล้ว $|G| > |\tau|$ นั่นคือ $|-0.378| > |-0.217|$ หรือ $|-0.291|$

กูดแมน และครัสคัล (1963) ได้เสนอความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของ G เมื่อตัวอย่างขนาดโตไว้ แต่เนื่องจากการคำนวณยุ่งยาก เขาจึงใช้ค่าที่สูงสุด หรือ max S^2_G ซึ่งง่ายต่อการคำนวณ สำหรับ max S^2_G นี้ขึ้นอยู่กับการสุ่มตัวอย่างแบบแทนที่ และกำหนดไว้ดังนี้

$$\max S^2_G = 2n(1-G^2)/(n^2-f_t)$$

ในเมื่อ $f_t = n^2 - 2(f_c + f_d)$

ดังนั้นในการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับค่าของ γ หรือ γ_0 หรือในการประมาณค่าของเราอาศัยตัวสถิติ

$$G = (G - \gamma)/\sqrt{\max S^2_G}$$

ซึ่งมีการแจกแจงปกติมาตรฐาน นั่นคือในการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับค่าของ γ หรือ γ_0 เราใช้ตัวสถิติทดสอบ

$$Z = (G - \gamma_0)/\sqrt{\max S^2_G}$$

และช่วงเชื่อมั่นประมาณ 100(1-α)% สำหรับ γ จะเป็น

$$\gamma = G \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\max S^2_G}$$

ตัวอย่าง จากตัวอย่างที่ผ่านมา ถ้าเราต้องการทดสอบนัยสำคัญของ G หรือทดสอบสมมติฐานที่ว่า

$$Ho : \gamma = 0 \ , \ Ha : \gamma \neq 0$$

เราทำได้ดังนี้

$$\max S^2_G = 2n(1-G^2)/(n^2-f_t)$$
$$= 2(100)\{1-(-0.378)^2\}/(100^2-4316) = 0.0302$$
$$\sqrt{\max S^2_G} = 0.173$$

$$f_t = n^2-2(f_c+f_d) = 100^2-2(884+1958) = 4316$$

$$Z = \frac{-0.378 - 0}{0.173} = -2.18$$

เมื่อใช้ระดับนัยสำคัญ 0.05 ค่าวิกฤตเป็น $Z_{.025} = 1.96$ จึงปฏิเสธ Ho แสดงว่าตัวแปรทั้งสองมีความเกี่ยวพันกัน

ถ้าต้องการประมาณช่วงเชื่อมั่น 95% สำหรับ γ จะได้

$$\gamma = G - Z_{.025}\sqrt{\max S^2_G}$$

$= -0.378 \pm 1.96(0.173) = -0.378 \pm 0.339$

$= -0.717, -0.039$

ถ้ามีประชากรที่สนใจสองประชากร เราก็สามารถทดสอบสมมติฐาน หรือประมาณค่าของผลต่าง $\gamma_1 - \gamma_2$ ได้โดยอาศัยตัวสถิติทดสอบ

$$Z = \frac{(G_1 - G_2) - (\gamma_1 - \gamma_2)}{\sqrt{\max S^2_{G_1} + \max S^2_{G_2}}}$$

ซึ่งมีการแจกแจงปกติมาตรฐาน สำหรับตัวอย่างทั้งสองที่สุ่มมาจากประชากรทั้งสองนั้นจะต้องเป็นอิสระกัน ดังนั้นสมมติฐานหลักเกี่ยวกับผลต่างของความเกี่ยวพันของสองประชากรจะเป็น

$$Ho : \gamma_1 - \gamma_2 = \gamma_0$$

ในการทดสอบสมมติฐานนี้จะอาศัยตัวสถิติทดสอบ Z

$$Z = \frac{(G_1 - G_2) - \gamma_0}{\sqrt{\max S^2_{G_1} + \max S^2_{G_2}}}$$

ในเมื่อ $\max S^2_{G_1} = 2n_1(1-G_1^2)/(n_1^2-f_{t_1}^2)$ และ $\max S^2_{G_2} = 2n_2(1-G_2^2)/(n_2^2-f_{t_2}^2)$

ส่วนช่วงเชื่อมั่น $100(1-\alpha)\%$ (โดยประมาณ) ของ $\gamma_1 - \gamma_2$ จะเป็น

$$\gamma_1 - \gamma_2 = (G_1 - G_2) \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\max S^2_{G_1} + \max S^2_{G_2}}$$

ตัวอย่าง ในการศึกษาพนักงาน 2 ประเภท คือประเภทใช้มือ และประเภทใช้เครื่องจักร เพื่อทำการเปรียบเทียบความสัมพันธ์ระหว่างการขาดงาน และอายุการทำงาน ได้ข้อมูลมาดังนี้

ประเภทพนักงาน		ใช้มือ			ใช้เครื่องจักร		
	การขาดงาน	น้อย	ปานกลาง	มาก	น้อย	ปานกลาง	มาก
	0-4.9	10	0	5	6	4	5
อายุทำงาน	5-9.9	1	12	2	5	8	2
(ปี)	10-14.9	1	8	1	3	2	15
	15-	3	0	17	1	6	3

ตัวสถิติต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องคำนวณได้ดังนี้

ประเภทคนงานใช้มือ $f_c = 795,\ f_d = 224,\ f_t = 1562$

$$G_1 = \frac{795 - 224}{795 + 224} = 0.56$$

$$\max S^2_{G_1} = 2(60)\{1-0.56^2\}/(60^2-1562) = 0.04$$

ประเภทคนงานใช้เครื่องจักร $f_c = 603,\ f_d = 324,\ f_t = 1746$

$$G_2 = \frac{603 - 324}{603 - 324} = 0.30$$

$$\max S^2_{G_2} = 2(60)\{1-0.30^2\}/(60^2-1746) = 0.06$$

ถ้าเราต้องการทดสอบสมมติฐาน ที่ว่า

$$Ho : \gamma_1 - \gamma_2 = 0,\ Ha : \gamma_1 - \gamma_2 \neq 0$$

เราคำนวณค่าของตัวสถิติทดสอบได้เป็น

$$Z = \frac{(0.56 - 0.30) - 0}{\sqrt{0.04 + 0.06}} = 0.81$$

ซึ่งแสดงว่า ความสัมพันธ์ของทั้งสองกลุ่มเกี่ยวกับการขาดงาน และอายุการทำงาน จะไม่แตกต่างกัน

สำหรับตารางจรณ์ 2x2 นั้นค่าของ G และ Q จะมีค่าเท่ากัน ความจริง G เป็นรูปทั่วไปของ Q สำหรับตารางจรณ์แบบอันดับ (Ordinal-Ordinal Contigency Table) ที่มีจำนวนแถวนอนและแถวตั้งต่าง ๆ

$$Q = (f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21})/(f_{11}f_{22} + f_{12}f_{21}) = (f_c - f_d)/(f_c + f_d)$$

ในเมื่อ f_{ij} (i, j = 1, 2) เป็นความถี่จากตาราง 2x2 ดังนี้

Y		Y_1	Y_2	รวม
X	X_1	f_{11}	f_{12}	$f_{1.}$
	X_2	f_{21}	f_{22}	$f_{2.}$
รวม		$f_{.1}$	$f_{.2}$	n

โดยที่ $X_1 < X_2$ และ $Y_1 < Y_2$

5.2.4 สัมประสิทธิ์ความเกี่ยวพันอื่น ๆ ที่ปรับปรุงจากตัวสถิติเคนดาลล์ (Another Modifications of Kendall's Tau)

นอกจาก กูดแมน และครัสคัล ได้ปรับปรุงตัวสถิติเคนดาลล์ แล้วยังมี สจวร์ท (1953) ซอมเมอร์ส (Somers, 1962) และคนอื่นๆ อีก ที่ได้ปรับปรุงตัวสถิติเคนดาลล์

สจวร์ทได้ปรับปรุงส่วนของ $\hat{\tau}$ เพื่อทำให้ $\hat{\tau}_b$ มีค่าสูงสุดเป็น 1 หรือ -1 (เพราะถ้าจำนวนและแถวนอนไม่เท่ากับจำนวนแถวตั้ง หรือ $r \neq c$ แล้ว $\hat{\tau}_b$ จะไม่เป็น 1 หรือ -1) โดยเสนอมาตราวัด $\hat{\tau}_c$ ไว้ดังนี้

$$\hat{\tau}_c = \frac{2S}{n^2(m-1)/m}$$

ในเมื่อ m = min(r, c)

จากตัวอย่างของการหนีงาน และชนชั้นทางสังคม เราหา $\hat{\tau}_c$ ได้เป็น

$$\hat{\tau}_c = \frac{2(56 - 156)}{30^2(3-1)/3} = -0.33$$

ซอมเมอร์ส ได้เสนอมาตราวัดแบบไม่สมมาตรไว้โดยเน้นคุณลักษณะที่สำคัญของตัวสถิติ S ที่ว่าจำนวนในความรู้ของ X จะแสดงถึงความรู้ของ Y เช่นเดียวกับจำนวนความรู้เกี่ยวกับ Y จะ

แสดงถึงความรู้เกี่ยวกับ X ตัวอย่างเช่น S ที่เป็นบวกจะชี้ว่าจำนวนที่มากกว่าของการเปรียบเทียบมีคุณลักษณะที่ว่า ถ้า $X_1<X_2$ แล้ว $Y_1<Y_2$ หรือ ถ้า $X_1>X_2$ แล้ว $Y_1>Y_2$ และยังชี้ว่าจำนวนที่มากกว่าของการเปรียบเทียบมีลักษณะที่ว่า ถ้า $Y_1<Y_2$ แล้ว $X_1<X_2$ หรือถ้า $Y_1>Y_2$ แล้ว $X_1>X_2$ ด้วยคุณสมบัติที่สำคัญของ S เช่นนี้ ซอมเมอร์ส จึงได้เสนอมาตราวัดไว้ 2 แบบ ดังนี้

(1) $$d_{yx} = \frac{S}{(n^2-\Sigma n_i^2)/2}$$

ในเมื่อ d_{yx} จะเป็นสัมประสิทธิ์ความเกี่ยวพันที่แสดงว่าจำนวนในความรู้เกี่ยวกับตัวแปรอิสระ X จะหมายถึงความรู้ในตัวแปรตาม Y และ $(n^2-\Sigma n_j^2)/2$ จะเป็นจำนวนการเปรียบเทียบเป็นคู่ที่ไม่เท่ากันใน X แต่อาจจะเท่ากันใน Y

(2) $$d_{xy} = \frac{S}{(n^2-\Sigma n_j^2)/2}$$

ในเมื่อ d_{xy} เป็นสัมประสิทธิ์ความเกี่ยวพันที่แสดงว่าจำนวนในความรู้เกี่ยวกับตัวแปรอิสระ Y จะแสดงถึงความรู้เกี่ยวกับตัวแปรตาม X และ $(n^2-\Sigma n_i^2)/2$ เป็นจำนวนการเปรียบเทียบเป็นคู่ที่ไม่เท่ากันใน Y แต่อาจจะเท่ากันใน X

สำหรับมาตราวัดแบบสมมาตรซึ่งไม่มีการพิจารณาว่าตัวแปรไหนเป็นอิสระ และตัวแปรไหนไม่เป็นอิสระ นั้นกำหนดไว้ดังนี้

$$d = \frac{2S}{(1/2)\{(n^2-\Sigma n_i^2) + (n^2-\Sigma n_j^2)\}}$$

จากตัวอย่างของการหนีงาน และชนชั้นทางสังคม เราได้

$$d_{yx} = \frac{56 - 156}{\{30^2-(10^2+10^2+10^2)\}/2} = -0.33$$

$$d_{xy} = \frac{56 - 156}{\{30^2-(9^2+11^2+10^2)\}/2} = -0.34$$

$$d = \frac{2(56 - 156)}{(1/2)(600 + 598)} = -0.33$$

เมื่อไม่มีการเท่ากันทั้งใน X และ Y แล้ว $\hat{\tau}$, $\hat{\tau}_b$, $\hat{\tau}_c$, G, d_{yx} และ d_{xy} จะเป็นมาตราวัดเดียวกัน แต่เมื่อมีการเท่ากันจะทำให้ส่วนของ $\hat{\tau}$ เพิ่มขึ้น ซึ่งจะปรับปรุง $\hat{\tau}$ ด้วยมาตราวัดแบบสมมาตร $\hat{\tau}_b$, $\hat{\tau}_c$ และ G กับมาตราวัดไม่สมมาตร d_{yx} และ d_{xy}

เนื่องจาก $_b$ และ $_c$ มีการเท่ากันไปเกี่ยวข้อง จึงทำให้ทั้งสองมาตราวัดมีค่าน้อยกว่า G ซึ่งมาตราวัด G ไม่มีการปรับปรุงกรณีเท่ากันนั่นเอง

ในด้านการนำไปใช้นั้น $\hat{\tau}_b$ จะเหมาะสมกับตารางจัตุรัส (จำนวนแถวนอนเท่ากับจำนวนแถวตั้ง หรือ r = c) ส่วน $\hat{\tau}_c$ จะใช้กับตารางสี่เหลี่ยมผืนผ้า ($r \neq c$)

5.2.5 สหสัมพันธ์บางส่วน (Partial correlations)

สหสัมพันธ์บางส่วนเป็นมาตราวัดขนาดหรือดีกรีของความเกี่ยวพันระหว่างตัวแปรสองตัว X และ Y โดยที่ความเกี่ยวพันที่ตัวแปร X และ Y มีต่อตัวแปรที่สาม Z ได้ถูกขจัดออกไปแล้ว นั่นคือ สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ระหว่าง X และ Y อาจจะเนื่องมาจาก Z มีความสัมพันธ์กับทั้ง X และ Y ดังนั้นความสัมพันธ์ดั้งเดิมระหว่าง X และ Y จะต้องขจัด หรือต้องทำให้ลดลง เมื่อควบคุมตัวแปรที่สาม เช่น ให้ความสัมพันธ์ดั้งเดิมระหว่างอายุ (X) และจำนวนลูกกวาดที่บริโภคต่อเดือน (Y) แต่ทั้ง X และ Y นี้เกี่ยวข้องกับน้ำหนักของหน่วยทดลอง (ผู้ถูกสอบถาม) ซึ่งจะให้เป็น Z

สหสัมพันธ์บางส่วนระหว่าง X และ Y เมื่อควบคุม Z ซึ่งให้เป็น $r_{yx.z}$ นั้นได้จากสหสัมพันธ์ระหว่างความคลาดเคลื่อน $Y - \hat{Y}$ กับ $X - \hat{X}$ เมื่อใช้ตัวแปรที่สาม Z ทำนายทั้ง Y และ X ดังนั้นสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบเพียร์สันระหว่างความคลาดเคลื่อนทั้งสองก็คือ

$$r_{yx.z} = \frac{\Sigma(Y - \hat{Y})(X - \hat{X})}{\sqrt{\{\Sigma(Y - \hat{Y})^2\}\{\Sigma(X - \hat{X})^2\}}}$$

ในเมื่อ $\hat{Y} = a + b_{yz}Z$, $\hat{X} = a + b_{xz}Z$ และ ค่าเฉลี่ยของ $(Y - \hat{Y})$ กับค่าเฉลี่ยของ $(X - \hat{X})$ ต่างก็เท่ากับ 0

สูตรทั่วไปของ $r_{yx.z}$ ข้างบนนี้จะอยู่ในรูป

$$r = (r_{yx} - r_{yz}r_{xz})/\sqrt{(1 - r^2_{yz})(1 - r^2_{xz})}$$

สำหรับสหสัมพันธ์บางส่วนที่กล่าวต่อไปนี้เป็นสหสัมพันธ์บางส่วนแบบไร้พารามิเตอร์ โดยที่สหสัมพันธ์บางส่วนของเพียร์สันเป็นแบบพารามิเตอร์

(1) สหสัมพันธ์บางส่วนของสเปียร์แมน (Spearman Partial Correlation, $\rho_{(S)}$) ถ้าให้ x, y และ Z เป็นตัวแปรที่สนใจ และให้ $r_{(S),yx.z}$ แทนสหสัมพันธ์ระหว่างอันดับที่ของ Y กับ X ซึ่งเป็นอิสระกับผลกระทบของอันดับในตัวแปร Z แล้ว $r_{(S)yx.z}$ จะเป็น

$$r_{(S)yx.z} = \frac{r_{(S)yx} - (r_{(S)yz})(r_{(S)xz})}{\sqrt{(1 - r^2_{(S)yz})(1 - r^2_{(S)xz})}}$$

เมื่อ $r_{(S)yx.z}$ นี้ยกกำลังสอง หรือ $r^2_{(S)yx.z}$ จะหมายถึงสัดส่วนของความผันแปรในอันดับ Y ที่เนื่องมาจากอันดับที่ X หลังจากที่ทั้งอันดับที่ X และอันดับที่ Y ได้รับการปรับปรุงสำหรับความพึ่งพิงในอันดับที่ของตัวแปร Z แล้ว

ตัวอย่าง ในการศึกษาถึงความสัมพันธ์ระหว่างการบริโภคลูกกวาดต่อเดือน (X) อายุ (Y) และน้ำหนัก (Z) โดยอาศัยตัวอย่างของเด็ก 10 ราย ได้ข้อมูลซึ่งเป็นอันดับที่ ดังนี้

R(Y)	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
R(X)	4	5	6	1	2	3	7	8	9	10
R(Z)	1	4	5	6	2	3	10	7	8	9

จากตารางเราได้ $\Sigma\{R(Y) - R(X)\}^2 = 276$, $\Sigma\{R(Y) - R(Z)\}^2 = 288$, $\Sigma\{R(X) - R(Z)\}^2 = 48$

ดังนั้น $$r_{(S)yx} = 1 - \frac{6(276)}{10^3-10} = -0.673$$

$$r_{(S)yZ} = 1 - \frac{6(288)}{10^3-10} = -0.745$$

$$r_{(S)xz} = 1 - \frac{6(48)}{10^3-10} = 0.709$$

$$r_{(S)yx.z} = \frac{-0.673-(-0.745)(0.709)}{\sqrt{1-(-0.745)^2}\sqrt{1-(-0.709)^2}} = -0.31$$

(2) สหสัมพันธ์บางส่วนแบบเคนดาลล์ (kendall's Partial Tau, τ) เคนดาลล์ได้เสนอสัมประสิทธิ์บางส่วนสำหรับมาตราวัดของเขาไว้เป็น $\tau_{yx.z}$ ซึ่งกำหนดไว้ดังนี้

$$\tau_{yx.z} = \{\tau_{yx} - \tau_{yz}\tau_{xz}\} / \sqrt{(1-\tau_{yz}^2)(1-\tau_{xz}^2)}$$

สัมประสิทธิ์บางส่วนนี้จะใช้ได้ก็ต่อเมื่อไม่มีการเท่ากันในอันดับที่ของ X อันดับที่ของ Y และอันดับที่ Z

ตัวอย่าง จากตัวอย่างของการบริโภคลูกกวาดต่อเดือน อายุ และน้ำหนัก เราหาสัมประสิทธิ์บางส่วนแบบเคนดาลล์ ได้ดังนี้

Y	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
X	4	5	6	1	2	3	7	8	9	10
Z	1	4	5	6	2	3	10	7	8	9

$$\hat{\tau}_{yx} = \frac{f_c - f_d}{n(n-1)/2} = \frac{9-36}{10(9)/2} = -0.60$$

$$\hat{\tau}_{yz} = \frac{Q-36}{10(9)/2} = -0.60$$

X	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Z	9	8	7	10	5	4	1	3	2	6

$$\hat{\tau}_{xz} = \frac{35-10}{10(9)/2} = 0.56$$

ดังนั้น $$\hat{\tau}_{yx.z} = \frac{-0.60-(-0.60)(0.56)}{\sqrt{1-(-0.60)^2}\sqrt{1-(0.56)^2}} = -0.39$$

อย่าลืมว่า $\tau_{yx.z}$ จะใช้ได้ดีก็ต่อเมื่อข้อมูลไม่มีการเท่ากันในอันดับที่ของ X, Y และ Z

(3) สหสัมพันธ์บางส่วนแบบเดวิส (Davis Partial Coefficient for Goodman and Kruskal's Gamma) เดวิส (1967) ได้เสนอแกมมะบางส่วน (Partial Gamma) $G_{yx.z}$ ไว้ดังนี้

$$G_{yx.z} = \frac{\Sigma G_i(f_{c_i} + f_{d_i})}{\Sigma(f_{c_i} + f_{d_i})}$$

ในเมื่อ G_i เป็นสัมประสิทธิ์แกมมะสำหรับสองตัวแปร X และ Y เมื่อกำหนดค่าที่ i ของตัวแปรควบคุม Z f_{c_i} เป็นจำนวนการเปรียบเทียบทางบวก (หรือสอดคล้องกัน) ในค่าที่ i ของตัวแปรควบคุม Z และ f_{d_i} เป็นจำนวนการเปรียบเทียบทางลบ (หรือไม่สอดคล้องกัน) ในค่าที่ i ของตัวแปรควบคุม

เราจะเห็นได้ว่า $G_{yx.z}$ เป็นค่าเฉลี่ยแบบถ่วงน้ำหนักของสหสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร X และ Y ในค่าต่างๆ ของตัวแปรควบคุมนั่นเอง โดยมีจำนวนการเปรียบเทียบเป็นคู่ที่เกี่ยวข้องในแต่ละค่าตัวแปรควบคุมเป็นตัวถ่วงน้ำหนัก (เพราะว่า $f_c - f_d$ ในสัมประสิทธิ์แกมมะ นั้นเป็นจำนวนทั้งหมดของการเปรียบเทียบที่เกี่ยวข้อง)

ตัวอย่าง ในการศึกษาถึง ชนชั้นทางสังคม (X) การขาดงาน (Y) และเพศ (Z) ได้ข้อมูลมาดังนี้

เพศ (Z)		Z_1				Z_2			
การขาดงาน (Y)		น้อย	ปานกลาง	มาก		น้อย	ปานกลาง	มาก	
ชนชั้นทางสังคม	ต่ำ	1	1	4	6	1	1	2	4
(X)	กลาง	1	3	2	6	1	3	0	4
	สูง	4	3	1	8	1	0	1	2
	รวม	6	7	7	20	3	4	3	10

f_{c_1} = 1(9)+1(3)+1(4)+3(6) = 1 9

f_{d_1} = 1(5)+3(4)+4(10)+3(S)= 75

$$G_1 = \frac{19 - 75}{19 + 75} = -0.60$$

f_{c_2} = 1(4)+1(1)+1(1)+3(l) = 9

f_{d_2} = 1(3)+3(2)+1(6)+0(2) = 15

$$G_2 = \frac{9 - 15}{9 + 15} = -0.25$$

ดังนั้น

$$G_{yx.z} = \frac{-0.60(19+75) + (-0.25)(9+15)}{(19+75) + (9+15)} = -0.53$$

การแปลความหมายของ $G_{yx.z}$ ก็จะเหมือนกับการแปลความหมายของ G ค่าของ $G_{yx.z}$ จะชี้ว่าสัดส่วนของการเปรียบเทียบทางหนึ่ง (Directional Comparisons) เมื่อจำนวนหน่วยตัวอย่างที่เท่ากันในตัวแปร Z นั้นถูกควบคุมในทางหนึ่ง

วิธีการหาสหสัมพันธ์บางส่วนแบบนี้ยังประยุกต์ใช้ได้กับสัมประสิทธิ์อื่นๆ ที่อาศัยหลักของการเปรียบเทียบเป็นคู่ เช่นค่าของ $\hat{\tau}_a$ สำหรับค่า Z_1 และ Z_2 จะเป็นดังนี้

$$\hat{\tau}_{a(Z_1)} = \frac{19-75}{20(19)/2} = -0.29$$

$$\hat{\tau}_{a(Z_2)} = \frac{9-15}{10(9)/2} = -0.13$$

ดังนั้นสัมประสิทธิ์บางส่วนสำหรับ τ_a จะเป็น

$$\tau_{a(yx.z)} = \frac{\Sigma\tau_{a_i}(n_i)(n_i-1)/2}{\Sigma n_i(n_i-1)/2}$$

ในเมื่อ τ_{a_i} เป็นค่าของ τ_a ในค่าที่ i ของตัวแปรควบคุม Z (i = 1, 2, .., k) k เป็นจำนวนค่าของตัวแปรควบคุม และ n_i เป็นจำนวนหน่วยตัวอย่างในค่าที่ i ของตัวแปรควบคุม

เพราะฉะนั้นเราจะได้ $\hat{\tau}_{a(yx.z)}$ ดังนี้

$$\hat{\tau}_{a(yx.z)} = \frac{(-0.29)\{20(19)/2\} + (-0.13)\{10(9)/2\}}{20(19)/2 + 10(9)/2} = -0.26$$

5.2.6 สัมประสิทธิ์การสอดคล้องของเคนดาลล์ (Kendall's Coefficient of Concordance, W)

สัมประสิทธิ์ W นี้จะแสดงให้เห็นถึงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต่างๆ k ตัว (หรือการจัดอันดับ k ครั้ง) โดยการเฉลี่ยสหสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร k ตัว ซึ่งวัดจาก n หน่วยทดลองในเทอมของการเรียงอันดับที่

สัมประสิทธิ์ W นี้จะสอดคล้องกับตัวสถิติฟรีดแมนที่กล่าวมาแล้ว เพราะตัวสถิติฟรีดแมนจะสนใจว่า มีความแตกต่างในการเรียงอันดับที่ระหว่างเงื่อนไข (กรรมวิธีทดลอง) หรือไม่ แต่สัมประสิทธิ์การสอดคล้องจะสนใจว่าผู้ทดสอบหรือหน่วยทดลองต่างๆ จะเห็นสอดคล้อง หรือไม่สอดคล้องกันในการประเมินผลเงื่อนไข (กรรมวิธี) หรือไม่ มาตราวัด W นี้ เคนดาลล์ (1939) เป็นผู้ทำการพัฒนามาจากการสอดคล้อง หรือไม่สอดคล้องดังกล่าวนั้น

เมื่อมีการสอดคล้องกันอย่างสมบูรณ์ในอันดับที่ ซึ่ง n หน่วยทดลองหรือผู้ทดสอบกำหนดให้แก่ k เงื่อนไข แล้วผลรวมอันดับที่จะเป็น n, 2n, 3n, .., kn ผลรวมอันดับที่ทั้งหมดจะเป็น nk(k+1)/2 และค่าเฉลี่ยผลรวมอันดับที่จะเป็น $\bar{R} = \Sigma R_j/k = n(k+1)/2$ ดีกรีของการสอดคล้องระหว่างหน่วยทดลองจะแสดงได้ด้วยความผันแปรในผลรวมอันดับที่ นั่นคือ

$$S = \Sigma(R_j - \bar{R})^2$$

เมื่อมีการสอดคล้องกันอย่างสมบูรณ์ ความผันแปร S นี้จะสูงสุด ซึ่งจะให้เป็น

$$\max S = \Sigma(R_j^m - \bar{R})^2 = n^2(k^3 - k)/12$$

ในเมื่อ R_j^m เป็นผลรวมอันดับที่ซึ่งมากสุดสำหรับเงื่อนไขที่ j และมีค่าดังนี้

$$R_1^m = n\ ,\ R_2^m = 2n\ ,\ldots,\ R_k^m = kn$$

เคนดาลล์ได้เสนอสัมประสิทธิ์การสอดคล้อง W ไว้ดังนี้

$$W = S / \max S = \frac{12\Sigma(R_j - \bar{R})^2}{n^2(k^3-k)}$$

$$= \frac{12\Sigma R_j^2}{n^2k(k^2-1)} - \frac{3(k+1)}{(k-1)}$$

ค่าของ W จะอยู่ระหว่าง 0 กับ 1

ตัวสถิติฟรีดแมน S_o มีความสัมพันธ์กับสัมประสิทธิ์ W ดังนี้

$$W = S_o/n(k-1)\ ,\quad S_o = 12\Sigma R_j^2/nk(k+1)-3n(k+1)$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่า การคำนวณค่า W ที่ง่ายก็คือคำนวณค่าของตัวสถิติ S_o ก่อนนั่นเอง และในการทดสอบนัยสำคัญของ W เราจึงใช้ตัวสถิติฟรีดแมน

$$S_o = n\ (k-1)\ W$$

ซึ่งมีการแจกแจงไคสแควร์ ด้วยองศาความเป็นอิสระ k-1

ในกรณีอันดับที่เท่ากันต้องใช้แฟคเตอร์ f ปรับปรุงตัวสถิติ W เป็น

$$W = S / (\max S - f)$$

ในเมื่อ $f = n\Sigma G$, $G = \Sigma(g^3-g)/12$ โดยที่ g เป็นจำนวนอันดับที่ ซึ่งเท่ากันในอันดับที่หนึ่งๆ

สัมประสิทธิ์ W นี้มีความสัมพันธ์กับสัมประสิทธิ์แบบสเปียร์แมน $r_{(s)}$ อีก นั่นคือค่าเฉลี่ยของ $r_{(s)}$ ที่เป็นไปได้ระหว่างสองอันดับที่ $\bar{r}_{(s)}$ จะสัมพันธ์กับ W ดังนี้

$$\bar{r}_{(s)} = (nW-1)/(n-1)$$

เนื่องจาก $0 \le W \le 1$ เราจึงได้ $-1/(n-1) \le r_{(s)} \le 1$

ตัวอย่าง ในการศึกษาโครงการ 4 แบบ โดยให้ผู้ตัดสินใจต่างๆ 10 คน กำหนดอันดับความสำคัญของโครงการ 4 แบบนั้น แล้วได้ผลดังนี้

ผู้ตัดสิน	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	รวม
โครงการ 1	1	1	1	2	2	1	1	1	2	1	13
2	2	2	2	1	1	2	3	2	1	2	18
3	3	3	3	3	3	3	2	3	4	4	31
4	4	4	4	4	4	4	4	4	3	3	38

$$\bar{R} = (13+18+31+38)/4 = 25$$

$$S = \Sigma(R_j - \bar{R})^2 = (13-25)^2 + (18-25)^2 + (31-25)^2 + (38-25)^2$$

$$= 398$$

$$\max S = \Sigma(R_j^m - \bar{R})^2 = (10-25)^2 + (20-25)^2 + (30-25)^2 + (40-25)^2$$
$$= 500$$

$$W = 398/500 = 0.796$$

หรือ $W = 12\Sigma R_j^2/n^2k(k^2-1) - 3(k+1)/(k-1)$

$$= \frac{12(13^2+18^2+31^2+38^2)}{10^2(4)(4^2-1)} - 3(4+1)/(4-1) = 0.796$$

เนื่องจาก $S_o = 12\Sigma R_j^2/nk(k-1) - 3n(k+1) = 12(13^2+18^2+31^2+38^2)/10(4)(4+1)-3(10)(4+1)$

$= 23.88$

ดังนั้น

$$W = \frac{1}{10(4-1)}(23.88) = 0.796$$

เมื่อต้องการหา $\bar{r}_{(S)}$ เราจะได้

$$\bar{r}_{(s)} = \frac{10(0.796) - 1}{10 - 1} = 0.773$$

ในการทดสอบนัยสำคัญของ W เราคำนวณตัวสถิติทดสอบ S_o ได้เป็น

$$S_o = n(k-1)W = 10(4-1)(0.796) = 23.880$$

ซึ่งแสดงว่ามีนัยสำคัญ ณ ระดับนัยสำคัญ 5% ($\chi^{2(3)}_{.05} = 7.81$)

นอกจากสัมประสิทธิ์ W จะมีความสัมพันธ์กับตัวสถิติฟรีดแมน S และสหสัมพันธ์เชิงอันดับของสเปียร์แมน $r_{(s)}$ แล้วมันยังมีความสัมพันธ์กับตัวสถิติเดอร์บิน D อีก สำหรับตัวแบบเดอร์นั้นเราจะได้สัมประสิทธิ์ W เป็น

$$W = S / \max S$$

ในเมื่อ $S = \Sigma(R_j - R)^2 = \Sigma(R_j - r(t+1)/2)^2$ และ $\max S = \Sigma(R_j^m - \bar{R})^2 = r^2k\,(k+1)(t-1)/12(k-1)$

เมื่อพัฒนาสัมประสิทธิ์ W นี้ต่อไปจะได้ความสัมพันธ์กับตัวสถิติเดอร์บิน D ดังนี้

$$W = \frac{(t+1)\,D}{r(k+1)(t-1)}$$

โดยที่ $D = \dfrac{12(k-1)}{rk(t-1)(t+1)}\Sigma R_j^2 - 3r(k-1)(t+1)/(t-1)$

ในการคำนวณสัมประสิทธิ์ W เราจึงคำนวณค่าของตัวสถิติ D ก่อน และในการทดสอบนัยสำคัญของ W เราจึงใช้ตัวสถิติทดสอบ D ช่วย

ความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ W และตัวสถิติเดอร์บิน D นี้ เรายังใช้ประยุกต์เกี่ยวกับการเปรียบเทียบเป็นคู่ (Paired Comparisons) ได้ นั่นคือถ้าเรามีเงื่อนไขหรือกรรมวิธี k แบบ แล้วให้หน่วยทดลองหรือผู้ทดสอบคนหนึ่งทำการเปรียบเทียบเป็นคู่ที่เป็นไปได้ทั้งหมดของ k เงื่อนไข

จำนวนคู่ที่ต้องเปรียบเทียบจะเป็น $\binom{k}{2}$ สำหรับแต่ละคู่ที่เปรียบเทียบนั้นผู้ทดสอบสามารถให้อันดับที่หรือสามารถบอกได้ว่าเงื่อนไขใดดีกว่า จุดประสงค์ของการเปรียบเทียบก็เพื่อให้ได้การเรียงอันดับที่ของเงื่อนไข และต้องการที่จะทราบว่าผู้ทดสอบมีความเห็นคงเส้นคงวา (Consistency) ในการเลือกหรือไม่ ดังนั้นสัมประสิทธิ์ความสอดคล้องสำหรับผู้ทดสอบนี้จะเป็น

$$W = 12S/k(k^2-1)$$

ในเมื่อ $S = \Sigma(R_j-\bar{R})^2$, $R_j = \binom{k}{2}(1+2) = 3\binom{k}{2}$ และ $\bar{R} = 3\binom{k}{2}/k = 3(k-1)/2$

ในการทดสอบนัยสำคัญของ W สำหรับผู้ทดสอบคนหนึ่งนั้น เราอาศัยตัวสถิติทดสอบ D

$$D = \frac{12(k-1)}{(k-1)(2^2-1)n}\Sigma(R_j-\bar{R})^2 = (4/k)\Sigma(R_j-\bar{R})^2$$

$$= (4/k)\Sigma R_j^2-9(k-1)^2$$

ซึ่งมีการแจกแจงไคสแควร์ ด้วยองศาความเป็นอิสระ k−1

ถ้าผู้ทดสอบมี n ราย ทำการเปรียบเทียบเป็นคู่ต่อเงื่อนไขต่าง ๆ k ชนิด แล้วสัมประสิทธิ์ W จะเป็น

$$W = 12S/n^2k(k^2-1) = 12\Sigma(R_j-\bar{R})^2/n^2k(k^2-1)$$

และในการทดสอบนัยสำคัญของ W เราก็อาศัยตัวสถิติทดสอบ D ซึ่งมีการแจกแจงไคสแควร์ ด้วยองศาความเป็นอิสระ k−1 ดังนี้

$$D = (4/kn)\Sigma(R_j-\bar{R})^2$$

ในเมื่อ $R_j = \Sigma R_{ij}$

ตัวอย่าง ในการเปรียบเทียบเป็นคู่สำหรับเงื่อนไขต่าง ๆ กัน 5 ประเภท โดยผู้ทดสอบคนหนึ่ง ถ้าเงื่อนไขใดดีกว่าให้เป็น 1 ด้อยกว่าจะให้เป็น 2 จากการเปรียบเทียบเป็นคู่ที่เป็นไปได้ $\binom{5}{2}$ = 10 ครั้ง ได้ผลการเปรียบเทียบ ดังนี้

เงื่อนไข	A	B	C	D	E	
เงื่อนไขที่เปรียบเทียบ A		1	2	1	1	5
B	2		2	2	1	7
C	1	1		1	1	4
D	2	1	2		2	7
E	2	2	2	1		7

$\bar{R}$ = (5+7+4+7+7)/5 = 6 หรือ $\bar{R}$ = 4(2+1)/2 = 6

$S = (5-6)^2+(7-6)^2+(4-6)^2+(7-6)^2+(7-6)^2 = 8$

$\max S = (4-6)^2+(5-6)^2+(6-6)^2+(7-6)^2+(8-6)^2 = 10$

หรือ $\max S = 5(5^2-1)/12 = 10$

$$W = 8/10 = 0.80$$

ในการทดสอบนัยสำคัญของ W เราคำนวณตัวสถิติ D ได้เป็น

$$D = (4/5)(8) = 6.4$$

$$\text{หรือ } D = (4/5)(5^2+7^2+4^2+7^2+7^2) - 9(5^2-1) = 6.4$$

จึงสรุปได้ว่าไม่มีนัยสำคัญ ($D < \chi^{2(4)}_{.05} = 9.49$)

5.2.7 สัมประสิทธิ์ของการคงเส้นคงวา และการสอดคล้องในการเปรียบเทียบเป็นคู่ (Coefficient of Consistence and Agreement in Paired Comparisons)

สัมประสิทธิ์ของการคงเส้นคงวา หรือสัมประสิทธิ์ K นี้เป็นมาตราวัดระดับของการคงเส้นคงวาของผู้ทดลอง (Observer) หรือผู้ทดสอบในการเปรียบเทียบสิ่งที่สนใจ (เงื่อนไขหรือกรรมวิธี) เป็นคู่ ๆ จำนวน k สิ่ง เคนดาลล์ (1939) ได้เสนอสัมประสิทธิ์ K ไว้ดังนี้

$$K = \frac{S - \min S}{\max S - \min S} \qquad S = \Sigma(R_i - \bar{R})^2$$

หรือ $K = 12\Sigma(R_i-\bar{R})^2/k(k^2-1)$, k เป็นเลขคี่

$= \{12\Sigma(R_i-\bar{R})^2-3k\}/k(k^2-4)$, k เป็นเลขคู่

ในเมื่อ $\max S = k(k^2-1)/12$, $\min S = 0$ ถ้า k เป็นเลขคี่ และ $= k/4$ ถ้า k เป็นเลขคู่ R_i เป็นจำนวนหน่วยที่ i ซึ่งดีกว่าหน่วยอื่นๆ ในการเปรียบเทียบเป็นคู่นี้ $\bar{R}$ เป็นค่าเฉลี่ยของ R_i หรือ $\bar{R} = \Sigma R_i/k = (k-1)/2$ และ $\Sigma(R_i-\bar{R})^2 = \Sigma R_i^2 - k(k-1)^2/4$

ในการเปรียบเทียบเป็นคู่นี้ ผู้ทดลองจะทำการเปรียบเทียบสิ่งที่สนใจแต่ละสิ่งกับสิ่งอื่นๆ ที่เหลือทั้งหมด และระบุว่าสิ่งไหนในคู่ที่เปรียบเทียบกันนั้นดีกว่า เช่นมีอาหาร 3 ชนิด ก ข ค เมื่อต้องการเปรียบเทียบเป็นคู่ก็จะเป็น - เปรียบเทียบ ก กับ ข ก กับ ค และ ข กับ ค ถ้า ก ดีกว่า ข จะแทนด้วย ก → ข หรือ 1 แต่ถ้าด้อยกว่า จะแทนด้วย ก ← ข หรือ 0 เป็นต้น สำหรับการเปรียบเทียบ ก ข ค เป็นคู่นั้น ถ้า ก → ข ข → ค และ ก → ค เราจะถือว่า คงเส้นคงวา แต่ถ้า ก → ข ข → ค และ ก ← ค แล้วเราจะถือว่า ไม่คงเส้นคงวา ความสัมพันธ์ที่ไม่คงเส้นคงวาชนิดสาม (Inconsistent Triads) นี้จะใช้เป็นมาตราวัดการคงเส้นคงวา

สัมประสิทธิ์ K นี้จะมีค่าเฉลี่ยเป็น 0 เมื่อการเปรียบเทียบ (การตอบสนอง) เป็นแบบสุ่ม หรือกรณีที่ไม่คงเส้นคงวาสูงสุด และจะมีค่าเป็น 1 เมื่อไม่มีความ

ในการทดสอบนัยสำคัญของ K หรือทดสอบสมมติฐานหลักที่ว่า ไม่มีความคงเส้นคงวา นั้นจะอาศัยตัวสถิติทดสอบ T ซึ่งมีการแจกแจงไคสแควร์ ด้วยองศาความเป็นอิสระ ดังนี้

$$T = \frac{8}{k-4}\left\{\binom{k}{3}/4 - d + 1/2\right\} + \nu$$

ในเมื่อ d เป็นจำนวนกลุ่มของสาม (Triad) ที่ไม่คงเส้นคงวาในการเปรียบเทียบเป็นคู่ระหว่าง k สิ่ง และกำหนดไว้ว่า

$$d = k(k-1)(2k-1)/12 - \Sigma R_i^2/2$$

และ $\nu = k(k-1)(k-2)/(k-4)^2$

กรณีที่ ν โตมาก เราใช้ตัวสถิติ Z ซึ่งมีการแจกแจงปกติมาตรฐาน ดังนี้

$$Z = \sqrt{2D} - \sqrt{2\nu-1}$$

ตัวอย่าง หัวหน้างานคนหนึ่งได้ทำการเปรียบเทียบผลงานของคนงานที่ดีเด่น 5 คน โดยวิธีการเปรียบเทียบเป็นคู่ ได้ผลเปรียบเทียบ ดังนี้

คนงาน		12	3	4	5	R	(R-R)'
คนงาน	1		10	0	1	2	0
	2	0	1	1	1	3	1
	3	1	0	0	0	1	1
	4	10	1		1	3	1
	5	0	0	10		1	1
						10	4

$\bar{R} = 10/5 = 2 \quad \Sigma R^2 = 24$

$$K = \frac{12(4)}{5(5^2-1)} = 0.40$$

$d = 5(5-1)(10-1)/12 - 24/2 = 3$

$= 5(5-1)(5-2)/(5-4)^2 = 60$

$$T = \frac{8}{5-4}\{(\tbinom{5}{3})/4 - 3 + 1/2\} + 60 = 60$$

ค่าวิกฤตสำหรับ $\alpha = .05$ จะเป็น $\chi^{2(60)}_{.05} = 79.08$ จึงสรุปได้ว่า สัมประสิทธิ์ไม่มีนัยสำคัญ

ในกรณีที่มีผู้ทดลอง n ราย ทำการเปรียบเทียบเป็นคู่ในสิ่งที่สนใจจำนวน k สิ่ง ถ้าเราต้องการพิจารณาการสอดคล้องกันของผู้ทดลอง เราก็ใช้สัมประสิทธิ์ของการสอดคล้อง (Agreement Coefficient, M) สัมประสิทธิ์ M นี้จะเป็นมาตราวัดระดับของการสอดคล้องที่ผู้ทดลองราย ทำการเปรียบเทียบเป็นคู่ในสิ่งที่สนใจ k สิ่ง เคนดาลล์ (1939) ได้เสนอมาตราวัดนี้ไว้ และกำหนดไว้เป็น

$$M = 2S / \tbinom{n}{2}\tbinom{k}{2} - 1$$

ในเมื่อ $S = \Sigma f^2 - n\Sigma f + \tbinom{n}{2}\tbinom{k}{2}$ โดยที่ f เป็นจำนวนความถี่ (ผู้เปรียบเทียบ) ในแต่ละเซลล์ที่อยู่ครึ่งตารางทางล่าง และเป็นจำนวนผู้เปรียบเทียบที่เห็นว่าหน่วยที่ i ดีกว่าหน่วยที่ j (i>j)

ค่าของ M นี้จะเป็น 1 ถ้าการเปรียบเทียบของผู้เปรียบเทียบ n ราย นั้นเป็นแบบเดียวกันหรือสอดคล้องกันอย่างสมบูรณ์

ในการทดสอบนัยสำคัญของ M เราใช้ตัวสถิติทดสอบ T ซึ่งมีการแจกแจงไคสแควร์ ด้วยองศาความเป็นอิสระ ν ดังนี้

$$T = \frac{4}{n-2}\{S - (1/2)\binom{n}{2}\binom{k}{2}(n-3)/(n-2)\}$$

ในเมื่อ $v = n(n-1)\binom{k}{2}/(n-2)^2$

กรณีที่ v โตมาก ก็อาศัยการแจกแจงปกติช่วย นั่นคือใช้ตัวสถิติ

$$Z = \sqrt{2T} - \sqrt{2v-1}$$

ซึ่งแจกแจงปกติมาตรฐาน N(0,1)

ตัวอย่าง ในการเปรียบเทียบคนงานที่ดีเด่น 5 ราย นั้น ถ้ามีหัวหน้างาน 4 ราย ทำการเปรียบเทียบเป็นคู่ แล้วได้ดังนี้

คนงาน	1	2	3	4	5
คนงาน 1		3	4	3	3
2	1		3	2	2
3	01			2	3
4	12			2	2
5	1	2	1	2	

จงหาค่า M และทดสอบนัยสำคัญ

$f = 1+0+1+1+2+2+1+2=1+2 = 13$

$\Sigma f^2 = 1^2+0^2+1^2+...+1^2+2^2 = 20$

$S = 20-4(13)+\binom{4}{2}\binom{5}{2} = 20-52+60 = 28$

$M = 2(28)/\binom{4}{2}\binom{5}{2} - 1 = -0.067$

ในการทดสอบนัยสำคัญของ M เราคำนวณตัวสถิติทดสอบ T ได้เป็น

$$T = \frac{4}{4-2}\{28-(1/2)\binom{4}{2}\binom{5}{2}(4-3)/(4-2)\} = 36$$

$v = 4(4-1)\binom{5}{2}/(4-2)^2 = 30$

ค่าวิกฤตขนาด $\alpha = .05$ จะเป็น $\chi^2_{.05(30)} = 43.77$ จึงสรุปได้ว่า สัมประสิทธิ์ M ไม่มีนัยสำคัญ

5.3 ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรนามบัญญัติและตัวแปรแบบอันดับ (Association between Nominal Variable and Ordinal Variable)

ในเมื่อตัวแปรทั้งสองมีสเกลการวัดต่างกัน โดยที่ตัวหนึ่งเป็นแบบอันดับ อีกตัวหนึ่งเป็นแบบนามบัญญัติ ถ้าเราต้องการหาความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร ก็สามารถทำได้โดยลดสเกลการวัดของตัวแปรแบบอันดับให้เป็นตัวแปรนามบัญญัติเหมือนกัน แล้วใช้มาตราวัดความสัมพันธ์ของตัวแปรแบบนามบัญญัติที่กล่าวมาแล้ว แต่การลดสเกลการวัดของตัวแปรจะทำให้ใช้รายละเอียด

ของข้อมูลไม่เต็มที่จึงไม่นิยมทำกัน อย่างไรก็ตาม ฟรีแมน (Freeman, 1965) ได้เสนอมาตราวัดความเกี่ยวพันระหว่างตัวแปรที่มีสเกลการวัดแบบอันดับและแบบนามบัญญัติ ซึ่งเรียกกันว่า สัมประสิทธิ์ความแตกต่าง (Coefficient of Differentiation, θ) สัมประสิทธิ์นี้ได้ปรับปรุงมาจากแบบทดสอบอันดับที่ชนิดเครื่องหมายของวิลคอกซัน (Wilcoxon's Signed-Rank Test)

สัมประสิทธิ์ θ นี้นอกจากจะปรับปรุงจากแบบทดสอบอันดับที่เครื่องหมายของวิลคอกซันแล้วยังเป็นการปรับปรุงจากสัมประสิทธิ์ d_{yx} ด้วย แต่ค่าของ θ อยู่ระหว่าง 0 กับ 1 สัมประสิทธิ์ θ จะแสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร ซึ่งจะเกี่ยวข้องกับการทำนายอันดับของตัวแปรตัวหนึ่งจากกลุ่มหรือประเภทของอีกตัวแปรหนึ่ง สัมประสิทธิ์ θ กำหนดไว้ดังนี้

$$= \frac{\Sigma|f_{sj} - f_{dj}|}{f_s + f_d + Y_o}$$

ในเมื่อ f_{sj} และ f_{dj} เป็นจำนวนของการเปรียบเทียบที่ต่ำกว่า และสูงกว่าใน Y สำหรับคู่ที่กำหนดให้ของประเภทแบบนามบัญญัติ $K = \binom{r}{2}$ โดยที่ r เป็นจำนวนประเภทแบบนามบัญญัติ และ Y_o เป็นจำนวนคู่ที่เท่ากันในตัวแปร Y เท่านั้น

สัมประสิทธิ์ θ นี้สามารถเขียนได้ในรูปอื่นที่ง่ายต่อการคำนวณ ดังนี้

$$\theta = \frac{\Sigma|S_{ii'}|}{(n^2 - \Sigma n_i^2)/2}$$

ในเมื่อ n_i เป็นจำนวนหน่วยในประเทศที่ i ของตัวแปรแบบนามบัญญัติ $S_{ii'} = \Sigma f_{ij} d_{i'j}$ โดยที่ f_{ij} เป็นความถี่ (i, j) และ $d_{i'j}$ เป็นผลต่างของผลรวมความถี่ในแนวนอน i' ที่อยู่ห่างซ้ายมือกับทางขวามือของแถวตั้ง

ตัวอย่าง ในการศึกษาเกี่ยวกับสภาพสมรส (X) และการปรับตัวทางสังคม (Y) ของพนักงานองค์การแห่งหนึ่ง ได้ข้อมูลจากตัวอย่าง 40 รายดังนี้

อันดับการปรับตัว (X)		1	2	3	4	5	รวม
สถานภาพสมรส	X_1 : โสด	0	2	5	2	1	10
(Y)	X_2 : แต่งงาน	0	0	5	5	10	20
	X_3 : หม้าย	1	2	2	0	0	5
	X_4 : หย่าร้าง	3	2	0	0	0	5
	รวม	4	6	12	7	11	40

$S_{12} =$ 0(0-20)+2(0-20)+5(0-15)+2(5-10)+1(10-0) = -115

$S_{13} =$ 0(0-4)+2(1-2)+5(3-0)+2(5-0)+1(5-0) = 28

$S_{14} =$ 2(3-0)+5(5-0)+2(5-0)+1(5-0) = 46

$S_{23} =$ 5(3-0)+5(5-0)+10(5-0) = 90

$S_{24} =$ 5(5-0)+5(5-0)+10(5-0) = 100

$S_{34} = 1\ (0-2)+2(3-0)+2(5-0) = 14$

$\Sigma|S_{ii'}| = 115+28+46+90+100+14 = 393$

$n^2 - \Sigma n_i^2 = 40^2 - (10^2+20^2+5^2+5^2) = 1050$

$$\theta = \frac{393}{1050/2} = 0.75$$

ดังนั้นสำหรับพนักงาน 40 คน นี้เราสามารถทำนายการปรับตัวทางสังคม โดยอาศัยสภาพสมรสได้ค่อนข้างดี สัมประสิทธิ์ θ แสดงว่า 75% ของการเปรียบเทียบที่ทำให้พนักงานในประเภทต่าง ๆ ของสภาพสมรส แสดงความแตกต่างอย่างมีระบบในการปรับตัวทางสังคม

5.4 ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรนามบัญญัติและตัวแปรอันตรภาคหรืออัตราส่วน (Association between Nominal Vairable and Interval or Ratio Variable)

มาตราวัดความสัมพันธ์รหว่างตัวแปรนามบัญญัติ และตัวแปรอันตรภาคที่เหมาะสมก็คือ อัตราส่วนสหสัมพันธ์ (Correlation Ratio, η) มาตราวัดนี้ใช้เป็นดัชนีของการปรับปรุงในความถูกต้องของการเดา ถ้าการปรับปรุงมาก สัมประสิทธิ์ η ก็มาก การคำนวณสัมประสิทธิ์ η ก็โดยการหาอัตราส่วนของการลดลงในความคลาดเคลื่อน หรือดีกรีของการปรับปรุงในการเดา อัตราส่วนนั้นกำหนดไว้ดังนี้

$$\eta^2 = \frac{\text{การลดลงในความคลาดเคลื่อน}}{\text{ความคลาดเคลื่อนเดิม}}$$

ในเมื่อความคลาดเคลื่อนเดิมเป็นดัชนี หรือดีกรีของความคลาดเคลื่อน ที่เกิดจากการเดาตัวแปรหนึ่งโดยไม่อาศัยความรู้จากตัวแปรอื่น ส่วนการลดลงในความคลาดเคลื่อนเป็นผลต่างระหว่างความคลาดเคลื่อนเดิม กับดัชนีของความคลาดเคลื่อนจากการเดาตัวแปรหนึ่งโดยอาศัยความรู้จากตัวแปรอื่น

ในเทอมของความผันแปร สัมประสิทธิ์ η^2 จะเป็นสัดส่วนของความผันแปรในตัวแปรอันตรภาค ซึ่งเกี่ยวพันกับชั้นย่อยของตัวแปรนามบัญญัติ หรือ η^2 เป็นสัดส่วนของความผันแปรใน Y ซึ่งถูกขจัดออกไปโดยการนำ X เข้ามาเกี่ยวข้อง และ η^2 กำหนดไว้ดังนี้

$$\eta^2 = (SST - SSW) / SST = 1 - SSW / SST$$

ในเมื่อ SST เป็นความผันแปรของตัวแปร Y ที่กำหนดไว้ว่า

$$SST = \Sigma(Y_{ij} - \mu_y)^2$$

และ SSW เป็นความผันแปรของตัวแปร Y ที่ตัวแปร X เข้ามาเกี่ยวข้อง หรือเป็นความผันแปรภายในชั้นย่อยของ X และกำหนดไว้ว่า

$$SSW = \Sigma(Y_{ij} - \mu_j)^2$$

โดยที่ μ_j เป็นค่าเฉลี่ยของ Y ในชั้นย่อยที่ j ของ X

สำหรับอัตราส่วนสหสัมพันธ์ η กำหนดไว้ว่าเป็นรากที่สองของ η^2 ซึ่งมีค่าอยู่ระหว่าง 0 กับ 1 ตัวประมาณค่าของ η^2 หรือ $\hat{\eta}^2$ โดยอาศัยตัวอย่าง จะกำหนดไว้ดังนี้

$$\eta^2 = 1 - \Sigma(Y_{ij} - \bar{Y}_j)^2 / \Sigma(Y_{ij} - \bar{Y})^2$$

$$\eta = \sqrt{\hat{\eta}^2}$$

ในการทดสอบนัยสำคัญของ $\hat{\eta}$ หรือทดสอบสมมติฐานหลัก Ho : $\rho = 0$ เราก็อาศัยตัวสถิติทดสอบ

$$F = \frac{\hat{\eta}^2/(k-1)}{(1-\hat{\eta}^2)/(n-k)}$$

ซึ่งมีการแจกแจงแบบเอฟ (Snedecor F) ด้วยองศาความเป็นอิสระ k–1 และ n–k

ถ้าตัวแปรทั้งสองเป็นแบบอันตรภาค หรืออัตราส่วน แล้ว η^2 จะเป็นสัมประสิทธิ์การตัดสินใจ ρ^2 เมื่อความสัมพันธ์เป็นเชิงเส้น แต่ถ้าความสัมพันธ์ไม่เป็นเชิงเส้น η^2 จะใช้เป็นมาตราวัดความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรทั้งสองเช่นเดียวกับที่กล่าวมา

ตัวอย่าง ในการศึกษาถึงความสัมพันธ์ระหว่างเพศ (X) กับการออกเที่ยวนอกบ้านต่อสัปดาห์ (Y) ได้ข้อมูล ดังนี้

เพศ (X)			ชาย					หญิง		
	4	4	5	6	6	1	2	3	3	4
Y	7	7	8	9	10	5	5	5	6	9
			66					43		

ถ้าไม่คำนึงถึงเพศ เมื่อนำเอาค่าเฉลี่ย $(\bar{Y})$ มาใช้ในการคาดคะเนการออกเที่ยวนอกบ้าน (Y) จะมีการผิดพลาด ซึ่งวัดได้จากความผันแปร นั่นคือ

$$\bar{Y} = (66 - 43)/20 = 5.45$$

$$SST = \Sigma(Y_{ij} - \bar{Y})^2 = \Sigma Y_{ij}^2 - (\Sigma Y_{ij})^2/n = 703-(109)^2/20$$

$$= 108.95$$

เมื่อคำนึงถึงเพศ จะได้ค่าเฉลี่ย และความผันแปรของแต่ละเพศ ดังนี้

$$\bar{Y}_1 = 66/10 = 6.60 \text{ , } \bar{Y}_2 = 43/10 = 4.30$$

$$SSW_1 = \Sigma(Y_{i1} - \bar{Y}_1)^2 = \Sigma Y_{i1}^2 - (\Sigma Y_{i1})^2 / n_1 = 472-(66)^2/10 = 36.40$$

$$SSW_2 = \Sigma(Y_{i2} - \bar{Y}_2)^2 = \Sigma Y_{i2}^2 - (\Sigma Y_{i2})^2 / n_2 = 231-(43)^2/10 = 46.10$$

$$SSW = SSW_1 + SSW_2 = 46.40 + 46.10 = 82.50$$

ดังนั้น $\hat{\eta}^2 = 1 - SSW / SST = 1 - 82.50/108.95 = 0.243$

$$\hat{\eta} = 0.493$$

สำหรับการทดสอบนัยสำคัญของ $\hat{\eta}$ เราคำนวณค่าของตัวสถิติ F ได้เป็น

$$F = \frac{0.243/(2-1)}{(1-0.243)/(20-2)} = 5.771$$

ซึ่งแสดงว่า ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรทั้งสองน่าจะมีจริง ($F_{.05}^{(1,18)} = 4.41$)

FATE, TIME OCCASION, CHANCE AND CHANGE ?
... TO THESE ALL THINGS ARE SUBJECT.

PERCY BYSSHE SHELLY