$$Ho : M_1 = M_2 = ... = M_k$$

$$Ha : M_1 \leq M_2 \leq ... \leq M_k$$

ในการทดสอบสมมติฐานนี้ก็อาศัยตัวอย่างต่าง ๆ ขนาด n_1, n_2, .., n_k ที่เป็นอิสระกันจากประชากรต่อเนื่องต่าง ๆ กัน k ประชากร ตัวแปรที่สนใจจะต้องมีสเกลการวัดอย่างน้อยเป็นแบบอันดับสำหรับประชากรต่าง ๆ นั้น จะเหมือนกัน แต่อาจจะมีความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ย หรือค่ากลางได้

ตัวสถิติทดสอบจะเป็นผลรวมของการนับแบบแมนน์-วิทนีย์ (Mann-Whitney Counts) U_{ij} $(i<j)$ จำนวน $\binom{k}{2} = k(k-1)/2$ นั่นคือ U_{ij} จากค่าสังเกตของสองตัวอย่าง i และ j กำหนดไว้ดังนี้

$$U_{ij} = \sum_{u=1}^{n_i} \sum_{v=1}^{n_j} \phi (X_{ui}, X_{vj})$$

ในเมื่อ $\phi (X_{ui}, X_{vj}) = 1$ ถ้า $X_{ui} < X_{vj}$ และ $= 0$ ถ้าเป็นอย่างอื่น

ดังนั้นตัวสถิติทดสอบ จะเป็น

$$J = \sum_{i<j} U_{ij}$$

เกณฑ์ตัดสินใจ ณ ระดับนัยสำคัญ α จะเป็นดังนี้ "ปฏิเสธ Ho ถ้า $J = j (\alpha, k; n_1, n_2, .., n_k)$" ในเมื่อ $j (\alpha, k; n_1, n_2, .., n_k)$ เป็นค่าคงที่จากตาราง 18 ที่สอดคล้องสมการ

$$P\{J \geq j (\alpha, k; n_1, n_2, .., n_k)\} = \alpha$$

ในกรณีที่ค่าสังเกตเท่ากัน จะกำหนด $\phi (X_{ui}, X_{vj})$ ไว้ดังนี้ $\phi (X_{ui}, X_{vj}) = 1$ ถ้า $X_{ui} < X_{vj}$, $= 1/2$ ถ้า $X_{ui} < X_{vj}$ และ $= 0$ ถ้า $X_{ui} > X_{vj}$

เมื่อตัวอย่างขนาดโตก็ใช้ตัวสถิติทดสอบ ซึ่งแจกแจงปกติมาตรฐาน ดังนี้

$$Z = \frac{J - E(J)}{\sqrt{V(J)}}$$

ในเมื่อ $E(J) = (n^2 - \Sigma n_j^2)/4$ และ $V(J) = \{n^2(2n+3) - \Sigma n_j^2(2n_j+3)\}/72$

ตัวอย่าง ในการศึกษาเกี่ยวกับผลการสอบของกลุ่มทดลอง 3 กลุ่ม ว่ามีค่าเฉลี่ยเป็นแบบอันดับตามข้อมูลข่าวสารที่กลุ่มได้รับหรือไม่ จากการศึกษาได้ข้อมูลดังนี้

กลุ่ม ก (ไม่มีข้อมูล)	กลุ่ม ข (ข้อมูลอย่างหยาบ)	กลุ่ม ค (ข้อมูลอย่างละเอียด)
40	38	48
35	40	40
38	47	45
43	44	43
44	40	46
41	42	44

สมมติฐานที่จะทดสอบ คือ

$$Ho : M_1 = M_2 = M_3$$

$$Ha : M_1 \leq M_2 \leq M_3$$

ค่าแมนน์-วิทนีย์ของกลุ่ม ก และ ข หรือ U_{12} หาได้ดังนี้ - ค่าแรกของกลุ่ม ก เป็น 40 จะน้อยกว่าค่าในกลุ่ม ข จำนวน 3 ค่า (คือ 47, 44, 42) และเท่ากัน 2 ค่า ดังนั้น U_{12} สำหรับค่า 40 จะเป็น 1+1+1+1/2+1/2 = 4 ค่าที่สองเป็น 35 ซึ่งน้อยกว่าทุกค่าในกลุ่ม ข ดังนั้น U_{12} ของค่า 35 เป็น 6 และต่อๆ ไป แล้วจะได้ค่า U_{12} เป็นดังนี้

$$U_{12} = 4 + 6 + 5.5 + 2 + 1.5 + 3 = 22$$

ในทำนองเดียวกันจะได้ $U_{13} = 30.5$ และ $U_{23} = 26.5$

ดังนั้นค่าของตัวสถิติทดสอบ จะเป็น

$$J = 22 + 30.5 + 26.5 = 79$$

จากตาราง 24 พบว่า J(.0231, 3, 6, 6, 6) = 79 ซึ่งจะเห็นได้ว่า α =.0231 นั้นน้อยกว่า .05 ดังนั้นจึงปฏิเสธ Ho ได้

ถ้าใช้การประมาณด้วยตัวอย่างขนาดโต จะได้

$$Z = \frac{79 - (1/4)\{18^2 - (6^2+6^2+6^2)\}}{\sqrt{(18^2)\,(39) - 3(6^2)\,(15)\,/\,72}} = 2.02$$

ซึ่งจะให้ α = .0217 นั่นคือจะปฏิเสธ Ho เช่นกัน

3.4.5 ตัวประมาณค่าความแผกกัน (Spjϕtvoll Contrast Estimator)

Spjϕtvoll (1968) ได้เสนอตัวประมาณค่าของความแผกกัน (φ) โดยอาศัยตัวประมาณค่าสองตัวอย่างของฮอดจ์-เลย์แมน (Hodges-Lehman Two-Sample Estimators) ไว้ ถ้าความแผกกันในผลกระทบกรรมวิธีทดลอง (τ) กำหนดไว้ ดังนี้

$$\varphi = \Sigma a_j \tau_j \,,\ \Sigma a_j = 0$$

$$= \sum_h \sum_j d_{hj} \Delta_{hj}$$

ในเมื่อ $d_{hj} = a_h/k$; h, j = 1, 2, .., k และ $\Delta_{hj} = \tau_h - \tau_j$ แล้วตัวประมาณค่าของ φ ซึ่งจะให้เป็น $\hat{\varphi}$ หาได้ดังนี้

(1) หาตัวประมาณ Z_{hj} ซึ่งเป็นตัวประมาณค่าแบบฮอดจ์-เลย์แมน ดังนี้

$$Z_{hj} = \text{มัธยฐาน} \{ X_{ah} - X_{bj} ;\ a = 1, 2, .., n_h ;\ b = 1, 2, .., n_j \}$$

โดยที่ $h \neq j$ เนื่องจาก $Z_{hj} = -Z_{jh}$ จึงเพียงแต่หาตัวประมาณค่า Z_{hj} จำนวน $\binom{k}{2}$ ซึ่งสอดคล้องกับค่า (h, j) ที่ h < j

(2) หาผลรวมแบบถ่วงน้ำหนักของ Z_{hj} ได้เป็น

$$\bar{\Delta}_h = \Sigma n_j Z_{hj} / \Sigma n_j \;;\; h = 1, 2, .., k$$

ในเมื่อ $Z_{hh} = 0$; $h = 1, 2, ., k$

(3) ตัวประมาณค่าที่ปรับน้ำหนักของ Δ_{hj} กำหนดไว้เป็น

$$W_{hj} = \bar{\Delta}_h - \bar{\Delta}_j$$

ดังนั้นตัวประมาณค่าที่ปรับน้ำหนักของความแผกกัน φ คือ

$$\hat{\varphi} = \Sigma a_j \bar{\Delta} = \sum_h \sum_j d_{hj} W_{hj}$$
$$= \sum_h \sum_j d_{hj} (\bar{\Delta}_h - \bar{\Delta}_j)$$

เมื่อ $n_1 = n_2 = ... = n_k$ จะทำให้ $\bar{\Delta}_h$ เป็น

$$Z_{h.} = \Sigma Z_{hj} / k$$

และ $\bar{\Delta}_h - \bar{\Delta}_j$ เป็น

$$\Delta_h - \Delta_j = Z_{h.} - Z_{j.}$$

ตัวอย่าง จากตัวอย่างของผลการสอบของกลุ่มทดลอง 3 กลุ่ม จะได้

$$Z_{12} = -1.5 \quad Z_{13} = -4 \quad Z_{23} = -3$$

เนื่องจาก $n_1 = n_2 = n_3 = 6$ จึงได้

$Z_{1.} = \Delta_1 = (Z_{11} + Z_{12} + Z_{13})/3 = (0-1.5-4)/3 = -11/6$

$Z_{2.} = \Delta_2 = (Z_{21} + Z_{22} + Z_{23})/3 = (1.5+0-3)/3 = -1/2$

$Z_{3.} = \Delta_3 = (Z_{31} + Z_{32} + Z_{33})/3 = (4+3+0)/3 = 7/3$

ถ้าสนใจความแผกกัน $\varphi = \tau_3 - \tau_1$ นั่นคือ $a_1 = -1$, $a_2 = 0$ และ $a_3 = 1$ แล้วจะได้ตัวประมาณค่า $\hat{\varphi}$ ดังนี้

$\hat{\varphi} = W_{31} = \Delta_3 - \Delta_1 = 7/3-(-11/6) = 25/6$

$= 4.17$

3.4.6 การแยกแบบทดสอบไคสแควร์สำหรับแบบทดสอบครัสคัล-วอลลิส (Partitioning of Chi-Square Test for Kruskal - Wallis Test)

จากปัญหาของสัดส่วนที่กล่าวมาแล้วนั้น แบบทดสอบไคสแควร์สำหรับตารางจรณ์สามารถแยกออกเป็นส่วนๆ ภายใต้เงื่อนไขบางอย่างได้ ในทำนองเดียวกันการแยกตัวสถิติครัสคัลวอลลิส H โดยวิธีของความแผกกันแบบอิสระกัน (Orthogonal Contrasts) ก็ย่อมทำได้สำหรับความแผกกัน φ_1 และ φ_2

$$\varphi_1 = \Sigma a_j \theta_j \text{ และ } \varphi_2 = \Sigma b_j \theta_j$$

จะได้ชื่อว่าเป็นอิสระกัน ถ้า

$$\Sigma a_j b_j = a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_k b_k = 0$$

ตัวสถิติทดสอบครัสคัล-วอลลิส H สามารถแยกออกเป็น (k-1) ส่วน ที่เป็นอิสระกัน และแต่ละส่วนมีการแจกแจงไคสแควร์ ด้วยองศาความเป็นอิสระ 1 โดยทั่วไปจะได้ว่า

$$H = \hat{\varphi}^2_1/V(\hat{\varphi}^2_1) + \hat{\varphi}^2_2/V(\hat{\varphi}_2) + \ldots + \hat{\varphi}^2_{k-1}/V(\hat{\varphi}_{k-1})$$

ในเมื่อ $\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2, \ldots, \hat{\varphi}_{k-1}$ เป็นอิสระซึ่งกันและกัน

ถ้า $Z^2_j = \hat{\varphi}_j/V(\hat{\varphi}_j) > \chi^{2(1)}_{\alpha_{0/(k-1)}} = Z^2_{\alpha_0/2(k-1)}$

ก็จะปฏิเสธ Ho : $\varphi_i = 0$ ด้วยระดับนัยสำคัญ $\alpha \le \alpha_0$ ในเมื่อ α_0 เป็นระดับนัยสำคัญที่ควบคุมไว้

ภายใต้ตัวแบบนี้ถ้าต้องการวิเคราะห์แบบวางแผนไว้ก่อน กับความแผกกันจำนวนใดๆ ที่เป็นอิสระกันหรือไม่ก็ได้

ในกรณีที่ตัวแปรกรรมวิธี (Treatment Variable) เป็นแบบสเกลอันดับที่มีช่วงเท่ากัน (Equally-Spaced Ordered Scale) เช่น 0, 5, 10 และ 15 เป็นต้น การวิเคราะห์แบบวางแผนไว้ก่อนที่น่าสนใจ ก็คือการวิเคราะห์แนวโน้ม (Planned Trend Analysis) นั่นเอง

ตัวอย่าง ในการศึกษาทัศนคติต่อการทำงานนอกเวลาของนักศึกษาปี 2, 3 และ 4 ได้ข้อมูลมาดังนี้

ปี	2		3		4	
	6	(1)	31	(34.5)	13	(10)
	11	(7)	7	(2)	32	(36)
	12	(9)	9	(4)	31	(34.5)
	20	(19)	11	(7)	30	(33)
	34	(23)	16	(14)	28	(31)
	21	(20)	19	(17.5)	29	(32)
	18	(16)	17	(15)	25	(24)
	15	(13)	11	(7)	26	(26.5)
	14	(11.5)	22	(21)	26	(26.5)
	10	(5)	23	(22)	27	(29.5)
	8	(3)	27	(29.5	26	(26.5)
	14	(11.5)	26	(26.5)	19	(17.5)
R_j		139.00		200.00		327.00

$$H = \frac{12}{36(37)} \{139^2/12 + 200^2/12 + 327^2/12\} - 3(37)$$

$$= 13.81$$

ถ้าต้องการพิจารณาสองความแผกกันที่เป็นอิสระ φ_1 และ φ_2

$$\varphi_1 = M_1 - M_2 \text{ และ } \varphi_2 = M_1 + M_2 - 2M_3$$

ตัวประมาณค่าของ φ_1 และ φ_2 คือ $\hat{\varphi}_1$ และ $\hat{\varphi}_2$ ซึ่งมีค่าประมาณ และความแปรปรวน ดังนี้

$$\hat{\varphi}_1 = \bar{R}_1 - \bar{R}_2 = 139.00/12 - 200.00/12 = -5.09$$

$$\hat{\varphi}_2 = \bar{R}_1 + \bar{R}_2 - 2\bar{R}_3 = -26.25$$

$$V(\hat{\varphi}_1) = \frac{n(n+1)}{12}\Sigma a_j^2/n_j = \frac{36(37)}{12}(1/12 + 1/12) = 18.50$$

$$V(\hat{\varphi}_2) = 55.50$$

ค่าของตัวสถิติทดสอบ Z_1^2 และ Z_2^2 หาได้เป็น

$$Z_1^2 = \hat{\varphi}_1^2/V(\hat{\varphi}_1) = (-5.09)^2/18.50 = 1.40$$

$$Z_2^2 = \hat{\varphi}_2^2/V(\hat{\varphi}_2) = (-26.25)^2/55.50 = 12.41$$

เนื่องจากความแผกกันทั้งสองเป็นอิสระกัน จึงพบว่า

$$Z_1^2 + Z_2^2 = 1.40 + 12.41 = 13.81$$

ถ้าแต่ละตัวสถิติทดสอบเปรียบเทียบกับ $\chi^{2(1)}_{\alpha/2} = \chi^{2(1)}_{.025} = 5.02$ จึงสรุปได้ว่า $\varphi_1 = 0$ และ $\varphi_2 \neq 0$ ด้วย $\alpha \leq 0.05$

ตัวอย่าง ในการศึกษาค่าเฉลี่ยของกลุ่มทดลอง 4 กลุ่ม ได้ข้อมูลซึ่งเป็นจำนวนครั้งของการขาดงาน ดังนี้

กลุ่ม	1		2		3		4	
	17	(12)	14	(11)	6	(4)	11	(9)
	9	(7)	10	(8)	8	(6)	2	(1)
	35	(21)	21	(15)	5	(3)	4	(2)
	20	(18)	18	(13)	13	(10)	7	(5)
R_j		49		47		23		17

$$H = \frac{12}{16(17)} \{49^2/4 + 47^2/4 + 23^2/4 + 17^2/4\} - 3(17)$$

$$= 8.87$$

ถ้าต้องการศึกษาความแผกกันสำหรับความสัมพันธ์เชิงเส้นในค่าเฉลี่ยของ 4 กรรมวิธี นั้น นั่นคือ

$$\varphi_{lin} = -3M_1 - 1M_2 + 1M_3 + 3M_4$$

ตัวประมาณค่า $\hat{\varphi}_{lin}$ จะประมาณค่าได้เป็น

$$\hat{\varphi}_{lin} = -3(49/4) - 1(47/4) + 1(23/4) + 3(17/4)$$

$$= -30$$

$$V(\varphi_{lin}) = \frac{n(n-1)}{12}\Sigma a_j^2/n_j = \frac{16(17)}{12}\{(-3)^2/4 + (-1)^2/4 + (1)^2/4 + (3)^2/4\} = 113.33$$

ดังนั้น $\chi^2_1 = 7.94 > \chi^{2(1)}_{.05} = 3.84$ จึงปฏิเสธสมมติฐานหลักที่ว่า "ไม่มีแนวโน้มเชิงเส้นในค่าเฉลี่ย" ผลเหล่านี้แสดงได้ในตารางวิเคราะห์ไคสแควร์ ต่อไปนี้

แหล่งความผันแปร	องศาความเป็นอิสระ	ค่าของ χ^2
แนวโน้มเชิงเส้น	1	7.94
ความคลาดเคลื่อน	2	0.93
รวม	3	8.87

จากการพิจารณาข้อมูล จะเห็นว่ามีความสัมพันธ์เชิงเส้นที่ลดลง

การทดสอบแนวโน้มเชิงเส้นในค่าเฉลี่ยนี้จะสอดคล้องกับการทดสอบความสัมพันธ์เชิงเส้นในการวัด (ข้อมูล) เดิม

3.4.7 แบบทดสอบครัสคัล-วอลลิสสำหรับตารางจรณ์แบบอันดับ (Kruskal-Wallis Test for Ordered Contingency Tables)

แบบทดสอบครัสคัล-วอลลิสนี้ใช้วิเคราะห์ตารางจรณ์ที่มีตัวแปรตามเป็นเซทของชั้นย่อยแบบอันดับ และชั้นย่อยนั้นต้องไม่ร่วมกัน หรือค่าของตัวแปรตามเป็นแบบอันดับนั่นเอง ถ้าตัวแปรอิสระเป็นแบบอิสระอีก ก็ใช้แบบทดสอบไคสแควร์สำหรับแนวโน้ม ชนิดหนึ่งองศาความเป็นอิสระหรือแบบทดสอบแนวโน้มในตารางจรณ์ (Tests for Trend in Contingency Tables)

เมื่อตัวสถิติเพียร์สัน ไม่สนใจอันดับที่ของตัวแปรตาม (Response Variable) และเมื่อขนาดตัวอย่างเล็ก จึงทำให้สงสัยการใช้แบบทดสอบไคสแควร์ของเพียร์สัน ดังนั้นแบบทดสอบครัสคัล-วอลลิส H จึงใช้แทนแบบทดสอบไคสแควร์ในกรณีนี้ และบางครั้งสนใจค่าเฉลี่ยของประชากร แต่ไม่สนใจความแตกต่างในการแจกแจง ซึ่งทดสอบด้วยแบบทดสอบไคสแควร์เกี่ยวกับความเป็นเอกภาพ ดังนั้นแบบทดสอบครัสคัล-วอลลิส จึงเหมาะสมกว่าแบบทดสอบไคสแควร์

ตัวอย่าง ในการศึกษาทัศนคติของกลุ่มคน 3 อาชีพ ได้คำตอบเป็นแบบหนึ่งแบบใด ดังนี้ (1) เห็นด้วยอย่างมาก (2) เห็นด้วย (3) เฉยๆ (4) ไม่เห็นด้วย และ (5) ไม่เห็นด้วยอย่างมาก

จากตัวอย่างของคนอาชีพต่างๆ ได้จำนวนคนที่ตอบแบบต่างๆ ดังตารางต่อไปนี้

	กลุ่มอาชีพ	กลุ่ม 1	กลุ่ม 2	กลุ่ม3	รวม
คำตอบ	(1) เห็นด้วยอย่างมาก	2	3	7	12
	(2) เห็นด้วย	3	3	7	13
	(3) เฉยๆ	6	4	3	13
	(4) ไม่เห็นด้วย	3	7	2	12
	(5) ไม่เห็นด้วยอย่างมาก	0	5	2	7
		14	22	21	57

จากข้อมูลนี้เราได้ค่าของตัวสถิติทดสอบแบบไคสแควร์เกี่ยวกับความเป็นเอกภาพ ดังนี้

$\chi^2 = 57\{2^2/12(14) + 3^2/13(14) + \ldots + 2^2/7(21) - 1\}$

$= 13.91$

จากตารางไคสแควร์ ที่ α = .05 และองศาความเป็นอิสระ (3–1) (5–1) = 8 ได้ค่าวิกฤตเป็น 15.51 ดังนั้นจึงไม่สามารถปฏิเสธ ณ α = .05 ได้ แต่จากการสังเกต จะเห็นว่ากลุ่มอาชีพ 2 มีแนวโน้มจะไม่เห็นด้วย แต่กลุ่มอาชีพ 3 มีแนวโน้มที่จะเห็นด้วย

สำหรับแบบทดสอบครัสคัล–วอลลิสที่ใช้ประยุกต์กับข้อมูลนี้ จะหาค่าได้ดังต่อไปนี้โดยใช้ความรู้ที่ว่า 1+2+3+...+N = N(N+1)/2

คำตอบ (5) ไม่เห็นด้วยอย่างมากนั้นมีจำนวนผู้ตอบ 7 ราย ซึ่งจะได้อันดับที่เฉลี่ยเป็น (1+2+..+7)/7 = 4

คำตอบ (4) ไม่เห็นด้วย นั้นมีจำนวนผู้ตอบ 12 ราย จึงได้อันดับที่เฉลี่ยเป็น (8+9+...+19)/12 = 13.5 หรือหาได้จาก (1/12){(1/2)(19)(20)–(1/2)(7)(8)} $= \frac{1}{12}$ (190–28) = 13.5

คำตอบ (3) เฉยๆ นั้นมีผู้ตอบ 13 ราย จึงได้อันดับที่เฉลี่ยเป็น (20+21+..+32) ÷ 13 = (1/13){32(33)/2–(19(20)/2)} = 26

คำตอบ (2) เห็นด้วย มีผู้ตอบ 13 ราย จึงได้อันดับที่เฉลี่ยเป็น (33+34+..+45) ÷ 13 = (1/13){45(46)/2 – 32(33)/2} = 39

คำตอบ (1) เห็นด้วยอย่างมาก มีผู้ตอบ 12 ราย จึงได้อันดับที่เฉลี่ยเป็น (46+47+..+57)/12 = (1/12){(57)(58)/2 – (45)(46)/2} = 51.5

ดังนั้นอันดับที่ทั้งหมดซึ่งกำหนดแก่ผู้ตอบ 57 ราย จะได้เป็น 7(4) + 12(13.5) + 13(26) + 13(39) + 12(51.5) = 1653 ซึ่งเท่ากับ 1+2+3+...+56+57 = 57(58)/2 นั่นเอง แล้วจะได้ผลรวมอันดับที่ของกลุ่มอาชีพต่างๆ ดังนี้

$R_1 = 0(4)+3(13.5)+6(26)+3(39)+2(51.5) = 416.5$

$R_2 = 5(4)+7(13.5)+4(26)+3(39)+3(51.5) = 490.0$

$R_3 = 2(4)+2(13.5)+3(26)+7(39)+7(51.5) = 746.5$

และค่าของตัวสถิติทดสอบจะเป็น

$$H = \frac{12}{57(58)}\{416.5^2/14+490^2/22+746.5^2/21\} - 3(58)$$

$$= 6.91$$

แฟคเตอร์ที่ปรับปรุงกรณีค่าสังเกตเท่ากัน จะคำนวณได้เป็น

$$f = 1 - \Sigma G/(n^3-n)$$

$$f = 1 - \{(7^3-7+(12^3-12)+(13^3-13)+(13^3-13)+(12^3-12)\}/(57^3-57)$$

$$= 0.9561$$

ดังนั้นค่าของตัวสถิติทดสอบที่ปรับปรุงแล้วจะเป็น

$$H_c = H/f = 6.91/0.9561 = 7.23$$

สมมติฐานหลักที่ว่า การแจกแจงที่เหมือนกันจะได้รับการปฏิเสธ ณ α = 0.05 เนื่องจาก $\chi^{2(2)}_{.05}$ = 5.99 จึงสรุปได้ว่า การแจกแจงต่างกัน และความแตกต่างนั้นน่าจะเป็นผลมาจากความแตกต่างในค่าเฉลี่ยมากกว่า

3.4.8 แบบทดสอบชนิดคะแนนปกติที่มีหลายตัวอย่าง (Normal-Scores Test for K-Sample Problem)

แบบทดสอบครัสคัล-วอลลิสซึ่งอาศัยอันดับที่นั้นเป็นแบบทดสอบไร้พารามิเตอร์ที่ใช้แทนแบบทดสอบเอฟในการวิเคราะห์ความแปรปรวนกันบ่อยที่สุด อย่างไรก็ตามยังมีแบบทดสอบไร้พารามิเตอร์อื่น ๆ ที่อาศัยอันดับที่ และใช้แทนแบบทดสอบเอฟ แบบทดสอบชนิดคะแนนปกติสำหรับหลายตัวอย่างก็เป็นแบบทดสอบหนึ่งที่ใช้กันอยู่ แบบทดสอบนี้มีรูปฟอร์มต่าง ๆ กัน 3 รูปฟอร์ม สำหรับรูปฟอร์มของเบลล์-ดอคซัมนั้นมักจะไม่สอดคล้องกัน (Inconsistencies) สำหรับนักวิจัยต่าง ๆ กัน เมื่อวิเคราะห์ข้อมูลชุดเดียวกัน

ตัวสถิติทดสอบจะขึ้นอยู่กับ $V^{(i)}$, $Z^{(i)}$ และ Z_{ij} นั่นคือตัวสถิติทดสอบจะเป็น

$$W = (n-1)\,\Sigma\,(1/n_j)\,(\Sigma W_{ij})^2/\Sigma\Sigma W^2_{ij}$$
$$= (n-1)\,\Sigma n_j \bar{W}_j^2/\Sigma\Sigma W^2_{ij}$$

ในเมื่อ $W_{ij} = V^{(i)}$ หรือ $W_{ij} = Z^{(i)}$ สำหรับเทอมของการวิเคราะห์ความแปรปรวนจะได้ตัวสถิติทดสอบเป็น

$$W = (n-1)\ SSB\ /\ SST$$

ถ้าตัวอย่างขนาดโต ตัวสถิติ W นี้จะมีแนวโน้มที่จะแจกแจงแบบไคสแควร์ ด้วยองศาความเป็นอิสระ k-1 เมื่อสมมติฐานหลักเป็นจริง

ในทฤษฎีวิเคราะห์ความแปรปรวน ได้กำหนดอัตราส่วนสหสัมพันธ์ (Correlation Ratio) ไว้ว่า

$$\hat{\eta} = SSB\ /\ SST$$

ซึ่งใช้เป็นมาตราวัดความแปรปรวนที่อธิบายได้ (Explained Variance) ในทำนองเดียวกัน มาตราวัดสำหรับแบบทดสอบคะแนนปกติจะกำหนดไว้เป็น

$$\hat{\eta} = W/(n-1)$$

ตัวอย่าง ในการศึกษาเกี่ยวกับการเรียนรู้ของกลุ่มต่าง ๆ 4 กลุ่ม โดยที่แต่ละกลุ่มได้รับอุปกรณ์ช่วยต่าง ๆ กัน ปรากฏว่าได้ข้อมูลซึ่งเป็นอันดับที่ ดังตารางต่อไปนี้

R_{ij}				$V^{(i)} = W_{ij}$				$Z^{(i)}$			
ก	ข	ค	ง	ก	ข	ค	ง	ก	ข	ค	ง
1	6	8	2	-2.07	-.94	-.72	-1.65	-1.88	-.91	-.70	-1.55
3	13	12	5	-1.40	-.28	-.36	-1.07	-1.34	-.27	-.35	-1.03
4	24	14	11	-1.22	.62	-.20	-.44	-1.17	.06	-.19	-.43
7	25	15	19	-.82	.72	-.12	.20	-.80	.70	-.11	.19

R_{ij}				$V^{(ij)} = W_{ij}$				$Z^{(ij)}$			
ก	ข	ค	ง	ก	ข	ค	ง	ก	ข	ค	ง
9	26	16	22	–.62	.82	–.04	.44	–.60	.80	–.04	.43
10	27	17	29	–.53	.94	.04	1.22	–.52	.91	.04	1.17
18	28	20	31	.12	1.07	.28	1.65	–.11	1.03	.27	1.55
21	30	23	32	.36	1.40	.53	2.07	–.35	1.34	.52	1.88
73	179	125	151	–6.18	4.35	–.59	2.42	–5.86	4.20	–.56	2.21
				–.77	.54	–.07	.30	–.73	.53	–.07	.28

$H = 8.66$ $\qquad$ $W^2_{ij} = 29.5960$, $W = 8.29$ $\qquad$ $W^2_{ij} = 26.3618$, $W = 8.40$

ตัวสถิติทดสอบครัสคัล–วอลลิส จะมีค่าเป็น

$$H = \frac{12}{32(33)}\{73^2/8 + 179^2/8 + 125^2/8 + 151^2/8\} - 3(33)$$
$$= 8.66$$

ตัวสถิติทดสอบชนิดคะแนนปกติของเทอร์รี่–โฮฟฟ์ดิง จะมีค่าเป็น

$$W = \frac{(32 - 1)}{26.3618}\{(-6.18)^2/8 + 4.35^2/8 + (-.59)^2/8 + 2.42^2/8\}$$
$$= 8.29$$

ตัวสถิติทดสอบ แวน เดอร์ แวร์เดน จะมีค่าเป็น

$$W = \frac{(32 - 1)}{29.5960}\{(-5.86)^2/8 + 4.20^2/8 + (-.56)^2/8 + 2.21^2/8\}$$
$$= 8.40$$

เมื่อ k–1 = 3 และ $\alpha = .05$ จะได้ $\chi^{2(3)} = 7.815$ ดังนั้นจึงปฏิเสธสมมติฐานหลัก Ho

เมื่อปฏิเสธสมมติฐานหลัก จึงทำการเปรียบเทียบพหุคูณ โดยการสร้างช่วงเชื่อมั่นพหุคูณสำหรับแบบทดสอบหลายตัวอย่างชนิดคะแนนปกติได้ ให้ $\hat{\varphi}$ เป็นความแผกกันใด ๆ ในคะแนนปกติเฉลี่ย นั่นคือ

$$\hat{\varphi} = \Sigma a_j W_j$$

แมคสวีนนี กับ เพนฟิลด (McSweeney and Penfield, 1969) ได้แสดงว่า

$$V(\hat{\varphi}) = \{\Sigma\Sigma W^2_{ij} / (n-1)\}\Sigma a_j^2/n_j$$

ดังนั้นเซทของช่วงเชื่อมั่นเชิงพร้อม $100(1-\alpha)\%$ สำหรับความแผกกัน ในคะแนนปกติเฉลี่ย จะเป็นดังนี้

$$\varphi = \hat{\varphi} \pm \sqrt{\chi_{\alpha}^{2(k-1)} V(\hat{\varphi})}$$

ภายใต้ตัวแบบเทอร์รี่-โฮฟฟ์ดิง จะได้ช่วงเชื่อมั่นเชิงพร้อม 90% สำหรับความแผกกันเป็นคู่ ดังนี้

$$\varphi_1 = (-.77-.54) \pm\sqrt{6.25}\sqrt{(29.5960/3)(2/8)}$$
$$= -1.33 \pm 1.22$$
$$\varphi_2 = -.70 \pm 1.22$$
$$\varphi_3 = -1.70 \pm 1.22$$
$$\varphi_4 = 0.61 \pm 1.22$$
$$\varphi_5 = 0.24 \pm 1.22$$
$$\varphi_6 = -.37 \pm 1.22$$

ในทำนองเดียวกัน ภายใต้ตัวแบบ แวน เดอร์ แวร์เดน จะได้ช่วงเชื่อมั่นเชิงพร้อม 90% สำหรับความแผกกันเป็นคู่ ดังนี้

$$\varphi_1 = -0.73 - 0.53 \pm\sqrt{6.25}\sqrt{(26.3618/31)(2/8)}$$
$$= -1.26 \pm 1.15$$
$$\varphi_2 = -0.66 \pm 1.15$$
$$\varphi_3 = -1.01 \pm 1.15$$
$$\varphi_4 = 0.6 \pm 1.15$$
$$\varphi_5 = 0.25 \pm 1.15$$
$$\varphi_6 = -.35 \pm 1.15$$

3.5 กรณีหลายตัวอย่างที่สัมพันธ์กัน (Several Related Samples)

ในการทดลองเพื่อเปรียบเทียบความแตกต่างระหว่างกลุ่มในตัวแปรที่สนใจนั้น เมื่อหน่วยทดลองแตกต่างกันมาก แล้วก็ยากที่จะพบความแตกต่างระหว่างกลุ่ม ถ้าใช้วิธีการสำหรับวิเคราะห์การวางแผนทดลองชนิดสุ่มตลอด (CRD, Completely Randomized Design) ทั้งนี้ก็เพราะความผันแปรระหว่างหน่วยทดลองในกลุ่มเดียวกัน อาจจะปิดบังความแตกต่างใดๆ ในตัวแปรที่สนใจ ซึ่งมีอยู่ระหว่างกลุ่ม

บ่อยครั้งที่จำเป็นต้องปรับปรุงวิธีการ เพื่อค้นหาความแตกต่างระหว่างกลุ่มในตัวแปรที่สนใจโดยการแบ่งหน่วยทดลองให้เป็นกลุ่มย่อยที่คล้ายคลึงกัน (Homogeneous Subgroups) ซึ่งจะเรียกว่า บลอค (Block) และทำการเปรียบเทียบระหว่างหน่วยทดลองภายในกลุ่มย่อย จะทำได้ก็โดยอาศัยการวางแผนทดลองชนิดแบ่งบลอคสมบูรณ์ (RBD, Randomized Complete Block Design) เทคนิคนี้จะขยายตัวแบบการเปรียบเทียบสองตัวอย่างแบบจับคู่ที่กล่าวมาแล้วออกเป็นหลายๆ กลุ่มตัวอย่าง ดังนั้นสำหรับตัวอย่างตั้งแต่สามกลุ่มขึ้นไป บลอคหนึ่งจะประกอบด้วยหน่วยทดลองตั้งแต่สามหน่วยขึ้นไป ซึ่งหน่วยเหล่านั้นมีลักษณะคล้ายกัน แต่ต่างบลอคจะมีลักษณะต่างกัน

การแบ่งบลอคหรือการจับคู่หน่วยทดลองเพื่อให้มีลักษณะคล้ายกันนั้นต้องอาศัยเกณฑ์หรือตัวแปร เช่นอายุ การศึกษา พันธ์ เป็นเครื่องมือกำหนด ในบางครั้งอาจจะให้หน่วยทดลองเดี่ยว ๆ เป็นบลอค ซึ่งทำการทดลองกับทุกกรรมวิธี

เทคนิคพารามิเตอร์ที่ใช้วิเคราะห์ข้อมูลจากการวางแผนชนิดแบ่งบลอคสมบูรณ์ ได้ชื่อว่า การวิเคราะห์ความแปรปรวนสองทาง (Two-Way Analysis of Variance) ซึ่งจะต้องมีข้อกำหนดเกี่ยวกับตัวแปรที่ศึกษา นั่นคือข้อมูลจะต้องมีการแจกแจงปกติ มีความแปรปรวนเท่ากันหมด และมีสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ระหว่างกรรมวิธี (หรือเงื่อนไข) เท่าๆ กัน แต่ถ้าข้อกำหนดไม่เป็นจริง ก็จำเป็นต้องใช้เทคนิคไร้พารามิเตอร์ เทคนิคเหล่านี้ก็เป็นรูปทั่วไปของแบบทดสอบเครื่องหมาย แบบทดสอบวิลคอกซันแบบจับคู่ และแบบทดสอบชนิดคะแนนปกติ ซึ่งได้ชื่อว่า แบบทดสอบฟรีด-แมน หรือการวิเคราะห์ความแปรปรวนสองทางชนิดอันดับที่ (Friedman Test or Two-way Analysis of Variance by Ranks) แบบทดสอบวิลคอกซันชนิดพหุคูณ (Multiple Wilcoxon Test) และแบบทดสอบคะแนนปกติหลายตัวอย่างแบบจับคู่ (Normal-Scores K-Matched-Sample Test) เป็นต้น

3.5.1 แบบทดสอบมัธยฐานทั่วไปในกรณีหลายตัวอย่างที่มีสหสัมพันธ์กัน (Median Test in Several Related Samples)

แบบทดสอบมัธยฐานทั่วไปใช้วิเคราะห์ค่าสังเกตที่ได้จากการวางแผนทดลองชนิดแบ่งบลอคสมบูรณ์ได้โดยแปลงค่าสังเกตในแต่ละบลอคว่าอยู่เหนือหรือใต้มัธยฐานในบลอคนั้นๆ ในแต่ละกรรมวิธีทดลองให้รวมค่าสังเกตที่อยู่เหนือและใต้มัธยฐาน แล้วจะได้ตารางจรณ์ 2 x k ดังนี้

กรรมวิธีทดลอง	1	2	...	k	รวม
เหนือมัธยฐาน	0_{11}	0_{12}		0_{1k}	a
ใต้มัธยฐาน	0_{21}	0_{22}		0_{2k}	b
รวม	n	n		n	kn

ในเมื่อ 0_{1j} และ 0_{2j} เป็นจำนวนค่าสังเกตในกรรมวิธี j (j = 1, 2, .., k) ที่อยู่เหนือและใต้มัธยฐานในแต่ละบลอค a กับ b เป็นผลรวมของค่าสังเกตที่อยู่เหนือและใต้มัธยฐานตามลำดับ และ n เป็นจำนวนบลอค

ตัวสถิติทดสอบจะเป็นเช่นเดียวกับแบบทดสอบมัธยฐานในกรณีหลายตัวอย่างที่เป็นอิสระกัน นั่นคือ

$$T = \sum_{i,j}^{2,k}(0_{ij} - E_{ij})^2/E_{ij}$$
$$= \frac{nk^2}{ab}\{\Sigma 0^2_{1j} - a^2/k\}$$

ถ้า a ≅ b แล้วตัวสถิติทดสอบ T จะเป็น

$$T = (1/n)\Sigma 0_{1j} - 0_{2j})^2$$

ตัวสถิติ T จะมีการแจกแจงแบบไคสแควร์ ด้วยองศาความเป็นอิสระ k-1

ตัวอย่าง ในการศึกษาปุ๋ย 4 ชนิด โดยใช้แปลงทดลอง 72 แปลง ที่มีขนาดเท่ากัน และพันธ์พืช 3 ชนิด เมื่อทำการทดลองแล้วได้ข้อมูลต่อแปลง ดังนี้

พันธ์พืช (k)	1				2				3			
ปุ๋ย (j)	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
แปลง 1	80.5	90.1	87.0	88.0	79.1	87.0	82.6	81.5	85.4	92.3	92.0	89.3
( ) 2	87.0	83.4	89.1	90.3	77.6	82.0	81.4	87.9	89.2	90.1	90.2	93.6
3	86.1	82.4	91.0	86.1	84.1	80.6	89.0	80.4	90.0	88.1	87.2	90.8
4	82.1	84.9	84.4	83.7	83.3	79.5	86.3	83.1	83.4	85.3	94.3	87.6
5	79.3	87.1	92.2	90.8	76.6	86.2	84.0	87.4	87.1	86.3	88.4	93.7
6	84.2	89.3	85.3	84.7	81.0	84.1	88.1	85.0	82.3	92.9	95.1	82.9

สมมติฐานที่จะทดสอบ จะเป็นดังนี้

Ho : ปุ๋ยต่างชนิดกันไม่ทำให้มัธยฐานของผลผลิตแตกต่างกัน

ให้ 0_{ijk} เป็นค่าสังเกตจากแปลงทดลอง i ใช้ปุ๋ย j และพันธ์ k เช่น 0_{213} เป็นผลผลิตจากแปลงทดลอง 2 ที่ใช้ปุ๋ย 1 และพันธ์พืช 3 ซึ่งมีค่าเป็น 89.2 แล้วทำการเปรียบเทียบ 0_{213} กับมัธยฐานของ (0_{213}, 0_{223}, 0_{233}, 0_{243}) นั่นคือ 89.2 เปรียบเทียบกับมัธยฐานของ (89.2, 90.1, 90.2, 93.6) ซึ่งจะได้เป็น 90.15 ถ้าค่าสังเกตมากกว่ามัธยฐาน ก็ให้แทนด้วย 1 แต่ถ้าน้อยกว่าก็ให้เป็น 0

ในทำนองเดียวกันก็เปรียบเทียบ 0_{ijk} อื่นๆ เช่นเดียวกัน แล้วจะได้ตาราง ดังต่อไปนี้

พันธุ์พืช	1				2				3			
ปุ๋ย	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
แปลง 1	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0
2	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	1
3	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1
4	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1
5	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	1
6	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0

ให้ 0_{ij} แทนจำนวนผลผลิตที่ใช้ปุ๋ย j และผลผลิตนี้มากกว่ามัธยฐาน ดังนั้น 0_{ij} เป็นจำนวนของ 1 นั่นเอง (j = 1, 2, .., k)

ปุ๋ย	1	2	3	4	รวม
จำนวน 1	3	8	14	10	35
จำนวน 0	15	10	4	8	37
	18	18	18	18	72

ดังนั้นตัวสถิติทดสอบจะให้ค่าเป็น

$$T = (3-15)^2/18+(8-10)^2/18+(14-4)^2/18+(10-8)^2/18$$
$$= 14.0$$

จากตารางไคสแควร์ที่มีองศาความเป็นอิสระ 4 - 1 = 3 และระดับนัยสำคัญ .05 จะได้ค่าวิกฤตเป็น 7.815 ดังนั้นจึงปฏิเสธ Ho นั่นคือปุ๋ยต่างชนิดกันจะให้มัธยฐานของผลผลิตไม่เท่ากันหมด

3.5.2 แบบทดสอบฟรีดแมน (Friedman Test, Two-way Analysis of Variance by Ranks)

แบบทดสอบนี้เป็นแบบทั่วไปของปัญหาการจับคู่ หรือสองตัวอย่างที่สัมพันธ์กัน ฟรีดแมน (1937) ได้พัฒนาแบบทดสอบนี้โดยอาศัยอันดับที่ นั่นคือค่าสังเกตจากการทดลองนั้นอย่างน้อยจะต้องเป็นแบบอันดับ

สมมติฐานหลักของแบบทดสอบฟรีดแมน จะเป็นดังนี้

Ho : ประชากรภายในบลอคจะเหมือนกัน หรือ

Ho : กรรมวิธีทดลองมีผลกระทบเหมือนกัน ($\tau_1 = \tau_2 = .. = \tau_k$) หรือ

Ho : กรรมวิธีทดลองมีค่ากลางเท่ากันหมด ($M_1 = M_2 = .. = M_k$)

ในการทดสอบสมมติฐานหลักนี้จะต้องอาศัยข้อมูลที่ประกอบด้วย b ตัวอย่าง (บลอค) ที่เป็นอิสระกันขนาด k (กรรมวิธี) ตัวแปรที่สนใจจะต้องเป็นแบบสุ่ม และค่าสังเกตภายในแต่ละบลอคอย่างน้อยต้องเป็นแบบอันดับ ระหว่างบลอคและกรรมวิธีต้องไม่มีผลกระทบร่วมกัน (Interaction) ข้อมูลดังกล่าวสามารถสรุปเป็นตาราง 2 ทาง ได้โดยมีทางหนึ่งเป็นบลอค และอีกทางหนึ่งเป็นกรรมวิธีทดลอง ดังนี้

กรรมวิธี	1	2	...	j	...	k
บลอค 1	X_{11}	X_{12}		X_{1j}		X_{1k}
2	X_{21}	X_{22}		X_{2j}		X_{2k}
	:	:				
i	X_{i1}	X_{i2}		X_{ij}		X_{ik}
	.	.				
b	X_{b1}	X_{b2}		X_{bj}		X_{bk}

ในเมื่อ X_{ij} แทนข้อมูลในบลอค i ของกรรมวิธี j (i = 1, 2, .., b ; j = 1, 2, .., b) และให้ $R(X_{ij})$ เป็นอันดับที่จาก 1 ถึง k ซึ่งกำหนดให้แก่ X_{ij} ภายในบลอค i นั่นคือสำหรับบลอค i ใด ๆ จะเปรียบเทียบค่าสังเกต X_{i1}, X_{i2}, .., X_{ik} ซึ่งกันและกัน โดยกำหนดอันดับ 1 ให้แก่ค่าต่ำสุด อันดับ 2 ให้แก่ค่าต่ำรองลงมา และต่อ ๆ ไปจนอันดับ k ให้แก่ค่าสูงสุด

ให้ $R_j = \Sigma R(X_{ij})$ เป็นผลรวมอันดับในกรรมวิธี j โดยมี $\bar{R}_j = R_j/b$ เป็นค่าเฉลี่ย และให้ $\bar{R} = \Sigma R_j/bk = (k+1)/2$ เป็นค่าเฉลี่ยรวมของอันดับ แล้วตัวสถิติทดสอบฟรีดแมน จะกำหนดไว้ดังนี้

$$S = \frac{12b}{k(k+1)} \Sigma(\bar{R}_j - \bar{R})^2$$

$$= \frac{12}{bk(k+1)} \Sigma(R_j - b\bar{R})^2$$

$$= \frac{12}{bk(k+1)} \Sigma R_j^2 - 3b(k+1)$$

ถ้าค่าสังเกตภายในบลอคเท่ากัน จะต้องปรับปรุงด้วยแฟคเตอร์ f ซึ่งจะได้ตัวสถิติทดสอบ S' ดังนี้

$$S' = S / f$$

ในเมื่อ $f = 1 - \Sigma G_i / bk\,(k^2-1)$ โดยที่ $G_i = \Sigma g_i^3 - \Sigma g_i$ และ g_i เป็นจำนวนค่าสังเกตที่เท่ากันสำหรับอันดับที่หนึ่งๆ ในบลอค i

เกณฑ์ตัดสินใจ ณ ระดับนัยสำคัญ α จะกำหนดไว้ว่า จะปฏิเสธ Ho ถ้า $S \geq s(\alpha, k, n)$ ในเมื่อ $s(\alpha, k, n)$ เป็นค่าคงที่จากตาราง 25 ซึ่งสอดคล้องกับสมการ

$$P\{S \geq s(\alpha, k, n)\} = \alpha$$

สำหรับตัวอย่างขนาดโต ($b \rightarrow \infty$) ตัวสถิติทดสอบ S จะมีการแจกแจงแบบไคสแควร์ด้วยองศาความเป็นอิสระ k-1 ดังนั้นเกณฑ์ตัดสินใจสำหรับตัวอย่างขนาดโต จึงกำหนดไว้ว่า จะปฏิเสธ Ho ณ ระดับนัยสำคัญ α ถ้า $S = \chi_{\alpha}^{2(k-1)}$

ตัวอย่าง ชาวสวนซึ่งมีอาชีพปลูกหญ้าขาย ต้องการที่จะทราบว่า หญ้าชนิดใดใน 4 ชนิด นั้นเป็นที่นิยมของประชาชน จึงทำการทดลองโดยการสุ่มบ้านที่จะปลูกหญ้ามา 12 หลัง แต่ละหลังปลูกหญ้าแต่ละชนิด พอหญ้าเจริญงอกงามสักระยะหนึ่งก็ให้เจ้าบ้านเรียงอันดับหญ้าที่ชอบจากน้อยไปมาก โดยใช้เกณฑ์ที่สำคัญ เช่นค่าใช้จ่าย ค่าบำรุงรักษา ความสวย และอื่นๆ ผลจากการทดลอง ได้ข้อมูลที่เป็นอันดับที่ ดังนี้ (1 แทนชอบน้อยที่สุด)

หญ้า	1	2	3	4
เจ้าบ้าน 1	4	3	2	1
2	4	2	3	1
3	3	1	2	4
4	3	1	2	4
5	4	2	1	3
6	3	1	2	4
7	1	3	2	4
8	2	4	1	3
9	3	1	2	4
10	4	1	3	2
11	4	2	3	1
12	3	1	2	4
	38	22	25	35

สมมติฐานที่จะทดสอบ

Ho : หญ้าทั้งสี่ชนิดได้รับความนิยมพอ ๆ กัน

Ha : มีหญ้าบางชนิดได้รับความนิยมมากกว่า

$$S = \frac{12}{12(4)(5)} \{(38-30)^2+(22-30)^2+(25-30)^2+(35-30)^2\} = 8.9$$

ในเมื่อ $b\bar{R} = b(k+1)/2 = 12(4+1)/2 = 30$

เมื่อ $\alpha = .05$ จะได้ $\chi^{2(4-1)} = 7.815$ จึงปฏิเสธ Ho นั่นคือมีหญ้าบางชนิดได้รับความนิยมมากกว่า

เมื่อปฏิเสธสมมติฐานหลัก และต้องการเปรียบเทียบระหว่างกรรมวิธี ก็ทำได้โดยการเปรียบเทียบพหุคูณ นั่นคือ สองวิธีการใด ๆ จะแตกต่างกัน ถ้า

$$|R_i - R_j| \geq Z\alpha_0 \sqrt{bk(k+1)/b}\ ; \ i, j = 1, 2, .., k\ (i<j)$$

ในเมื่อ $\alpha_0 = \alpha/k(k-1)$

หรือ $|\bar{R}_i - \bar{R}_j| \geq \sqrt{\chi_\alpha^{2(k-1)}}\sqrt{k(k+1)/6b}$

ตามที่ มาราสคุยโล และ แมคสวีนนีย์ (Marascuilo and McSweeney, 1967) เสนอไว้ตามเชฟฟี (Scheffe' Theorem) หรือใช้เกณฑ์ตัดสินใจตามวิธีการของ ทูกี้ (Tukey's Method) สำหรับเปรียบเทียบเป็นคู่ ดังนี้

$$M_i \neq M_j \text{ ถ้า } |\bar{R}_i - \bar{R}_j| \geq q(\alpha, k, \infty) \sqrt{k(k+1)/12b}$$

วิธีการของทูกี้นี้ใช้วิเคราะห์เป็นคู่ที่วางแผนไว้แล้ว (Planned Pairwise Analysis) ด้วย

โรเซนธัล และเฟอร์กูสัน (Rosenthal - Ferguson, 1965) ได้เสนอวิธีการเปรียบเทียบเป็นคู่ภายหลังไว้ ซึ่งมีประสิทธิภาพดีกว่าวิธีการของเชฟฟี และวิธีการของทูกี้ แต่วิธีการของโรเซนธัล-เฟอร์กูสันจะเสียเวลาในการคำนวณมาก ช่วงเชื่อมั่นของความแผกกันเป็นคู่ $\varphi = M_i - M_j$ ของโรเซนธัล-เฟอร์กูสัน กำหนดไว้ดังนี้

$$\varphi = \hat{\varphi} \pm S\sqrt{V(\hat{\varphi})}$$
$$= (\bar{R}_i - \bar{R}_j) \pm S\sqrt{V(\hat{\varphi})}\ ; \ i < j = 1, 2, .., k$$

ในเมื่อ $\hat{\varphi} = \bar{R}_i - \bar{R}_j$ เป็นค่าประมาณไม่เอียงเฉของ $\varphi = M_i - M_j$ โดยมี $V(\hat{\varphi})$ กำหนดไว้เป็น

$$V(\hat{\varphi}) = (1/b)\{S^2_{R_i} + S^2_{R_j} - 2\, r_{ij} S_{R_i} S_{R_j}\}$$

โดยที่ $S^2_{R_i}$ และ $S^2_{R_j}$ เป็นความแปรปรวนของอันดับที่ในกรรมวิธีทดลอง i และ j ตามลำดับ และ r_{ij} เป็นสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบอันดับที่สเปียร์แมน (Spearman) ระหว่างกรรมวิธี i และ j สำหรับ S กำหนดไว้ดังนี้

$$S = \sqrt{\frac{(k-1)(b-1)}{(b-k+1)} F_\alpha^{(k-1,b-k+1)}}$$

ในบางครั้งสนใจการเปรียบเทียบภายหลังเกี่ยวกับความแผกกันของค่าอันดับที่ในกรรมวิธีความแผกกันที่สนใจก็จะเป็น

$$\varphi = a_1M_1+a_2M_2+ \ldots + a_kM_k$$

ในเมื่อ $a_1, a_2, .., a_k$ เป็นค่าคงที่ซึ่งผู้สนใจจะกำหนดขึ้นมา และ $a_1+a_2+\ldots+a_k = 0$ ซึ่งความแผกกันนี้จะประมาณด้วย

$$\hat{\varphi} = a_1\bar{R}_1+a_2\bar{R}_2+ \ldots + a_k\bar{R}_k$$

ความแปรปรวนของ $\hat{\varphi}$ นี้ มาราสคุยโล และ แมคสวีนนีย์ (1967) ได้กำหนดไว้เป็น

$$V(\hat{\varphi}) = \frac{k(k-1)}{12} \Sigma a_i^2/b$$

ตามทฤษฎีของเชฟฟี จะได้ช่วงเชื่อมั่น เป็น

$$\varphi = \hat{\varphi} \pm \sqrt{\chi^{2(k-1)}_{\alpha}}\sqrt{V(\hat{\varphi})}$$

ความแผกกันที่น่าสนใจอีกก็คือ ความแผกกันซึ่งแสดงถึงความสัมพันธ์เชิงเส้นในอันดับที่เฉลี่ย สำหรับกรณี 4 กรรมวิธี จะได้ความแผกกันชนิดเชิงเส้น เป็น

$$\varphi_{lin} = -3M_1 - 1M_2 + 1M_3 + 3M_4$$

และบางครั้งสนใจความสัมพันธ์แบบกำลังสอง กำลังสาม (Quadratic, Cubic) ซึ่งจะได้ความแผกกันดังนี้

$$\varphi_{quad} = 1M_1 - 1M_2 + 1M_3 + 1M_4$$

$$\varphi_{cub} = -1M_1 + 3M_2 - 3M_3 + 1M_4$$

สำหรับการเปรียบเทียบเป็นคู่นั้น ยังมีวิธีการที่น่าสนใจอีก จะได้กล่าวต่อไป

กรณีหลายค่าสังเกตต่อหน่วย (Several Observations Per Unit)

ในกรณีที่มีหลายค่าสังเกตต่อหน่วยทดลอง ก็สามารถปรับปรุงแบบทดสอบฟรีดแมนเพื่อใช้วิเคราะห์ได้ สมมติว่ามี m ค่าสังเกตต่อหน่วยทดลอง ดังนั้นในบลอคหนึ่ง ๆ จะมีค่าสังเกตเป็น mk ค่า นั่นคือ แต่ละเซลล์ (i, j) จะมีค่าสังเกตเป็น $X_{ij1}, X_{ij2}, .., X_{ijm}$ การให้อันดับที่ในบลอคหนึ่ง ๆ จะเป็น 1 ถึง mk เมื่อกำหนด R_j เป็นผลรวมของอันดับที่ในกรรมวิธี j แล้วตัวสถิติทดสอบฟรีดแมน จะเป็น

$$S_m = \frac{12}{bkm^2(mk+1)} \Sigma\{R_j - bm(mk+1)/2\}^2$$

$$= \frac{12}{bkm^2(mk+1)} \Sigma R_j^2 - 3b(mk+1)$$

ซึ่งมีการแจกแจงไคสแควร์ ด้วยองศาความเป็นอิสระ k-1

ในกรณีที่จะหาแหล่งที่ทำให้เกิดการปฏิเสธสมมติฐานหลักนั้น จะต้องพิจารณาความแผกกันในค่าเฉลี่ย R_j โดยทั่วไปความแผกกันจะเป็น

$$\varphi = a_1M_1+a_2M_2+ \ldots + a_kM_k$$

ซึ่งมีตัวประมาณค่าแบบไม่เอียงเฉเป็น

$$\hat{\varphi} = a_1R_1+a_2R_2+ \ldots + a_kR_k$$

สำหรับความแปรปรวนของ $\hat{\varphi}$ จะเป็น

$$V(\hat{\varphi}) = \frac{mk(mk+1)}{12} \Sigma a_j^2/mb$$

แบบทดสอบฟรีดแมน จะมีลักษณะเช่นเดียวกับแบบทดสอบครัสคัล-วอลลิส เพราะสามารถแยกออกเป็น k-1 ส่วน ที่เป็นอิสระได้ แต่ละส่วนจะมีการแจกแจงไคสแควร์ ด้วยองศาความเป็นอิสระ 1 ดังนั้นถ้าต้องการทดสอบความแผกกันที่สนใจซึ่งวางแผนไว้ก่อน ก็ใช้แบบทดสอบไคสแควร์ชนิดหนึ่งองศาความเป็นอิสระที่วางแผนไว้ เช่นต้องการทดสอบความสัมพันธ์เชิงเส้น φ_{lin} ก็ใช้ตัวสถิติทดสอบ χ_1^2

$$\chi_1^2 = \hat{\varphi}^2_{lin}/V(\hat{\varphi}_{lin})$$

ซึ่งสามารถสรุปได้ดังตารางต่อไปนี้

แหล่งความผันแปร	องศาความเป็นอิสระ	ค่าของ χ^2
ความสัมพันธ์เชิงเส้น	1	χ_1^2
ความคลาดเคลื่อน	k-2	$S - \chi_1^2$
รวม	k-1	S

ตัวสถิติทดสอบฟรีดแมนนี้มีความสัมพันธ์กับสัมประสิทธิ์ของการสอดคล้องแบบเคนดาลล์ (Kendall's Coefficient of Concordance, W) ซึ่งสัมประสิทธิ์นี้ใช้เป็นมาตราวัดการเห็นคล้อยกันในการให้อันดับที่ (Measure of Agreement in Rankings) ในบลอคต่าง ๆ และกำหนดไว้ดังนี้

$$W_m = \frac{12}{b^2k(k^2-1)} \Sigma\{R_j - b(k+1)/2\}^2$$
$$= S / b(k-1)$$

และในทำนองเดียวกันตัวสถิติฟรีดแมน ยังมีความสัมพันธ์กับสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบอันดับที่ของสเปียร์แมน (Spearman's Rho, ρ_{id}) ระหว่างสองบลอค i และ d ใด ๆ สำหรับค่าเฉลี่ยของสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ระหว่างสองบลอคใด ๆ จะให้เป็น ρ_a ซึ่งกำหนดไว้ว่า

$$\rho_a = \frac{1}{b(b-1)} \{\sum_{i,d} \rho_{id} - b\}$$
$$= S / (b-1)(k-1) - 1/(b-1)$$

ในเมื่อ ρ_{id} เป็นสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ระหว่างสองบลอคใด ๆ และกำหนดไว้ว่า

$$\rho_{id} = \Sigma\{R(X_{ij})-(k+1)/2\}\{R(X_{ij})-(k+1)/2\}/\{k(k+1)(k-1)/12\}$$

ถ้า $\rho_a = 1$ ก็แสดงว่าการให้อันดับที่สอดคล้องกันอย่างสมบูรณ์ จากความสัมพันธ์ทั้งสองนี้จึงสามารถใช้แบบทดสอบฟรีดแมนสำหรับทดสอบความพึ่งพิงเชิงเส้น (Linear Dependence) ของตัวอย่าง โดยที่ ρ สามารถประยุกต์ได้

3.5.3 การเปรียบเทียบพหุคูณโดยอาศัยผลรวมอันดับที่ฟรีดแมน (Multiple Comparisons based on Friedman Rank Sums)

(1) การเปรียบเทียบทุกกรรมวิธี ในการเปรียบเทียบสองกรรมวิธีใดๆ โดยใช้อัตราความคลาดเคลื่อนตามการทดลอง นั้นมีเกณฑ์ตัดสินใจ ดังนี้

$$M_u \neq M_v \text{ ถ้า } |R_u - R_v| \geq r(\alpha, k, n) \ ; \ u < v$$

ในเมื่อ n = b เป็นจำนวนบลอค และค่า $r(\alpha, k, n)$ เป็นค่าคงที่จากตาราง 26 ซึ่งสอดคล้องกับสมการ

$$P\{|R_u - R_v| < r(\alpha, k, n) \ ; \ u, v = 1, 2, .., k \ ; \ u < v\} = 1 - \alpha$$

สำหรับตัวอย่างขนาดโต ($b \rightarrow \infty$) จะได้เกณฑ์ตัดสินใจ ดังนี้

$$M_u \neq M_v \text{ ถ้า } |R_u - R_v| \geq q(\alpha, k, \infty) \sqrt{bk(k+1)/12}$$

ในเมื่อ $q(\alpha, k, \infty)$ เป็นค่าคงที่จากตาราง 30

$$\text{หรือ } M_u \neq M_v \text{ ถ้า } |R_u - R_v| \geq Z_{\alpha/k(k-1)} \sqrt{bk(k+1)/6}$$

ตัวอย่าง ในการศึกษาบรรยากาศของการทำงาน 3 แบบ ว่าจะใช้เวลาทำงานในการผลิตสินค้าหน่วยหนึ่งเป็นเวลาเท่าๆ กันหรือไม่ ปรากฏผลทดลองโดยอาศัยผู้ทดลอง 22 คน ดังนี้

บรรยากาศ	1	2	3
ผู้ทดลอง 1	5.40 (1)	5.50 (2)	5.55 (3)
2	5.85 (3)	5.70 (1)	5.75 (2)
3	5.20 (1)	5.60 (3)	5.50 (2)
4	5.55 (3)	5.50 (2)	5.40 (1)
5	5.90 (3)	5.85 (2)	5.70 (1)
6	5.45 (1)	5.55 (2)	5.60 (3)
7	5.40 (2.5)	5.40 (2.5)	5.35 (1)
8	5.45 (2)	5.50 (3)	5.35 (1)
9	5.25 (3)	5.15 (2)	5.00 (1)
10	5.85 (3)	5.80 (2)	5.70 (1)
11	5.25 (3)	5.20 (2)	5.10 (1)
12	5.65 (3)	5.55 (2)	5.45 (1)
13	5.60 (3)	5.35 (1)	5.45 (2)
14	5.05 (3)	5.00 (2)	4.95 (1)
15	5.50 (2.5)	5.50 (2.5)	5.40 (1)
16	5.45 (1)	5.55 (3)	5.50 (2)
17	5.55 (2.5)	5.55 (2.5)	5.35 (1)
18	5.45 (1)	5.50 (2)	5.55 (3)
19	5.50 (3)	5.45 (2)	5.25 (1)
20	5.65 (3)	5.60 (2)	5.40 (1)
21	5.70 (3)	5.65 (2)	5.55 (1)
22	6.30 (2.5)	6.30 (2.5)	6.25 (1)
R_j	53	47	32

$$S = \frac{12}{22(3)(4)} \{53^2+47^2+32^2\} - 3(22)(4) = 10.64$$

เมื่อ α = .05 จะได้ $\chi^2_{(2)}$ = 5.991 จึงสรุปได้ว่า บรรยากาศในการทำงาน 3 แบบ นั้น ใช้เวลาในการผลิตสินค้าต่อหน่วยไม่เท่ากันหมด

เมื่อทำการเปรียบเทียบเป็นคู่ทุกกรรมวิธีโดยวิธีตัวอย่างขนาดโต จะได้ดังนี้

$$|R_u - R_v| \geq 4.12\sqrt{22(3)(4)/12} = 19.3$$

โดยที่ q(.OI, 3, ∞) = 14.2 (จากตาราง 30)

สำหรับ $|R_1 - R_2| = 6$, $|R_1 - R_3| = 21$ และ $|R_2 - R_3| = 15$ จึงได้ว่า บรรยากาศ 1 ต่างจาก 3 ณ a = .01

(2) เปรียบเทียบกรรมวิธีทดลองกับกรรมวิธีควบคุม ให้กรรมวิธี 1 เป็นกรรมวิธีควบคุม หรือมาตรฐาน โดยมีกรรมวิธีทดลอง 2, 3, .., k เป็นกรรมวิธีที่จะเปรียบเทียบ แล้วเกณฑ์ตัดสินใจเมื่อกำหนดอัตราความคลาดเคลื่อนตามการทดลอง α จะเป็นดังนี้

$$M_u > M_v \text{ ถ้า } R_u - R_1 \geq r^*(\alpha, k-1, n) \text{ ; } u = 2, 3, .., k$$

ในเมื่อ n = b เป็นจำนวนบลอค และ $r^*(\alpha, k-1, n)$ เป็นค่าคงที่จากตาราง 27 ซึ่งสอดคล้องกับสมการ

$$P\{R_u - R_1 < r^*(\alpha, k-1, n) \text{ ; } u = 2, 3, .., k\} = 1 - \alpha$$

$$\text{และ} \quad M_u \neq M_1 \quad \text{ถ้า } |R_u - R_1| \geq r^{**}(\alpha, k-1, n)$$

ในเมื่อ n = b เป็นจำนวนบลอค และ $r^{**}(\alpha, k-1, n)$ เป็นค่าคงที่จากตาราง 28 ซึ่งทำให้

$$P\{|R_u - R_1| < r^{**}(\alpha, k-1, n) \text{ ; } u = 2, 3, .., k\} = 1 - \alpha$$

สำหรับตัวอย่างขนาดโต (n = b $\rightarrow \infty$) จะประมาณเกณฑ์ตัดสินใจดังกล่าวได้ดังนี้

$$M_u > M_1 \text{ ถ้า } R_u - R_1 \geq m(\alpha, k-1, \rho = 1/2) \sqrt{bk(k+1)/6}$$

ในเมื่อ $m(\alpha, k-1, \rho = 1/2)$ เป็นค่าคงที่จากตาราง 22

$$\text{และ} \quad M_u \neq M_1 \quad \text{ถ้า } |R_u - R_1| = |m|(\alpha, k-1, \rho = 1/2) \sqrt{bk(k+1)/6}$$

ในเมื่อ $|m|(\alpha, k-1, \rho = 1/2)$ เป็นค่าคงที่จากตาราง 23

ตัวอย่าง ในการเปรียบเทียบรสชาติกาแฟที่ผลิตขึ้นใหม่ 2 ยี่ห้อ (ข, ค) กับกาแฟเดิม (ก) ได้ผลการเปรียบเทียบโดยให้อันดับที่ ดังนี้

กาแฟ	ก	ข	ค	กาแฟ	n	ข	A
ผู้ทดลอง 1	3	1	2	ผู้ทดลอง 10	3	1	2
2	1.5	3	1.5	11	2	3	1
3	1	3	2	12	1	3	2
4	2	1	3	13	2	3	1
5	1.5	1.5	3	14	2	2	2
6	1	3	2	15	3	2	1

กาแฟ	ก	ข	ค
7	2	1	3
8	1	2	3
9	1	2.5	2.5

กาแฟ	ก	ข	ค
16	1	3	2
17	3	1	2
18	2	3	1
R_j	33	39	36

เมื่อใช้ตัวอย่างขนาดโต ณ α = .05 จะได้ $|m|(.05, 2, 1/2) = 2.21$ (จากตาราง 23) ดังนั้น

$$|R_u - R_1| \geq 2.21\sqrt{18(3)(4)/6} = 13.26$$

และ $|R_2 - R_1| = 6$, $|R_3 - R_1| = 3$ นั่นคือกาแฟใหม่ 2 ยี่ห้อมีรสชาติไม่แตกต่างจากกาแฟเดิม ณ α = .05

3.5.4 การรวมแบบทดสอบฟรีดแมนสำหรับขนาดตัวอย่างไม่เท่ากัน (Combined Friedman Tests for Unequal Sample Size)

ในการเปรียบเทียบกรรมวิธีหรือเงื่อนไขต่างๆ โดยอาศัยแบบทดสอบฟรีดแมนนั้น ถ้าทำกับกลุ่มต่างๆ ที่มีขนาดไม่เท่ากัน แต่ทดสอบสมมติฐานเดียวกัน แล้วสามารถรวมเป็นแบบทดสอบเดียวๆ เพื่อทดสอบสมมติฐานวิจัยได้ เช่นในการเรปรียบเทียบเงื่อนไขต่างๆ กับกลุ่มนักศึกษาต่างๆ ที่มีขนาดไม่เท่ากัน ก็จะทำการเปรียบเทียบเงื่อนไขต่างๆ กับแต่ละกลุ่มโดยอาศัยแบบทดสอบฟรีดแมน แล้วรวมเป็นกลุ่มใหญ่ ซึ่งก็สามารถใช้แบบทดสอบฟรีดแมนประยุกต์ได้

ให้กลุ่มต่างๆ มี G กลุ่ม แต่ละกลุ่มมีขนาดตัวอย่างเป็น n_g ดังนั้นตัวอย่างทั้งหมดจะเป็น $N = \Sigma n_g$ และให้ R_j เป็นผลรวมของอันดับในแต่ละกลุ่มที่ได้รับกรรมวิธี j นั่นคือ

$$R_j = R_{1j} + R_{2j} + \dots + R_{GJ}\ ,\ i = 1, 2, .., k$$

ในเมื่อ $R_{1j}, R_{2j}, .., R_{Gj}$ เป็นผลรวมอันดับในกลุ่ม 1, 2, .., G ของกรรมวิธี j แล้วตัวสถิติฟรีดแมนจะกำหนดไว้เป็น

$$S_c = \frac{12}{Nk(k+1)} \quad \Sigma R_j^2 - 3N(k+1)$$

ซึ่งมีการแจกแจงไคสแควร์ ด้วยองศาความเป็นอิสระ k–1

ตัวอย่าง ในการศึกษากรรมวิธีทดลอง 8 แบบ กับกลุ่มอาชีพ 3 อาชีพ ได้ผลรวมอันดับที่ และค่าเฉลี่ยอันดับที่ในแต่ละกรรมวิธี พร้อมทั้งค่าของตัวสถิติทดสอบฟรีดแมน S_i ในแต่ละอาชีพเป็นดังนี้

กรรมวิธี	12	3	4	5	6	7	8	ขนาดตัวอย่าง	S_i
อาชีพ ก R_{1j}	160 205	144	163	213	155	166	163	38	18.4
$\bar{R}_{1j}$	4.2 5.4	3.8	4.3	5.6	4.1	4.4	4.3		
ข R_{2j}	190 320	216	199	281	202	213	254	52	48.7
$\bar{R}_{2j}$	3.7 6.2	4.2	3.8	5.4	3.9	4.1	4.9		

กรรมวิธี	1	2	3	4	5	6	7	8	ขนาดตัวอย่าง	S_i
ค R_{3j}	429	715	441	500	666	511	546	475	119	106.2
$\bar{R}_{3j}$	3.6	6.0	3.7	4.2	5.6	4.3	4.6	4.0		
R_j รวม	779	1240	801	862	1160	868	924	891	209	159.1
$\bar{R}_j$	3.7	5.9	3.8	4.1	5.6	4.2	4.4	4.3		

ดังนั้น

$$S_c = \frac{12}{209(8)(8+1)}\{779^2+1240^2+801^2+862^2+1160^2+868^2+924^2+891^2\} - 3(209)(8+1)$$

$$= 5802.0476 - 5643.0000 = 159.05$$

เนื่องจาก $\chi^{2(7)}_{.05} = 14.07$ จึงปฏิเสธ Ho ($S_c > 159.05$)

3.5.5 แบบทดสอบสมมติฐานรองชนิดอันดับของเพจ (Page's Test for Ordered Alternatives)

ในบางสถานการณ์ สมมติฐานรองแบบอันดับจะมีความหมายกว่าที่ไม่คำนึงถึงอันดับ แบบทดสอบที่ เพจ (1963) ได้เสนอไว้ จะใช้วิเคราะห์ปัญหาดังกล่าวนี้ สำหรับสมมติฐานทดสอบจะเป็น

Ho : ประชากรภายในบลอคจะเหมือนกัน

หรือ Ho : $M_1 = M_2 = .. = M_k$

Ha : $M_1 \le M_2 \le .. \le M_k$

หรือ Ha : $\tau_1 \le \tau_2 \le .. \le \tau_k$

การทดสอบสมมติฐานนี้ก็อาศัยตัวอย่างสุ่มที่มีลักษณะเดียวกับแบบทดสอบฟรีดแมน แต่ตัวสถิติทดสอบกำหนดไว้ดังนี้

$$L = \Sigma jR_j = R_1 + 2R_2 + 3R_3 + ... + kR_k$$

ในเมื่อ $R_1, R_2, .., R_k$ เป็นผลรวมอันดับที่ในกรรมวิธีทดลองซึ่งหาได้เช่นเดียวกับแบบทดสอบฟรีดแมน

ถ้าผลกระทบกรรมวิธีเป็นแบบอันดับ ดังที่ระบุในสมมติฐานรอง Ha แล้ว R_v จะมากกว่า R_u สำหรับ u<v หรือถ้ามีสามกรรมวิธีและผลกระทบเป็นแบบอันดับตามสมมติฐานรอง Ha แล้ว R_1 จะน้อยกว่า R_2 และ R_2 น้อยกว่า R_3 เนื่องจากผลรวมอันดับได้รับการถ่วงน้ำหนักด้วยดัชนีของตำแหน่งในการเรียงลำดับดังที่ระบุในสมมติฐานรอง Ha L โน้มเอียงที่จะโตเมื่อ Ha เป็นจริง

เกณฑ์ตัดสินใจ ณ ระดับนัยสำคัญ α กำหนดไว้ว่า ปฏิเสธ Ho ถ้า $L = l(\alpha, k, n)$ ในเมื่อ $l(\alpha, k, n)$ เป็นค่าคงที่จากตาราง 29 ซึ่งสอดคล้องกับสมการ

$$P\{L \ge l(\alpha, k, n)\} = \alpha$$

ในกรณีตัวอย่างขนาดโต ($n = b \rightarrow \infty$) ก็ใช้การประมาณค่าด้วยตัวสถิติทดสอบ Z ซึ่งมีการแจกแจงปกติมาตรฐาน

$$Z = \frac{L - bk(k+1)^2/4}{\sqrt{b(k^3-k)^2/144(k-1)}}$$

เมื่อ k = 2 แบบทดสอบเพจ จะเป็นแบบทดสอบเครื่องหมายทางเดียว (One - sided Sign Test)

ตัวสถิติทดสอบเพจ L จะสัมพันธ์โดยตรงกับสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบอันดับสเปียร์แมน r นั่นคือ ถ้า r_i แทนสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ระหว่างอันดับซึ่งสังเกตได้กับอันดับที่ตามที่กล่าวไว้ในบลอค i แล้วสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์เฉลี่ย $\bar{r}$ จะเขียนได้ในเทอมของตัวสถิติ L ดังนี้

$$\bar{r} = \Sigma r_i/b = \frac{12L}{bk(k^2-1)} - \frac{3(k+1)}{(k-1)}$$

ตัวอย่าง ในการศึกษาเพื่อเปรียบเทียบปุ๋ยข้าว 4 สูตร ซึ่งมีส่วนผสมของไนโตรเจนต่างๆ กัน จากน้อยไปมาก ได้ผลผลิตของข้าวต่อแปลงดังนี้

ระดับไนโตรเจน		1	2	3	4
ซ้ำ	1	7.46 (2)	7.17 (1)	7.76 (3)	8.14 (4)
	2	7.68 (2)	7.57 (1)	7.73 (3)	8.15 (4)
	3	7.21 (1)	7.80 (3)	7.74 (2)	7.87 (4)
	R_i	5	5	8	12

L = 5 + 2(5) + 3(8) + 4(12) = 87

เมื่อ α = .01, k = 4 และ n = 3 จึงได้ l(.01, 4, 3) = 87 ดังนั้นจึงปฏิเสธ Ho ณ อัตราความคลาดเคลื่อน .01 นั่นคือผลผลิตเพิ่มขึ้นตามระดับไนโตรเจน

3.5.6 แบบทดสอบวิลคอกซันชนิดจับคู่พหุคูณ (Multiple Matched - Pair Wilcoxon Tests)

เนื่องจากแบบทดสอบฟรีดแมนที่มีสองกรรมวิธีเท่านั้นจะเหมือนกับแบบทดสอบเครื่องหมาย จึงถือว่าแบบทดสอบฟรีดแมนเป็นแบบทั่วไปของแบบทดสอบเครื่องหมาย และเป็นที่ทราบกันว่าแบบทดสอบเครื่องหมายมีอำนาจทดสอบน้อยกว่าแบบทดสอบวิลคอกซันชนิดอันดับที่เครื่องหมาย ดังนั้นจึงเป็นการดีที่ใช้วิธีการที่ขึ้นอยู่กับตัวสถิติวิลคอกซัน เมื่อมีหลายๆ กรรมวิธี วิธีการนั้นได้ชื่อว่า แบบทดสอบวิลคอกซันชนิดจับคู่พหุคูณ ซึ่งแบบทดสอบนี้นอกจากจะมีอำนาจทดสอบมากสำหรับความแผกกันที่ระบุไว้แล้วยังให้ช่วงเชื่อมั่นสำหรับความแตกต่างมัธยฐานของค่าสังเกตเดิมอีกด้วย วิธีการหลังทดลองของแบบทดสอบฟรีดแมนจะมีข้อเสียเปรียบในข้อนี้ เพราะให้แต่อันดับที่เฉลี่ย เพราะฉะนั้นจึงควรใช้แบบทดสอบวิลคอกซันชนิดจับคู่พหุคูณกับความแผกกันเป็นคู่ที่สนใจ และวางแผนไว้ก่อนเท่านั้น สำหรับระดับนัยสำคัญ α ต้องควบคุมไว้โดยที่การทดสอบแต่ละครั้งของความแผกกันเป็นคู่จะควบคุม α ให้เป็น α/k ในเมื่อ $Q = \binom{k}{2}$ วิธีการเช่นนี้จะเป็นวิธีการประยุกต์วิธีการของบอนเฟอร์โรนิ (Bonferroni Procedure) ซึ่งเป็นวิธีการที่ดี

ตัวอย่างในการศึกษาเกี่ยวกับการระลึกจำนวนเลข 3 หลัก ของเด็กนักเรียนที่เป็นตัวอย่าง 10 ราย ได้ผลจากการทดสอบ 4 ครั้ง (ห่างกันเดือนละครั้ง) ซึ่งเป็นจำนวนข้อที่ผิดจากปัญหา 50 ข้อ ดังนี้

เดือน		1		2		3		4	
นักเรียน	ก	38	(1)	30	(2)	10	(3)	8	(4)
	ข	32	(1)	30	(2)	9	(3)	5	(4)
	ค	37	(1)	33	(2)	15	(3)	10	(4)
	ง	35	(2)	41	(1)	22	(3)	12	(4)
	จ	31	(2)	33	(1)	28	(3)	20	(4)
	ฉ	36	(1)	20	(2)	8	(3)	2	(4)
	ช	29	(1)	5	(3)	6	(2)	1	(4)
	ซ	46	(1)	33	(2)	32	(3)	29	(4)
	ฌ	41	(2)	45	(1)	28	(4)	32	(3)
	ญ	46	(1)	40	(2)	27	(4)	29	(3)
			13		18		31		38

สำหรับ k = 4 นั้นต้องทำการทดสอบเป็นคู่จำนวน $\binom{4}{2}$ = 6 ครั้ง ถ้าทำการทดสอบแต่ละครั้งใช้ α = .05/6 = .0083 แล้วโอกาสที่ความคลาดเคลื่อนแบบ 1 จะเกิดขึ้นอย่างน้อยหนึ่งครั้งจะกำหนดไว้เป็น $\alpha_T \leq .05$

เมื่ออาศัยตารางพิเศษที่มี n = 10 จะเห็นว่าสมมติฐานหลักที่ว่า ไม่มีความแตกต่างเป็นคู่นั้นจะได้รับการปฏิเสธ ถ้าค่าหนึ่งค่าใด 6 ค่า ของตัวสถิติวิลคอกซันอยู่ในเขตปฏิเสธ นั่นคือ T ≤ 3 หรือ T ≥ 52 ตามเกณฑ์ตัดสินใจนี้จะทำการเปรียบเทียบแต่ละครั้งที่ α = .01 ดังนั้น $\alpha_T \leq 6(.01) = .06$ ถ้ามีตารางสมบูรณ์ก็สามารถหาเกณฑ์ตัดสินใจที่สอดคล้องกับความสัมพันธ์ α_T = .05 ได้ แต่ตารางที่มีอยู่ทำไม่ได้

ผลของการทดสอบ 6 ครั้ง สรุปได้ดังตารางต่อไปนี้ ซึ่งจะเห็นว่าความแตกต่างมีนัยสำคัญถึง 4 คู่ แต่ถ้าใช้วิธีการหลังทดลองที่อาศัยตัวสถิติฟรีดแมน จะมีนัยสำคัญเพียง 3 คู่ (1 กับ 3, 1 กับ 4, และ 2 กับ 4)

การเปรียบเทียบ (1, 2) ได้ค่า T เป็น 10.5 ช่วงเชื่อมั่น $-4 \leq \Delta \leq 16$ NS
(1, 3) ได้ค่า T เป็น 0 ช่วงเชื่อมั่น $13 \leq \Delta \leq 25.5$ Sig
(1, 4) ได้ค่า T เป็น 0 ช่วงเชื่อมั่น $11 \leq \Delta \leq 30$ Sig
(2, 3) ได้ค่า T เป็น 0.5 ช่วงเชื่อมั่น $2 \leq \Delta \leq 20$ Sig
(2, 4) ได้ค่า T เป็น 0 ช่วงเชื่อมั่น $7.5 \leq \Delta \leq 25$ Sig
(3, 4) ได้ค่า T เป็น 5.00 ช่วงเชื่อมั่น $-0.5 \leq \Delta \leq 8$ NS

ในเมื่อ NS : ไม่มีนัยสำคัญ และ Sig : มีนัยสำคัญ

ตัวสถิติ T นี้จะใช้เป็นผลรวมของอันดับที่ของค่าที่เป็นลบ และช่วงเชื่อมั่นจะอยู่ในสเกลของค่าเดิม ดังนั้นจะเห็นได้ว่ามี 2 ช่วง ที่รวม 0 ไว้ด้วย

เนื่องจากสามารถใช้คะแนนปกติในแบบทดสอบวิลคอกซันชนิดจับคู่ได้ จึงสามารถใช้คะแนนปกติในปัญหาหลายตัวอย่างที่จับคู่ได้เช่นกัน นั่นคือกำหนดคะแนนปกติภายในแต่ละบลอคหรือผู้ทดสอบ (Subject) แล้วดำเนินการหาตัวสถิติทดสอบซึ่งเหมือนกับตัวสถิติฟรีดแมน

ให้ Z_{ij} แทนตัวสถิติอันดับแบบปกติสำหรับบลอคที่ i ของกรรมวิธี j ภายในบลอคหนึ่งจะเห็นว่า

$$Z_{i1} + Z_{i2} + \dots + Z_{ik} = 0$$

และให้ $T_j = \Sigma Z_{ij}$; j = 1, 2, .., k

ภายใต้สมมติฐานหลัก Ho จะได้ตัวสถิติทดสอบ

$$\chi^2 = \frac{k-1}{k} T_j^2/n\ \sigma^2$$

ในเมื่อ $\sigma^2 = (1/K)\ \Sigma Z_{ij}^2$ ตัวสถิติ χ^2 นี้จะมีการแจกแจงไคสแควร์ ด้วยองศาความเป็นอิสระ k-1

ตัวอย่าง จากตัวอย่างเกี่ยวกับการระลึกจำนวนเลข 3 หลัก เมื่อแปลงค่าสังเกตเป็นคะแนนปกติแบบแวน เดอร์ แวร์เดน จะได้ตารางต่อไปนี้

เดือน		1	2	3	4
นักเรียน	ก	-.84	-.25	.25	.84
	ข	-.84	-.25	.25	.84
	ค	-.84	-.25	.25	.84
	ง	-.25	-.84	.25	.84
	จ	-.25	-.84	.25	.84
	ฉ	-.84	-.25	.25	.84
	ช	-.84	.25	-.25	.84
	ซ	-.84	-.25	.25	.84
	ฌ	-.25	-.84	.84	.25
	ญ	-.84	-.25	.84	.25
	T_j	-6.63	-3.77	3.18	7.22

จากตารางนี้ก็แทนอันดับที่ 1, 2, 3, 4 ด้วยคะแนนปกติ -.84, -.25, .25, .84 นั่นเอง ก็จะได้

$$\sigma^2 = (1/k)\ \Sigma Z_{ij}^2 = (1/4)\{(-.84)^2+(-.25)^2+(.25)^2(.84)^2\}$$

$$= 1.5362/4 = 0.384$$

ดังนั้น $$\chi^2 = \frac{(4-1)}{4}\{(-6.63)^2+(-3.77)^2+(3.18)^2+(7.22)^2\}/10(0.384)$$

$$= 23.52$$

เมื่อ $\alpha = .05$ และ $v = 4-1 = 3$ ได้ค่าวิกฤตเป็น 7.82 จึงปฏิเสธสมมติฐานหลัก การสรุปผลจะเป็นเช่นเดียวกับการใช้ตัวสถิติฟรีดแมน

วิธีการหลังทดลองโดยอาศัยช่วงเชื่อมั่นเชิงพร้อมสำหรับคะแนนปกติสามารถพิจารณาความแผกกันใน $E(Z_j)$ ได้เช่นเดียวกับแบบทดสอบฟรีดแมน ให้ φ เป็นความแผกกันที่สนใจ ซึ่งกำหนดไว้ว่า

$$\varphi = a_1E(Z_1) + a_2E(Z_2) + \dots + a_kE(Z_k)$$

นั้นจะประมาณได้ด้วย

$$\hat{\varphi} = a_1\bar{Z}_1 + a_2\bar{Z}_2 + \dots + a_k\bar{Z}_k$$

ที่มีความแปรปรวนเป็น

$$V(\hat{\varphi}) = \frac{k}{(k-1)} (\sigma^2/n)\Sigma a_i^2$$

ตัวอย่าง จากตัวอย่างที่ผ่านมา เมื่อต้องการเปรียบเทียบเป็นคู่ ซึ่งมี $a_1 = 1$ และ $a_2 = -1$ จะได้

$$V(\hat{\varphi}) = \frac{4}{4-1} (0.384/10)\{(+1)^2-(-1)^2\} = 0.1024$$

สำหรับการวิเคราะห์หลังทดลอง ถ้าความแตกต่างเป็นคู่ใดๆ มากกว่า Δ ก็จะแสดงถึงความมีนัยสำคัญของความแตกต่างนั้น ในเมื่อ Δ กำหนดไว้ว่า

$$\Delta = \sqrt{\chi^{2(k-1)}_{\alpha}}\sqrt{V(\hat{\varphi})} = \sqrt{7.82}\sqrt{0.1024} = 0.895$$

ค่าเฉลี่ยของตัวสถิติอันดับ T_j จะเป็น -.663, -.377, .318 และ .722 ความแตกต่างเป็นคู่จะสรุปได้ดังนี้

การเปรียบเทียบ	ค่าของ $\hat{\varphi}$	การตัดสินใจ
(1, 2)	-.663-(-.377) = -.286	ไม่มีนัยสำคัญ
(1, 3)	-.981*	มีนัยสำคัญ
(1, 4)	-1.385*	มีนัยสำคัญ
(2, 3)	-.695	ไม่มีนัยสำคัญ
(2, 4)	-1.099*	มีนัยสำคัญ
(3, 4)	-.404	ไม่มีนัยสำคัญ

จะเห็นได้ว่า การตัดสินใจจะเป็นเช่นเดียวกับแบบทดสอบฟรีดแมน

ถ้าต้องการพิจารณาเฉพาะความแผกกันเป็นคู่ ก็จะใช้วิธีของ ทูกี้ สำหรับเปรียบเทียบเป็นคู่ ซึ่งมีค่าวิกฤตเป็น

$$S^* = (1/\sqrt{2})\, q\,(\alpha, k, \infty)$$

ในเมื่อ $q\,(\alpha, k, \infty)$ เป็นค่าคงที่จากตาราง 24 ดังนั้นค่าวิกฤต S_o จะเป็น

$$S^* = (1/\sqrt{2})\, q\,(.05, 4, \infty) = 3.63/\sqrt{2} = 2.57$$

จากการทดสอบดังกล่าวนี้จะเห็นว่าแบบทดสอบคะแนนปกติได้ดีกว่าแบบทดสอบฟรีดแมน แต่ไม่เป็นจริงเสมอไป เพราะ k = 4 แล้วแบบทดสอบคะแนนปกติจะดีกว่าแบบทดสอบฟรีดแมน

จงสังเกตว่า ถ้าสนใจเฉพาะการเปรียบเทียบเป็นคู่ แล้วแบบทดสอบวิลคอกซันพหุคูณควรจะใช้ประยุกต์ แต่ถ้าเป็นอย่างอื่นควรใช้วิธีการ โรเซนธัล และ เฟอร์กูสัน

3.5.7 แบบทดสอบอันดับที่สอง ฮอดจ์-เลฮ์แมน ชนิดหลายตัวอย่างสำหรับค่าสังเกตที่ปรับปรุง (K-Sample Hodges - Lehman Rank Test for Aligned Observations)

แบบทดสอบฮอดจ์-เลฮ์แมนชนิดสองตัวอย่าง สามารถขยายได้เป็นแบบทดสอบชนิดหลายตัวอย่างได้เช่นเดียวกับแบบทดสอบเครื่องหมายที่ขยายเป็นแบบทดสอบฟรีดแมน หรือแบบทดสอบแมคนีมาร์ที่ขยายเป็นแบบทดสอบคอคราน การแจกแจงของตัวสถิติฮอดจ์-เลฮ์แมน ยังจะแจกแจงแบบไคสแควร์ (โดยประมาณ) ด้วยองศาความเป็นอิสระ $\nu = k-1$ ซึ่งแจกแจงเช่นเดียวกับตัวสถิติคอคราน และฟรีดแมน ยิ่งกว่านั้นการเปรียบเทียบหลังทดลองของแบบทดสอบนี้ก็จะเหมือนกับวิธีการในแบบทดสอบฟรีดแมน และคอคราน

ในกรณีที่ขนาดตัวอย่างเท่ากันหมด นั่นคือ $N_{.1} = N_{.2} = ... = N_{.k} = N$ และแต่ละ $n_{ij} = n$ จะให้ X_{ijl} เป็นค่าสังเกตในหน่วยที่ l ของกรรมวิธี j และบลอค i (i = 1, 2, .., b ; j = 1, 2, .., k และ l = 1, 2, .., n) และให้ $N_{.j.} = N = nb$ ดังนั้นในแผนทดลองนี้จะมีค่าสังเกตทั้งหมดเท่ากับ $N_T = nk = nbk$

ภายใต้ตัวแบบวิเคราะห์ความแปรปรวนที่ไม่มีผลร่วมระหว่างบลอค และกรรมวิธี จะได้ค่าสังเกตใด ๆ เป็น

$$X_{ijl} = \mu + d_{.j.} + \beta_{i..} + \varepsilon_{ijl}$$

เมื่อปรับปรุงแล้วจะเป็น

$$X^*_{ijl} = X_{ijl} - \beta_{i..} = \mu + d_{.j.} + \varepsilon_{ijl}$$

และเมื่ออาศัยตัวอย่างจะได้ค่าประมาณ

$$\begin{aligned}\hat{X}^*_{ijl} &= X_{ijl} - \hat{\beta}_{i..} = X_{ijl} - (\bar{X}_{i..} - \bar{X}_{...}) \\ &= X_{ijl} - \hat{\beta}_{i..} \qquad (\text{ถ้าทิ้ง } \bar{X}_{...} \text{ ออกไป})\end{aligned}$$

ให้ R_{ijl} เป็นอันดับที่ ซึ่งกำหนดแก่ X_{ijl} แล้วจะได้

$$\bar{R}_{...} = (1/nbk) \sum_{i,jl} R_{ijl} = (NK+1)/2$$

$$\bar{R}_{i..} = (1/nk) \sum_{j,l} R_{ijl} \text{ และ } \bar{R}_{.k.} = (1/nb) \sum_{j,l} R_{ijl}$$

และให้ความแปรปรวนของอันดับที่ในบลอค i เป็น

$$S^2_{i..} = \sum_{j,l} (R_{ijl} - \bar{R}_{i..})^2/nk \qquad \text{และ } \bar{S}^2_i = S^2_{i..}/b$$

ในเทอมของอันดับที่เฉลี่ย $R_{.j.}$ ตัวสถิติทดสอบจะเป็น

$$W = \frac{nk-1}{nk} \quad \Sigma\{ \frac{R_{.j.} - R}{S_i/\sqrt{nb}} \}^2$$

$$W = \frac{nk-1}{nk}(\hat{Z}_1^2 + \hat{Z}_2^2 + \ldots + \hat{Z}_k^2)$$

ในรูปฟอร์มนี้จะเห็นว่า W เป็นผลรวมของกำลังสองของตัวแปรปกติมาตรฐาน ซึ่งจะมีการแจกแจงแบบไคสแควร์ เนื่องจากตัวแปรเหล่านี้ไม่เป็นอิสระกัน W จึงมีองศาความเป็นอิสระ k-1

ตัวอย่าง ในการศึกษาเพื่อเปรียบเทียบกรรมวิธีต่างๆ 3 กรรมวิธี โดยการวางแผนทดลองชนิดแบ่งบลอค ได้ข้อมูลจากการทดลองดังนี้

				ข้อมูลที่ปรับปรุง			อันดับที่		
กรรมวิธี	1	2	3	1	2	3	1	2	3
บลอค 1	110	82	118	15.67	-12.33	23.67	36	16	41
	87	84	96	-7.33	-10.33	1.67	19	17	29
	79	74	104	-15.33	-20.33	9.67	14	9	33
	102	70	126	7.67	-24.33	31.67	32	7	43
2	41	93	111	-35.42	16.58	34.58	2	37	44
	76	76	76	-0.42	-0.42	-0.42	27	27	27
	43	91	91	-33.42	14.58	14.58	4	34.5	34.5
	74	40	105	-2.42	-36.42	28.58	24	1	42
3	56	102	83	-10.17	35.83	16.83	18	45	38
	50	40	72	-16.17	-26.17	5.83	12	6	31
	64	39	60	-2.17	-27.17	-6.17	25	5	20
	61	62	105	-5.17	-4.17	38.83	21	22	46
4	67	68	126	-16.50	-15.50	42.50	11	13	47.5
	60	87	101	-23.50	3.50	17.50	8	30	39
	50	69	126	-33.50	-14.50	42.50	3	15	47.5
	80	65	103	-3.50	-18.50	19.50	23	10	40
							279	294.5	602.5

จากข้อมูลในตารางนี้ ได้ค่าเฉลี่ยแต่ละบลอคเป็น $\bar{X}_{1..} = 94.33$, $\bar{X}_{2..} = 76.42$, $\bar{X}_{3..} = 66.17$ และ $\bar{X}_{4..} = 83.50$ ในเมื่อค่าเฉลี่ยรวมเป็น $\bar{X}... = 80.10$ เมื่อปรับปรุงข้อมูลโดยการบวก X... = 80.10 เข้าไปและลบด้วยค่าเฉลี่ยของบลอค โดยปกติเพียงแต่ลบค่าสังเกตด้วยค่าเฉลี่ยบลอคเท่านั้นก็จะได้ค่าสังเกตที่ปรับปรุง ซึ่งสรุปได้ในตารางที่แล้วมานั่นเอง

เนื่องจากขนาดตัวอย่างเท่ากันหมด นั่นคือ $N_{.j.} = 16$ ต่อกรรมวิธี และ $N_{i..} = 12$ ต่อบลอค แล้วจะได้อันดับที่เฉลี่ย ดังนี้

$$\bar{R}_{.1.} = 17.44 \quad \bar{R}_{.2.} = 18.41 \quad \bar{R}_{.3.} = 37.66$$
$$\bar{R}... = (nbk+1)/2 = (4(4)(3)+1)/12 = 24.50$$

ความแปรปรวนในบลอคจะเป็น

$$S^2_{1..} = 142.56 \quad S^2_{2..} = 211.02 \quad S^2_{3..} = 172.08 \quad S^2_{4..} = 240.53$$

ดังนั้น

$$\bar{S}^2_i = \Sigma S^2_{1..}/b = (142.56+211.02+172.08+240.53)/4 = 191.55$$

ค่าของตัวสถิติทดสอบ W จึงเป็น

$$W = \frac{4(3)-1}{4(3)}\left\{\frac{(17.44-24.50)^2}{191.55/16} + \frac{(18.41-24.50)^2}{191.55/16} + \frac{(37.66-24.50)^2}{191.55/16}\right\}$$
$$= (11/12)(4.1634+3.0979+14.4660) = 19.92$$

เมื่อ $\alpha = .05$ จะได้ $\chi^{2(3-1)} = 5.99$ จึงปฏิเสธสมมติฐานหลักที่ว่า $E(R_{.j.})$ เท่ากันหมด

จากค่า W จะเห็นว่า $R_{.1.}$ จะต่ำกว่าศูนย์ประมาณ 4.1634 = 2.04SE (ความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน) $R_{.2.}$ ประมาณ 3.0979 = 1.76SE แต่ $R_{.3.}$ จะสูงกว่าศูนย์ประมาณ 14.4660 = 3.80SE ค่าของไคสแควร์ทั้งหมดซึ่งวัดด้วย W จะเนื่องมาจากแต่ละกลุ่ม จะเป็นดังนี้

$$\chi^2(1) = (11/12)(-2.04)^2 = 3.81$$
$$\chi^2(2) = (11/12)(-1.76)^2 = 2.84$$
$$\chi^2(3) = (11/12)(3.80)^2 = 13.24$$

จะเห็นได้ว่า กรรมวิธี 3 จะให้ผลในการปฏิเสธสมมติฐานหลัก

เมื่อปฏิเสธสมมติฐานหลัก แล้วต้องการทราบว่ามีความแตกต่างในการแจกแจงใดบ้าง การตรวจสอบก็อาศัยช่วงเชื่อมั่นเชิงพร้อม ช่วงเชื่อมั่นที่เหมาะสมสำหรับการเปรียบเทียบเป็นคู่ในอันดับที่เฉลี่ย จะเป็นดังนี้

$$\varphi = (\bar{R}_{.i.} - \bar{R}_{.j.}) \pm \sqrt{\chi^{2(k-1)}_{\alpha} S^2_{\hat{\varphi}}}$$

ในเมื่อ $S^2_{\hat{\varphi}} = \dfrac{2k}{b(nk-1)}\bar{S}^2_i$

ถ้าต้องการทดสอบแนวโน้ม (Monotonic Trend) หรือความแผกกันอื่นๆ ก็อาศัยช่วงเชื่อมั่นของความแผกกัน

$$\varphi = a_1E(\bar{R}_{.1.}) + a_2E(\bar{R}_{.2.}) + .. + a_kE(\bar{R}_{.k.})$$

โดยที่ $S^2_{\hat{\varphi}} = \dfrac{k}{b(nk-1)}\Sigma a_j^2 S_i^2$

แต่ถ้าต้องการตรวจสอบเฉพาะความแผกกันเป็นคู่ควรใช้วิธีการของทูกี้ โดยมีข้อแม้ว่าขนาดตัวอย่างต้องเท่ากัน สำหรับค่าวิกฤต $S = \sqrt{\chi^{2(k-1)}_{\alpha}}$ จะแทนด้วย $T = \frac{1}{\sqrt{2}} q(\alpha, k, \infty)$

ตัวอย่าง จากตัวอย่างที่ผ่านมา จะได้ S_ϕ^2 และ Δ ดังนี้

$$S_\phi^2 = \frac{2(3)}{4(4(3)-1)}(191.55) = 26.12$$

$$\Delta = \sqrt{\chi_\alpha^{2(k-1)}}\sqrt{S_\phi^2} = 5.99\sqrt{26.12} = 156.46 = 12.50$$

ดังนั้นความแผกกันเป็นคู่ จะประมาณเป็นช่วงได้ดังนี้

$$\varphi_1 = (17.44 - 18.41) \pm 12.50 = -\ ,\ +$$

$$\varphi_2 = (17.44 - 37.66) \pm 12.50 = -\ ,\ -$$

$$\varphi_3 = (18.41 - 37.66) \pm 12.50 = -\ ,\ -$$

จะเห็นได้ว่า $\bar{R}_{.3.}$ แตกต่างจาก $\bar{R}_{1.}$ และ $\bar{R}_{.2.}$ อย่างมีนัยสำคัญ

เมื่อสนใจความแผกกันที่ว่า

$$\varphi = E(\bar{R}_{.1.}) + E(\bar{R}_{.2.}) - 2E(\bar{R}_{.3.})$$

ก็ใช้ค่าประมาณ

$$\hat{\varphi} = \bar{R}_{.1.} + \bar{R}_{.2.} - 2\bar{R}_{.3.}$$

$$= 17.44 + 18.41 + 2(37.66) = 239.47$$

โดยที่

$$S_\phi^2 = \frac{3}{4(4(3)-1)}\{1^2+1^2+(-2)^2\}(191.55) = 78.36$$

ดังนั้น $\varphi = -39.47 \pm \sqrt{5.99}\sqrt{78.36}$

$= -39.47 \pm 21.66$

ซึ่งจะปฏิเสธ Ho : $\varphi = 0$ นั่นเอง

ถ้าการแจกแจงที่ศึกษาเป็นแบบที่สูงกว่าแบบปกติ (Leptokurtic) ก็สามารถเพิ่มอำนาจทดสอบได้โดยการแทนอันดับที่ด้วยคะแนนปกติ และใช้วิธีการคำนวณเช่นเดียวกัน ตัวสถิติทดสอบและกระบวนการช่วงเชื่อมั่นเชิงพร้อมจะเป็นแบบเดียวกัน ยกเว้นแต่ใช้คะแนนปกติแทนอันดับที่เท่านั้น นั่นคือใช้ตัวสถิติทดสอบ

$$W = \frac{nk-1}{nk}\ \Sigma\ \frac{(Z_{.j.} - Z_{..})^2}{\bar{s}_i^2/nb}$$

ในเมื่อ $Z_{.j.} = \Sigma Z_{ijl}$

สำหรับการเปรียบเทียบที่วางแผนไว้ก่อน และหลังทดลองก็อาศัยความแผกกัน ดังนี้

$$\varphi = a_1E(\bar{Z}_{.1.}) + a_2E(\bar{Z}_{.2.}) + .. + a_kE(\bar{Z}_{.k.})$$

ซึ่งประมาณด้วย

$$\hat{\varphi} = a_1\bar{Z}_{.1.} + a_2\bar{Z}_{.2.} + .. + a_k\bar{Z}_{.k.}$$

โดยมีความแปรปรวนเป็น

$$S_{\phi}^{2} = \frac{k}{b(nk-1)} S_i^2 \Sigma a_j^2$$

ในการวิเคราะห์หลังทดลองก็ใช้ $S = \sqrt{\chi_{\alpha}^{(k-1)}}$ เพื่อกำหนดช่วงเชื่อมั่นของ φ แต่การวิเคราะห์ที่วางแผนไว้ก่อนจะใช้แถวตั้งสุดท้ายของตาราง 25 แทน S และสำหรับการเปรียบเทียบเป็นคู่ที่วางแผนไว้ก่อนนั้นสามารถใช้วิธีการของทูกี้ได้

ตัวอย่าง ในการเปรียบเทียบกรรมวิธีโดยอาศัยการวางทดลองชนิดแบ่งบลอค ได้ข้อมูลมาดังนี้

ในการปรับปรุงข้อมูลเหล่านี้ก็ใช้มัธยฐานของแต่ละบลอค (จะใช้มาตราวัดค่ากลางอื่นก็ได้) มัธยฐานเหล่านั้นจะเป็น $\hat{M}_{1..} = 17$ $\hat{M}_{2..} = 16.5$ และ $\hat{M}_{3..} = 17$

						ข้อมูลที่ปรับปรุง				คะแนนปกติ			
กรรมวิธี		1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
บลอค	1	14	17	12	18	−3	0	−5	1	−0.84	−0.17	−1.65	0.34
		20	20	13	14	3	3	−4	−3	1.65	1.65	−1.17	−0.84
		18	12	17	19	1	−5	0	2	0.34	−1.65	−0.17	0.70
	2	14	17	16	18	−2.5	0.5	−0.5	1.5	−0.66	0.17	−0.50	0.46
		17	19	16	19	0.5	2.5	−0.5	2.5	0.17	1.11	−0.50	1.11
		17	14	13	19	0.5	−2.5	−3.5	2.5	0.17	−0.66	−0.99	1.11
	3	13	20	19	19	−4	3	2	2	−1.17	1.65	0.70	0.70
		12	17	17	17	−5	0	0	0	−1.65	−0.17	−0.17	−0.17
		17	19	17	19	0	2	0	2	−0.17	0.70	−0.17	0.70

ค่าที่เท่ากันจะต้องกำหนดคะแนนปกติด้วยการเฉลี่ยคะแนนปกติที่เป็นไปได้ เช่นคะแนนที่เท่ากัน 3 จำนวน เป็น −5 ดังนั้นคะแนนปกติเฉลี่ยจะเป็น (1/3)(−1.93−1.61−1.40) = −1.65

สำหรับตัวสถิติที่ใช้กับคะแนนปกติจะเป็นดังนี้

$$\bar{Z}_{.j.} = (1/nb)\, \Sigma\, Z_{ijl}$$

$\bar{Z}_{.1.} = -2.16/3(3) = -0.2400$

$\bar{Z}_{.2.} = 2.63/3(3) = 0.2922$

$\bar{Z}_{.3.} = -4.62/3(3) = -0.5133$

$\bar{Z}_{.4.} = 4.11/3(3) = 0.4567$

เนื่องจาก $\sum_{i,j,l} Z_{ijl} = 0$ จึงได้ $\bar{Z}_{...} = 0$ แต่ค่าเฉลี่ยที่สังเกตได้ $\bar{Z}_{.1.} + \bar{Z}_{.2.} + \bar{Z}_{.3.} + \bar{Z}_{.4.} = -0.2400 + 0.2922 - 0.5133 + 0.4567 = 0.0044$ และ $\bar{Z}_{...} = .0011$ ซึ่งคลาดเคลื่อนจาก 0.0000 เล็กน้อย เพราะการเฉลี่ยคะแนนปกติ

ภายในแต่ละบลอค $S^2_{i..} = \Sigma(Z_{ijl} - \hat{Z}_{i..})^2/nk$

$= (1/(nk)^2)\ nk\Sigma Z^2_{ijl} - (\Sigma Z_{ijl})^2$

$S^2_{1.} = (1/12^2)\{12(14.4491) - (1-1.81)^2\} = 1.1813$

$S^2_{2.} = (1/12^2)\{12(6.3459) - (0.99)^2\} = 0.5220$

$S^2_{3.} = (1/12^2)\{12(8.9184) - (0.78)^2\} = 0.7390$

$\hat{S}^2_i = \Sigma S^2_{i..}/b = (1.1813 + 0.5220 + 0.7390)/3$

$= 0.8141$

เพราะฉะนั้นตัวสถิติทดสอบจะคำนวณได้เป็น

$$W = \frac{3(4)-1}{3(4)}\left\{\frac{(-0.2400)^2}{0.8141/3(3)}+\frac{(0.2922)^2}{0.8141/3\ (3)}+\frac{(-0.5133)^2}{0.8141/3(3)}+\frac{(0.4567)^2}{.8141/3(3)}\right\}$$

$= (11/12)(0.6367 + 0.9430 + 2.9119 + 2.3049)$

$= 6.23$

เมื่อ $\alpha = .05$ จึงปฏิเสธ Ho ไม่ได้ เพราะ $W < \chi^{2(3)}_{.05} = 7.82$ ดังนั้นจึงสรุปได้ว่ากรรมวิธีต่างๆ กันให้คะแนนเฉลี่ยไม่แตกต่างกัน

ถ้าสนใจความแผกกัน φ ต่อไปนี้

$\varphi_1 = E(\bar{Z}_{.1.}) - E(\bar{Z}_{.2.})$

$\varphi_2 = E(\bar{Z}_{.3.}) - E(\bar{Z}_{.4.})$

$\varphi_3 = \{E(\bar{Z}_{.1.}) + E(\bar{Z}_{.2.})\} - \{E(\bar{Z}_{.3.}) - E(\bar{Z}_{.4.})\}$

สำหรับ $\alpha = .05$ จำนวนการเปรียบเทียบ $q = 3$ จึงได้ค่าจากตารางเป็น 2.39 ซึ่งจะได้ช่วงเชื่อมั่นสำหรับความแผกกันเป็น

$\varphi_1 = -0.5322 \pm 2.39\sqrt{0.1973} = -0.5322 \pm 1.0621$

$\varphi_2 = -0.9700 \pm 2.39\sqrt{0.1973} = -0.9700 \pm 1.0621$

$\varphi_3 = -0.1088 \pm 2.39\sqrt{0.3946} = -0.1088 \pm 1.5014$

เนื่องจากช่วงเชื่อมั่นเหล่านี้ต่างก็รวม 0 ไว้ด้วย จึงสรุปได้ว่าไม่มีความแตกต่างอย่างมีนัยสำคัญในประชากร นั่นคือ $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$ และ $\varphi_3 = 0$

ในกรณีตัวอย่างมีขนาดไม่เท่ากัน การคำนวณตัวสถิติจะยุ่งยาก จึงใช้วิธีการช่วงเชื่อมั่นสำหรับความแผกกันแทน

ให้ n_{ij} แทนจำนวนค่าสังเกตในบลอค i ที่ได้รับกรรมวิธี j $n_{i.} = \Sigma n_{ij}$ แทนขนาดของบลอค i และ $n_{.j} = \Sigma n_{ij}$ เป็นขนาดของกรรมวิธี j แล้วจะได้ว่า

$$V(R_{.j.}) = \Sigma n_{ij}(n_{i.} - n_{ij})S^2_{i..}/(n_{i.}-1)$$

$$\text{และ } Cov\ (R_{.j.}, R_{.j'.}) = -\Sigma n_{ij}n_{ij'}S^2_{i..}/(n_{i.}-1)$$

ช่วงเชื่อมั่นสำหรับความแผกกัน φ

$$\varphi = a_1E(\bar{R}_{.1.}) + a_2E(\bar{R}_{.2.}) + .. + a_kE(\bar{R}_{.k.})$$

จะเป็นดังนี้

$$\varphi = \hat{\varphi} \pm \sqrt{\chi^{2(k-1)}_{\alpha}}\sqrt{S^2_{\hat{\varphi}}}$$

ในเมื่อ $\hat{\varphi} = a_1R_{.1.} + a_2R_{.2.} + .. + a_k\bar{R}_{.k.}$

$S^2_{\hat{\varphi}} \quad = \Sigma a_j^2V(R_{.j.})/n_j^2 + \Sigma a_ja_{j'}Cov(R_{.j.}, R_{.j'.})\ j \neq j'$

สำหรับการวิเคราะห์ที่วางแผนไว้ก่อน จะใช้ค่าจากตาราง 25 แทนค่า $\sqrt{\chi^{2(k-1)}_{\alpha}}$

ตัวอย่าง ในการศึกษาเพื่อเปรียบเทียบกรรมวิธี โดยการวางแผนชนิดแบ่งบลอค ได้ข้อมูลดังนี้

	ค่าสังเกต				อันดับที่ของค่าสังเกตที่ปรับปรุง				
กรรมวิธี	1	2	3	4	1	2	3	4	
บลอค 1	14	17	12	18	17.5	45	6.5	57.5	
	20	20	13	14	68.5	68.5	10.5	17.5	
	18	12	17	19	57.5	6.5	45	66.5	
	13	14	14	16	10.5	17.5	17.5	32.5	
	15	19	16	13	23	66.5	32.5	10.5	
		13	17			10.5	45		
		16	16			32.5	32.5		
					177.0	247.0	189.5	184.5	798.0
2	14	17	16	18	14	40	29.5	54.5	
	17	19	16	19	40	63.5	29.5	63.5	
	17	14	13	19	40	14	8	63.5	
	19	17	17		63.5	40	40		
	15	17	11		22	40	2.5		
	17	18	18		40	54.5	54.5		
	18	12			54.5	5			
	11	14			2.5	14			
					276.5	271.0	164.0	181.5	893.0
3	13	20	19	19		4	60	49.5	49.5
	12	17	17	17		1	26	26	26
	17	19		19		26	49.5		60
	16	19		20		20.5	49.5		26
		16		17			20.5		35.5
				18					35.5
				18					60
				20					49.5
				19					
					51.5	205.5	75.5	391.5	724.0
			รวม		505.0	723.5	429.0	757.5	2415.0

ค่าสังเกตที่ปรับปรุงในบลอคโดยอาศัยค่าเฉลี่ยของบลอค อันดับที่ของค่าสังเกตที่ปรับปรุงจะสรุปได้ดังตาราง พร้อมทั้งผลรวมของอันดับที่ตามกรรมวิธี และบลอคด้วย

สำหรับบลอค 1 ได้ผลรวมของอันดับที่ และผลรวมกำลังสองของอันดับที่เป็น

$$17.5 + 68.5 + \ldots + 32.5 + 10.5 = 798.0$$

$$17.5^2 + 68.5^2 + \ldots + 32.5^2 + 10.5^2 = 37421$$

ดังนั้น $$S^2_{1..} = \frac{24(37421) - 798^2}{24(24)} = 453.65$$

ในทำนองเดียวกันสำหรับบลอค 2 และ 3 จะได้

$S^2_{2..} = 409.04$ และ $S^2_{3..} = 302.54$

แล้วจะได้ $$V(R_{.1.}) = \frac{5(24-5)(453.65)}{23} + \frac{8(25-8)(409.04)}{24} + \frac{4(20-4)(302.54)}{19}$$

$$= 5210.55$$

$$Cov(R_{.1.}, R_{.2.}) = -\left\{\frac{5(7)(453.65)}{23} + \frac{8(8)(409.04)}{24} + \frac{4(5)(302.54)}{19}\right\}$$

$$= -2099.50$$

ส่วนความแปรปรวนและความแปรปรวนร่วมที่เหลือก็คำนวณได้ในทำนองเดียวกัน ซึ่งจะได้ดังตารางต่อไปนี้

	1	2	3	4
1	5210.55	−2099.50	−1635.73	−1147.53
2		5859.03	−1194.37	−1815.84
3		สมมาตร	4863.08	−1283.66
4				4574.81

โดยที่แถวทะแยงหลักเป็นความแปรปรวน ส่วนนอกแถวทะแยงหลักเป็นความแปรปรวนร่วม

สำหรับการวิเคราะห์โดยการวางแผนไว้ก่อน ถ้าความแผกกันที่สนใจเป็น

$$\varphi_1 = E(\bar{R}_{.1.}) - E(\bar{R}_{.2.})$$

และ $$\varphi_2 = E(\bar{R}_{.1.}) + E(\bar{R}_{.2.}) + E(\bar{R}_{.3.}) - 3E(\bar{R}_{.4.})$$

จากตาราง 25 เมื่อ $\alpha = .05$ ได้ค่าเป็น 2.24 สำหรับสองความแผกกัน และค่าประมาณของ φ_1 และ φ_2 จะเป็น

$$\hat{\varphi}_1 = \bar{R}_{.1.} - \bar{R}_{.2.} = 505.0/17 - 723.5/20 = -6.47$$

$$\hat{\varphi}_2 = \bar{R}_{.1.} + \bar{R}_{.2.} + \bar{R}_{.3.} - 3\bar{R}_{.4.} = 505.0/17 + 723.5/20 + 429.0/15 - 3(757.5)/17$$

$$= -39.19$$

$$S^2_{\hat{\varphi}_1} = \frac{(1)^2}{17^2}(5210.55) + \frac{(-1)^2}{20^2}(5859.03) + \frac{2(1)(-1)}{17(20)}(-2099.50)$$

$$= 45.0272$$

ดังนั้น $\varphi_1 = -6.47 \pm 2.24\ 45.0272 = -6.47 \pm 15.03$
ซึ่งแสดงว่าไม่มีนัยสำคัญ (ช่วงนี้รวม 0 ไว้ด้วย)

ส่วน $S^2_{\hat{\varphi}_2} = 249.6887$ ซึ่งจะได้

$$\varphi_2 = -39.19 \pm 2.24\sqrt{249.6887} = -39.19 \pm 35.39$$

ซึ่งแสดงว่ามีนัยสำคัญ (ช่วงนี้ไม่รวม 0 ไว้ด้วย)

3.5.8 ตัวประมาณความแผกกันของ ดอคซัม ที่ขึ้นอยู่กับตัวประมาณมัธยฐานชนิดตัวอย่างเดียว (Doksum Contrast Estimator based on One-Sample Median Estimators)

ให้ความแผกกันในผลกระทบกรรมวิธี τ เป็น φ

$$\varphi = \Sigma a_j \tau_j ; \qquad a_1+a_2+..+a_k = 0$$

ในเมื่อ $a_1, a_2, .., a_k$ เป็นค่าคงที่ซึ่งระบุไว้ และความแผกกัน φ นี้สามารถเขียนได้ในรูป

$$\varphi = \Sigma d_{hj} \Delta_{hj}$$

ในเมื่อ $d_{hj} = a_k/k$ และ $\Delta_{hj} = \Delta_h - \Delta_j$; h, j = 1, 2, .., k

ตัวประมาณค่าความแผกกันที่ คอคซัม (1967) ได้พัฒนาไว้ มีวิธีการหาดังนี้

(1) หาผลต่างระหว่างค่าสังเกตในกรรมวิธี u และ v นั่นคือ

$$D^i_{uv} = X_{iu} - X_{iv} ; i = 1, 2, ., b$$

(2) ให้ Z_{uv} = มัธยฐาน $\{D^i_{uv} ; i = 1, 2, .., b\}$ และ Z_{uv} นี้เป็นตัวประมาณค่าที่ไม่ปรับปรุงของ $\Delta_{uv} = \Delta_u - \Delta_v$ เนื่องจาก $Z_{vu} = -Z_{uv}$ เราจึงเพียงแต่หาตัวประมาณค่าที่ไม่ปรับปรุงของ Δ_{uv} จำนวน k(k-1)/2 เท่านั้น โดยสอดคล้องกับคู่ (u, v), u < v

(3) ให้ $\hat{\Delta}_{uv} = Z_{u.} - Z_{v.}$

ในเมื่อ $Z_{u.} = \Sigma Z_{uj}/k$, $Z_{uu} = 0$; u = 1, 2, .., k

ดังนั้นตัวประมาณค่าที่ปรับปรุงของ φ คือ

$$\hat{\varphi} = \Sigma d_{hj} \hat{\Delta}_{hj} = \Sigma a_j Z_{j.}$$

ตัวอย่าง ในการศึกษากรรมวิธี 3 แบบ โดยอาศัยการวางแผนทดลองชนิดแบ่งบลอคสมบูรณ์ ได้ข้อมูลจากการศึกษา ดังนี้

กรรมวิธี	1	2	3		1	2	3
บลอค 1	5.40	5.50	5.55	บลอค 12	5.65	5.55	5.45
2	5.85	5.70	5.75	13	5.60	5.35	5.45
3	5.20	5.60	5.50	14	5.05	5.00	4.95
4	5.55	5.50	5.40	15	5.50	5.50	5.40
5	5.90	5.85	5.70	16	5.45	5.55	5.50
6	5.45	5.55	5.60	17	5.55	5.55	5.35

กรรมวิธี	1	2	3		1	2	3
7	5.40	5.40	5.35	18	5.45	5.50	5.55
8	5.45	5.50	5.35	19	5.50	5.45	5.25
9	5.25	5.15	5.00	20	5.65	5.60	5.40
10	5.85	5.80	5.70	21	5.70	5.65	5.55
11	5.25	5.20	5.10	22	630	6.30	6.25

เมื่อต้องการประมาณความแผกกัน $\varphi = \tau_1 - \tau_3$ ก็จะหาค่าประมาณได้ดังนี้

หาผลต่าง D^i_{uv} ซึ่งจะได้ดังตารางต่อไปนี้

บลอค	D^i_{12}	D^i_{13}	D^i_{23}		D^i_{12}	D^i_{13}	D^i_{23}
1	-.10	-.15	-.05	12	.10	.20	.10
2	.15	.10	-.05	13	.25	.15	-.10
3	-.40	-.30	.10	14	.05	.10	.05
4	.05	.15	.10	15	.00	.10	.10
5	.05	.20	.15	16	-.10	-.05	.05
6	-.10	-.15	-.05	17	.00	.20	.20
7	.00	.05	.05	18	-.05	-.10	-.05
8	-.05	.10	.15	19	.05	.25	.20
9	.10	.25	.15	20	.05	.25	.20
10	.05	.15	"10	21	.05	.15	.10
11	.05	.15	.10	22	.00	.05	.05

สำหรับค่า Z_{12}, Z_{13} และ Z_{23} จะได้เป็น .05, .125 และ .10 ตามลำดับ แล้วจะหาค่า $Z_{1.}$, $Z_{2.}$ และ $Z_{3.}$ ได้ดังนี้

$$Z_{1.} = (Z_{11} + Z_{12} + Z_{13})/3 = (0 + .05 + .125)/3 = .058,\ Z_{11} = 0$$
$$Z_{2.} = (Z_{21} + Z_{22} + Z_{23})/3 = (-.05 + 0 + .10)/3 = .017,\ Z_{22} = 0$$
$$Z_{3.} = (Z_{31} + Z_{32} + Z_{33})/3 = (-.10 - .16 + 0)/3 = -.075,\ Z_{33} = 0$$

ตัวประมาณค่าที่ปรับปรุงของ $\tau_1 - \tau_3$ ซึ่งมี $a_1 = 1$, $a_2 = 0$ และ $a_3 = -1$ จะเป็น

$$\hat{\varphi} = Z_{1.} - Z_{3.} = .058 - (-.075) = .133$$

หรือจะหาในรูปอื่น ซึ่งจะได้ $d_{hj} = a_h/3$; j = 1, 2, 3; h = 1, 2, 3

$$d_{11} = d_{12} = d_{13} = 1/3, \quad a_1 = 1$$
$$d_{21} = d_{22} = d_{23} = 0 \quad a_2 = 0$$
$$d_{31} = d_{32} = d_{33} = -1/3, \quad a_3 = -1$$

ดังนั้น $\hat{\varphi} = \Sigma\Sigma d_{hj}\hat{\Delta}_{hj} = (d_{11}\hat{\Delta}_{11} + d_{12}\hat{\Delta}_{12} + d_{13}\hat{\Delta}_{13}) + (d_{21}\hat{\Delta}_{21} + d_{22}\hat{\Delta}_{22} + d_{23}\hat{\Delta}_{23}) +$

$$(d_{31}\hat{\Delta}_{31} + d_{32}\hat{\Delta}_{32} + d_{33}\hat{\Delta}_{33})$$
$$= (1/3)(\hat{\Delta}_{11} + \hat{\Delta}_{12} + \hat{\Delta}_{13}) + 0(\hat{\Delta}_{21} + \hat{\Delta}_{22} + \hat{\Delta}_{23}) + (1/3)(\hat{\Delta}_{31} + \hat{\Delta}_{32} + \hat{\Delta}_{33})$$
$$= (1/3)(0 + \hat{\Delta}_{12} + \hat{\Delta}_{13}) + (\hat{\Delta}_{31} + \hat{\Delta}_{32} + 0)$$
$$= (1/3)[\{(Z_{1.} - Z_{2.}) + (z_{1.} - Z_{3.})\} - \{(Z_{3.} - Z_{1.}) + (Z_{3.} - Z_{2.})\}]$$
$$= (1/3)(3Z_{1.} - 0 - 3Z_{3.}) = Z_{1.} - Z_{3.}$$
$$= 0.133$$

3.5.9 แบบทดสอบเดอร์บิน (Durbin's Test for Balanced Incomplete Block Design)

ในการวางแผนทดลองชนิดแบ่งบลอคสมบูรณ์นั้น ทุกกรรมวิธีจะใช้กับทุกบลอค แต่ในบางครั้งก็เป็นไปไม่ได้ หรือไม่สะดวกในการทดลองแบบนั้น โดยเฉพาะกรณีที่มีจำนวนกรรมวิธีมาก และขนาดบลอคจำกัด เช่นถ้ามีอาหารต่างๆ ที่ต้องชิมถึง 20 ชนิด และให้ผู้ตัดสินแต่ละคน (บลอค) ชิมอาหารทั้ง 20 ชนิด นั้น แล้วให้อันดับที่แก่อาหารนั้น ซึ่งจะเป็นการยากมาก แต่ถ้าให้ชิมคนละ 5 ชนิด จะสะดวกกว่า และให้อันดับได้ถูกต้องกว่า อย่างไรก็ตาม อาหารแต่ละชนิดนั้นจะต้องได้รับการทดลอง (ชิม) เท่าๆ กัน การวางแผนการทดลองชนิดนี้เรียกกันว่า การวางแผนทดลองชนิดแบ่งบลอคไม่สมบูรณ์แต่สมดุลย์ (BIBD, Balanced Incomplete Block Design) ซึ่งมีลักษณะที่สำคัญ ดังนี้

- ทุกบลอคมี t หน่วยทดลอง ($t < k$)
- ทุกกรรมวิธีจะปรากฏใน r บลอค หรือกรรมวิธีหนึ่งๆ จะมี r หน่วยทดลอง ($r < b$)

ทุกกรรมวิธีจะปรากฏเป็นจำนวนครั้งเท่ากับกรรมวิธีอื่นๆ

เดอร์บิน (1951) ได้เสนอแบบทดสอบชนิดอันดับที่ เพื่อใช้ทดสอบสมมติฐานที่ว่า ไม่มีความแตกต่างระหว่างกรรมวิธี ในการวิเคราะห์ข้อมูลจากการทดลองเช่นนี้โดยอาศัยวิธีการเชิงพาราามิเตอร์นั้นจะต้องขึ้นอยู่กับข้อกำหนดเกี่ยวกับความเป็นปกติ (Normality) ดังนั้นแบบทดสอบเดอร์บินจึงดีกว่าแบบทดสอบเชิงพาราามิเตอร์ ถ้า (1) ข้อกำหนดเกี่ยวกับความเป็นปกติไม่เป็นจริง (2) ต้องการวิธีเคราะห์ที่ง่ายกว่า และ (3) ค่าสังเกตเป็นแบบอันดับที่เท่านั้น แบบทดสอบเดอร์บินนี้จะเป็นแบบทดสอบฟรีดแมน ถ้าจำนวนหน่วยทดลองในแต่ละบลอคเท่ากับจำนวนกรรมวิธี

สมมติฐานหลักที่จะทดสอบก็จะเป็น ดังนี้

$$Ho : M_1 = M_2 = .. = M_k$$

หรือ $Ho : \tau_1 = \tau_2 = .. = \tau_k$

ในการทดสอบสมมติฐานหลักนี้ก็อาศัยการทดลองชนิดแบ่งบลอคไม่สมบูรณ์แต่สมดุลย์ โดยให้บลอคเป็นอิสระซึ่งกันและกัน และภายในแต่ละบลอคนั้นค่าสังเกตที่ได้อาจจะเรียงลำดับแบบเพิ่ม

ขึ้นโดยอาศัยเกณฑ์บางอย่างได้ ข้อมูลที่ได้จากการทดลองชนิดนี้จะแทนด้วย X_{ij} ในเมื่อ X_{ij} แทนผลทดลองจากกรรมวิธี j ในบลอค i แล้วให้อันดับที่แก่ X_{ij} ภายในแต่ละบลอค โดยกำหนดอันดับ 1 แก่ค่าสังเกตที่น้อยสุดในบลอค i อันดับ 2 แก่ค่าที่น้อยสุดรองลงมา และต่อๆ ไปจนถึงอันดับที่ t (แต่ละบลอคมีค่าสังเกตเท่ากัน)

ให้ $R(X_{ij})$ แทนอันดับที่ของ X_{ij} เมื่อ X_{ij} มีจริง และให้ R_j เป็นผลรวมของอันดับที่ซึ่งกำหนดให้แก่ r ค่าสังเกตในกรรมวิธี j นั้น นั่นคือ

$$R_j = \Sigma R(X_{ij})$$

ถ้าค่าสังเกตไม่เป็นตัวเลข (Nonnumeric) แต่สามารถจะเรียงอันดับ และกำหนดอันดับที่ได้ โดยอาศัยเกณฑ์บางอย่าง แล้วอันดับที่ของแต่ละค่าสังเกตก็สามารถทำได้เช่นเดียวกับที่อธิบายมานั้น สำหรับค่าสังเกตที่เท่ากันก็กำหนดอันดับที่โดยการเฉลี่ยอันดับที่

ให้ k เป็นจำนวนกรรมวิธีทดลอง t เป็นจำนวนกรรมวิธีที่จะเปรียบเทียบต่อบลอค $(t < k)$ b เป็นจำนวนบลอคทั้งหมด r เป็นจำนวนครั้งที่แต่ละกรรมวิธีปรากฏ $(r < b)$ λ เป็นจำนวนครั้งที่กรรมวิธี i และ j ปรากฏด้วยกัน (λ จะเท่ากันสำหรับทุกคู่ของกรรมวิธี) นั่นคือ $\lambda = r(t-1)/(k-1)$ และ R_j เป็นผลรวมของอันดับที่ในกรรมวิธี j แล้วตัวสถิติทดสอบเดอร์บิน D จะกำหนดไว้ดังนี้

$$D = \frac{12(k-1)}{rk(t-1)\ (t+1)}\Sigma\{R_j - r(t+1)/2\}^2$$

$$D = \frac{12(k-1)}{rk(t-1)\ (t+1)}\Sigma R_j^2 - 3r(k-1)\ (t+1)/(t-1)$$

ถ้าสมมติฐานหลักเป็นจริง และ r โตพอ แล้วตัวสถิติ D นี้จะมีการแจกแจงไคสแควร์ ด้วยองศาความเป็นอิสระ k-1 ดังนั้นเกณฑ์ตัดสินใจ ณ ระดับนัยสำคัญ จึงกำหนดไว้ว่า ปฏิเสธ Ho ถ้า D มากกว่า $\chi_{\alpha}^{2(k-1)}$

เมื่อสมมติฐานหลักได้รับการปฏิเสธ แล้วทำการเปรียบเทียบพหุคูณได้ดังนี้

$$\text{ยอมรับ } M_i = M_j\ ,\ i < j \text{ ถ้า } |R_i - R_j| \leq Z_{\alpha_0}\sqrt{\frac{bt(t-1)(t+1)}{6(k-1)}}$$

ในเมื่อ $\alpha_0 = \alpha/k(k-1)$

สำหรับการวางแผนชนิดแบ่งบลอคไม่สมบูรณ์แต่สมดุลย์นี้ จะได้ว่า

$$bt = kr \text{ หรือ } r = bt/k$$

และเมื่อ $t = k$ แล้วตัวสถิติทดสอบเดอร์บิน D จะเป็นตัวสถิติฟรีดแมน S

ตัวอย่าง บริษัทผู้ผลิตไอศกรีมต้องการทดสอบรสชาติไอศกรีม 7 ชนิดว่าลูกค้าชอบแตกต่างกันหรือไม่ ในการทดลองนั้นได้ใช้การวางแผนทดลองชนิดแบ่งบลอคไม่สมบูรณ์แต่สมดุลย์ โดยให้ผู้รับการทดลองแต่ละคนชิมไอศกรีม 3 ชนิด แล้วกำหนดอันดับ 1, 2 และ 3 ให้แก่ไอศกรีมที่ชอบมากที่สุด รองลงมา และชอบน้อยที่สุด ตามลำดับ จากการทดลองที่ใช้ผู้ทดลอง 7 ราย ได้ผลการทดลองเป็นดังนี้

ไอศกรีม	1	2	3	4	5	6	7
ผู้รับการทดลอง 1	2	3		1			
2		3	1		2		
3			2	1		3	
4				1	2		3
5	3				1	2	
6		3				1	2
7	3		1				2
R_j	8	9	4	3	5	6	7

Ho : ไอศกรีมทั้ง 7 ชนิด ลูกค้าชอบพอๆ กัน

จากการทดลองจะได้ $k = 7$, $t = 3$, $b = 7$, $r = 3$ และ $\lambda = 1$ นั่นคือ ไอศกรีมเป็นกรรมวิธีมี 7 ชนิด จำนวนไอศกรีมที่ใช้เปรียบเทียบครั้งหนึ่งๆ เท่ากับ 3 ชนิด ผู้รับการทดลอง (บลอค) มี 7 ราย จำนวนครั้งที่ไอศกรีมแต่ละชนิดใช้ทดลองเป็น 3 ชนิด และจำนวนครั้งที่ไอศกรีมแต่ละชนิดเปรียบเทียบกับชนิดอื่นๆ เป็น 1 นั่นเอง

เขตวิกฤตขนาด .05 จะให้ค่าวิกฤตเป็น $\chi^{2(7-1)} = 12.50$ ดังนั้นจะปฏิเสธสมมติฐานหลัก ถ้า D มากกว่า 12.50

ตัวสถิติเดอร์บิน คำนวณค่าได้เป็น

$$D = \frac{12(6)}{2(4)\,(3)\,(7)} \{(8-6)^2 + (9-6)^2 + \ldots + (7-6)^2\}$$

$$= 12.00$$

ซึ่งไม่อยู่ในเขตวิกฤต ดังนั้นจึงยอมรับสมมติฐานหลัก นั่นคือรสชาติของไอศกรีมทั้ง 7 ชนิดนี้ ลูกค้าชอบพอๆ กัน

ในกรณีที่ปฏิเสธสมมติฐานหลัก และจะทำการวิเคราะห์หลังทดลอง (a Post Hoc) ในความแผกกันที่สนใจได้ สำหรับความแผกกัน

$$\varphi = a_1M_1 + a_2M_2 + \ldots + a_kM_k\,,\ \Sigma a_j = 0$$

จะประมาณด้วย $\hat{\varphi} = a_1\bar{R}_1 + a_2\bar{R}_2 + \ldots + a_k\bar{R}_k$

ซึ่งมีความแปรปรวนเป็น $V(\hat{\varphi}) = \frac{k(t^2-)}{12r(k-1)} \quad \Sigma a_j^2$

ดังนั้นการวิเคราะห์หลังทดลอง จึงได้ช่วงเชื่อมั่นสำหรับ φ เป็นดังนี้

$$\varphi = \hat{\varphi} \pm \sqrt{\chi^2_{\alpha(k-1)}}\ \sqrt{V(\hat{\varphi})}$$

และการเปรียบเทียบเป็นคู่ที่วางแผนไว้แล้ว จะใช้วิธีการทูกี้ ซึ่งกำหนดช่วงไว้ดังนี้

$$\varphi = \hat{\varphi} \pm \frac{q(\alpha, k, \infty)}{\sqrt{2}} \sqrt{V(\hat{\varphi})}$$

เบนาร์ด และ เอลเทอเรน (Benard and Eltern, 1953) ได้ขยายแบบทดสอบเดอร์บินกับกรณีที่หน่วยทดลองมีหลาย ๆ ค่าสังเกต สมมติว่ามี s ค่าสังเกต ดังนั้นบลอคหนึ่งจะมีค่าสังเกต st ค่า และการเรียงอันดับในแต่ละบลอคจะเป็นอันดับ 1, 2, .., st แล้วตัวสถิติทดสอบจะเป็นดังนี้

$$D_s = \frac{12(k-1)}{rsk(t+1)\ (t-1)} \Sigma\{R_j - rs(t+1)/2^2\}$$
$$= \frac{12(k-1)}{rks(t-1)\ (t-1)} \Sigma\{R_j^2 - 3rs(k-1)\ (t+1)/(t+1)\}$$

ซึ่งมีการแจกแจงไคสแควร์ ด้วยองศาความเป็นอิสระ k-1 ถ้าสมมติฐานหลักเป็นจริง

เมื่อสมมติฐานหลักได้รับการปฏิเสธ การเปรียบเทียบภายหลังจะทำได้โดยใช้ความแผกกัน

$$\varphi = \Sigma a_j M_j \quad , \quad \Sigma a_j = 0$$

ที่มีตัวประมาณค่าเป็น $\hat{\varphi} = \Sigma a_j \bar{R}_j \quad , \quad \bar{R}_j = R_j/rs$

โดยมีความแปรปรวนของ $\hat{\varphi}$ เป็น

$$V(\hat{\varphi}) = \frac{k(t^2-1)}{12rs(k-1)} \Sigma a_j^2$$

ดังนั้นช่วงเชื่อมั่นสำหรับความแผกกัน φ จะเป็น

$$\varphi = \hat{\varphi} \pm \sqrt{\chi^{2(k-1)}_{\alpha}} \sqrt{V(\hat{\varphi})}$$

และสำหรับความแผกกันเป็นคู่ จะได้ช่วงเชื่อมั่นเป็น

$$\varphi = \hat{\varphi} \pm \frac{q(\alpha, k, \infty)}{\sqrt{2}} \sqrt{V(\hat{\varphi})}$$

THE LANGUAGE OF STATISTICS IS MORE PRECISE THAN OTHER LANGUAGES; IT ALLOWS US TO MAKE MORE ACCURATE REPORTS AND SUMMARIES OF THE CHARACTERISTICS OF THINGS WE OBSERVE.

LINTON C. FREEMAN

THE MAN WHO DOES NOT UNDERSTAND THE LAWS OF SAMPLING AND PROBABILITY IS INTELLECTUALLY CRIPPLED IN TODAY'S WORLD.

ROBERT SEARS

GET YOUR FACTS FIRST
AND THEN YOU CAN DISTORT'EM
AS YOU PLEASE.

MARK TWAIN