ปัญหาเกี่ยวกับการกระจาย

ความเสื่อมของมนตรา อยู่ที่การไม่ทบทวน
ความเสื่อมของเรือน อยู่ที่ไม่ซ่อมแซม
ความเสื่อมของความงาม อยู่ที่เกียจคร้าน (ตบแต่ง)
ความเสื่อมของนายยาม อยู่ที่ความเผลอ

พุทธวจนะในธรรมบท

บ่อยครั้งที่เราต้องการทราบว่า การกระจายของสองประชากรนั้นเท่ากันหรือไม่ ในสถิติอ้างอิงเชิงพารามิเตอร์ เราใช้แบบทดสอบเอฟ (F) ทดสอบการเท่ากันของพารามิเตอร์การกระจายจากสองประชากร แต่อย่างไรก็ตามแบบทดสอบเอฟจะไว้ใจได้ เมื่อประชากรที่สนใจนั้นจะต้องมีการแจกแจงปกติ ดังนั้นถ้าประชากรที่สนใจจะเปรียบเทียบนั้นไม่ได้มีการแจกแจงแบบปกติ แล้วเราจะใช้วิธีการไร้พารามิเตอร์แทนแบบทดสอบเอฟ แต่แบบทดสอบเหล่านั้นยังมีข้อจำกัดบางประการด้วย เช่นต้องทราบมัธยฐานประชากร หรือถ้าไม่ทราบมัธยฐานประชากร ก็ต้องถือว่าเท่ากัน แบบทดสอบไร้พารามิเตอร์ที่ใช้แทนแบบทดสอบเอฟสำหรับทดสอบการเท่ากันของการกระจายในสองประชากรที่สนใจนั้นมีที่น่าสนใจ ดังนี้

4.1 แบบทดสอบซีเกล-ทูกี (Siegel-Tukey Test for Equal Variability)

แบบทดสอบนี้ใช้ทดสอบสมมติฐานที่ว่า สองประชากรมีความผันแปรเท่ากัน (ถ้าเชื่อว่าประชากรทั้งสองมีค่ากลางหรือมัธยฐานเท่ากัน) ซีเกล และ ทูกี (1960) เป็นผู้เสนอแบบทดสอบนี้ไว้ ซึ่งมีความคล้ายคลึงกับแบบทดสอบวิลคอกซัน-แมนน์-วิทนีย์ แต่ต่างกันที่แบบทดสอบซีเกล-ทูกี ต้องการแสดงความแตกต่างในความผันแปรมากกว่าความแตกต่างในค่ากลาง ๆ อย่างไรก็ตามถ้าความแตกต่างระหว่างประชากรปรากฏทั้งในแง่ความแตกต่างในค่ากลาง ๆ และความแตกต่างในสเกล (หรือความแปรปรวน) แล้วแบบทดสอบซีเกล-ทูกี ไม่สามารถตรวจพบความแตกต่างได้ ถ้าค่าเฉลี่ยหรือมัธยฐานของประชากรแตกต่างกันเป็นจำนวนที่ทราบค่า เราก็สามารถที่จะปรับข้อมูลได้โดยการลบข้อมูลเหล่านั้นด้วยค่าที่ทราบ แล้วจึงทำการทดสอบสมมติฐานนั้น ถ้าความแตกต่างในค่ากลางไม่ทราบจำนวน เราก็ทำการปรับข้อมูลได้โดยอาศัยค่าเฉลี่ย หรือมัธยฐานตัวอย่าง นั่นคือลบข้อมูลเหล่านั้นด้วยมัธยฐานตัวอย่าง แล้วจึงทำการทดสอบด้วยแบบทดสอบที่กล่าวไว้นี้ อย่างไรก็ตามการปรับปรุงข้อมูลจะมีผลกระทบต่อการแจกแจงของตัวสถิติทดสอบ ซึ่งจะทำให้การสรุปผลไว้ใจได้น้อย แต่ถ้าตัวอย่างขนาดโต การสรุปผลก็จะมีความคลาดเคลื่อนไม่ร้ายแรงนัก

แบบทดสอบซีเกล-ทูกี มีวิธีการกำหนดอันดับที่ในตัวอย่างรวมที่เรียงลำดับจากน้อยไปมากนั้นไม่เหมือนกับแบบทดสอบวิลคอกซัน-แมนน์-วิทนีย์ นั่นคือจะกำหนดอันดับ 1 ให้แก่ค่าน้อยที่สุด อันดับ 2 ให้แก่ค่ามากที่สุด อันดับ 3 ให้แก่ค่ามากที่รองลงมา อันดับ 4 ให้แก่ค่าน้อยอันดับสอง อันดับ 5 ให้แก่ค่าน้อยอันดับสาม และต่อๆ ไป ดังนั้นอันดับที่ซึ่งกำหนดให้แก่ตัวอย่างรวมที่เรียงลำดับแล้ว จะเป็นดังนี้

$$1\ 4\ 5\ 8\ 9\ \ldots\ (n+m)\ \ldots\ 7\ 6\ 3\ 2$$

สมมติฐานเกี่ยวกับความผันแปรที่จะทดสอบก็คือ

$$Ho: \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2 \qquad Ha: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$$

ตัวสถิติทดสอบก็จะเป็นเช่นเดียวกับตัวสถิติวิลคอกซัน-แมนน์-วิทนีย์ นั่นคือ

$$T = S - m(n+1)/2$$

ในเมื่อ S เป็นผลรวมอันดับที่ของค่าสังเกตในกลุ่มแรก หรือ $S = \Sigma R(X_i)$ นั่นเอง และ n ก็เป็นขนาดตัวอย่างของกลุ่มแรก

ถ้าสมมติฐานหลัก Ho ไม่เป็นจริง แล้วค่าของ X หรือค่าสังเกตในตัวอย่างแรกจะโน้มเอียงไปอยู่ทางหางทั้งสองตัวอย่างรวม(ถ้าค่าเฉลี่ยหรือมัธยฐานของตัวอย่างทั้งสองเท่ากันโดยประมาณ) นั่นคือค่าของ X จะได้รับการกำหนดอันดับที่น้อยๆ ผลก็คือตัวสถิติทดสอบ T จะมีค่าน้อย ดังนั้นเกณฑ์ตัดสินใจจึงกำหนดไว้ว่า จะปฏิเสธ Ho ถ้า T น้อยกว่า $W_{\alpha/2}$ (จากตารางวิลคอกซัน-แมนน์-วิทนีย์)

ตัวอย่าง ในการศึกษาเพื่อเปรียบเทียบความผันแปรของคะแนนความสมบูรณ์ในร่างกายของเด็กชนบท (X) และเด็กในเมือง (Y) ได้คะแนนที่เรียงลำดับแล้วจากน้อยไปมาก พร้อมทั้งกำหนดอันดับที่แบบซีเกล-ทูกี ดังนี้

(X)	(Y)	อันดับ	(X)	(Y)	อันดับ	(X)	(Y)	อันดับ
	1.0	1		6.2	33		11.3	31
	1.8	4	6.3		36	11.4		30
	2.1	5		6.4	36		11.8	27
	2.4	8		6.7	40.5	12.5		26
	2.6	9		6.7	40.5		12.6	23
2.7		12	7.3		44		12.7	22
	3.2	13		7.6	45	12.9		19
	3.6	16		7.9	48		14.2	18
	4.0	17		8.3	47		14.8	14.5
4.2		20	9.0		46	14.8		14.5
	5.0	21		9.1	43		15.3	11
	5.6	25.67		9.9	42		16.0	10
	5.6	25.67		10.6	36.5	16.1		7
5.6		25.67		10.6	36.5		16.9	6
	5.9	29	10.6		36.5		17.7	3
	6.1	32		10.6	36.5		18.6	2

เนื่องจากคะแนนทั้งสองกลุ่มนี้มีมัธยฐานเท่ากัน ตามที่ทดสอบมาแล้วในตัวอย่างของแบบทดสอบวิลคอกซัน-แมนน์-วิทนีย์ ดังนั้นสมมติฐานที่จะทดสอบก็คือ

$$Ho : \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2 \qquad Ha : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$$

จากข้อมูลข้างบนนี้เราได้

$$S = 12 + 20 + .. + 14.5 + 7 = 316.67$$

ดังนั้นตัวสถิติทดสอบจะมีค่าเป็น

$$T = 316.67 - 12(13)/2 = 238.67$$

ค่าวิกฤตที่สอดคล้องกับ = .05 ก็คือ $W_{.05}$ ซึ่งประมาณได้ดังนี้

$$W_{.05} \cong nm / 2 - Z_{.05}\sqrt{nm(n+m+1)/12}$$

$$= 12(36)/2 - 1.96\sqrt{12(36)(12+36+1)/12} = 146.9$$

เนื่องจากค่าตัวสถิติทดสอบ T มีค่ามากกว่าค่าวิกฤต $W_{.05}$ = 146.9 จึงปฏิเสธสมมติฐานหลัก Ho ไม่ได้ แสดงว่าความผันแปรของคะแนนในกลุ่มชนบท และกลุ่มในเมืองไม่แตกต่างกัน

4.2 แบบทดสอบของมูดเกี่ยวกับการกระจาย (Mood Test for Dispersion)

แบบทดสอบของมูด ใช้เปรียบเทียบเกี่ยวกับการกระจาย (Dispersion, Spread, Variability, Scatter, Scale) ของสองประชากรแบบต่อเนื่องที่เป็นอิสระและเหมือนกัน (รวมทั้งมัธยฐานเท่ากัน) แต่ความแตกต่างกันในการกระจายอาจจะเป็นไปได้

ให้ $X_1, x_2, .., X_{n1}$ และ $Y_1, Y_2, .., Y_{n2}$ เป็นตัวอย่างสุ่มขนาด n_1 และ n_2 โดยที่ $n_1 \leq n_2$ และค่าสังเกตนั้นวัดได้ในสเกลแบบอันดับ

เมื่อให้ σ_1^2 และ σ_2^2 แทนพารามิเตอร์ของการกระจาย (ไม่จำเป็นต้องเป็นความแปรปรวนอาจจะเป็นมาตราวัดการกระจายอื่นๆ ได้) แล้วสมมติฐานที่จะทดสอบจะเป็น

$$Ho : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \qquad Ha : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

หรือ $$Ho : \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2 \qquad Ha : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$$

หรือ $$Ho : \sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \qquad Ha : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$$

ตัวสถิติทดสอบของมูด กำหนดไว้ว่า

$$M = \sum^{n_1}(R_i - \bar{R})^2$$

ในเมื่อ $n = n_1 + n_2$ และ R_i เป็นอันดับที่ของค่าสังเกตของ X ตัวที่ i ในการเรียงอันดับที่ร่วมกันของข้อมูลจากสองตัวอย่าง X และ Y นั้น และ $\bar{R} = (n + 1)/2$ นั้นเป็นค่าเฉลี่ยของอันดับที่ซึ่งกำหนดให้แก่ค่าสังกต X และ Y ที่เรียงอันดับที่ร่วมกัน

ถ้าตัวอย่าง Y มีการกระจายมากกว่าตัวอย่าง X (นั่นคือ ถ้า $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$) แล้ว M โน้มเอียงที่จะมีค่าน้อยๆ ถ้าตัวอย่าง X มีการกระจายมากกว่าตัวอย่าง Y (นั่นคือ ถ้า $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$) แล้ว M โน้มเอียงที่จะมีค่ามากๆ ดังนั้นเราจึงสามารถกำหนดกฎตัดสินใจได้ดังนี้

(1) สำหรับ Ha : $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ ปฏิเสธ Ho ณ ระดับนัยสำคัญ α ถ้า $M \leq M'$ หรือ $M \geq M''$ ในเมื่อ M' และ M" เป็นค่าวิกฤตจากตาราง 25 ที่ทำให้ $P(M \leq M') = \alpha/2$ และ $P(M \leq M'') = 1-\alpha/2$

(2) สำหรับ Ha : $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ ปฏิเสธ Ho ณ ระดับนัยสำคัญ α ถ้า $M \geq M''$ ในเมื่อ M" เป็นค่าจากตาราง 25 ที่ทำให้ $P(M \leq M'') = 1-\alpha$

(3) สำหรับ Ha : $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$ ปฏิเสธ Ho ณ ระดับนัยสำคัญ α ถ้า $M \leq M'$ ในเมื่อ M' เป็นค่าจากตาราง 25 ที่ทำให้ $P(M \leq M') = \alpha$

ในกรณีตัวอย่างขนาดโต เราใช้การประมาณค่าแบบปกติ นั่นคือ เมื่อ n มีขนาดโต ($n \geq 30$) เราใช้ตัวสถิติทดสอบ Z ซึ่งมีการแจกแจงปกติมาตรฐาน ที่กำหนดไว้ว่า

$$z = \frac{M - E(M)}{\sqrt{V(M)}}$$

ในเมื่อ $E(M) = n_1(n-1)(n+1)/12$ และ $V(M) = n_1 n_2(n+1)(n-2)(n+2)/180$

กรณีตัวอย่างน้อยกว่า 30 และไม่สามารถใช้ตาราง 25 ได้ ก็ใช้การแก้ไขสำหรับการต่อเนื่องของตัวสถิติ Z นั้น นั่นคือเราจะได้ตัวสถิติ Z ใหม่เป็น Z' ดังนี้

$$Z' = \frac{M - E(M)}{\sqrt{V(M)}} - \frac{1}{2\sqrt{V(M)}}$$

ตัวอย่าง ในการศึกษาเพื่อเปรียบเทียบการกระจายของประชากรสองกลุ่ม โดยอาศัยตัวอย่าง ได้ข้อมูลมาดังนี้

X :	3.84	2.60	1.19	2.00	
Y :	3.97	2.50	2.70	3.36	2.30

สมมติฐานที่จะทดสอบจะเป็น

$$Ho : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \qquad Ha : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

เรียงค่าสังเกตของ X และ Y ได้ดังนี้

ค่าสังเกต	1.19	2.00	2.30	2.50	2.60	2.70	3.36	3.84	3.97
กลุ่ม	X	X	Y	Y	X	Y	Y	X	Y
อันดับที่	1	2	3	4	5	6	7	8	9

$$\bar{R} = (4 + 5 + 1)/2 = 5$$

$$M = (1-5)^2 + (2-5)^2 + (5-5)^2 + (8-5)^2 = 34$$

จากตาราง D สำหรับ $n_1 = 4, n_2 = 5$ และ $\alpha = 0.05$ เมื่อทดสอบสองทางก็จะได้ค่าวิกฤตเป็น M' = 6 และ M" = 45 เนื่องจากค่าของตัวสถิติทดสอบ M มีค่าเป็น 34 ซึ่งไม่น้อยกว่า 6 และไม่มากกว่า 45 จึงปฏิเสธ Ho ไม่ได้ จึงสรุปได้ว่า ตัวอย่าง X และ Y มีการกระจายเท่ากัน

4.3 แบบทดสอบเชิงอันดับที่ของแอนซารี-บรัดเลย์ (Ansari – Bradley Rank Test)

แบบทดสอบแอนซารี-บรัดเลย์นี้ใช้ทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับการเท่ากันของสเกลพารามิเตอร์ โดยที่ประชากรทั้งสองนั้นเป็นแบบต่อเนื่องที่เป็นอิสระกัน และไม่ทราบค่ามัธยฐาน แต่ถือว่าเท่ากัน หรือร่วมกัน

สมมติฐานหลัก Ho ที่จะทดสอบจะเป็น

$$Ho : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \quad \text{หรือ} \quad Ha : \sigma_2^2 / \sigma_1^2 = 1$$

ในการทดสอบสมมติฐานหลักนี้ก็อาศัยตัวอย่างขนาด n_1 และ n_2 จากสองประชากรที่สนใจนั้น สำหรับตัวสถิติก็จะเป็นผลรวมของอันดับที่ในตัวอย่างแรก ซึ่งได้เรียงอันดับที่ร่วมกับตัวอย่างที่สอง และมีวิธีการคำนวณ ดังนี้

เรียงลำดับข้อมูล $n = n_1 + n_2$ จากสองกลุ่มที่มาจากประชากรทั้งสอง แล้วกำหนดอันดับ 1 ให้แก่ข้อมูลที่น้อยสุด และมากสุด อันดับ 2 ให้แก่น้อยสุดลงมา และมากสุดรองลงมา และต่อๆ ไป นั่นคือเมื่อเรียงอันดับที่ แล้วจะเป็น

1 2 3 ... n/2 n/2 ... 3 2 1 ถ้า n เป็นเลขคู่

หรือ 1 2 3 ... (n–1)/2 (n+1)/2 (n–1)/2 ... 3 2 1 ถ้า n เป็นคี่ ถ้า R_i เป็นอันดับที่ของ X_i ซึ่งเป็นค่าสังเกตของตัวอย่างแรก แล้วตัวสถิติทดสอบ จะเป็น

$$W = \Sigma R_i$$

เกณฑ์ตัดสินใจ กำหนดไว้ตามสมมติฐานรอง Ha ดังนี้

สำหรับ $Ha : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ จะปฏิเสธ Ho ณ ระดับนัยสำคัญ α ถ้า $W \geq w_2(\alpha, n_1, n_2)$ ในเมื่อค่าคงที่ $w_2(\alpha, n_1, n_2)$ พิจารณาได้จากตาราง 26 ที่ทำให้ $P\{W \geq w_2(\alpha, n_1, n_2)\} = \alpha$

สำหรับ $Ha : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$ จะปฏิเสธ Ho ณ ระดับนัยสำคัญ α ถ้า $W = w_1(\alpha, n_1, n_2)$ ในเมื่อค่าคงที่ $w_1(\alpha, n_1, n_2)$ พิจารณาได้จากตาราง 26 ที่ทำให้ $P\{W = w_1(\alpha, n_1, n_2)\} = \alpha$

สำหรับ $Ha : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ จะปฏิเสธ Ho ณ ระดับนัยสำคัญ α ถ้า $W \geq w_2(\alpha_2, n_1, n_2)$ หรือ $W = w_1(\alpha_1, n_1, n_2)$ ในเมื่อ $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$

ในกรณีตัวอย่างขนาดโต เราใช้การประมาณค่าแบบปกติ นั่นคือใช้ตัวสถิติทดสอบ

$$Z = \frac{W - E(W)}{\sqrt{V(M)}}$$

ซึ่งมีการแจกแจงปกติมาตรฐาน N(0, 1) ในเมื่อ E(W) และ V(M) กำหนดไว้ว่า

$$E(W) = \begin{cases} n_1(n+2)/4 & \text{ถ้า } n = n_1+n_2 \text{ เป็นเลขคู่} \\ n_1(n+1)^2/4 & \text{ถ้า } n \text{ เป็นเลขคี่} \end{cases}$$

$$V(W) = \begin{cases} n_1 n_2(n+2)(n-2)/48(n-1) & \text{ถ้า } n \text{ เป็นเลขคู่} \\ n_1 n_2(n+1)(3+n^2/48n^2 & \text{ถ้า } n \text{ เป็นเลขคี่} \end{cases}$$

ในกรณีที่มีอันดับที่เท่ากัน(Ties) ให้ใช้อันดับที่เฉลี่ยสำหรับคำนวณตัวสถิติทดสอบ W และเมื่อใช้การประมาณค่าแบบปกติ เราคำนวณ V(W) จากสูตร

$$V(W) = n_1 n_2\{16\Sigma t_j r_j^2 - n(n-2)^2\}/16(n)(n-1) \quad \text{ถ้า } n \text{ เป็นเลขคู่}$$

$$= n_1 n_2\{16\Sigma t_j r_j^2 - (n+1)^4\}/16n^2(n-1) \quad \text{ถ้า } n \text{ เป็นเลขคี่}$$

ในเมื่อ g เป็นจำนวนกลุ่มที่มีอันดับที่เท่ากัน t_j เป็นขนาดของกลุ่มที่เท่ากันกลุ่มที่ j และ r_j เป็นอันดับที่เฉลี่ยของค่าสังเกตในกลุ่มที่เท่ากันกลุ่มที่ j

ตัวอย่าง ในการศึกษาเพื่อทดสอบว่ากรรมวิธีที่ 1 มีความแปรปรวนมากกว่ากรรมวิธีที่ 2 ได้ข้อมูลจากตัวอย่าง ดังนี้

X	Y	R_i	X	Y	R_i
111	107	7	101	96	11
107	108	16	96	108	1.5
100	106	9.5	97	103	3
99	98	7	102	104	12.5
102	105	12.5	107	114	16
106	103	19	113	114	5
109	110	10	116	113	1
108	105	12.5	113	108	5
104	104	17	110	106	8.5
99	100	7	98	99	4.5

สมมติฐานที่ทดสอบจะเป็น

$$Ho : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \text{ กับ } Ha : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$$

ตัวสถิติทดสอบ W จะคำนวณได้เป็น

$$W = \Sigma R_i = 11 + 1.5 + ... + 8.5 + 4.5 = 185.5$$

เนื่องจากค่าสังเกตเท่ากัน เราจึงดำเนินการคำนวณได้ ดังนี้

กลุ่มที่เท่ากัน	t_j	r_j	$t_j r_j^2$	กลุ่มที่เท่ากัน	t_j	r_j	$t_j r_j^2$
1	2	1.5	4.5	11	3	19	1083
2	1	3	9	12	3	16	768
3	2	4.5	40.5	13	4	12.5	625
4	3	7	147	14	1	10	100

กลุ่มที่เท่ากัน	t_j	r_j	$t_j r_j^2$	กลุ่มที่เท่ากัน	t_j	r_j	$t_j r_j^2$
5	2	9.5	180.5	15	2	d.5	144.5
6	1	11	121	16	1	7	49
7	2	12.5	312.5	17	3	5	75
8	2	14.5	420.5	18	2	2.5	12.5
9	3	17	867	19	1	1	1
10	2	19.5	760.5				5721

ในเมื่อ n = 40 เป็นเลขคู่ เราจึงได้

$$V(W) = 20(20)\{16(5721) - 40(40-2)^2\}/16(40)(40-1)$$

$$= 336.154$$

ดังนั้น $$Z = \frac{185.8 - 20(40)+2)/4}{\sqrt{336.154}} = -1.336$$

ซึ่งแสดงว่าสมมติฐานหลัก Ho เป็นไปได้ ($Z > -Z_{.05} = -1.645$) นั่นคือกรรมวิธี 1 มีความแปรปรวนไม่มากกว่ากรรมวิธี 2

ข้อสังเกต (1) ในบางครั้งเราต้องการทดสอบสมมติฐานที่ว่า

$$Ho : \sigma_1^2 / \sigma_2^2 = \lambda_0^2$$

โดยที่ λ_0^2 เป็นค่าคงที่ซึ่งระบุไว้ เมื่อทราบมัธยฐานร่วมของประชากรทั้งสองเป็น M_o เราจึงทำการปรับปรุงค่าสังเกตได้เป็น

$$X'_i = X_i - M_o \; ; i = 1, 2, .., n_1$$

$$Y'_j = (Y_j - M_o)/\lambda_0 \; ; j = 1, 2, .., n_2$$

แล้วค่าของตัวสถิติ W จะคำนวณได้จากค่าสังเกต X'_i และ Y'_j เหล่านั้น

(2) บางครั้งเราทราบมัธยฐานของประชากร Y สมมติว่าเป็น M_2 และมีค่าเท่ากับ $M_1+\theta$ ในเมื่อ M_1 เป็นมัธยฐานของประชากร X และ θ เป็นค่าคงที่ซึ่งทราบค่า แล้วเราจะปรับปรุงค่าสังเกต X เป็น $X'_i = X_i+\theta$ ($i = 1, 2, .., n_1$) แล้วเราใช้วิธีการแอนซารี-บรัดเลย์ นั้นประยุกต์

(3) ตัวสถิติทดสอบ W นั้นเป็นผลรวมอันดับที่ของ X นั้น ถ้าเรากำหนด W' เป็นผลรวมอันดับที่ของ Y แล้วเราจะได้ตัวสถิติทดสอบ W' เป็นดังนี้

$W' = n(n+2)/4 - W$ เมื่อ n เป็นเลขคู่

$= (n+1)^2/4 - W$ เมื่อ n เป็นเลขคี่

(4) ถ้ามัธยฐานของประชากร x และ Y ไม่ทราบค่า แอนซารี และบรัดเลย์ ได้เสนอแนะให้ใช้ $X'_i = X_i - \widetilde{X}$ ($i = 1, 2, .., n_1$) และ $Y'_j = Y_j - \widetilde{Y}$ ($j = 1, 2, .., n_2$) ในเมื่อ $\widetilde{X}$ และ $\widetilde{Y}$ แทนมัธยฐานตัวอย่างของค่าสังเกต X และ Y แล้วใช้วิธีการของ แอนซารี-บรัดเลย์ กับค่า X'_i และ Y'_j นั้น

4.4 แบบทดสอบเชิงอันดับของโมเสส (Moses Ranklike Test)

แบบทดสอบโมเสส นี้ใช้เปรียบเทียบความแปรปรวนของประชากรต่อเนื่อง X และ Y ที่เป็นอิสระกัน มีรูปร่างแบบเดียวกัน และไม่ทราบมัธยฐาน (M_1 และ M_2) ดังนั้นสมมติฐานหลักจึงเป็น

$$Ho : \sigma_2^2 / \sigma_1^2 = 1 \quad \text{หรือ} \quad Ha : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

ตัวสถิติทดสอบสำหรับสมมติฐานดังกล่าว โดยอาศัยตัวอย่างจากประชากรทั้งสอง จะมีวิธีการคำนวณค่าดังนี้

(1) แบ่งข้อมูล X ออกเป็นกลุ่มย่อม m กลุ่ม ที่มีขนาดเท่ากัน (k) ถ้ามีข้อมูลเหลือให้ตัดทิ้งไป

(2) แบ่งข้อมูล X ออกเป็นกลุ่มย่อย n กลุ่ม ที่มีขนาดเท่ากัน (k) ถ้ามีข้อมูลเหลือก็ให้ทิ้งไป โชรัค (Shorak) เสนอแนะว่า k ควรจะโตเท่าที่เป็นไปได้ แต่ไม่ควรเกิน 10 และ m กับ n นั้นควรจะโตพอ เพื่อสามารถใช้ได้กับแบบทดสอบค่าเฉลี่ยได้

(3) แต่ละกลุ่มย่อย คำนวณส่วนเบี่ยงเบนกำลังสองของข้อมูลจากค่าเฉลี่ย นั่นคือคำนวณ $\Sigma(X-\overline{X})^2$ และ $\Sigma(Y-\overline{Y})^2$ ให้ $C_1, C_2, .., C_m$ และ $D_1, D_2, .., D_n$ เป็นส่วนเบี่ยงเบนกำลังสองของข้อมูลกลุ่มย่อย X และ Y นั่นคือ

$$C_i = \Sigma(X_{is}-\overline{X}_i)^2 \qquad (i = 1, 2, .., m)$$

$$D_j = \Sigma(Y_{js}-\overline{Y}_j)^2 \qquad (j = 1, 2, .., n)$$

ในเมื่อ $\overline{X}_i = \Sigma(1/k)X_{is}$ และ $\overline{Y}_j = \Sigma(1/s)Y_{js}$

(4) ใช้แบบทดสอบแมนน์-วิทนีย์ กับ C_i และ D_i เหล่านั้น นั่นคือตัวสถิติทดสอบ จะเป็น

$$T = S - m\,(m+1)/2$$

ในเมื่อ S เป็นผลรวมของอันดับที่ซึ่งกำหนดให้แก่ C_i ต่าง ๆ

เกณฑ์ตัดสินใจ เมื่อกำหนดระดับนัยสำคัญ α ไว้ จะเป็นดังนี้

สำหรับ Ha : $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ จะปฏิเสธ Ho ถ้า $T < W_{\alpha/2}$ หรือ $T < W_{1-\alpha/2}$ ในเมื่อ $W_{\alpha/2}$ เป็นควอนไทล์ที่ $\alpha/2$ ของตัวสถิติ T ที่กำหนดไว้ในตาราง 11 และ $W_{1-\alpha/2} = mn-W_{\alpha/2}$

สำหรับ Ha : $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$ จะปฏิเสธ Ho ถ้า $T < W_\alpha$

สำหรับ Ha : $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ จะปฏิเสธ Ho ถ้า $T > W_{1-\alpha}$

ตัวอย่าง ในการเปรียบเทียบการกระจายของตัวแปรจิตวิทยาระหว่างกลุ่ม โดยอาศัยตัวอย่าง ได้ข้อมูลมาดังนี้

X :	26	30	32	17	21	27	26	44	35	14	18	18
	17	23	29	16	13	36	28	23	24	34	52	35
Y :	47	66	51	80	65	58	65	61	64	51		
	76	58	61	55	68	59	60	58	56			

สมมติฐานที่จะทดสอบ

$$Ho : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \quad \text{กับ} \quad Ha : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

ตัวสถิติทดสอบคำนวณได้ดังนี้ ให้ k = 4 เป็นขนาดตัวอย่างย่อย แล้วข้อมูล X จะได้ 6 ตัวอย่างย่อย นั่นคือ m = 6 และข้อมูล Y จะได้ 5 ตัวอย่างย่อย นั่นคือ n = 5 ข้อมูล Y เหลือ 1 จำนวน จึงต้องทิ้งไป สมมติว่าตัวอย่างย่อยของข้อมูล X และ Y นั้นสุ่มมาได้ดังนี้

ตัวอย่างย่อยของ X	ค่าสังเกต				C_i
1	26	32	35	24	76.75
2	26	36	16	23	172.75
3	18	16	30	13	166.75
4	35	27	29	28	38.75
5	52	17	14	17	978.00
6	21	44	23	34	341.00

ตัวอย่างย่อยของ Y	ค่าสังเกต				D_j
1	60	58	48	61	106.75
2	80	58	58	61	336.75
3	64	56	51	51	113.00
4	55	44	66	65	317.00
5	59	76	68	47	465.00

C_i	78.75	172.75	166.75	38.75	978.00	341.00
อันดับที่	2	6	5	1	11	9
D_j	106.75	336.75	113.00	317.00	465.00	
อันดับที่	3	8	4	7	10	

$$S = 2 + 6 + 5 + 1 + 11 + 9 = 34$$

ดังนั้น T = 3 - 6(7)/2 = 13

เนื่องจากค่าวิกฤตเป็น 4 และ 26 เราจึงปฏิเสธ Ho ไม่ได้

ข้อสังเกต (1) ถ้าสมมติฐานที่จะทดสอบเป็น Ho : $\sigma_2^2 / \sigma_1^2 = \lambda_0^2$ แล้วเราจะดัดแปลง Y_j เป็น $Y'_j = Y_j/\lambda_0$ ($j = 1, 2, .., n_2$) และใช้แบบทดสอบโมเสส ประยุกต์

(2) เมื่อ k = 2 เราจะได้สูตร C_i และ D_j เป็นดังนี้

$$C_i = \sum_s (X_{is} - \bar{X}_i)^2 = (X_{i1} - X_{i2})^2/2$$

$$D_j = \sum_s (Y_{js} - \bar{Y}_j)^2 = (Y_{j1} - Y_{j2})^2/2$$

4.5 ตัวประมาณค่า และช่วงเชื่อมั่นสำหรับอัตราส่วนความแปรปรวน ที่ขึ้นอยู่กับแบบทดสอบโมเสส

โชรัค (Shorack, 1969) ได้เสนอวิธีการประมาณค่าแบบจุดและแบบช่วงสำหรับ $\lambda^2 = \sigma_2^2 / \sigma_1^2$ ไว้ดังนี้

(1) หาอัตราส่วน mn ค่าของ D_j/C_i ($i = 1, 2, .., m; j = 1, 2, .., n$)

(2) ให้ $V_{(1)}, V_{(2)}, .., V_{(mn)}$ แทนค่าที่เรียงลำดับของ D/C,

ตัวประมาณค่าแบบจุดของ λ^2 จะเป็นมาตรฐานของ D_j/C_i นั่นเอง นั่นคือ

$\hat{\lambda}^2$ = มัธยฐาน D_j/C_i.., m; ; =2,1, 2j, .., n}

ในการประมาณค่าแบบช่วงก็อาศัยวิธีการประมาณค่าแบบช่วงของมัธยฐานนั่นเอง

ตัวอย่าง ในการศึกษาเพื่อประมาณอัตราส่วนของความแปรปรวน ได้ข้อมูลมาดังนี้

X 147.0 147.0 144.0 147.0 142.0 145.0 146.0 144.0
144.0 145.0 146.0 162.5 146.5 163.0 147.0 161.0
145.0 145.5 141.0 144.0 142.0 146.5 145.0 157.0
145.0 154.5 148.5 153.5 139.0 137.0

Y 10.3 11.0 10.7 12.2 16.0 19.4 16.5 19.2 19.3 16.5
9.7 12.6 8.3 9.7 8.5 15.2 31.4 26.8 27.0 31.4
32.2 26.3 12.7 17.2 17.5 16.9 19.0 21.7 11.4 17.5

แบ่งข้อมูล X และ Y แบบสุ่ม ออกเป็นกลุ่มย่อยขนาด 6 ได้ดังนี้

กลุ่มย่อย	ค่าสังเกต X ในกลุ่มย่อย					
1	144.0	146.5	141.0	146.5	145.0	139.0
2	145.0	147.0	145.0	157.0	162.5	154.5
3	142.0	148.5	146.0	145.0	144.0	145.5
4	161.0	153.5	144.0	142.0	137.0	163.0
3	147.0	144.0	147.0	146.0	147.0	145.0

กลุ่มย่อย	ค่าสังเกต Y ในกลุ่มย่อย					
1	11.0	16.0	19.3	15.2	32.2	17.5
2	19.4	16.5	8.3	9.7	27.0	31.4
3	10.3	19.2	26.3	31.4	16.9	21.7
4	12.2	17.5	26.8	11.4	12.6	17.2
5	10.7	16.5	9.7	8.5	12.7	19.0

จากกลุ่มย่อยเหล่านี้ เราคำนวณ $C_1, C_2, .., C_5$ ได้เป็น

46.83 264.33 23.33 571.21 8.00

และคำนวณ $D_1, D_2, .., D_5$ ได้เป็น

262.71 424.67 271.27 167.01 84.64

จากค่าของ C_i และ D_i เหล่านี้ เราหาค่าที่เรียงอันดับของ D_j/C_i ได้เป็น $V_{(1)} \leq V_{(2)} \leq \ldots \leq V_{(25)}$ นั่นคือ **0.15 0.29 0.32 0.46 0.47 0.63 0.74 0.99 1.03 1.81 3.57 3.63 5.61 5.79 7.16 9.07 10.58 11.26 11.63 18.20 20.88 32.84 33.91 53.08**

ดังนั้น $\hat{\lambda}^2 = V_{(13)} = 3.63$

จากตาราง เราได้ $W_{\alpha/2} = 3$ เมื่อ $\alpha = .05$ และ $n = 5, m = 5$ ดังนั้นช่วงเชื่อมั่น (อย่างน้อย) 95% สำหรับ λ^2 จะเป็น

$V_{(3)} < \lambda^2 < V_{(23)}$

$0.32 < \lambda^2 < 32.84$

4.6 แบบทดสอบมิลเลอร์ (Miller's Jacknife Test)

แบบทดสอบมิลเลอร์ เป็นแบบทดสอบที่อาศัยตัวอย่างขนาดใหญ่ (Asymptotically) ซึ่งใช้ทดสอบการกระจายของสองประชากร โดยที่ประชากรทั้งสองไม่จำเป็นต้องมีมัธยฐานเท่ากัน สมมติฐานหลักที่จะทดสอบก็คือ

$$H0 : \lambda^2 = 1$$

ในการทดสอบสมมติฐานหลักนี้ก็อาศัยตัวอย่างที่เป็นอิสระกันจากสองประชากรแบบต่อเนื่องที่ไม่ทราบมัธยฐาน และมีกระบวนการทดสอบ ดังนี้

(1) เลือกเลขเต็มบวก k_1 และ k_2 ที่ทำให้ m/k_1 และ n/k_2 เป็นเลขเต็มบวกด้วย ในเมื่อ m และ n เป็นขนาดตัวอย่างจากสองประชากร

(2) สุ่มค่าสังเกต X ขนาด k_1 ออกเป็น m' กลุ่มย่อย และในทำนองเดียวกัน สุ่มค่าสังเกต Y ออกเป็น n' กลุ่มย่อย ให้มีขนาด k_2

(3) ให้ $d_1 = m - k_1$ และ $d_2 = n - k_2$ สำหรับ $i = 1, 2, .., m'$ ให้ $X_{i1}, X_{i2}, .., X_{id1}$ แทนค่าสังเกต d_1 ค่า ที่ได้จากค่าสังเกต X แต่ให้ทิ้งค่าสังเกต (X) ที่อยู่ในกลุ่มย่อยที่ i จำนวน k_1 ค่าออกไป ในทำนองเดียวกัน สำหรับ $j = 1, 2, .., n'$ ให้ $Y_{j1}, Y_{j2}, .., Y_{jd2}$ แทนค่าสังเกต d_2 ค่า ที่ได้จากค่าสังเกต Y แต่ต้องทิ้งค่าสังเกต (Y) ที่อยู่ในกลุ่มย่อยที่ j จำนวน k_2 ค่า ออกไป

(4) กำหนด S_i, T_j และ S_o, T_o ดังนี้

$$S_i = \ln\{\Sigma (X_{is} - \bar{X}_i)^2 / (d_1 - 1)\} ; i = 1, 2, .., m'$$

$$T_j = \ln\{\Sigma (Y_{jt} - \bar{Y}_j)^2 / (d_2 - 1)\} ; j = 1, 2, .., n'$$

ในเมื่อ $\bar{X}_i = \Sigma X_{is} / d_1$ และ $\bar{Y}_j = \Sigma Y_{jt} / d_2$

$$S_o = \ln \{ \Sigma (X_i - \overline{X})^2 / (m-l)\}$$
$$T_o = \ln \{ \Sigma (Y_j - \overline{Y})^2 / (n-1)\}$$

ในเมื่อ $\overline{X} = \Sigma X/m$ และ $\overline{Y} = \Sigma Y/n$

(5) กำหนด A_i, B_j และ A, B ดังนี้

$$A_i = m'S_o - (m'-1) S_i ; i = 1, 2, .., m'$$
$$B_j = n' T_o - (t\text{-}t\text{-}1) T_j ; j = 1, 2, .., n'$$

$\bar{A} = \Sigma A_i/m'$ และ $\bar{B} = \Sigma B_j/n'$

ตัวสถิติทดสอบจะเป็น

$$Q = (\bar{B} - \bar{A})/\sqrt{V_1 + V_2}$$

ซึ่งมีการแจกแจงปกติมาตรฐาน ในเมื่อ V_1 และ V_2 กำหนดไว้เป็น

$$V_1 = \Sigma(A_i - \overline{A})^2 / m' (m' - 1)$$
$$V_2 = \Sigma(B_j - \overline{B})^2 / n' (n' - 1)$$

เกณฑ์ตัดสินใจสำหรับประดับนัยสำคัญ และสมมติฐานรองต่าง ๆ จะกำหนดไว้ดังนี้

(1) Ha : $\lambda^2 > 1$ ปฏิเสธ Ho ถ้า $Q \geq Z_\alpha$

(2) Ha : $\lambda^2 < 1$ ปฏิเสธ Ho ถ้า $Q \leq -Z_\alpha$

(3) Ha : $\lambda^2 \neq 1$ ปฏิเสธ Ho ถ้า $Q \geq Z_{\alpha/2}$ หรือ $Q \leq -Z_\alpha$

เมื่อ $k_1 = k_2$ และ m' กับ n' น้อย และเท่ากัน ค่า Z_α หรือ $Z_{\alpha/2}$ นั้นใช้ค่า t_α หรือ $t_{\alpha/2}$ ซึ่งมีองศาความเป็นอิสระ m' − n' − 2 แทนได้

ตัวอย่าง ในการศึกษาเกี่ยวกับความแตกต่างของการกระจายในประชากร 2 กลุ่ม โดยอาศัยตัวอย่างได้ข้อมูลมาดังนี้

X : 0.80 0.83 1.89 1.04 1.45 1.38 1.91 1.64 0.73 1.46

Y : 1.15 0.88 0.90 0.74 1.21

ตามวิธีการของมิลเลอร์ ซึ่งให้ $k_1 = k_2 = 1$, m' =10, n' =5, $d_1 = 9$ และ $d_2 = 4$

เมื่อ $k_1 = k_2 = 1$ เราจึงมีกลุ่มย่อยของ X จำนวน m' = 10 กลุ่ม แต่ละกลุ่มประกอบด้วยค่าของ X จำนวน 9 ค่า (อีก 1 ค่า ที่อยู่ในกลุ่มต้องทิ้งไป) และมีกลุ่มย่อยของ Y จำนวน n' = 5 กลุ่ม โดยที่แต่ละกลุ่มประกอบด้วยค่าของ Y จำนวน 4 ค่า (อีก 1 ค่า ที่อยู่ในกลุ่มย่อยต้องทิ้งไป)

สำหรับ i = 1, 2, .., 10 และ j = 1, 2, .., 5 เราได้ S_i และ T_j ดังนี้

S_1 ถึง S_{10} เป็น -1.70 -1.68 -1.76 -1.57 -1.53 -1.52 -1.77 -1.59 -1.76 -1.53

T_1 ถึง T_5 เป็น -3.24 -3.04 -3.01 -3.55 -3.54

แล้วคำนวณ S_o และ T_o ได้เป็น -1.64 และ -3.25

หา A_1 ถึง A_{10} ได้เป็น -1.10 -1.28 -5.6 -2.27 -2.63 -2.72 -0.47 -2.09 -0.56 -2.63

และ B ถึง B_5 ได้เป็น -4.09 -4.21 -2.05 -2.09 -3.29

ดังนั้น $\bar{A}$ และ $\bar{B}$ จะเป็น -1.63 และ -3.15

และได้ V_1 และ V_2 เป็น 0.087 และ 0.22

ค่าของตัวสถิติทดสอบจะเป็น

$$Q = \frac{-3.15 - (-1.63)}{\sqrt{0.087-0.22}} = -2.74$$

เมื่อทดสอบสองทาง เรามีค่าวิกฤตสำหรับ α = .05 เป็น $Z_{.025}$ = 1.96 ดังนั้นจึงปฏิเสธHo : $\lambda^2 = 1$ นั่นคือความผันแปรไม่เท่ากัน หรือความผันแปรของ X น้อยกว่าความผันแปรของ Y

ข้อสังเกต (1) ถ้าสมมติฐานหลักเป็น Ho : $\lambda^2 = \lambda^2_0$ เมื่อ λ^2_0 เป็นค่าที่ระบุไว้ ซึ่งต่างจาก 1 แล้วต้องปรับปรุงค่า Y_j เป็น $Y'_j = Y_j/\lambda_0$; j = 1, 2, .., n ก่อนที่จะหาค่าตัวสถิติทดสอบ Q

(2) เราจะเห็นได้ว่า $\bar{A}$, $\bar{B}$ และ $\bar{B} - \bar{A}$ เป็นตัวประมาณค่าของ $\ln \sigma_x^2$, $\ln \sigma_y^2$ และ $\ln (\sigma_y^2/\sigma_x^2) = \ln \lambda^2$ ตามลำดับ และ $\sqrt{V_1 - V_2}$ นั้นก็เป็นตัวประมาณค่าของ $\sigma_{(\bar{B}-\bar{A})}$

ดังนั้นตัวประมาณค่าแบบจุด λ^2 จึงเป็น

$$\hat{\lambda}^2 = \text{anti} \ln(\bar{B}-\bar{A})$$

แล้วเรายังได้ช่วงเชื่อมั่น 100(1-α)% สำหรับ λ^2 เป็นดังนี้

$$\lambda^2_L < \lambda^2 > \lambda^2_U$$

ในเมื่อ $\hat{\lambda}^2_L = \text{anti} \ln \{\bar{B} - \bar{A}) - Z_{\alpha/2}\sqrt{V_1 + V_2}\}$

$\hat{\lambda}^2_U = \text{anti} \ln \{\bar{B} - \bar{A}) - Z_{\alpha/2}\sqrt{V_1 + V_2}\}$

4.7 แบบทดสอบของคลอทซ์ สำหรับการเท่ากันของความแปรปรวน (Klotz Test for Equal Variances)

คลอทซ์ (1962) ได้พัฒนาแบบทดสอบซึ่งอาศัยคะแนนปกติผกผัน สำหรับทดสอบสมมติฐานที่ว่า สองการแจกแจงประชากรมีความแปรปรวนเท่ากัน ถ้าทราบว่ามีค่ากลางเท่ากัน ถ้าการแจกแจงที่สนใจเป็นแบบสมมาตร แล้วแบบทดสอบนี้จะมีอำนาจทดสอบมาก เมื่อเทียบกับแบบทดสอบเอฟ นั่นคือมีประสิทธิภาพสัมพันธ์ (ARE) เท่ากับ 1 ในหลายๆ กรณี จะมีประสิทธิภาพมากกว่า 1

ตัวสถิติทดสอบสำหรับการเท่ากันของความแปรปรวนนั้นกำหนดไว้ว่า

$$K = \sum^{n_1}(Z^{(i)})^2 = \sum\{\phi^{-1}(r_i/(n+1))\}^2$$

ในเมื่อ n_1 เป็นขนาดตัวอย่างที่น้อยกว่า และ $n = n_1 - n_2$ คลอทซ์ ได้แสดงว่า

$$E(K) = (n_1/n)\ \Sigma(Z^{(i)})^2$$

$$V(K) = \frac{n_1 n_2}{n(n-1)}\ \Sigma(Z^{(i)})^4 - n_2 E(K)^2/n_1(n-1)$$

ดังนั้น

$$Z = \frac{K - E(K)}{\sqrt{V(K)}}$$

มีการแจกแจงปกติมาตรฐาน N(0, 1)

ตัวอย่าง จากแบบทดสอบเบลล์-ดอคซัม ชนิดสองตัวอย่าง ซึ่งเราได้ว่า คะแนนเฉลี่ยจากสองกลุ่มไม่แตกต่างกัน เมื่อเราต้องการทดสอบว่า คะแนนกลุ่มมีความแปรปรวนแตกต่างกันหรือไม่ เราทำได้ดังนี้

คะแนนกลุ่ม 1	คะแนนปรับปรุง	$Z^{(i)}$	คะแนนกลุ่ม 2	คะแนนปรับปรุง	$Z^{(i)}$
7	-5.2	-1.34	3	-7.2	-1.69
9	-3.2	-0.83	6	-4.2	-1.10
9	-3.2	-0.83	8	-2.2	-0.54
10	-2.2	-0.54	9	-1.2	-0.23
11	-1.2	-0.23	11	0.8	0.17
11	-1.2	-0.23	11	0.8	0.17
12	-0.2	0.00	13	2.8	0.68
14	1.8	0.35	13	2.8	0.68
15	2.8	0.68	13	2.8	0.68
17	4.8	1.22	15	4.8	1.22
19	6.8	1.69			

จากตาราง เราปรับปรุงคะแนนด้วยค่าเฉลี่ย $\overline{X}_1 = 12.2$ และ $\overline{X}_2 = 10.2$ สำหรับกลุ่มตัวอย่างที่น้อยกว่าหรือกลุ่ม 2 เราได้

$$K = (-1.69)^2 + (-1.10)^2 + \ldots + (1.22)^2 = 7.3440$$

$$E(K) = (10/21)\{(-1.34)^2 + (-0.83)^2 + \ldots + (1.22)^2\} = 7.5449$$

$$V(K) = \frac{10(11)}{21(20)}\ \{(-1.34)^4 + (-0.83)^4 + \ldots + (1.22)^4\} - 11(7.5449)^2/10(20)$$

$$= 4.0540$$

$$Z = \frac{7.3440 - 7.5449}{\sqrt{4.0540}} = -0.10$$

สำหรับ $\alpha = .05$ เราจึงสรุปได้ว่าทั้งสองกลุ่มมีความแปรปรวนไม่แตกต่างกัน

เมื่อตัวอย่างขนาดเล็ก หรือ $6 = n_1, n_2 = 10$ เราสามารถทดสอบ ณ ระดับนัยสำคัญ .05 และ .01 ได้โดยอาศัยค่าวิกฤตของตัวสถิติทดสอบคลอทซ์ จากตาราง

THE STATISTICAL METHOD IS MORE THAN
AN ARRAY OF TECHNIQUES. THE STATISTICAL
METHOD IS A MODE OF THOUGHT; IT IS
SHARPENED THINKING; IT IS POWER.

W. Edwards Deming