# ปัญหาเกี่ยวกับเปอร์เซ็นต์ สัดส่วน หรือความน่าจะเป็น

**การฝึกจิต ที่ควบคุมยาก เปลี่ยนแปลงเร็ว**
**ใฝ่ในอารมณ์ตามที่ใคร่ เป็นความดี**
**เพราะจิตที่ฝึกได้แล้ว นำสุขมาให้**

**พุทธวจนะ**

ประชากรที่ประกอบด้วยหน่วยต่างๆ นั้นถ้าสามารถแบ่งหน่วยเป็นประเภทๆ ได้ หรือข้อมูลที่ได้จากหน่วยต่างๆ สามารถทำให้เป็นแบบนามบัญญัติได้แล้ว ค่าพารามิเตอร์ที่เราสนใจก็คือ เปอร์เซ็นต์ สัดส่วน หรือความน่าจะเป็นของประเภทในหน่วยต่างๆ นั้น เช่นในประชากรของนักศึกษา เราสนใจเปอร์เซ็นต์ของนักศึกษาที่พ่อแม่อาชีพเกษตรกรรม เปอร์เซ็นต์ของนักศึกษาที่สูบบุหรี่ หรือเปอร์เซ็นต์ของนักศึกษาที่มีเลือดกลุ่ม A, B, AB และ O เป็นต้น ในการอ้างอิงหรือการอนุมานเกี่ยวกับเปอร์เซ็นต์ สัดส่วน หรือความน่าจะเป็นของประชากร เราจะขอกล่าวเป็น 5 กรณี ดังนี้

- กรณีตัวอย่างเดียว
- กรณีสองตัวอย่างที่เป็นอิสระกัน
- กรณีสองตัวอย่างที่สัมพันธ์กัน
- กรณีหลายตัวอย่างที่เป็นอิสระกัน
- กรณีหลายตัวอย่างที่สัมพันธ์กัน

## 2.1 กรณีตัวอย่างเดียว (One-Sample Case)

ในกรณีตัวอย่างเดียวนี้ เราสนใจประชากรเดียวนั่นเอง การอ้างอิงเกี่ยวกับสัดส่วน (เปอร์เซ็นต์ หรือความน่าจะเป็น) ซึ่งเป็นการทดสอบค่าที่ระบุไว้ของพารามิเตอร์สัดส่วน และเป็นการประมาณค่าพารามิเตอร์สัดส่วน เรามีแบบทดสอบและวิธีประมาณค่าดังนี้

### 2.1.1 แบบทดสอบทวินาม (Binomial Test)

แบบทดสอบนี้ใช้ประยุกต์ปัญหาต่างๆ มากมาย เช่นปัญหาควบคุมคุณภาพ (Quality Control) การสุ่มเพื่อยอมรับสิ่งของ (Acceptance Sampling) เป็นต้น นั่นคือใช้ทดสอบเกี่ยวกับสัดส่วน เปอร์เซ็นต์ หรือความน่าจะเป็นของลักษณะ (ประเภท พวก หรือกลุ่ม) หนึ่งที่สนใจของประชากรที่มี 2 ลักษณะ สัดส่วนนั้นจะให้เป็น $\pi$ ($0 \le \pi \le 1$) ลักษณะนั้นๆ อาจจะเป็นเพศชาย-หญิง ของดี-ของเสีย รู้หนังสือ-ไม่รู้หนังสือ เป็นต้น แบบทดสอบทวินามได้ใช้กันมานานแล้ว

เพราะนายแพทย์อาร์บุธนอทท์ (J. Arbuthnott, 1710) ชาวอังกฤษได้คำนวณความน่าจะเป็นทวินามตั้งแต่ปี ค.ศ. 1710

ถ้าให้ $\pi_0$ เป็นสัดส่วนที่ระบุไว้ของ $\pi$ แล้วสมมติฐานหลักที่จะทดสอบ จะเป็น

$$Ho : \pi = \pi_0$$

โดยมีสมมติฐานรองเป็นแบบหนึ่งแบบใด ดังนี้

$$Ha : \pi < \pi_0 \text{ ; } Ha : \pi < \pi_0 \text{ ; or } \pi \neq \pi_0$$

ในการทดสอบสมมติฐานนี้เราก็อาศัยตัวอย่าง หรือการทดลองขนาด n ที่เป็นอิสระกัน จากตัวอย่างขนาด n เราได้ลักษณะที่เราสนใจจำนวน X หน่วย และลักษณะที่ไม่สนใจจำนวน n-X หน่วย

ตัวสถิติทดสอบ กำหนดไว้ว่า

$$T = X$$

ตัวสถิติ T จะมีการแจกแจงทวินามที่มีค่าเฉลี่ย $n\pi_0$ และความแปรปรวน $n\pi_0(1-\pi_0)$ ถ้า $Ho : \pi = \pi_0$ เป็นจริง

สำหรับกฎตัดสินใจขึ้นอยู่กับสมมติฐานรอง Ha ซึ่งมีรูปฟอร์มเป็น 3 แบบ ดังที่กล่าวมาแล้ว นั่นคือกฎตัดสินใจจะเป็นดังนี้

ก. $Ha : \pi < \pi_0$ ถ้าตัวสถิติ T มีค่าน้อยไป จะแสดงว่า Ho ไม่เป็นจริง นั่นคือ Ha จะเป็นจริง ดังนั้น ณ ระดับนัยสำคัญ $\alpha$ เราจะปฏิเสธ $Ho : \pi = \pi_0$ ถ้า $T \leq t$ ในเมื่อ t เป็นค่าวิกฤตจากตารางทวินาม ที่มีพารามิเตอร์ n และ $\pi_0$ และทำให้

$$P(Y \leq t) = \alpha \quad \text{หรือ} \quad P(Y > t) = 1 - \alpha$$

ข. $Ha : \pi > \pi_0$ ถ้าตัวสถิติ T มีค่ามากไป จะแสดงว่าสมมติฐานหลัก Ho ไม่เป็นจริง ดังนั้นจะปฏิเสธ Ho ณ ระดับนัยสำคัญ $\alpha$ ถ้า $T > t$ โดยที่ t เป็นค่าวิกฤตจากตารางทวินามที่มีพารามิเตอร์ n และ $\pi_0$ และทำให้

$$P(Y \leq t) = 1 - \alpha \quad \text{หรือ} \quad P(Y > t) = \alpha$$

ค. $Ha : \pi \neq \pi_0$ ถ้าตัวสถิติ T มีค่าน้อยหรือมากเกินไป จะแสดงว่า Ho ไม่เป็นจริง ดังนั้นจะปฏิเสธ Ho ณ ระดับนัยสำคัญ $\alpha$ ถ้า $T \leq t_1$ หรือ $T > t_2$ โดยที่ $t_1$ และ $t_2$ เป็นค่าวิกฤตจากตารางทวินาม ที่มีพารามิเตอร์ n และ $\pi_0$ และทำให้

$$P(Y \leq t_1) = \alpha_1 \quad \text{หรือ} \quad P(Y > t_2) = \alpha_2$$

ในเมื่อ $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$

สำหรับตัวอย่างขนาดโต ($n \geq 20$) และ $\pi_0$ ไม่น้อยหรือมากเกินไป เราใช้ตัวสถิติทดสอบ

$$Z = \frac{T - n\pi_0}{\sqrt{n\pi_0(1-\pi_0)}}$$

ซึ่งมีการแจกแจงปกติมาตรฐาน N (O, 1)

แต่ถ้าตัวอย่างขนาดโต และมีค่า $\pi_0$ ต่างจาก 0.50 มากเกินไป เราใช้การแจกแจงปัวซอง (Poisson) ประมาณค่าวิกฤตนั้น

**ตัวอย่าง** ในการตรวจสอบเกี่ยวกับความปลอดภัยของรถโดยอาศัยตัวอย่างของรถ 16 คัน พบว่า 6 คัน ไม่ปลอดภัย พอจะเชื่อได้ไหมว่ารถที่ไม่ปลอดภัยจะมีมากกว่า 30% ?

สมมติฐาน Ho : $\pi = 0.30$ , Ha : $\pi > 0.30$

ตัวสถิติทดสอบ T = X

กฎตัดสินใจ จากตารางทวินาม เราพบว่า

$$P(Y > 8) = 1-0.9743 = 0.0257$$

ดังนั้น ณ ระดับนัยสำคัญ 0.0257 เราจะปฏิเสธ Ho : $\pi = 0.30$ ถ้า T > 8

สรุปผล จากการทดลอง เราได้ T = 6 จึงยอมรับ Ho นั่นคือรถที่ไม่ปลอดภัยไม่น่าจะมีมากกว่า 30%

แบบทดสอบทวินามนี้สามารถใช้ทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับค่าเฉลี่ยของตัวแปรเชิงสุ่มทวินามได้ ทั้งนี้ก็เพราะว่า

$$Ho : \pi = \pi_0 \text{ สมนัยกับ } Ho : n\pi = n\pi_0$$

### 2.1.2 ช่วงเชื่อมั่นของความน่าจะเป็น หรือสัดส่วน (Confidence Interval for Proportion, Clopper–Pearson, 1934)

ในการสร้างช่วงเชื่อมั่นของสัดส่วนสำหรับเหตุการณ์ หรือลักษณะใดๆ ที่สนใจนี้จะมีความสัมพันธ์ใกล้ชิดกับแบบทดสอบทวินาม คลอพเพอร์ และเพียร์สัน (1934) ได้เสนอวิธีการประมาณแบบช่วงเชื่อมั่นไว้ ดังนี้

ให้สัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นเป็น $1-\alpha$ จากตารางทวินาม ที่มีขนาด n (ขนาดตัวอย่าง) หาค่า y = Y–1 ตามแนวนอน (row) ที่ทำให้ได้ค่าความน่าจะเป็น $\pi_1 = 1-\alpha/2$ ค่าของ $\pi$ จะได้จากหัวตารางตามแนวตั้งที่ค่า $\pi_1$ อยู่ และค่านี้จะเป็นช่วงจำกัดล่าง (Lower Limit) แล้วอ่านแถวต่อไป (y = Y) จนกระทั่งได้ $\pi_2 = \alpha/2$ ค่าของ $\pi$ ด้านบนจะให้ช่วงจำกัดบน

สำหรับตัวอย่างขนาดโต ($n \geq 20$) เราใช้การแจกแจงปกติมาตรฐาน N (0,1) ช่วย นั่นคือเราได้

$$\pi = P \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{PQ/n}$$

ในเมื่อ $Z_{\alpha/2}$ เป็นค่าจากตารางปกติมาตรฐานที่ทำให้มีพื้นที่ทางขวามือเท่ากับ $\alpha/2$ และ P = Y/n กับ Q = 1– p

**ตัวอย่าง** จากการศึกษาผลงานของพนักงานขาย 20 คน ที่สุ่มมาเพื่อจะดูว่าได้มาตรฐานตามเกณฑ์ที่ตั้งไว้สักกี่เปอร์เซ็นต์ ปรากฏว่าได้มาตรฐาน 7 คัน จงประมาณช่วงเชื่อมั่น 95% ของสัดส่วน $\pi$ ที่เป็นพนักงานที่ได้มาตรฐาน

เมื่อ $n = 20$, $Y = 7$ และ $P = Y/n = 7/20 = 0.35$

เราอ่านแถว $y = Y-1 = 7-1 = 6$ เพื่อหา $\pi_1 = 1-0.05/2 = 0.975$ สำหรับ $\pi = 0.15$ เราได้ 0.9781 และ $\pi = 0.20$ เราได้ 0.913

ดังนั้น $\pi = 0.15$ เป็นขีดจำกัดล่าง

ส่วนขีดจำกัดบนก็อ่านแถวต่อไป $y = 7$ เพื่อจะหา $\alpha/2 = 0.05/2 = 0.025$ ซึ่งจะได้ค่าเป็น $\pi = 0.59$ โดยเทียบจาก 0.0580 (จาก $\pi = 0.55$) และ 0.0210 (จาก $\pi = 0.60$)

ดังนั้นช่วงเชื่อมั่น 95% สำหรับสัดส่วน $\pi$ จึงเป็น

$$\pi = (0.15, 0.59)$$

จากตัวอย่างนี้ ถ้าเราใช้การแจกแจงปกติมาตรฐานช่วย เราจะได้ช่วงเชื่อมั่น 95% ดังนี้

$$\pi = 0.35 \pm 1.96\ 0.35(0.65)/20$$

$$= 0.14, 0.56$$

ช่วงเชื่อมั่นของ $\pi$ นั้น ถ้าเราคูณด้วยขนาดตัวอย่าง n เราจะได้ช่วงเชื่อมั่นของค่าเฉลี่ย $\mu = n\pi$ สำหรับตัวแปรเชิงสุ่มทวินาม

### 2.1.3 แบบทดสอบเครื่องหมาย (Sign Test)

แบบทดสอบเครื่องหมายเป็นแบบทดสอบไร้พารามิเตอร์ที่เก่าแก่ที่สุด อันที่จริงแบบทดสอบนี้ก็คือ แบบทดสอบทวินามที่มี $\pi_0 = 0.50$ นั่นเอง แต่อย่างไรก็ตามแบบทดสอบนี้ยังใช้ทดสอบสมมติฐานต่าง ๆ มากมาย ซึ่งเหมาะสมและสะดวกกว่าแบบทดสอบอื่น ๆ สำหรับสมมติฐานอื่น ๆ ที่ทดสอบด้วยแบบทดสอบเครื่องหมายนี้มีชื่อต่าง ๆ กันซึ่งจะได้กล่าวต่อไป

ดังนั้นสมมติฐานที่จะทดสอบ จึงเป็น

$Ho : \pi = 0.50$

$Ha : \pi < 0.50$, $Ha : \pi > 0.50$ หรือ $Ha : \pi \neq 0.50$,

วิธีการทดสอบก็เหมือนกับแบบทดสอบทวินามที่กล่าวมาแล้วนั่นเอง

### 2.1.4 การรวมแบบทดสอบเครื่องหมาย (Combined Sign Test)

คุณสมบัติที่สำคัญของแบบทดสอบเครื่องหมาย และแบบทดสอบทวินามอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องอันเป็นผลมาจากการทดลอง (หรือกลุ่ม) ที่เป็นอิสระนั้น สามารถรวมกันเพื่อให้แบบทดสอบที่มีอำนาจทดสอบทางสถิติมากกว่าแต่ละแบบทดสอบที่แยกกัน กระบวนการในการรวม 3 วิธีต่อไปนี้จะไว้ใจได้ก็ต่อเมื่อ สมมติฐานรอง Ha เป็นทางเดียว

*(1) กระบวนการ 1* กระบวนการอันแรกนี้ขึ้นอยู่กับคุณสมบัติการรวม (Additive) ของตัวแปรทวินาม นั่นคือ ถ้า $X_1, X_2, \ldots, X_3$, เป็นตัวแปรทวินามที่เป็นอิสระและมีค่า $\pi_0$ ร่วมกันแล้วผลรวมของตัวแปร หรือ

$$T = X_1 + X_2 + .. + X_k$$

ก็จะเป็นตัวแปรทวินาม ที่มีพารามิเตอร์ $n = n_1 + n_2 + .. + n_k$ และ $\pi = \pi_0$

ดังนั้นตัวแปร T จะมีการแจกแจงปกติมาตรฐาน N (0,1) โดยที่

$$Z = \frac{(T \pm 1/2) - E(T)}{\sqrt{V(T)}} = \frac{(T \pm 1/2) - n/2}{\sqrt{n/4}}$$

**ตัวอย่าง** ในการศึกษาทัศนคติของนักศึกษา 4คณะ ว่าส่วนมากเห็นด้วยกับวิธีการจัดการศึกษาของมหาวิทยาลัยหรือไม่ จากการศึกษาโดยตัวอย่างได้ข้อมูลมาดังนี้

| ทัศนคติ | เห็นด้วย | ไม่เห็นด้วย | ค่าของ Z |
|---|---|---|---|
| คณะ ก | 13 | 6 | 1.61 |
| ข | 11 | 6 | 1.21 |
| ค | 15 | 10 | 1.00 |
| ง | 18 | 11 | 1.30 |

ค่า Z ได้จากการเปรียบเทียบแต่ละคณะซึ่งต่างก็ไม่มีนัยสำคัญ

สมมติฐานที่จะทดสอบก็คือ

$Ho : \pi = 1/2$ , $Ha : \pi > 1/2$

ตามกระบวนการ 1 เราได้

$T = 13 + 11 + 15 + 18 = 57$

$n = 19 + 17 + 25 + 29 = 90$

$$Z = \frac{(57 - 1/2) - 90/2}{\sqrt{90/4}} = 11.5/4.47 = 2.43$$

สำหรับ $\alpha$ =0.05 จากตารางปกติมาตรฐาน เราได้ $z_{.05}$ = 1.645 จึงปฏิเสธ Ho ซึ่งแสดงว่าส่วนมากเห็นด้วยกับการจัดการศึกษา

*(2) กระบวนการ 2* กระบวนที่สองขึ้นอยู่กับคุณสมบัติการรวมตัวของตัวแปรปกติมาตรฐาน N(0,1) ดังนี้ ถ้า $Z_1, Z_2, .. Z_k$ เป็นตัวแปรปกติมาตรฐานที่เป็นอิสระกัน แล้ว

$$T = Z_1 + Z_2 + .. + Z_k$$

จะเป็นตัวแปรปกติที่มีค่าเฉลี่ย และความแปรปรวน เป็น

$E(T) = o$ และ $V(T) = K$

นั่นคือตัวสถิติ Z จะมีการแจกแจงปกติมาตรฐาน N(0,1) ในเมื่อ

$$Z = \frac{T - E(T)}{\sqrt{V(T)}} = T/\sqrt{K}$$

จากตัวอย่างในกระบวนการ 1 เราได้

$$T = 1.61 + 1.21 + 1.00 + 1.30 = 5.12$$
$$= 5.12/\sqrt{4} = 2.56$$

สำหรับ $\alpha = 0.05$ เราก็จะปฏิเสธ Ho อีก

*(3) กระบวนการ 3* กระบวนการนี้ขึ้นอยู่กับทฤษฎีการแจกแจงที่คาร์ล เพียร์สัน (Karl Pearson) เสนอไว้ และเรียกว่า **เกณฑ์แลมบ์ดาของเพียร์สัน** (Pearson's Lambda Criterion) ซึ่งกล่าวว่า

ถ้า $p_1, p_2, .., p_k$ เป็นค่าที่เป็นอิสระของ $P(Z > Z_c)$ โดยที่ $Z_c$ เป็นค่าที่คำนวณได้จากตัวอย่างแล้ว

$$\lambda = -2\{\ln p_1 + \ln p_2 + ... + \ln p_k\}$$
$$= -4.605\{\log p_1 + \log p_2 + ... + \log p_k\}$$

จะมีการแจกแจงแบบไคสแควร์ ด้วยองศาความเป็นอิสระ 2k

จากตัวอย่างที่แล้วมา เราได้

$p_1 = p\,(Z > 1.61) = 0.0538$, $p_2 = P\,(Z > 1.21) = 0.1132$

$p_3 = p\,(Z > 1.00) = 0.1587$, $p_4 = p\,(Z > 1.30) = 0.0968$

สำหรับ $\alpha$ =0.05 จากตารางไคสแควร์ เราได้ $\chi^{2(8)}_{.05} = 15.51$ และจากการคำนวณตัวสถิติ $\lambda$ เราได้

$$\lambda = -4.605\{(8.73078-10) + (9.04385-10) + (9.20058-10) + (8.98588-10)\}$$
$$= 18.60$$

จึงปฏิเสธ Ho เช่นเดียวกับกระบวนการ 1 และ 2

โดยทั่วไป ทั้งสามกระบวนการจะให้ผลสรุปแบบเดียวกัน ส่วนกระบวนการที่สามจะยุ่งยากในการคำนวณแต่มันจะมีความยืดหยุ่นมากที่สุดซึ่งสามารถใช้กับตัวแบบทดสอบต่าง ๆ ได้มากมาย ขอเพียงแต่ทราบค่าของ $p_k$ ต่าง ๆ สำหรับแบบทดสอบทางเดียว

### 2.1.5 แบบทดสอบไคสแควร์สำหรับสัดส่วนที่ระบุไว้ (Chi-Square Test for Specified Proportions)

ในกรณีที่ตัวอย่างให้ค่าสังเกตมากกว่า 2 ลักษณะ หรือสุ่มตัวอย่างจากประชากรพหุนาม (Multinomial Population) ให้ $\pi_1, \pi_2, .., \pi_k$ เป็นสัดส่วนของลักษณะต่าง ๆ ในประชากรที่มี k ลักษณะ แล้วสมมติฐานเกี่ยวกับสัดส่วน $\pi$ ต่าง ๆ จะกำหนดไว้ดังนี้

$$Ho : \pi_1 = \pi_{10}, \pi_2 = \pi_{20}, \dots, \pi_k = \pi_{ko}$$

ในเมื่อ $\pi_{10}, \pi_{20}, ..., \pi_{ko}$ เป็นสัดส่วนที่ระบุไว้ โดยที่ $\sum_{i}^{k} \pi_{io} = 1$

ตัวสถิติทดสอบสำหรับสมมติฐานนั้นกำหนดไว้เป็น

$$\chi^2 = \sum(X_i - n\pi_{io})^2/n\,\pi_{io}$$

ในเมื่อ $X_i$ เป็นความถี่ในลักษณะ i (i = 1, 2, .., k) ของตัวอย่างขนาด n ที่สุ่มมาจากประชากรที่ระบุค่า $\pi_{io}$ ต่างๆ ไว้

ตัวสถิติทดสอบ $\chi^2$ นี้จะมีการแจกแจงไคสแควร์ ด้วยองศาความเป็นอิสระ k–1 ถ้า Ho เป็นจริง ดังนั้นเกณฑ์ตัดสินใจจึงกำหนดไว้ว่า จะปฏิเสธ Ho ถ้า $\chi^2 = \chi_{\alpha}^{2(k-1)}$

**ตัวอย่าง** ตำรวจทางหลวงตั้งข้อสงสัยว่า อุบัติเหตุบนถนนสายบางนา-ตราด ในวันเสาร์และอาทิตย์จะเป็นสองเท่าของวันอื่นๆ จากอุบัติเหตุ 90 ครั้ง ที่สุ่มมาจากแฟ้มบันทึกอุบัติเหตุของตำรวจปรากฏว่ามีการแจกแจง ดังนี้

| วัน | อา | จ | อ | พ | พฤ | ศ | ส |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| จำนวนอุบัติเหตุ | 30 | 6 | 8 | 11 | 7 | 10 | 18 |

ความสงสัยของตำรวจถูกต้องหรือไม่ ?

$$\pi_1 = \quad \pi_7 = 2/9, \quad \pi_2 = \pi_3 = \ldots = \pi_6 = 1/9$$

ค่าของตัวสถิติทดสอบจะคำนวณได้เป็น

$$\begin{aligned}\chi^2 &= (30-90(2/9))^2/90(2/9) + (6-90(1/9))^2/90(1/9) + ..\\ &\quad ... + (18-90(2/(9))^2/90(2/9)\\ &= 8.20\end{aligned}$$

เนื่องจาก $\chi_{.05}^{2(7-1)}$ = 12.59 จึงปฏิเสธ Ho ไม่ได้ นั่นคือตำรวจทางหลวงคาดการณ์ไว้ถูกต้อง

## 2.2 กรณีสองตัวอย่างที่เป็นอิสระกัน (Two-Independent Sample Case)

ในกรณีสองตัวอย่างนี้เราก็เกี่ยวข้องกับประชากรสองประชากร สำหรับการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับสัดส่วนนั้นก็เป็นการทดสอบผลต่างของสัดส่วน เปอร์เซ็นต์ หรือความน่าจะเป็นของคุณลักษณะหนึ่งในประชากรนั้นเอง แต่สมมติฐานที่สนใจกันมากก็คือเปรียบเทียบสัดส่วนที่สนใจในสองประชากร ส่วนการประมาณค่าก็จะเป็นการประมาณค่าผลต่างของสัดส่วนในสองประชากรนั่นเอง เรามีแบบทดสอบและวิธีการประมาณค่า ดังต่อไปนี้

### 2.2.1 แบบทดสอบเออร์วิน-ฟิชเชอร์ (Irwin – Fisher Exact Test)

แบบทดสอบนี้เป็นแบบทั่วไปของแบบทดสอบทวินาม เพื่อใช้ทดสอบการเท่ากันของสัดส่วนในประชากร นั่นคือทดสอบสมมติฐานหลักที่ว่า

$$Ho : \pi_1 = \pi_2$$

สำหรับกลุ่มตัวอย่างที่เป็นอิสระกัน และตัวอย่างนั้นมีค่าสังเกตที่เป็นไปได้เพียง 2 ลักษณะ แบบทดสอบนี้ขึ้นอยู่กับการแจกแจงไฮเปอร์จีโอเมทริค (Hypergeometric) ดังนี้

ให้ $X_1$ และ $X_2$ เป็นจำนวนหน่วยที่มีลักษณะที่สนใจในสองตัวอย่างขนาด $n_1$ และ $n_2$ ที่เป็นอิสระกัน สำหรับ $X_1$ และ $X_2$ นี้ต่างก็แจกแจงทวินามที่มีพารามิเตอร์ $n_1$ และ $\pi_1$ กับ $n_2$ และ $\pi_2$ ซึ่งเป็นอิสระกัน เมื่อสมมติฐานหลัก Ho เป็นจริง แล้วการแจกแจงเงื่อนไขของ $X_1$ โดยกำหนด $X_1$-$X_2$ จะเป็นแบบไฮเปอร์จีโอเมทริค ที่มีพารามิเตอร์ $n = n_1 + n_2$ , $x = x_1 + x_2$ และ $k = n_1$ นั่นคือ

$$f(x_1 / x_1 + x_2) = \binom{n_1}{x_1} \binom{n_1+n_2-n_1}{x_1+x_2-x_1} / \binom{n_1+n_2}{x_1+x_2}$$
$$= \binom{n_1}{x_1} \binom{n_2}{x_2} / \binom{n_1+n_2}{x_1+x_2}$$

ดังนั้นในการทดสอบสมมติฐานหลัก Ho เราจึงมีกฎตัดสินใจตามสมมติฐานรอง Ha และระดับนัยสำคัญ $\alpha$ ดังนี้

(1) Ha : $\pi_1 < \pi_2$ จะปฏิเสธ Ho ถ้า $P(X_1 \leq x_1/x_1 + x_2) < \alpha$

(2) Ha : $\pi_1 > \pi_2$ จะปฏิเสธ Ho ถ้า $P(X_1 \geq x_1/x_1 + x_2) < \alpha$

(3) Ha : $\pi_1 \neq \pi_2$ จะปฏิเสธ Ho ถ้า $P(X_1 \leq x_1/x_1 + x_2) < \alpha/2$ หรือ $P(X_1 \geq x_1/x_1+x_2)$ $< \alpha/2$

**ตัวอย่าง** โรงงานต้องการซื้อเครื่องจักร ก หรือไม่ก็ซื้อเครื่องจักร ข เพื่อผลิตสินค้าอย่างหนึ่งเครื่องจักร ก ราคาแพงกว่า ข โรงงานจะซื้อ ก ก็ต่อเมื่อผลิตสินค้าที่เสียเป็นสัดส่วนต่ำกว่า ข จากตัวอย่างของสินค้าขนาด 5 ที่สุ่มมาจากแต่ละเครื่องจักร เครื่องจักร ก มีเสีย 1 ชิ้น เครื่องจักร ข มีเสีย 3 ชิ้น เมื่อใช้ $\alpha = 0.10$ แล้วการตัดสินใจจะเป็นอย่างไร ?

ให้ $\pi_1$ และ $\pi_2$ เป็นสัดส่วนของเสียจากเครื่องจักร ก และ ข แล้วสมมติฐานที่จะทดสอบจึงเป็น

$$Ho : \pi_1 = \pi_2 \; ; \; Ha : \pi_1 < \pi_2$$

ตัวสถิติทดสอบจะเป็น $x_1$ ที่แทนจำนวนของเสียจากเครื่องจักร ก เมื่อ Ho เป็นจริง แล้วการแจกแจงเงื่อนไขของ $X_1$ เมื่อกำหนด $X_1 + X_2$ จะเป็น

$$f(x_1 / x_1 + x_2) = \binom{n_1}{x_1} \binom{n_2}{x_2} / \binom{n_1+n_2}{x_1+x_2}$$

สำหรับ $n = n_1 + n_2 = 5 + 5 = 10$, $x = x_1+x_2 = 1 + 3 = 4$ และ $n_1 = 5$ เราจะได้

$$P(X_1 \leq 1 / x = 4) = 0.261905 > 0.10$$

ดังนั้นจึงปฏิเสธ Ho ไม่ได้ นั่นคือโรงงานจึงซื้อเครื่องจักรที่ถูกกว่า หรือซื้อเครื่องจักร ข นั้นเอง

เมื่อยอมรับ Ho : $\pi_1 = \pi_2$ เราสามารถประมาณสัดส่วนร่วม (Common Proportion) $\pi_0$ ได้เป็น $p_0$

$$p_0 = (x_1 + x_2) / (n_1 + n_2)$$

และเมื่อ $np_0 > 5$ และ $nq_0 > 5$ ช่วงเชื่อมั่นของ $\pi_0$ พิจารณาได้จาก

$$\pi_0 = p_0 \pm z_{\alpha/2} \sqrt{p_0 q_0 / n}$$

### 2.2.2 การประมาณค่าแบบทดสอบเออร์วิน-ฟิชเชอร์ด้วยตัวอย่างขนาดใหญ่ (Large-Sample Approximation to Irwin-Fisher Exact Test)

เมื่อตัวอย่างขนาดโต การคำนวณความน่าจะเป็นสะสมของการแจกแจงไฮเปอร์จีโอเมทริคทำได้ลำบาก จึงจำเป็นต้องอาศัยการประมาณค่า 2 วิธี ดังนี้

(1) การประมาณค่าโดยอาศัยการแจกแจงปกติ (Normal Distribution) เมื่อตัวอย่างขนาดโต ($n \rightarrow \infty$) เราจะได้ตัวสถิติทดสอบ ดังนี้

$$Z = (p_1 - p_2) / \sqrt{p_0 q_0 \, (1/n_1 + 1/n_2)}$$

ซึ่งมีการแจกแจงปกติมาตรฐาน N(0,1) ถ้าสมมติฐานหลักเป็นจริง ในเมื่อ $p_0 = (x_1 + x_2) / (n_1 + n_2)$, $p_1 = x_1/n_1$, $p_2 = x_2 / n_2$ และ $q_0 = 1 - p_0$

เมื่อ $n_1p_1$, $n_2p_2$, $n_1q_1$ และ $n_2q_2$ ต่างก็มากกว่า 5 และสมมติฐานหลักได้รับการปฏิเสธ แล้วเราสามารถสร้างช่วงเชื่อมั่น 100 $(1-\alpha)$ % สำหรับ $\pi_1 - \pi_2$ ได้เป็น

$$\pi_1 - \pi_2 = (p_1 - p_2) \pm Z_{\alpha/2} \sqrt{p_1q_1/n_1 + p_2q_2/n_2}$$

(2) การประมาณค่าโดยอาศัยการแจกแจงไคสแควร์ สำหรับสองตัวอย่างขนาด $n_1$ และ $n_2$ เราสามารถสรุปได้ดังตารางจรณ์ 2 x 2 ดังนี้

| | ตัวอย่าง | 1 | 2 | |
|---|---|---|---|---|
| ลักษณะ | 1 | $X_{11}$ | $X_{12}$ | x |
| | 2 | $X_{21}$ | $x_{22}$ | n-x |
| | | $n_1$ | $n_2$ | n |

ตัวสถิติทดสอบ กำหนดไว้ดังนี้

$$T = \frac{n(X_{11}X_{12} - X_{12}X_{21})^2}{n_1(n_2)\,(x)\,(n-x)}$$

ซึ่งมีการแจกแจงไคสแควร์ ด้วยองศาความเป็นอิสระ 1

**ตัวอย่าง** ในการศึกษาทัศนคติเกี่ยวกับเศรษฐกิจอย่างหนึ่งของชายและหญิงว่ามีเปอร์เซ็นต์ที่จะเห็นด้วยแตกต่างกันหรือไม่ จากการศึกษาโดยอาศัยตัวอย่าง ได้ข้อมูลมาดังนี้

| | ตัวอย่าง | ชาย | หญิง | |
|---|---|---|---|---|
| ทัศนคติ | เห็นด้วย | 55 | 21 | 76 |
| | ไม่เห็นด้วย | 20 | 2 | 22 |
| | รวม | 75 | 23 | 98 |

ให้ $\pi_1$ และ $\pi_2$ แทนสัดส่วนที่เห็นด้วยของชายและหญิง แล้วสมมติฐานที่จะทดสอบ จึงเป็น

$$Ho : \pi_1 = \pi_2 ; Ho : \pi_1 \neq \pi_2$$

ตัวสถิติทดสอบสำหรับตัวอย่างขนาดโต จะเป็น

$$Z = (p_1 - p_2) / \sqrt{p_0 q_0 (1/n_1 + 1/n_2)}$$

เมื่อ $p_1 = 55/75 = 0.73$, $p_2 = 21/23 = 0.91$ และ $p_0 = (55 + 21) / (75 + 23) = 0.78$ แล้วค่าของตัวสถิติ Z จะเป็น

$$Z = (0.73 - 0.91) / \sqrt{0.78 (0.22) (1/75 - 1/23)}$$
$$= -0.18 / 0.099 = -1.82$$

สำหรับ $\alpha = 0.05$ ค่าวิกฤตจะเป็น $Z_{.025} = 1.96$ ดังนั้น $|Z| < 1.96$ จึงปฏิเสธ Ho ไม่ได้

ถ้าใช้ตัวสถิติทดสอบ T เราจะได้ค่าเป็น

$$T = \frac{98\{55(2) - 21(20)\}^2}{75(23)(76)(22)} = 3.27$$

เมื่อ $\alpha = 0.05$ ค่าวิกฤตจะเป็น $\chi^{2(1)}_{.05} = 3.84$ จึงปฏิเสธ Ho ไม่ได้

### 2.2.3 การรวมตาราง เออร์วิน-ฟิชเชอร์ (Combining Irwin-Fisher Tables)

กระบวนการในการรวมการวิเคราะห์ของแบบทดสอบเครื่องหมายนั้น สามารถใช้รวมข้อมูลจากตารางเออร์วิน-ฟิชเชอร์ที่เป็นอิสระได้ด้วย แต่สมมติฐานรอง Ha จะต้องมีทิศทาง (Directional) กระบวนการแต่ละอย่างสามารถสรุปได้สั้นๆ ดังต่อไปนี้

*(1) กระบวนการ 1* ถ้า $Z_k$ เป็นตัวแปรปกติมาตรฐานที่แจกแจงแบบเดียวกันและเป็นอิสระกัน แล้วผลรวมของ K ตัวแปรเช่นนั้นก็จะมีการแจกแจงปกติที่มีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์ และมีความแปรปรวนเป็น K เมื่อ Ho เป็นจริง ตัวสถิติไคสแควร์ของคาร์ลเพียร์สัน ($\chi^2$) สำหรับตารางไคสแควร์ 2 x 2 จะแจกแจงไคสแควร์ (โดยประมาณ) ด้วยองศาความเป็นอิสระ 1 และรากที่สองของตัวสถิติเพียร์สันจะแจกแจงปกติมาตรฐาน (โดยประมาณ) เพราะฉะนั้นเราจะได้ว่า ถ้าสมมติฐานที่ไม่มีความแตกต่างระหว่างประชากรเป็นจริงสำหรับทุก K ตาราง 2 x 2 แล้ว

$$T = \sum_{k}^{k} \sqrt{\chi^2_K}$$

จะมีการแจกแจงปกติที่มีค่าเฉลี่ย 0 และความแปรปรวน K, N(0,K) นั่นคือตัวสถิติทดสอบ Z จะมีการแจกแจงปกติมาตรฐาน N(0,1) ในเมื่อ Z กำหนดไว้ว่า

$$Z = (T - 0)/\sqrt{V(K)} = T/\sqrt{K}$$

**ตัวอย่าง** สมมติว่าตารางเออร์วิน-ฟิชเชอร์สำหรับนักศึกษา 4 ปี ที่ได้ทำนายว่าผู้หญิงประสบความสำเร็จมากกว่าผู้ชาย เป็นดังนี้

| ปี | ผลทำนาย | ผู้ชาย | ผู้หญิง | ค่าไคสแควร์ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | สำเร็จ | 3 | 10 | 4.33 |
| | ไม่สำเร็จ | 12 | 8 | |
| | รวม | 15 | 18 | |
| 2 | สำเร็จ | 5 | 10 | |
| | ไม่สำเร็จ | 5 | 2 | 2.79 |
| | รวม | 10 | 12 | |
| 3 | สำเร็จ | 6 | 8 | |
| | ไม่สำเร็จ | 7 | 2 | 2.71 |
| | รวม | 13 | 10 | |
| 4 | สำเร็จ | 7 | 16 | 0.83 |
| | ไม่สำเร็จ | 5 | 3 | |
| | รวม | 12 | 19 | |

ดังนั้น T $= \sqrt{4.33} + \sqrt{2.79} + \sqrt{2.71} + \sqrt{0.83} = 2.08 + 1.67 + 1.64 + 0.91$

$= 6.30$

$$\sigma_T = \sqrt{V(T)} = \sqrt{4} = 2$$

$$Z = (T - O) / \sigma_T = T / \sqrt{K} = 6.30 / \sqrt{4} = 3.15$$

เนื่องจาก $Z = 3.15 > Z_{.05} = 1.645$ จึงปฏิเสธ Ho และสรุปว่า ผู้หญิงจะประสบความสำเร็จมากกว่าชาย

*(2) กระบวนการ 2* ตัวแปรไฮเปอร์จีโอเมทริคที่เป็นอิสระกัน สามารถจะรวมกันได้ถ้าความน่าจะเป็นที่จะประสบความสำเร็จนั้นเท่ากัน ดังนั้นถ้าแต่ละ $X_k$ เป็นแบบไฮเปอร์จีโอเมทริคที่มีพารามิเตอร์ $n_k$, $N_k$ และ $p_o$ แล้ว $T = X_1 + X_2 + .. + X_k$ ก็จะเป็นแบบไฮเปอร์จีโอเมทริคที่มีพารามิเตอร์ $n = n_1 + n_2 + .. + n_k$, $N = N_1 + N_2 + .. + N_k$ และ $P_o$

**ตัวอย่าง** จากตารางในตัวอย่างที่แล้วมา เรารวมจำนวนผู้ประสบความสำเร็จจากทุกปีได้เป็น

| ผลทำนาย | ผู้ชาย | ผู้หญิง | รวม |
|---|---|---|---|
| สำเร็จ | 21 | 44 | 65 |
| ไม่สำเร็จ | 29 | 15 | 44 |
| รวม | 50 | 59 | 109 |

เราได้ T $= 3 + 5 + 6 + 7 = 21$, $n = 15 + 10 + 13 + 12 = 50$

$= 33 + 22 + 23 + 31 = 109$

และ $\chi^2 = 11.94$

ในเทอมของการแจกแจงปกติเราได้ $Z = \sqrt{11.94} = 3.45$ และเขตวิกฤตทางเดียวขนาด $\alpha = 0.05$ ของตัวสถิติ Z กำหนดไว้เป็น $Z > Z_{.05} = 1.645$ ดังนั้นเขตวิกฤต (ที่มีทิศทาง) สำหรับ $\alpha = 0.05$ ของ $\chi^2$ จะเป็น $\chi^2_{.05}(1) = (1.645)^2 = 2.71$

เนื่องจาก $\chi^2 = 11.94 = 2.71$ เราจึงปฏิเสธ Ho และสรุปว่า ผู้หญิงจะประสบความสำเร็จมากกว่าผู้ชาย

*(3) กระบวนการ 3* คอคราน (Cochran, 1954) ได้เสนอวิธีรวมข้อมูลจากตาราง 2 x 2 ที่เป็นอิสระกัน และวิธีนี้จะมีประสิทธิภาพ เมื่อขนาดตัวอย่างของแต่ละตารางแตกต่างกันมาก ตัวสถิติคอครานซึ่งมีการแจกแจงปกติมาตรฐาน N(0,1) และกำหนดไว้ว่า

$$Z = \bar{d} / S_{\bar{d}}$$

ในเมื่อ d เป็นผลรวมชนิดถ่วงน้ำหนักของผลต่างเป็นคู่ๆ ในสัดส่วน

$$\bar{d} = \Sigma W_k d_k / \Sigma W_k$$

$$d_k = P_{1k} - P_{2k},\ W_k = n_{1k} n_{2k} / (n_{1k} + n_{2k}),\ p_k = T_k / n_k$$

$$S^2_{\bar{d}} = \Sigma W_k p_k q_k / \{\Sigma W_k\}^2$$

**ตัวอย่าง** จากตัวอย่างในกระบวนการ 1 เราจะได้

$d_1 = 10/18 - 3/15 = 0.3556,\ p_1 = 13/33 = 0.3939$

$W_1 = 15\ (18) / (15-18) = 8.1818$

$d_2 = 10/12 - 5/10 = 0.3333,\ p_2 = 15/22 = 0.6818$

$W_2 = 10\ (12) / (10-12) = 5.4545$

$d_3 = 8/10 - 6/13 = 0.3385,\ P_3 = 14/23 = 0.6087$

$W_3 = 13\ (10) / (13-10) = 5.6522$

$d_4 = 16/19 - 7/12 = 0.2588,\ p_4 = 23/31 = 0.7419$

$W_4 = 12\ (19) / (12-19) = 7.3548$

ดังนั้น $$Z = \frac{8.1818(0.3556) + \ldots + 7.3548\ (0.2588)}{8.1818 + \ldots + 7.3548} = 0.3207$$

$$S_{\bar{d}}^2 = \frac{8.1818\ (0.3939)\ (0.6016) + \ldots + 7.3548\ (0.7419)\ (0.2581)}{(8.1818 + \ldots + 7.3548)^2}$$

$= 0.0078$

$$Z = \bar{d}/S_{\bar{d}} = 0.3207/\sqrt{0.0078} = 3.62$$

เนื่องจาก Z = 3.62 > 1.645 จึงปฏิเสธHo นั่นคือผู้หญิงจะประสบความสำเร็จมากกว่าผู้ชาย

เราจะเห็นได้ว่าค่า Z ของกระบวนการ 1, 2 และ 3 นั้นเป็น 3.15, 3.45 และ 3.62 ตามลำดับ ซึ่งแสดงว่า กระบวนการของคอครานมีอำนาจทดสอบมากกว่า สำหรับกระบวนการของคอครานนี้สามารถใช้กับสมมติฐานรองที่ไม่มีทิศทาง (สองทาง) ได้ เพราะ d อาจจะเป็นบวกหรือลบก็ได้

*(4) กระบวนการ 4* **เกณฑ์แลมบ์ดาของเพียร์สัน** (Pearson's Lambda Criterion) ซึ่งขึ้นอยู่กับความน่าจะเป็นที่มีนัยสำคัญของแต่ละการทดสอบสำหรับตาราง 2 x 2 นั่นคือ ถ้า $p_1, p_2, .., p_k$ เป็นค่าที่เป็นอิสระของ $P(\chi^{2(1)} > \chi^2)$ แล้ว

$$\lambda = -2\sum_k^k \ln p_k = -4.605\sum_k^k \log p_k$$

จะมีการแจกแจงไคสแควร์ ด้วยองศาความเป็นอิสระ 2K

**ตัวอย่าง** จากตัวอย่างของกระบวนการ 1 เราจะได้

$p_1 = p(\chi^{2(1)}>4.33) = 0.0188$, $p_2 = p(\chi^{2(1)}>2.79) = 0.0475$

$p_3 = p(\chi^{2(1)}>2.71) = 0.0505$, $p_4 = p(\chi^{2(1)}>0.83) = 0.1814$

ดังนั้น $\lambda = -4.605\{\log(0.0188) + ... + \log(0.1814)\} = 23.43$

เมื่อ $\alpha = 0.05$ เราได้ $\chi^{2(2(4))}_{.05} = 15.51$ จึงปฏิเสธ Ho นั่นคือผู้หญิงจะประสบความสำเร็จมากกว่าผู้ชาย

### 2.2.4 แบบทดสอบไคสแควร์เกี่ยวกับความเป็นเอกภาพของสัดส่วน (Chi-Square Test of Homogeneity of Proportions)

ถ้าหน่วยในแต่ละประชากรสามารถแบ่งเป็นประเภทได้มากกว่า 2 ประเภท สมมติว่าเป็น k ประเภท เมื่อสุ่มตัวอย่างขนาด $n_1$ และ $n_2$ จากสองประชากรที่เป็นอิสระกัน แล้วค่าสังเกตสามารถสรุปได้ดังตารางต่อไปนี้ เมื่อ $0_{ij}$ เป็นความถี่หรือจำนวนค่าสังเกตในประเภท j ของตัวอย่าง i (i = 1,2)

| ประเภท | | 1 | 2 .... | j .... | k | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ตัวอย่าง | 1 | $0_{11}$ | $0_{12}$ | $0_{ij}$ | $0_{1k}$ | $n_1$ |
| | 2 | $0_{21}$ | $0_{22}$ | $0_{2j}$ | $0_{2k}$ | $n_2$ |
| | | $0_{.1}$ | $0_{.2}$ | $0_{.j}$ | $0_{.k}$ | n |

สมมติฐานที่จะทดสอบก็คือความเป็นเอกภาพของสัดส่วนในแต่ละประเภทของสองประชากร นั่นคือ

Ho: $\pi_{11} = \pi_{21}$ , $\pi_{12} = \pi_{22}$ ,..., $\pi_{1\kappa} = \pi_{2\kappa}$

หรือ Ho : $\pi_{ij} = \pi_{2j}$ (j = 1, 2,..,k)

ตัวสถิติทดสอบก็คือ

$$\chi^2 = \sum_{j}^{2}\sum_{j}^{k}(0_{ij} - E_{ij})^2/E_{ij}, \qquad E_{ij} = n_j(0_{.j}/n)$$

$$= \frac{n^2}{n_1 n_2}\left(\sum_j 0_{1j}^2/0_{.j} - n_1^2/n\right)$$

ซึ่งมีการแจกแจงไคสแควร์ ด้วยองศาความเป็นอิสระ k-1 ถ้า Ho เป็นจริง

ตัวสถิติทดสอบ $\chi^2$ นี้จะใช้ได้ดี ถ้าจำนวนความถี่คาดหวัง $E_{ij}$ ไม่น้อยกว่า 5 แต่ถ้าน้อยกว่า 5 ก็ต้องดูว่าจำนวนเซลล์ $E_{ij}$ นั้นมีค่าน้อยกว่า 5 ถึง 20% ของเซลล์ทั้งหมดหรือไม่ ถ้ามีไม่ถึง 20%

ตัวสถิติทดสอบก็ใช้ได้ แต่ถ้ามากกว่า 20% ก็จำเป็นต้องแบ่งประเภทในตัวอย่างใหม่ เพื่อให้มีค่า $E_{ij}$ เป็นไปตามที่ต้องการ

**ตัวอย่าง** นักวิจัยได้นำข้อทดสอบผลสัมฤทธิ์ไปทดสอบกับตัวอย่างของนักเรียนโรงเรียนราษฎร์และรัฐบาล ได้คะแนนมาดังนี้

| คะแนน | 0-275 | 276-350 | 351-425 | 426-500 | รวม |
|---|---|---|---|---|---|
| โรงเรียนราษฎร์ | 6 | 14 | 17 | 9 | 46 |
| รัฐบาล | 30 | 32 | 17 | 3 | 82 |
| | 36 | 46 | 34 | 12 | 128 |

ถ้าเราต้องการทดสอบสมมติฐานที่ว่า การแจกแจงคะแนนสอบของโรงเรียนทั้งสองประเภทเป็นแบบเดียวกันหรือไม่ ? เราก็สามารถทำได้โดยการทดสอบความแตกต่าง หรือความเป็นเอกภาพของความน่าจะเป็น ดังนี้

$$\text{Ho} : \pi_{1j} = \pi_{2j} \quad \text{สำหรับ } j = 1, 2, 3, 4$$

เมื่อ Ho เป็นจริง เราคำนวณ $E_{ij}$ ได้ดังนี้

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| แถว 1 | 12.9 | 16.5 | 12.2 | 4.3 |
| แถว 2 | 23.1 | 29.5 | 21.8 | 7.7 |

ดังนั้นค่า $\chi^2$ จะได้เป็น $\chi^2 = (6-12.9)^2/12.9 + (14-16.5)^2/16.5 + \ldots + (3-7.7)^2/7.7$

$$\chi^2 = 17.3$$

หรือ

$$\chi^2 = \frac{128^2}{46(82)} \{(6^2/36 + 14^2/46 + 17^2/34 + 9^2/12) - 46^2/128\}$$

$$= 17.29$$

เมื่อ $\alpha = .05$ เราได้ $\chi^{2(4-1)}_{.05} = 7.815$ จึงปฏิเสธ Ho นั่นคือการแจกแจงของคะแนนสอบของโรงเรียนทั้งสองประเภทจะไม่เป็นแบบเดียวกัน

## 2.3 กรณีสองตัวอย่างที่สัมพันธ์กัน (Two Related Sample Case)

วิธีการที่ผ่านมาแล้วเรามีข้อสมมติว่า ค่าสังเกตระหว่างตัวอย่างเป็นอิสระซึ่งกันและกัน แต่ในบางครั้งข้อสมมติไม่เป็นไปตามนั้น นั่นคือค่าสังเกตระหว่างตัวอย่างมีความสัมพันธ์กัน ข้อมูลที่ได้แบบนี้ส่วนมากจะได้จากการทดลองที่เรียกว่า ก่อนและหลังการทดลอง (การทดสอบ) โดยที่ข้อมูลหรือค่าสังเกตจะได้จากหน่วยทดลองเดียวกันทั้งก่อนและหลังการทดลอง

เราอาจจะได้ตัวอย่างที่มีความสัมพันธ์กันโดยการจับคู่หน่วยทดลองตามเกณฑ์จับคู่บางอย่าง หน่วยทดลองหนึ่งในแต่ละคู่จะได้รับกรรมวิธีหนึ่ง และอีกหน่วยทดลองจะได้รับกรรมวิธีอื่น (หรือไม่ได้รับกรรมวิธีใด)

สำหรับค่าสังเกตที่ได้จากการทดลองนี้จะเป็นแบบนามบัญญัติที่มี 2 ประเภท หรือมากกว่า การวิเคราะห์ข้อมูลจะอาศัยแบบทดสอบต่าง ๆ ซึ่งจะได้กล่าวต่อไปนี้

### 2.3.1 แบบทดสอบแมคนีมาร์ (McNemar Test)

แบบทดสอบนี้ใช้วิเคราะห์ข้อมูลจากสองตัวอย่างที่มีสหสัมพันธ์กัน โดยที่ข้อมูลนั้นเป็นแบบนามบัญญัติที่ 2 ประเภท เท่านั้น ข้อมูลที่จะวิเคราะห์ด้วยแบบทดสอบแมคนีมาร์จะสรุปได้ดังนี้

| | ตัวอย่าง 2 | ประเภท 1 | ประเภท 2 | รวม |
|---|---|---|---|---|
| ตัวอย่าง 1 ประเภท | 1 | $X_{11}$ | $X_{12}$ | $X_{1.}$ |
| | 2 | $X_{21}$ | $X_{22}$ | $X_{2.}$ |
| | รวม | $X_{.1}$ | $X_{.2}$ | n |

ในเมื่อ $X_{ij}$ (i,j = 1,2) เป็นความถี่จากตัวอย่างขนาด n ส่วน $X_{1.}$ และ $X_{2.}$ เป็นผลรวมของประเภท 1 และ 2 จากตัวอย่าง 1 ในทำนองเดียวกัน $X_{.1}$ และ $X_{.2}$ เป็นผลรวมของประเภท 1 และ 2 จากตัวอย่าง 2

สมมติฐานหลักที่จะทดสอบก็คือ การเท่ากันของสัดส่วน (หรือความน่าจะเป็น) ในประเภท 1 นั่นคือ

$$Ho : \pi_{.1} = \pi_{1.}$$

และอีกสมมติฐานหนึ่งก็คือ การสมมาตรของความน่าจะเป็นร่วม นั่นคือ

$$Ho : \pi_{21} = \pi_{12}$$

ตัวสถิติทดสอบก็จะเป็น $X_{21}$ และ $X_{12}$ ถ้า Ho เป็นจริง แล้ว $X_{21}$ และ $X_{12}$ ต่างก็มีการแจกแจงทวินาม ที่มีพารามิเตอร์ m และ 0.5 นั่นคือ $X_{21} \sim Bi(m, 0.5)$ และ $X_{12} \sim Bi(m, 0.5)$ ในเมื่อ $m = X_{12} + X_{21}$

สำหรับ $Ho : \pi_{21} = \pi_{12}$ , $Ha : \pi_{21} > \pi_{12}$ หรือ $Ho : \pi_{.1} = \pi_{1.}$ , $Ha : \pi_{.1} > \pi_{1.}$ นั้นจะปฏิเสธ Ho ณ ระดับนัยสำคัญ $\alpha$ ถ้า $P(X_{21} \geq x) \leq \alpha$ ในเมื่อ $P(X_{21} \geq x)$ กำหนดไว้ดังนี้

$$P(X_{21} \geq x) = \sum_{x=x_{21}}^{m} \binom{m}{x} (1/2)^{x} (1/2)^{m-x}$$

$$= \sum_{x=x_{21}}^{m} \binom{m}{x} (1/2)^{m}$$

กรณีตัวอย่างขนาดโต ($m \geq 10$) เราใช้การประมาณค่าแบบปกติ หรือใช้ตัวสถิติ

$$Z = \frac{X_{21} - E(X_{21})}{\sqrt{V(X_{21})}} = \frac{X_{21} - (X_{21} + X_{12})/2}{\sqrt{(X_{21} + X_{12})/4}} = \frac{X_{21} + X_{12}}{\sqrt{X_{21} + X_{12}}}$$

ซึ่งมีการแจกแจงปกติมาตรฐาน N(0),1) ถ้าแก้ไขความต่อเนื่อง แล้วตัวสถิติทดสอบจะเป็น

$$Z = \frac{(X_{21} - X_{12} \pm 1)}{\sqrt{(X_{21} + X_{12})}}$$

ตัวสถิติทดสอบ นี้สามารถทำให้อยู่ในรูปไคสแควร์ได้เป็น

$$\chi^2 = \frac{(X_{21} - X_{12} \pm 1)^2}{\sqrt{(X_{21} + X_{12})}}$$

ซึ่งมีการแจกแจงไคสแควร์ ด้วยองศาความเป็นอิสระ 1

**ตัวอย่าง** ในการศึกษาเพื่อทดสอบสมมติฐานที่ว่า สัดส่วนของประเภท 1 ในตัวอย่าง 1 มากกว่าสัดส่วนในตัวอย่าง 2 ($\pi_{.1} > \pi_{1.}$) โดยที่ตัวอย่างทั้งสองมีสหสัมพันธ์กัน ได้ผลการศึกษาจากตัวอย่างขนาด 78 ดังนี้

| | | | ประเภท | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | ตัวอย่าง 2 | | 1 | 2 | |
| | ประเภท | 1 | 30 | 6 | 36 |
| ตัวอย่าง 1 | | 2 | 18 | 24 | 42 |
| | | | 48 | 30 | 78 |

สมมติฐานที่จะทดสอบจึงเป็น

$$Ho : \pi_{.1} = \pi_{1.} \ ; \ Ha : \pi_{.1} > \pi_{1.}$$

ค่าของตัวสถิติทดสอบ คำนวณได้ดังนี้

$$Z = \frac{(X_{21} - X_{12}) \pm 1}{(X_{21} + X_{12})} = \frac{(18-6) - 1}{18+6}$$

$$= 2.245$$

และ

$$\chi^2 = \frac{(X_{21} - X_{12} \pm 1)^2}{(X_{21} + X_{12})} = \frac{(18-6-1)^2}{18+6} = 5.04 = (2.245)^2$$

ดังนั้น ณ ระดับนัยสำคัญ 0.05 เราจึงปฏิเสธ Ho (พราะ $Z_{.05}$ = 1.645 หรือ = $\chi^{2(1)}_{2(.05)}$ = 2.71) ในกรณีทดสอบทางเดียวนั้น $Z_\alpha = \chi^{2(1)}_{2\alpha}$

### 2.3.2 ช่วงเชื่อมั่นสำหรับผลต่างของสัดส่วนที่มีสหสัมพันธ์กัน ($\psi = \pi_{.1} - \pi_{1.}$)

สำหรับตัวอย่างขนาดโต เราสามารถสร้างช่วงเชื่อมั่นสำหรับผลต่างของสัดส่วนที่มีสหสัมพันธ์กัน ($\pi_{.1} - \pi_{1.}$) โดยอาศัยการประมาณค่าแบบปกติได้เป็น

$$\pi_{.1} - \pi_{1.} = (p_{.1} - p_{1.}) \pm Z_{\alpha/2} S_{\hat{\varphi}}$$

ในเมื่อ $\hat{\varphi} = p_{.1} - p_{1.}$ ; $S^2_{\hat{\varphi}} = p_{.1}p_{2.}/n + p_{1.}p_{2.}/n - 2(p_{11} - p_{.1}p_{1.})/n$

$$p_{.1} = X_{.1}/n \; ; \; p_{1.} = X_{1.}/n \; ; \; p_{11} = X_{11}/n$$

**ตัวอย่าง** จากตัวอย่างที่แล้วมาเราสามารถสร้างช่วงเชื่อมั่นสำหรับ $\pi_{.1} - \pi_{1.}$ ได้ดังนี้

$\hat{\varphi} = p_{.1} - p_{1.} = 48/78 - 36/78 = 0.6154 - 0.4615 = 0.1539$

$S^2_{\hat{\varphi}} = 0.6154(0.3846)/78 + 0.4615(0.5385)/78 - 2\{0.3846 - 0.6154(0.4615)\}/78$

$= 0.003641$

ดังนั้นช่วงเชื่อมั่น 95% สำหรับ $\varphi = \pi_{.1} - \pi_{1.}$ เป็น

$\varphi = 0.1539 \pm 1.96 \quad 0.003641 = 0.1539 \pm 0.1183$

$= 0.0356, 0.2719$

### 2.3.3 แบบทดสอบโบวเคอร์ (Bowker Test)

แบบทดสอบนี้เป็นรูปทั่วไปของแบบทดสอบแมคนีมาร์ในเมื่อค่าสังเกตจากสองตัวอย่างที่มีสหสัมพันธ์กันนั้นแบ่งเป็น k ประเภท และใช้ทดสอบการสมมาตรของความน่าจะเป็นที่เปลี่ยนแปลง (Change Probabilities) หรือ

$$Ho : \pi_{ij} = \pi_{ji} \text{ ทุกค่า } i, j \text{ ที่ } i > j$$

ข้อมูลจากการทดลองที่มีขนาด n จะสรุปได้ดังนี้

| | | | ประเภท | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ตัวอย่าง 2 | | 1 | 2 ..... | j ..... | k | รวม |
| | ประเภท | 1 | $X_{11}$ | $X_{12}$ | $X_{1j}$ | $X_{1k}$ | $X_{1.}$ |
| ตัวอย่าง 1 | | 2 | $X_{21}$ | $X_{22}$ | $X_{2j}$ | $X_{2k}$ | $X_{2.}$ |
| | | k | $X_{k1}$ | $X_{k2}$ | $X_{kj}$ | $X_{kk}$ | $X_{k.}$ |
| | รวม | | $X_{.1}$ | $X_{.2}$ | $X_{.j}$ | $X_{.k}$ | n |

ในเมื่อ $X_{ij}$ เป็นความถี่ในตัวอย่าง i และตัวอย่าง j ซึ่งมีขนาด n

ตัวสถิติทดสอบนั้น โบวเคอร์ เสนอไว้ว่า

$$\chi^2 = \sum_{i}^{k}\sum_{j}^{k} (X_{ij} - X_{ji})^2/(X_{ij} + X_{ji})$$

ซึ่งมีการแจกแจงไคสแควร์ ด้วยองศาความเป็นอิสระ $\binom{k}{2} = k(k-1)/2$

**ตัวอย่าง** ในการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับการสมมาตร หรือ

$$Ho: \pi_{ij} = \pi_{ji} \; ; Ha: \pi_{ij} > \pi_{ji} \; ; i > j \qquad \begin{matrix} i = 1,2,...,k \\ j = 1,2,...,k \end{matrix}$$

โดยใช้ตัวอย่างขนาด 122 ได้ข้อมูลดังนี้

| | | ประเภท | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ตัวอย่าง 2 | | 1 | 2 | 3 | |
| ตัวอย่าง 1 ประเภท | 1 | 48 | 4 | 5 | 57 |
| | 2 | 2 | 9 | 2 | 13 |
| | 3 | 20 | 3 | 29 | 52 |
| | | 70 | 16 | 36 | 122 |

ค่าของตัวสถิติโบวเคอร์สำหรับข้อมูลข้างบนนี้จะเป็น

$$\chi^2 = (2-4)^2/(2+4) + (20+5)^2/(20+5) + (3-2)^2/(3+2)$$

$$= 9.87$$

สำหรับ $\alpha = 0.05$ เราได้ $\chi^{2(3)}_{.05} = 7.82$ ในเมื่อ $\binom{k}{2} = 3$ จึงปฏิเสธ Ho

ในการทดสอบเกี่ยวกับการสมมาตรนั้น ถ้า Ho เป็นจริง แล้วเราจะได้ว่า $\pi_{.j} = \pi_{i.}$ (i=j) แต่บทกลับนี้ไม่จำเป็นต้องเป็นจริง

### 2.3.4 แบบทดสอบสจวร์ท (Stuart Test)

แบบทดสอบนี้เป็นรูปทั่วไปของแบบทดสอบแมคนีมาร์ ซึ่งใช้ทดสอบการเท่ากันของความน่าจะเป็น นั่นคือสมมติฐานหลักจะเป็น

$$Ho: \pi_{.i} = \pi_{j.} \; ; i=j \; (i, j = 1, 2,...,k)$$

สมมติฐานหลัก Ho นี้ เมื่ออาศัยตัวอย่างขนาดโต เราใช้ตัวสถิติทดสอบในรูปกำลังสอง (Quadratic Form) ของ k-1 ตัวแปรแบบปกติ $d_i = n_{i.} - n_{.i}$, (i = 1, 2,..,k-1) นั่นคือตัวสถิติทดสอบจะเป็น

$$Q = d' V^{-1} d = \sum_{i,j}^{k-1} V^{ij} d_i d_j$$

ซึ่งมีการแจกแจงไคสแควร์ด้วยองศาความเป็นอิสระ k-1 ในเมื่อ $V^{ij}$ เป็นสมาชิก (i, j) ของส่วนกลับ (Inverse) ของ (k-1) x (k-1) แมทริกการกระจาย V ของ $d_i$ โดยที่ V มีสมาชิกเป็น

$$V_{ii} = n_{i.} + n_{.i} - 2n_{ii}$$

$$V_{ij} = -(n_{ij} + n_{ji}) \; ; i \neq j$$

ในการคำนวณตัวสถิติ Q เราทำได้ดังนี้

(1) สร้างแมทริก V ซึ่งมีสมาชิก $V_{ii}$ และ $V_{ij}$

(2) หาส่วนกลับของ V ซึ่งจะได้สมาชิกเป็น $V^{ij}$

(3) คำนวณ $Q = \sum_{i,j}^{k-1} V^{ij} d_i d_j$

**ตัวอย่าง** ในการเปรียบเทียบทัศนคติเกี่ยวกับเอกลักษณ์ไทยระหว่างสามีและภรรยาว่าแตกต่างกันหรือไม่ โดยใช้ตัวอย่างของสามีและภรรยา 7477 คู่ ได้คำตอบมาดังนี้

| | | ข้อเลือก | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | สามี | 1 | 2 | 3 | 4 | รวม |
| ข้อเลือก | 1 | 1520 | 266 | 124 | 66 | 1976 |
| | 2 | 234 | 1512 | 432 | 78 | 2256 |
| ภรรยา | 3 | 117 | 362 | 1772 | 205 | 2456 |
| | 4 | 36 | 82 | 179 | 492 | 789 |
| | รวม | 1907 | 2222 | 2507 | 841 | 7477 |

$$Ho : = \pi_{.j} = \pi_{.i} \ (i = j = 1, 2, 3, 4)$$

$d_1 = 1976-1907 = 69,\quad d_2 = 2256-2222 = 34$

$d_3 = 2456-2507 = -51,\quad d_4 = 789-841 = -52$

$$V_{11} = 1976-1907-2(1520) = 843$$

$$V_{12} = V_{21} = -(234+266) = -500$$

สำหรับ $V_{22}$, $V_{33}$, $V_{44}$ กับ $V_{13} = V_{31}$ , $V_{23} = V_{32}$ และอื่นๆ แล้วเราจะได้

$$V = \begin{bmatrix} 843 & -500 & -241 \\ -500 & 1454 & -794 \\ -241 & -794 & 1419 \end{bmatrix} \quad V^{-1} = 10^{-6} \begin{bmatrix} 2482 & 1560 & 1295 \\ 1560 & 1972 & 1368 \\ 1295 & 1368 & 1690 \end{bmatrix}$$

ดังนั้นค่าของตัวสถิติทดสอบ Q จะเป็น

$$Q = 10^{-6}\{2482(69^2) - 1972(34^2) -2(1560)(69)(34) - 2(1295)(69)(51) - 2(1368)(34)(51)\}$$

$$= 11.96$$

เมื่อ $\alpha = .01$ เราได้ $\chi^{2(4-1)}_{.01} = 11.345$ ดังนั้นเราจึงปฏิเสธ Ho

ในการคำนวณค่าของตัวสถิติ Q นั้นเราจะทิ้ง $d_i$ ตัวใดก็ได้จากตัวอย่างเราทิ้งไม่นำมาคำนวณ

สำหรับตัวสถิติ Q ดังกล่าวนั้น จะเห็นได้ว่ายุ่งยากในการคำนวณ ในการทดสอบสมมติฐานจึงใช้กระบวนการเปรียบเทียบพหุคูณ (Multiple-Comparisons Procedure) หาค่าวิกฤตแทน นั่นคือช่วงเชื่อมั่น 100(1-$\alpha$) % สำหรับ $\varphi_i = \pi_{.i} - \pi_{i.}$, i, j, (i, j = 1, 2,...,k) ที่สร้างได้จะเป็น

$$\varphi_i = (p_{.i}-p_{i.}) \pm \sqrt{\chi_\alpha^{2(k-1)}}\sqrt{S\hat{\varphi}}$$

ในเมื่อ $S^2_{\hat{\varphi}} = p_{.i}(1-p_{.i})/n + p_{i.}(1-p_{i.})/n - 2(p_{ii}-p_{.i}p_{i.})/n$

$= (1/n^3)\{X_{.i}(n-X_{.i}) + X_{i.}(n-X_{i.}) - 2nX_{ii} + 2X_{.i}X_{i.}\}$

**ตัวอย่าง** ในการทดสอบการเท่ากันของความน่าจะเป็นที่สัมพันธ์กัน โดยอาศัยตัวอย่างขนาด 124 ได้ข้อมูลมาดังนี้

| | | ประเภท | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | ตัวอย่าง 2 | 1 | 2 | 3 | รวม |
| | ประเภท 1 | 50 | 9 | 10 | 69 |
| ตัวอย่าง 1 | 2 | 2 | 6 | 29 | 37 |
| | 3 | 0 | 0 | 18 | 18 |
| | รวม | 52 | 15 | 57 | 124 |

$\hat{\varphi}_1 = p_{.1} - p_{1.} = 52/124 - 69/124 = -17/124 = -0.1371$

$\hat{\varphi}_2 = p_{.2} - p_{2.} = 15/124 - 37/124 = -22/124 = -0.1774$

$\hat{\varphi}_3 = p_{.3} - p_{3.} = 57/124 - 18/124 = 39/124 = 0.3145$

$S^2_{\hat{\varphi}_1} = (1/124^3)\{52(72) + 69(55) - 2(124)(50) + 2(52)(69)\} = 0.001214$

$S^2_{\hat{\varphi}_2} = (1/124^3)\{15(109) + 37(87) - 2(124)(6) + 2(15)(37)\} = 0.002348$

$S^2_{\hat{\varphi}_3} = (1/124^3)\{57(67) + 18(106) - 2(124)(18) + 2(57)(18)\} = 0.001739$

ดังนั้นช่วงเชื่อมั่น 95% สำหรับ $\varphi = \pi_{.i} - \pi_{i.}$ จะเป็น

$\pi_{.1} - \pi_{1.} = -0.1371 \pm \sqrt{5.99(0.001214)}$

$= -0.1371 \pm 0.0853 = -0.2234, -0.0518$

$\pi_{.2} - \pi_{2.} = -0.1774 \pm 0.1186 = -0.2960, -0.0588$

$\pi_{.3} - \pi_{3.} = -0.3145 \pm 0.1021 = 0.2124, 0.4166$

ซึ่งเราจะเห็นได้ว่าสัดส่วนหรือความน่าจะเป็นในแต่ละประเภทของตัวอย่าง 1 และตัวอย่าง 2 นั้นน่าจะแตกต่างกันหมด

ในกรณีตารางความถี่ขนาด k x k นี้ ถ้าเราสนใจทดสอบความเป็นสัดส่วนร่วม (Common Proportionality) ของเซลล์ทะแยง (Diagonal Cell) นั่นคือ สมมติฐานหลักจะเป็น

$$Ho: \pi_{ii} / \pi_{i.}\pi_{.i} = \pi_{jj} / \pi_{j.}\pi_{.j}, \ (i, j = 1, 2, \ldots, k)$$

เราก็อาศัยตัวสถิติทดสอบเดอร์บิน (Durbin) ดังนี้

$$\chi^2 = \Sigma\, n_{i.} n_{.i} \frac{(n_{ii}/n_{i.}n_{.i} - \Sigma n_{ii} / \Sigma n_{i.}n_{.i})^2}{\Sigma n_{ii} / \Sigma n_{i.}n_{.i}}$$

ซึ่งมีการแจกแจงไคสแควร์ ด้วยองศาความเป็นอิสระ k-1

## 2.4 กรณีหลายตัวอย่างที่เป็นอิสระกัน (Several Independent Sample Case)

ในกรณีที่มีตัวอย่างซึ่งเป็นอิสระกันหลาย ๆ ตัวอย่าง เราก็มีวิธีการอ้างอิงหรืออนุมานเกี่ยวกับสัดส่วนประชากรในประชากรต่าง ๆ นั้น ดังรายละเอียดต่อไปนี้

### 2.4.1 แบบทดสอบทวินามชนิดหลายตัวอย่าง (K–Sample Binomial Test for Equal Proportions)

ถ้า $\pi_1, \pi_2, ..., \pi_k$ เป็นสัดส่วนต่าง ๆ ของหน่วยที่มีลักษณะที่สนใจของ k ประชากรต่าง ๆ กัน แล้วสมมติฐานหลัก Ho จะเป็นดังนี้

$$Ho : \pi_1 = \pi_2 = ... = \pi_k = \pi$$

หรือ $\quad Ho : \pi_j = \pi, \forall_j \ (j = 1, 2, ..., k)$

ในการทดสอบสมมติฐานนี้ก็อาศัยตัวอย่างที่เป็นอิสระกันขนาด $n_1, n_2, ... n_k$ จากประชากรต่าง ๆ นั้น ให้ $X_{11}, X_{12}, ..., X_{1k}$ เป็นจำนวนหน่วยที่มีลักษณะที่สนใจจากตัวอย่างนั้น ๆ แล้วเราสามารถสรุปข้อมูลจากตัวอย่างได้เป็น

| ตัวอย่าง | 1 | 2 .... j ... | | k | รวม |
|---|---|---|---|---|---|
| ประเภท 1 | $X_{11}$ | $X_{12}$ | $X_{1j}$ | $X_{1k}$ | $X_{1.}$ |
| 2 | $X_{21}$ | $X_{22}$ | $X_{2j}$ | $X_{2k}$ | $X_{2.}$ |
| รวม | $n_1$ | $n_2$ | $n_j$ | $n_k$ | $n$ |

ถ้าตัวอย่างขนาดโตพอสมควร แล้วสมมติฐาน Ho สามารถทดสอบได้ด้วยตัวสถิติ คาร์ล เพียร์สัน

$$\chi^2 = \sum_{i}^{2} \sum_{j}^{k} (X_{ij} - E_{ij})^2 / E_{ij}, \ E_{ij} = (X_{i.})(n_j) / n$$

$$= \{ \sum_{i}^{2} \sum_{j}^{k} X_{ij}^2 / (X_{i.})(n_j) - 1 \} n$$

$$= \frac{n^2}{X_{1.}(X_{2.})} \sum_{j} X_{1j}^2 / n_j - nX_{1.} / X_{2.}$$

หรืออยู่ในรูปสัดส่วนตัวอย่าง $p_j$ ได้เป็น

$$\chi^2 = (1/pq) \Sigma n_j (p_j - p)^2 = (1/pq) (\Sigma n_j p_j^2 - np^2)$$

ในเมื่อ $p_j = X_{1j} / n_j$; $p = X_{1.} / n = \Sigma n_j p_j / n$ ; $q = 1 - p$

ตัวสถิติทดสอบ $\chi^2$ นี้มีการแจกแจงไคสแควร์ ด้วยองศาความเป็นอิสระ k-1 ถ้า Ho เป็นจริง

ถ้าปฏิเสธ Ho ไม่ได้ เราได้ค่าประมาณแบบจุดของ $\pi$ เป็น p ดังนี้

$$p = X_{1.} / n = \Sigma n_j p_j / n$$

และค่าประมาณแบบช่วงเป็น

$$\pi = p \pm Z_{\alpha/2} \sqrt{pq/n}$$

**ตัวอย่าง** ในกรณีศึกษาเพื่อเปรียบเทียบสัดส่วน ได้ข้อมูลมาดังนี้

| ตัวอย่าง 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | รวม |
|---|---|---|---|---|---|
| ประเภท 1 | 83 | 90 | 129 | 70 | 372 |
| 2 | 3 | 3 | 7 | 12 | 25 |
| ขนาดตัวอย่าง | 86 | 93 | 136 | 82 | 397 |

สัดส่วนประเภท 1 ในตัวอย่างต่าง ๆ จะเป็น

$p_1$ = 83/86 = .965, $p_2$ = 90/93 = .968, $p_3$ = 129/136 .949

$p_4$ = 70/82 = .854

p = 372/397 = .937, q = 1 - p = .063

สมมติฐานที่ทดสอบจะเป็น $Ho : \pi_j = \pi \ ; \forall j$

$Ho : \pi_j \neq \pi \ ; \exists j$ $\quad j = 1, 2, \ldots, k$

ค่าของตัวสถิติทดสอบ จะได้เป็น

$$\chi^2 = \frac{1}{.937(.063)} \{ 86(.965-.937)^2 + 93(.968-.937)^2 + 136(.949-.937)^2$$
$$+ 136(.949-.937)^2 + 82(.854-.937)^2 \}$$
$$= 12.56$$

หรือ $$\chi^2 = \frac{397^2}{(372)(25)}(83^2/86 + 90^2/93 + 129^2/136 + 70^2/82) - 397(372)/25$$
$$= 12.60$$

จากตารางไคสแควร์เรามี $\chi^{2(4-1)}_{.05}$ = 7.81 จึงสรุปได้ว่า สัดส่วนต่าง ๆ ไม่เท่ากันหมด

### 2.4.2 การแยกไคสแควร์ในแบบทดสอบเอกภาพ (Partitioning of Chi-Squares in Tests of Homogeneity)

คุณสมบัติที่สำคัญของตัวแปรซึ่งมีการแจกแจงของการสุ่มตัวอย่างเป็นแบบไคสแควร์ด้วยองศาความเป็นอิสระ $v$ ก็คือ การรวม (Additiveness) เช่น ถ้าสองตัวแปร $U_1$ และ $U_2$ มีการแจกแจงไคสแควร์ที่เป็นอิสระและมีองศาความเป็นอิสระ $v_1$ กับ $v_2$ ตามลำดับ แล้วการแจกแจงของ $U = U_1 + U_2$ จะเป็นแบบไคสแควร์ ด้วยองศาความเป็นอิสระ $v = v_1 + v_2$ ด้วย และในทางกลับกัน ถ้า U มีการแจกแจงไคสแควร์ ด้วยองศาความเป็นอิสระ $v$ แล้ว U สามารถแบ่งออกเป็น 2 ส่วน ประกอบ $U_1$ และ $U_2$ ที่เป็นอิสระกัน โดยที่แต่ละส่วนแจกแจงแบบไคสแควร์ ด้วยองศาความเป็นอิสระ $v_1$ และ $v_2$ ถ้า $v_1 + v_2 = v$ จากคำกล่าวเหล่านี้เราจะได้ทฤษฎีคอคราน (Cochran's Theorem) ที่ว่า

ทฤษฎีคอคราน - สมมติว่า $U = U_1 + U_2 + .. + U_q$ แทนส่วนแบ่งของ U

$$U = \sum_k Z_k^2$$

โดยที่แต่ละ $Z_k$ แจกแจงแบบปกติมาตรฐาน N(0, 1) ที่เป็นอิสระกัน แล้วเงื่อนไขที่จำเป็นและพอเพียงซึ่งทำให้แน่ใจการแจกแจงที่เป็นอิสระของแต่ละ $U_q$ โดยที่ $U_1$, $U_2$, .., $U_q$ แจกแจงแบบไคสแควร์ด้วยองศาความเป็นอิสระ $v_1, v_2,..,v_q$ ตามลำดับ นั่นก็คือ $v_1 + v_2+...+ v_q = K$

โดยทฤษฎีนี้ ถ้าเรานำตัวแปรที่แจกแจงไคสแควร์ ซึ่งมีองศาความเป็นอิสระ $v$ และแบ่งออกเป็นส่วนๆ เพื่อให้ได้ $v$ ส่วนประกอบไคสแควร์แยกกัน แต่ละส่วนแจกแจงแบบไคสแควร์ที่มี 1 องศาความเป็นอิสระ เราจะพิจารณาเกี่ยวกับสัดส่วนต่างๆ โดยอาศัยทฤษฎีที่กล่าวมาวิเคราะห์ดังนี้

เมื่อพบว่าสัดส่วนต่างๆ นั้นมีความผันแปรในสัดส่วนอย่างมีนัยสำคัญ แล้วเราต้องการทราบว่าสัดส่วนหรือกลุ่มสัดส่วนไหนบ้างที่แตกต่างกัน กระบวนการที่ใช้กันบ่อยๆ ก็คือการแยกออกเป็นส่วนๆ ตามแหล่งของความผันแปร

สมมติให้ k ตัวอย่าง แบ่งออกเป็น 2 กลุ่ม กลุ่มแรกมี $k_1$ ตัวอย่าง และกลุ่มที่สองมี $k_2$ ตัวอย่าง โดยที่ $k=k_1 - k_2$ กำหนด $n_{(1)}$ และ $n_{(2)}$ เป็นขนาดตัวอย่างในกลุ่มแรก และกลุ่มที่สองตามลำดับ นั่นคือ

$$n_{(1)} = \sum_{j=1}^{k_1} nj \ ; \ n_{(2)} = \sum_{j>k_1}^{k} nj$$

ให้ $p_1$ และ $p_2$ เป็นสัดส่วนในกลุ่มแรก และกลุ่มที่สอง ซึ่งกำหนดไว้ว่า

$$\bar{p}_1 = (1/n_{(1)}) \sum_{j=1}^{k_1} n_j p_j \ ; \ \bar{p}_2 = (1/n_{(2)} \sum_{j>k_1}^{k} n_j p_j$$

แล้วตัวสถิติที่ใช้ทดสอบนัยสำคัญของความแตกต่างระหว่าง $p_1$ และ $p_2$ กำหนดไว้เป็น $\chi^2_d$

$$\chi^2_d = \frac{1}{pq} \frac{n_{(1)} n_{(2)}}{n} (\bar{p}_1 - \bar{p}_2)^2$$

ซึ่งมีการแจกแจงไคสแควร์ ด้วยองศาความเป็นอิสระ 1

ตัวสถิติที่ใช้ทดสอบนัยสำคัญระหว่าง $k_1$ สัดส่วน ในกลุ่มแรกจะเป็น

$$\chi^2_1 = (1/pq) \sum_{J=1}^{k_1} n_j (p_j - \bar{p}_1)^2$$

ซึ่งมีการแจกแจงไคสแควร์ ด้วยองศาความเป็นอิสระ $k_1 - 1$

ในทำนองเดียวกัน ตัวสถิติทดสอบสำหรับกลุ่มที่สองจะเป็น

$$\chi^2_2 = (1/pq) \sum_{j>k_1}^{k} n_j (p_j - \bar{p}_1)^2$$

ซึ่งมีการแจกแจงไคสแควร์ ด้วยองศาความเป็นอิสระ $k_2 - 1$

เราจะเห็นได้ว่า $\chi^2 = \chi^2_d + \chi^2_1 + \chi^2_2$

ถ้า $\bar{p}_1$ และ $\bar{p}_2$ แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ แล้วเราจะแทน pq ในตัวสถิติ และด้วย $\bar{p}_1\bar{q}_1$ และ $\bar{p}_2\bar{q}_2$ การปรับปรุงนี้จะมีผลเล็กน้อยต่อขนาดของ $\chi^2$

การแก้ไขที่สำคัญก็คือ ถ้าการแยกตัวอย่างออกเป็นกลุ่มนั้นไม่ได้วางแผนมาก่อน เพียงแต่แนะนำจากข้อมูล และเราต้องการควบคุม $\alpha$ แล้วตัวสถิติทดสอบ $\chi^2_d$, $\chi^2_1$ และ $\chi^2_2$ จะต้องเปรียบเทียบกับค่าวิกฤตของไคสแควร์ ที่มีองศาความเป็นอิสระ k-1 ไม่ใช่ค่าวิกฤตของไคสแควร์ที่มีองศาความเป็นอิสระ 1, $k_1$-1 และ $k_2$-1

**ตัวอย่าง** จากตัวอย่างที่แล้วมานั้น ถ้ารวม 3 ตัวอย่างแรกเป็นกลุ่มหนึ่ง ตัวอย่างที่สี่เป็นกลุ่มสอง แล้วเราจะได้

$n_{(1)} = 86 + 93 + 136 = 315$

$\bar{p}_1 = (83 + 90 + 129)/315 = .959$

กลุ่มที่สองมีตัวอย่างเดียว เราจึงได้

$n_{(2)} = 82,\ \bar{p}_2 = .854$

ค่าของตัวสถิติทดสอบ $\chi^2_d$ สำหรับนัยสำคัญของความแตกต่างระหว่าง $p_1$ และ $p_2$ จะเป็น

$$\chi^2_d = \frac{1}{.937(.063)}\,(315(82)/387)(.959-.854)^2$$
$$= 12.15$$

ค่าของตัวสถิติทดสอบ $\chi^2_1$ สำหรับนัยสำคัญของความแตกต่างระหว่าง $p_1$ , $p_2$ และ $p_3$ (จากกลุ่มแรก) จะเป็น

$$\chi^2_1 = \frac{1}{.937(.063)}\,\{86(.965-.959)^2 + 93(.968-.959)^2 + 136(.949-.959)^2\}$$
$$= 0.41$$

เนื่องจากกลุ่มที่สองมีตัวอย่างเดียว ค่าของตัวสถิติ $\chi^2_2$ จึงหาไม่ได้

ดังนั้น $\chi^2 = \chi^2_s + \chi^2_1 = 12.15 + 0.41$

$= 12.56$

เมื่อแทน $p_1q_1$ ด้วย .959(.041) เราจะได้ $\chi^2_1$ เพิ่มขึ้นเล็กน้อย คือเป็น 0.62

เนื่องจากข้อมูลเสนอแนะให้แยกกลุ่ม ไม่ใช่วางแผนไว้ล่วงหน้า ค่าของ $\chi^2_d$ และ $\chi^2_1$ จึงต้องเปรียบเทียบกับค่าวิกฤตไคสแควร์ที่มีองศาความเป็นอิสระ k-1 = 4-1 = 3 ค่าวิกฤต $\chi^{2(3)} = 7.81$ จึงสรุปได้ว่า $\bar{p}_1$ และ $\bar{p}_2$ หรือกลุ่มแรกและกลุ่มหลังแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ ($\chi^2_d = 12.56 > 7.81$) แต่ไม่มีความแตกต่างระหว่างสัดส่วนในกลุ่มแรก ($\chi^2_1 = 0.41 < 7.81$)

### 2.4.3 การเปรียบเทียบพหุคูณหลังการทดลองในสัดส่วนตัวอย่าง (Post Hoc Multiple Comparisons in Sample Proportions)

เมื่อปฏิเสธสมมติฐานหลัก Ho สิ่งที่สนใจต่อไปก็คือ ความแตกต่างระหว่างสัดส่วนของประชากร ซึ่งอยู่ในรูปของผลรวมแบบถ่วงน้ำหนัก ที่เรียกกันว่า ความแผกกัน (Contrast)

ความแผกกันนี้เป็นผลรวม (Combination) ของค่าประชากรที่มีเงื่อนไขว่าน้ำหนักถ่วงต้องรวมเป็นศูนย์ สำหรับสัดส่วนประชากรนั้น ความแผกกัน ($\varphi$) จะเขียนได้เป็น

$$\varphi = a_1\pi_1 + a_2\pi_2 + \ldots + a_k\pi_k$$
$$= \Sigma a_j\pi_j$$

ในเมื่อ $\pi_j$ เป็นสัดส่วนประชากร $a_j$ แทนน้ำหนักถ่วงซึ่งมีข้อจำกัดว่า

$$a_1 + a_2 + .. + a_k = \Sigma a_j = 0$$

ค่าประมาณของ $\varphi$ จะเป็น $\hat{\varphi}$

$$\hat{\varphi} = a_1p_2 + a_2p_2 + .. + a_kp_k = \Sigma a_jp_j$$

ในเมื่อ $p_j$ เป็นสัดส่วนตัวอย่าง

ความแปรปรวนของ $\hat{\varphi}$ จะเป็น

$$V(\hat{\varphi}) = \Sigma a_j^2 V(p_j) = \Sigma a_j^2\pi_j(1-\pi_j)/n_j$$

เนื่องจาก $\pi_j$ ไม่ทราบ จึงต้องประมาณจากข้อมูล ดังนั้นเราจึงได้ค่าประมาณของ $V(\hat{\varphi})$ เป็น

$$s_{\hat{\varphi}}^2 = \Sigma a_j^2 p_jq_j/n_j$$

เนื่องจากตัวประมาณค่าของพารามิเตอร์ประชากรมีการแจกแจงแบบปกติ (โดยประมาณ) เราจึงสามารถสร้างช่วงเชื่อมั่นสำหรับความแผกกัน $\varphi$ ได้เป็น

$$\varphi = \hat{\varphi} \pm \sqrt{\chi_{\alpha}^{2(k-1)}}\, s_{\hat{\varphi}}$$

ถ้าทำการเปรียบเทียบเป็นคู่ เราจะได้ช่วงเชื่อมั่นเชิงพร้อม (Simultaneous Confidence Interval) สำหรับ $\varphi = \pi_i - \pi_j$ $(i < j)$ ดังนี้

$$\varphi = (p_i - p_j) \pm \sqrt{\chi_{\alpha}^{2(k-1)}}\sqrt{p_iq_i/n_i + p_jq_j/n_j}$$

**ตัวอย่าง** ในการสำรวจทัศนคติเกี่ยวกับโปรแกรมการจัดชั้นเรียนใหม่ โดยผู้สำรวจได้ตั้งคำถามไว้ว่า

โรงเรียนได้รับคำแนะนำว่าการจัดชั้นเรียนตามความสามารถทางการเรียนจะมีปัญหาทางด้านสังคมในชั้นเรียน ดังนั้นทางคณะกรรมการจึงจะจัดชั้นเรียนแบบรวมหรือคละกันไป ท่านเห็นด้วยกับข้อเสนอนี้หรือไม่

(1) เห็นด้วย__________ (2) ไม่เห็นด้วย__________

ผลจากการสอบถามกลุ่ม 3 กลุ่ม ตามสภาพเศรษฐกิจสังคม จะได้ผลสรุปดังนี้

| กลุ่มตามสภาพเศรษฐกิจสังคม | | ต่ำ | ปานกลาง | สูง | รวม |
|---|---|---|---|---|---|
| ทัศนคติ | เห็นด้วย | 29 | 64 | 33 | 126 |
| | ไม่เห็นด้วย | 47 | 164 | 135 | 346 |
| | รวม | 76 | 228 | 168 | 472 |

จากการสำรวจนี้จะสรุปได้ไหมว่า กลุ่มต่าง ๆ นี้จะมีทัศนคติแบบเดียวกัน

$$Ho : \pi_1 = \pi_2 = \pi_3$$

ค่าประมาณของ $\pi$ จะเป็น

$p_1 = 29/76 = .38,\ p_2 = 64/228 = .28,\ p_3 = 33/168 = .20$

และค่าประมาณของ $\pi$ จะเป็น $p = 126/472 = .27$

ตัวสถิติทดสอบจะมีค่าเป็น

$$\chi^2 = \frac{1}{.27(.73)} \{76(.38-.27)^2 + 228(.28-.27)^2 + 168(.20-.27)^2\}$$
$$= 9.54$$

จากตารางไคสแควร์ $\chi^{2(3-1)}_{.05} = 5.99$ จึงสรุปได้ว่ากลุ่มต่าง ๆ มีทัศนคติแตกต่างกัน

เนื่องจากปฏิเสธ Ho เราจึงสร้างช่วงเชื่อมั่น 95% สำหรับ $\varphi = \pi_i - \pi_j$, i j ได้เป็น

$$\pi_1 - \pi_2 = (.38-.28) \pm \sqrt{5.99}\sqrt{.38(62)/76 + .28(.72)/228}$$
$$= .10 \pm .15$$
$$\pi_1 - \pi_3 = (.38-.20) \pm \sqrt{5.99}\sqrt{.38(.62)/76 + .20(.80)/168}$$
$$= .18 \pm .16$$
$$\pi_2 - \pi_3 = .08 \pm .10$$

เราจะเห็นว่า $\pi_1 - \pi_3$ เท่านั้นที่มีความแตกต่างต่างกัน (เพราะไม่รวม 0 ไว้) นั่นคือกลุ่มเศรษฐกิจสังคมระดับสูงและต่ำจะมีทัศนคติต่างกัน

ถ้าเราสนใจที่จะทราบว่ากลุ่มสูงและปานกลางร่วมกันจะแตกต่างจากกลุ่มต่ำหรือไม่ เราทำได้โดยการสร้างช่วงเชื่อมั่นของ $\varphi$

$$\varphi = \frac{n_2}{n_2 + n_3}\pi_2 + \frac{n_3}{n_2 + n_3}\pi_3 - \pi_1$$

เราได้ $\hat{\varphi} = \frac{228}{228+168}(64/228) + \frac{168}{228+168}(33/168) - 29/76 = -.14$

$$S^2_{\varphi} = (228/396)^2 S^2_{P_2} + (168/396)^2 S^2_{P_3} + S^2_{P_1} = 0.004$$

ดังนั้นช่วงเชื่อมั่น 95% สำหรับ $\hat{\varphi}$ จะเป็น

$$\varphi = -.14 \pm \sqrt{5.99}\sqrt{.004} = .14 \pm .15$$

เนื่องด้วยจากช่วงนี้รวม 0 ไว้ด้วย จึงสรุปได้ว่าไม่มีความแตกต่างระหว่างกลุ่มทั้งสองนั้น

เราต้องการพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่าง $\pi_1, \pi_2, ..., \pi_k$ เราก็สามารถทำได้โดยการสร้างช่วงเชื่อมั่นสำหรับ

$$\varphi = a_1\pi_1 + a_2\pi_2 + \ ...\ + a_k\pi_k$$

โดยมีข้อจำกัดเกี่ยวกับน้ำหนักถ่วง $a_j$ ซึ่งกำหนดไว้ในตาราง 7 สำหรับกรณี k ระดับ (ตัวอย่าง) ของตัวแปรอิสระมีช่วงเท่ากัน และขนาดของตัวอย่างในแต่ละระดับเท่ากัน เช่นถ้าสนใจที่จะทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับความสัมพันธ์เชิงเส้น (Linear Relationship) แล้วสำหรับ k=6 นั้น กำหนดไว้ว่า

$$a_1 = -5,\ a_2 = -3,\ a_3 = -1,\ a_4 = 1,\ a_5 = 3 \text{ และ } a_6 = 5$$

นั่นคือ $\varphi_{Lin} = -5\pi_1 -3\pi_2 -1\pi_3 + 1\pi_4 + 3\pi_5 + 5\pi_6$

สำหรับความสัมพันธ์หรือแนวโน้มกำลังสอง (Quadratic Trend) เราได้

$$\varphi_{quad} = 5\pi_1 -1\pi_2 -4\pi_3 + 4\pi_4 + 1\pi_5 + 5\pi_6$$

ความแปรปรวนของค่าประมาณที่ประมาณได้ จะเป็น

$$S^2 = \Sigma a_j^2 p_j q_j / n_j$$

**2.4.4 การเปรียบเทียบพหุคูณสำหรับสัดส่วนที่อาศัยการแปลงแบบอาร์คไซน์ (Multiple Comparisons for Proportions based on Arcsine Transformation)**

ในการใช้กระบวนการเปรียบเทียบพหุคูณที่อาศัยการแจกแจงไคสแควร์นั้นค่าประมาณ $p, p_2, .., p_k$ จะต้องมีการแจกแจงปกติ นั่นคือขนาดตัวอย่าง $n_j$ จะต้องโตพอ แต่บางครั้งไม่สามารถใช้ตัวอย่างขนาดโตได้ ตัวประมาณค่า $p_1, p_2, .., p_k$ จึงไม่สามารถประกันได้ว่ามีการแจกแจงปกติ อย่างไรก็ตาม การแปลงแบบอาร์คไซน์ของตัวแปร $P_j$ จะมีการแจกแจงแบบปกติ ถึงแม้ว่าตัวอย่างขนาดเล็ก ตัวแปลงอาร์คไซน์กำหนดไว้ดังนี้

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_j &= 2 \arcsin \sqrt{p_j},\ 0<p_j<1 \\ &= 2 \arcsin \sqrt{1/4n_j},\ p_j = 0 \\ &= \pi - 2 \arcsin \sqrt{1/4n_j},\ p_j = 1 \end{aligned}$$

ความแปรปรวนของ $\hat{\phi}_j$ จะกำหนดไว้ดังนี้

$$V(\hat{\phi}_j) \cong 1/N_J$$

ซึ่งเป็นอิสระจากพารามิเตอร์ $\phi_j$ และ $\pi_k$

สมมติฐานหลัก Ho : $\pi_1 = \pi_2 = ... = \pi_k$ นี้สามารถเขียนให้อยู่ในรูปตัวแปลงอาร์คไซน์ได้เป็น Ho : $\phi_1 = \phi_2 = ... = \phi_k = \phi_0$

เนื่องจากตัวสถิติ $Z_j$

$$Z_j = (\hat{\phi}_j - \phi_0) / \sqrt{V(\hat{\phi}_j)}$$

นั้นมีการแจกแจงปกติมาตรฐาน ถ้า $\hat{\phi}_j$ มีการแจกแจงปกติ หรือ

$$Z_j^2 = (\hat{\phi}_j - \phi_0)^2 / V(\phi_j)$$

มีการแจกแจงไคสแควร์ ด้วยองศาความเป็นอิสระ 1 ดังนั้นตัวสถิติทดสอบสำหรับสมมติฐาน Ho ข้างบน จึงกำหนดไว้เป็น

$$U = \Sigma Z_j^2 = \Sigma (\hat{\phi}_j - \phi_0)^2 / V(\hat{\phi}_j)$$

ซึ่งมีการแจกแจงไคสแควร์ ด้วยองศาความเป็นอิสระ k

สำหรับ $\phi_0$ นั้นไม่ทราบค่า จึงต้องประมาณจากตัวอย่างซึ่งจะได้เป็น

$$\hat{\phi}_0 = \Sigma w_j \hat{\phi}_j / \Sigma w_j = \frac{\Sigma \hat{\phi}_j / V(\hat{\phi}_j)}{\Sigma\ 1/ V(\hat{\phi}_j)}$$

$$\hat{\phi}_0 = \Sigma n_j \hat{\phi}_j / \Sigma n_j \quad = \Sigma n_j \hat{\phi}_j / n \, ; \qquad w_j = 1/V(\hat{\phi}_j)$$

ตัวสถิติทดสอบจึงเป็น

$$U = \Sigma(\hat{\phi}_j - \hat{\phi}_0)^2 / V(\hat{\phi}_j) = \Sigma n_j (\hat{\phi}_j - \hat{\phi}_0)^2$$

ซึ่งมีการแจกแจงไคสแควร์ ด้วยองศาความเป็นอิสระ k-1 ถ้า Ho เป็นจริง

**ตัวอย่าง** ในการศึกษาสัดส่วนของลักษณะหนึ่งจากตัวอย่างต่าง ๆ ได้ข้อมูลสรุปดังนี้

| ตัวอย่าง | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| สัดส่วน $p_j$ | 0.550 | 0.675 | 0.228 | 0.929 |
| ขนาดตัวอย่าง $n_j$ | 36 | 21 | 6 | 12 |
| $\hat{\phi}_j = 2 \arcsin\sqrt{p_j}$ | 1.6710 | 1.9284 | 0.9956 | 2.6022 |
| $V(\hat{\phi}_j) \approx 1/n_j$ | .02778 | .04762 | .16667 | .8333 |

ค่าประมาณของ $\hat{\phi}_0$ คำนวณได้เป็น

$$\hat{\phi}_0 = (1/75)\{36(1.6710) + 21(1.9284) + 6(0.9956) + 12(2.6022)\}$$
$$= 1.8380$$

ค่าของตัวสถิติทดสอบ คำนวณได้เป็น

$$U = 6(1.6710-1.8380)^2 + 21(1.9284-1.8380)^2$$
$$+ 6(0.9956-1.8380)^2 + 12(2.6022-1.8380)^2$$
$$= 12.44$$

เนื่องจาก $\chi^{2(4-1)}_{.05} = 7.82$ จึงสรุปได้ว่าสัดส่วนทั้งสี่นี้ไม่เท่ากันหมด (U = 12.44 > 7.82)

สำหรับการเปรียบเทียบเป็นคู่นั้น ความแผกกัน ($\varphi$) ที่น่าสนใจก็คือ

$$\varphi = \phi_i - \phi_j \; (i < j)$$

ซึ่งประมาณด้วย $\hat{\varphi} = \hat{\phi}_i - \hat{\phi}_j \; (i < j)$ และ $\hat{\varphi}$ นี้มีความแปรปรวนเป็นดังนี้

$$V(\hat{\varphi}) = V(\hat{\phi}_i) + V(\hat{\phi}_j) = 1/n_i + 1/n_j$$

เนื่องจาก $\chi^{2(4-1)}_{.05} = 7.82 = 2.796$ เราจึงได้ช่วงเชื่อมั่น 95% สำหรับความแผกกัน ($\varphi$) เป็นคู่ ๆ ดังนี้

| $\varphi$ | $\hat{\varphi}$ | $s^2_{\hat{\varphi}}$ | ขีดจำกัด ล่าง | ขีดจำกัด บน |
|---|---|---|---|---|
| $\varphi_1 = \phi_1 - \phi_2$ | -0.2574 | 0.07540 | -1.0263 | 0.5115 |
| $\varphi_2 = \phi_1 - \phi_3$ | 0.6754 | 0.19445 | -0.5576 | 1.9084 |
| $\varphi_3^* = \phi_1 - \phi_4$ | -0.9312 | 0.11111 | -1.8623 | -0.0001 |
| $\varphi_4 = \phi_2 - \phi_3$ | 0.9328 | 0.21429 | -0.3619 | 2.2273 |
| $\varphi_5 = \phi_2 - \phi_4$ | -0.6738 | 0.13095 | -1.6860 | 0.3384 |
| $\varphi_6 = \phi_3 - \phi_4$ | -1.6066 | 0.25000 | -3.0046 | -0.2086 |

จะเห็นได้ว่า $\pi_1$ กับ $\pi_4$ แตกต่างกัน และ $\pi_3$ กับ $\pi_4$ ก็แตกต่างกัน นอกนั้นไม่แตกต่างกัน

ถ้าเราสนใจความแผกกันที่ซับซ้อนกว่านี้ก็ทำได้ เช่น

$$\varphi_7 = \phi_1 + \phi_2 - 2\phi_3 \; ; \; \varphi_8 = \phi_1 - \phi_2 - 2\phi_4$$

ซึ่งมีค่าประมาณ เป็นดังนี้

$$\varphi_7 = 1.6710 + 1.9284 - 2(0.9956) = 1.6082$$

$$\varphi_8 = 1.6710 + 1.9284 - 2(2.6022) = -1.6050$$

และมีความแปรปรวน เป็น

$$V(\hat{\varphi}) = \Sigma a_i^2 \, V(\hat{\phi}_i) = \Sigma a_i^2 / n_i$$

$$V(\hat{\varphi}_7) = 1/n_1 + 1/n_2 + 4/n_3 = 1/36 + 1/21 + 4/6$$
$$= 0.74207$$

$$V(\hat{\varphi}_8) = 1/n_1 + 1/n_2 + 4/n_4 = 1/36 + 1/21 + 4/12$$
$$= 0.40873$$

ดังนั้นช่วงเชื่อมั่น 95% สำหรับ $\varphi_7$ และ $\varphi_8$ จะเป็น

$$\varphi_7 = 1.6082 \pm 2.80 \quad 0.74207 = 1.6082 \pm 2.4122$$

$$\varphi_8 = -1.6050 \pm 2.80 \quad 0.40873 = -1.6050 \pm 1.7899$$

ซึ่งเราจะเห็นว่า ไม่มีช่วงไหนมีนัยสำคัญเลย

### 2.4.5 การเปรียบเทียบพหุคูณที่วางแผนไว้ในสัดส่วนตัวอย่าง (Planned Multiple Comparisons in Sample Proportions)

การวิเคราะห์ที่ได้วางแผนไว้ก่อนการทดลองจะแตกต่างกับการวิเคราะห์หลังการทดลองก็ตรงที่ค่าประมาณของความแปรปรวนของความแผกกันนั้นประมาณขึ้นภายใต้สมมติฐานหลัก Ho ไม่ใช่ภายใต้สมมติฐานรอง Ha ซึ่งหมายความว่า p และ q จะใช้แทนพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่าในการคำนวณความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน

**ตัวอย่าง** ในการเปรียบเทียบสัดส่วนจากตัวอย่างต่างๆ ได้ใช้ข้อมูลจากตัวอย่าง ซึ่งสรุปผลได้ดังนี้

| ตัวอย่าง | 1 | 2 | 3 | 4 | รวม |
|---|---|---|---|---|---|
| ประเภท 1 | 8 | 7 | 4 | 3 | 22 |
| 2 | 2 | 4 | 6 | 10 | 22 |
| รวม | 10 | 11 | 10 | 13 | 44 |

สมมติว่าเราสนใจความแผกกัน ($\varphi$) ที่วางแผนไว้ดังนี้

$$\varphi_1 = \frac{n_1\pi_1 + n_2\pi_2}{n_1 + n_2} - \frac{n_3\pi_3 + n_4\pi_4}{n_3 + n_4}$$

$$\varphi_2 = \pi_1 - \pi_2$$

$$\varphi_3 = \pi_3 - \pi_4$$

ค่าประมาณของ φ คำนวณได้เป็น

$$\hat{\varphi}_1 = \frac{8+7}{10+11} - \frac{4+3}{10+13} = 15/21 - 7/23 = 0.4099$$

$$\hat{\varphi}_2 = 8/10 - 7/11 = 0.1636$$

$$\hat{\varphi}_3 = 4/10 - 3/13 = 0.1692$$

ความแปรปรวนของความแผกกัน (φ) ภายใต้ Ho จะประมาณได้เป็น

$$S^2_{\hat{\varphi}_1} = \left(\frac{n_1}{n_1+n_2}\right)^2 pq/n_1 + \left(\frac{n_2}{n_1+n_2}\right)^2 pq/n_2 + \left(\frac{-n_3}{n_3+n_4}\right)^2 pq/n_3 + \left(\frac{-n_4}{n_3+n_4}\right)^2 pq/n_4$$

$$= pq\ \{ 1/(n_1 + n_2) + 1/(n_3+n_4)\}$$

$$S^2_{\hat{\varphi}_1} = (0.5)\ (0.5)\ (1/21 + 1/23)\ ,\ p = 22/44 = 0.5$$

$$= 0.0228$$

$$S^2_{\hat{\varphi}_2} = pq/n_1 + pq/n_2 = pq(1/n_1 + 1/n_2)$$

$$= (0.5)\ (0.5)\ (1/10 + 1/11) = 0.0477$$

$$S^2_{\hat{\varphi}_3} = pq/n_3 + pq/n_4 = pq(1/n_3 + 1/n_4)$$

$$= (0.5)\ (0.5)\ (1/10 + 1/13) = 0.0442$$

ตามทฤษฎีตัวอย่างขนาดโต เราทราบว่าตัวสถิติ

$$Z = (\hat{\varphi} - 0) / S_{\hat{\varphi}}$$

มีการแจกแจงปกติมาตรฐาน N(0, 1) ดังนั้น

$$Z^2 = \hat{\varphi}^2 / S^2_{\hat{\varphi}}$$

มีการแจกแจงไคสแควร์ ด้วยองศาความเป็นอิสระ 1

สำหรับความแผกกันเหล่านี้เราได้

$$\chi^2_{\hat{\varphi}_1} = (0.4099)^2 / 0.0228 = 7.38$$

$$\chi^2_{\hat{\varphi}_2} = (0.1636)^2 / 0.0477 = 0.56$$

$$\chi^2_{\hat{\varphi}_3} = (0.1692)^2 / 0.0442 = 0.65$$

ในกรณีนี้ค่าวิกฤตสำหรับตัวสถิติทดสอบ ที่มีองศาความเป็นอิสระ 1 นั้นพิจารณาได้จาก ตาราง 9 นั่นคือเราอ่านค่าดันน์-บอนเฟอร์โรนี (Dunn-Bonferroni) ได้เป็น Z = 2.39 แล้วเราจะได้ค่า $\chi^2$ หรือ $Z^2 = (2.39)^2 = 5.71$ จากค่าความแผกกันทั้งสามนั้นเราจะพบว่า เท่านั้นที่มีนัยสำคัญ หรือ $\varphi \neq 0$

### 2.4.6 แบบทดสอบไคสแควร์เกี่ยวกับความเป็นเอกภาพของสัดส่วน (Karl Pearson's Chi-Square Test of Homogeneity of Equal Proportions)

จากแบบทดสอบทวินามชนิด k ตัวอย่างที่กล่าวมาแล้วนั้น ถ้าแต่ละประชากรมีหน่วยตัวอย่างแบ่งออกได้มากกว่า 2 ประเภท (สมมติให้เป็น r ประเภท) แล้วแบบทดสอบที่ใช้จะได้ชื่อว่า แบบทดสอบไคสแควร์เกี่ยวกับความเป็นเอกภาพของสัดส่วน

สำหรับแบบทดสอบนี้ก็อาศัยตัวอย่างจาก k ประชากร ที่มีขนาด $n_1, n_2, .., n_k$ ตามลำดับ ข้อมูลจากตัวอย่างจะสรุปได้ดังตารางต่อไปนี้

| ตัวอย่าง | 1 | 2 | 3 | .. | j | .. | k | รวม |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ประเภท 1 | $X_{11}$ | $X_{12}$ | $X_{13}$ | | $X_{1j}$ | | $X_{1k}$ | $X_{1.}$ |
| 2 | $X_{21}$ | $X_{22}$ | $X_{23}$ | | $X_{2j}$ | | $X_{2k}$ | $X_{2.}$ |
| : | | | | | | | | |
| j | | | | | $X_{ij}$ | | | $X_i$ |
| : | | | | | | | | |
| r | $X_{r1}$ | $X_{r2}$ | $X_{r3}$ | | $X_{rj}$ | | $X_{rk}$ | $X_{r.}$ |
| รวม | $n_1$ | $n_2$ | $n_3$ | | $n_j$ | | $n_k$ | n |

สมมติฐานที่จะทดสอบก็คือ สัดส่วนในแต่ละประเภทของแต่ละประชากรจะเท่ากัน หรือเป็นเอกภาพ นั่นคือ

$$
\begin{aligned}
Ho : \pi_{11} &= \pi_{12} = \ldots = \pi_{1k} = \pi_1 \\
\pi_{21} &= \pi_{22} = .. = \pi_{2k} = \pi_2 \\
&\vdots \\
\pi_{r1} &= \pi_{r2} = \pi_{r1} = \quad = \pi_{rk} = \pi_r
\end{aligned}
$$

หรือ $Ho : \pi_{i1} = \pi_{i2} = \ldots = \pi_{ik} = \pi_i$ (i=1, 2, .., r)

ตัวสถิติทดสอบสำหรับแบบทดสอบนี้ก็คือ

$$
\begin{aligned}
\chi^2 &= \Sigma\Sigma(X_{ij} - E_{ij})^2 / E_{ij},\ E_{ij}=X_{i.}(n_j) / n \\
&= n\{\Sigma\Sigma X^2_{ij}/X_{1.}(n_i) - 1\}
\end{aligned}
$$

ซึ่งมีการแจกแจงไคสแควร์ ด้วยองศาความเป็นอิสระ (r−1) (k−1) ถ้า Ho เป็นจริง

ถ้าสมมติฐานหลักเป็นจริง แล้ว $\pi_i$ จะประมาณได้จาก $p_i$

$$p_i = X_i./n$$

ถ้าสมมติฐานหลัก Ho ได้รับการปฏิเสธ แล้วเราสามารถสร้างช่วงเชื่อมั่นของความแผกกัน $\varphi$ ได้เป็น

$$\varphi = \hat{\varphi} \pm \sqrt{\chi_{\alpha}^{2(r-1)(k-1)}}\, S_{\hat{\varphi}}$$

ในเมื่อ

$$
\begin{aligned}
\varphi &= a_1\pi_{i1} + a_2\pi_{i2} + \ldots + a_k\pi_{ik} \\
&= a_1p_{i1} + a_2p_{i2} + \ldots + a_kp_{ik} \\
S^2_{\hat{\varphi}} &= a_1^2p_{i1}q_{i1}/n_1 + a_2^2p_{i2}q_{i2}/n_2 + \ldots + a_k^2p_{ik}q_{ik}/n_k
\end{aligned}
$$

โดยมีข้อจำกัดว่า $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = 0$

ถ้าช่วงเชื่อมั่น $\varphi$ นั้นรวม 0 ไว้ด้วยก็แสดงว่า $\varphi = 0$ ถ้าไม่รวม 0 ไว้ ก็แสดงว่า $\varphi \neq 0$

**ตัวอย่าง** ในการศึกษาตัวอย่างเพื่อเปรียบเทียบสัดส่วน ได้ข้อมูลมาดังนี้

| ตัวอย่าง | 1 | 2 | 3 | 4 | รวม |
|---|---|---|---|---|---|
| ประเภท 1 | 28 | 20 | 5 | 0 | 53 |
| 2 | 6 | 9 | 17 | 10 | 42 |
| 3 | 1 | 9 | 18 | 27 | 55 |
| รวม | 35 | 38 | 40 | 37 | 150 |

สมมติฐานที่จะทดสอบก็คือ

$$Ho : \pi_{i1} = \pi_{i2} = \pi_{i3} = \pi_{i4} = \pi_i \ (i=1, 2, 3)$$

ตัวสถิติทดสอบมีค่าเป็น

$$\chi^2 = 150\{28^2/53(35) + 20^2/53(38) + .... + 18^2/55(40) + 27^2/55(37) - 1\}$$
$$= 73.37$$

เนื่องจาก $\chi^{2(3-1)(4-1)}_{.05} = 12.59$ จึงปฏิเสธ Ho (เพราะ $\chi^2 = 73.37 > 12.59$)

เมื่อเราต้องการเปรียบเทียบผลต่างระหว่างสัดส่วนของประเภท 1 ในตัวอย่าง 1 และตัวอย่าง 2 หรือ $\pi_{11} - \pi_{12}$ เราทำได้ดังนี้

$$p_{11} = 28/35 = 0.80, \ p_{12} = 20/38 = 0.53$$
$$S^2_{p_{11}} = (28/35)\ (7/35)/35 = 0.0046$$
$$S^2_{p_{12}} = (20/38)\ (18/38)/38 = 0.0066$$

นั่นคือช่วงเชื่อมั่น 95% สำหรับ $\pi_{11} - \pi_{12}$ จะเป็น

$$\pi_{11} - \pi_{12} = (p_{11} - p_{12}) \pm \sqrt{\chi^{2(3-1)(4-1)}_{.05}}\sqrt{S^2_{p_{11}} + S^2_{p_{12}}}$$
$$= (0.80 - 0.53) \pm \sqrt{12.59}\ \sqrt{0.0046 + 0.0066}$$
$$= 0.27 \pm 3.55(0.1058) = 0.27 \pm 0.38$$

ซึ่งแสดงว่าผลต่างไม่มีนัยสำคัญ

ในการทดสอบความเป็นเอกภาพของสัดส่วนนี้ ไลท์และมาร์โกลิน (Light และ Mar golin) ได้เสนอตัวสถิติทดสอบซึ่งขึ้นอยู่กับเทคนิคการวิเคราะห์ความแปรปรวน ดังนี้

$$\chi^2_{LM} = (n - 1)\ (r-1)\ \hat{R}^2_{LM}$$

ในเมื่อ $\hat{R}^2_{LM} = SSB/SST$

$$SST = n/2 - \frac{1}{2n}\ \Sigma X_i^2$$
$$SSB = (1/2)\ \frac{1}{n_j}\ \Sigma X_{ij}^2 - \frac{1}{2n}\ \Sigma X_i^2 = SST - SSW$$
$$SSW = n/2 - (1/2)\ \Sigma\ (1/n_j)\ \Sigma\ X_{ij}^2$$

ตัวสถิติทดสอบ $\chi^2_{LM}$ นี้มีการแจกแจงไคสแควร์ ด้วยองศาความเป็นอิสระ (r-1) (k-1)

สำหรับ $\hat{R}^2_{LM}$ นั้นเป็นมาตราวัดของความแปรปรวนที่อธิบายได้ ซึ่งเป็นสมการเดียวกับที่ใช้นิยามอัตราส่วนสหสัมพันธ์ (Correlation Ratio) ของการถดถอยและการวิเคราะห์ความแปรปรวน

จากตัวอย่างที่แล้วมา เราจะได้

$$SST = 150/2 - \frac{1}{2(150)}(53^2 + 42^2 + 55^2) = 49.6733$$

$$SSW = 150/2 - (1/2)\{(28^2 + 6^2 + 1^2)/35 + \ldots + (0^2 + 10^2 + 27^2)/37\}$$

$$= 36.6990$$

$$SSB = 49.6733 - 36.6990 = 12.9743$$

$$\hat{R}^2_{LM} = 12.9743/49.6733 \quad 0.2612$$

ดังนั้นค่าของตัวสถิติทดสอบ $\chi^2_{LM}$ คำนวณได้เป็น

$$\chi^2_{LM} = (150-1)(3-1)(0.2612) = 77.84$$

ซึ่งจะนำไปสู่การปฏิเสธ Ho เช่นเดียวกัน

เราจะเห็นได้ว่าค่าของตัวสถิติ $\chi^2_{LM}$ มากกว่า $\chi^2$ จากการศึกษาโดยการสุ่มตัวอย่างไลท์ และมาร์โกลิน ได้แสดงว่า $\chi^2_{LM}$ มีความโน้มเอียงที่จะมากกว่า $\chi^2$ ซึ่งแสดงว่า ตัวสถิติทดสอบ $\chi^2_{LM}$ มีอำนาจทดสอบมากกว่าตัวสถิติทดสอบ $X^2$

## 2.5 กรณีหลายตัวอย่างที่สัมพันธ์กัน (Several Related Sample Case)

จากกรณีสองตัวอย่างที่สัมพันธ์กันนั้น ถ้าตัวอย่างมากกว่าสอง เราก็มีแบบทดสอบซึ่งเป็นรูปทั่วไปของแบบทดสอบแมคนีมาร์ ใช้วิเคราะห์ตัวอย่างเหล่านั้นในแง่ของสัดส่วน แบบทดสอบนั้นได้ชื่อว่า แบบทดสอบคอคราน (Cochran Test) แบบทดสอบคอครานนี้ใช้ทดสอบความแตกต่างระหว่างกรรมวิธีต่าง ๆ ที่มีการวางแผนแบบบลอคสมบูรณ์ (Randomized Complete Block Design) โดยที่แต่ละกรรมวิธีให้ผลทดลองซึ่งแบ่งได้เป็น 2 ประเภท เท่านั้น ซึ่งเราจะใช้ 0 และ 1 แทนผลทดลองเหล่านั้น

### 2.5.1 แบบทดสอบคอครานสำหรับค่าสังเกตที่เกี่ยวข้องกัน (Cochran's Test for Related Observations)

ในการทดสอบการเท่ากันของสัดส่วนที่สัมพันธ์กัน หรือทดสอบความแตกต่างระหว่างกรรมวิธีนั้นก็อาศัยการสุ่มตัวอย่างหรือบลอคขนาด r จากประชากรของหน่วยตัวอย่างหรือสำหรับค่าสังเกตนั้นสรุปได้ดังนี้

| ประชากร (กรรมวิธี) | 1 | 2 | .... | j | .... | k | รวม |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| บลอค 1 | $X_{11}$ | $X_{12}$ | | $X_{1j}$ | | $X_{1k}$ | $R_1$ |
| 2 | $X_{21}$ | $X_{22}$ | | $X_{2j}$ | | $X_{2k}$ | $R_2$ |
| : | | | | | | | |
| i | $X_{i1}$ | $X_{i2}$ | | $X_{ij}$ | | $X_{ik}$ | $R_i$ |
| : | | | | | | | |
| r | $X_{r1}$ | $X_{r2}$ | | $X_{rj}$ | | $X_{rk}$ | $R_r$ |
| รวม | $C_1$ | $C_2$ | | $C_j$ | | $C_k$ | N |

ในเมื่อ $X_{ij}$ = 0 หรือ 1 (i=1,2,..,r , j = 1, 2,..,k) r เป็นจำนวนตัวอย่างหรือบลอค $R_i$ เป็นผลรวมของ 1 ในบลอค i $c_j$ เป็นผลรวมของ 1 ในกรรมวิธี j N เป็นผลรวมทั้งหมดของ 1 หรือ $N = \Sigma R_i = \Sigma C_j$

สมมติฐานที่จะทดสอบก็จะเป็น

$$Ho : \pi_1 = \pi_2 = \ldots = \pi_k$$

ตัวสถิติทดสอบคอคราน กำหนดไว้ว่า

$$Q = \frac{k(k-1)\Sigma(C_j - N/K)^2}{\Sigma R_i(k-R_i)}$$

$$= \frac{k(k-1)\Sigma C_j^2 - (k-1)N^2}{kN - \Sigma R_i^2}$$

เมื่อ r มีขนาดโต แล้วตัวสถิติทดสอบ Q จะมีการแจกแจงไคสแควร์ ด้วยองศาความเป็นอิสระ k-1

**ตัวอย่าง** ผู้นิยมกีฬาบาสเกตบอล ได้สร้างระบบของตัวเองขึ้นมาเพื่อทำนายผลของการแข่งขันบาสเกตบอลมหาวิทยาลัย เขาจึงสุ่มเกมที่เล่นมา 7 เกม และผู้นิยมแต่ละคนได้เสนอการทำนายของแต่ละเกม เมื่อเกมได้เล่นจริงๆ แล้วผลที่ได้จะเป็นดังตารางต่อไปนี้ (ให้ 1 แทนทำนายถูก และ 0 แทนทำนายผิด)

| ผู้ทำนาย | 1 | 2 | 3 | 4 | รวม |
|---|---|---|---|---|---|
| เกม 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 2 | 0 | 1 | 1 | 1 | 3 |
| 3 | 1 | 0 | 0 | 1 | 2 |
| 4 | 1 | 0 | 1 | 1 | 3 |
| 5 | 1 | 0 | 0 | 1 | 2 |
| 6 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 7 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| รวม | 6 | 1 | 2 | 4 | 13 |

จะเห็นได้ว่าเกม (บลอค) ได้จากการสุ่มของเกมทั้งหมดที่จะต้องเล่น ดังนั้นเราจึงใช้แบบทดสอบคอครานวิเคราะห์ผลนี้

Ho : ผู้นิยมบาสเกตบอลแต่ละคนมีความสามารถเท่ากันในการทำนายตัวสถิติทดสอบจะคำนวณค่าได้เป็น

$$Q = \frac{k(k-1)\Sigma C_j^2 - (k-1)N^2}{KN - \Sigma R_i^2}$$

$$Q = \frac{4(4-1)\{6^2 + 1^2 + 2^2 + 4^2\} - (4-1)\,(13^2)}{4(13) - (1^2 + 3^2 + 2^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2)} = 7.70$$

จากตารางไคสแควร์ เราได้ $\chi^{2(3)}_{.05} = 7.81$ จึงปฏิเสธ Ho ไม่ได้ และสรุปว่า ทั้งสี่คนมีความสามารถในการทำนายผลบาสเกตบอลเท่าๆ กัน

แบบทดสอบคอครานนี้ ถ้า k=2 แล้วมันจะเหมือนกับแบบทดสอบแมคนีมาร์

### 2.5.2 กระบวนการภายหลังของแบบทดสอบคอคราน (Post Hoc Procedures For Cochran Test)

ถ้าสมมติฐานหลัก Ho ได้รับการปฏิเสธ นั่นคือสัดส่วนต่างๆ ที่สัมพันธ์กันนั้นไม่เท่ากันหมด และเราต้องการทราบว่าสัดส่วนคู่ใดแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ เราก็ทำได้โดยอาศัยการสร้างช่วงเชื่อมั่นสำหรับผลต่างของสัดส่วนคู่ใดๆ ($\pi_i - \pi_j$, $i < j$) ถ้าช่วงใดไม่รวม 0 ไว้ด้วยก็แสดงว่าสัดส่วนทั้งสองแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ

ช่วงเชื่อมั่น 100(1-$\alpha$) % สำหรับผลต่างของสัดส่วนคู่ใดๆ $\pi_i - \pi_j$, $i < j$ กำหนดไว้ดังนี้

$$\pi_i - \pi_j = (p_i - p_j) \pm \sqrt{\chi^{2(k-1)}_{\alpha}}\sqrt{\frac{k\Sigma R_i - \Sigma R_i^2}{rk(k-1)}(2/r)}$$

ถ้าเราต้องการควบคุมระดับนัยสำคัญ $\alpha$ เราใช้ช่วงเชื่อมั่นดันน์-บอนเฟอร์โรนี ซึ่งจะให้ช่วงเชื่อมั่นแคบกว่าช่วงเชื่อมั่นตามวิธีการข้างบน ที่เป็นเทคนิคของเชฟฟี (Scheffé) ช่วงเชื่อมั่นดันน์-บอนเฟอร์โรนี กำหนดไว้ดังนี้

$$\pi_i - \pi_j = (p_i - p_j) \pm Z_{q,\alpha}\sqrt{\frac{k\Sigma R_i - \Sigma R_i^2}{rk(k-1)}(2/r)}$$

ในเมื่อ $q = \binom{k}{2}$ และ $Z_{q,\alpha}$ เป็นค่าดันน์-บอนเฟอร์โรนีจากตาราง 9

บางครั้งเราต้องการเปรียบเทียบหลายๆ สัดส่วนแบบถ่วงน้ำหนัก หรือความแผกกัน นั่นคือ

$$\varphi = a_1\pi_1 + a_2\pi_2 + \ldots + a_k\pi_k$$

ในเมื่อ $a_1 + a_2 + .. + a_k = 0$ ช่วงเชื่อมั่น 100(1-$\alpha$) % สำหรับ $\varphi$ กำหนดไว้ดังนี้

$$\varphi = \hat{\varphi} \pm \sqrt{\chi^2_{\alpha}(k-1)}\, S\hat{\varphi}$$

ในเมื่อ $\hat{\varphi} = a_1p_1 + a_2p_2 + \ldots + a_kp_k$

$$S_{\varphi}^2 = \frac{k\Sigma R_i - \Sigma R_i^2}{rk(k-1)} (\Sigma a_i^2/r)$$

**ตัวอย่าง** ในการเปรียบเทียบกรรมวิธี 4 ชนิด โดยใช้บลอคตัวอย่างเป็น 6 ได้ข้อมูลมาดังนี้

| กรรมวิธี | ก | ข | ค | ง | รวม |
|---|---|---|---|---|---|
| บลอค 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 2 |
| 2 | 1 | 1 | 0 | 1 | 3 |
| 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 4 | 1 | 1 | 1 | 0 | 3 |
| 5 | 1 | 1 | 0 | 1 | 3 |
| 6 | 1 | 1 | 0 | 1 | 3 |
| รวม | 6 | 5 | 1 | 3 | 15 |

$$Q = \frac{4(4-1)\ (6^2+5^2+1^2+3^2) - (4-1)\ (15^2)}{4(15) - (2^2+3^2+1^2+3^2+3^2+3^2)} = 9.3158$$

เนื่องจาก $\chi^{2(3)}_{.05} = 7.81$ จึงปฏิเสธ Ho เมื่อเราทำการเปรียบเทียบเป็นคู่ เราจะได้ช่วงเชื่อมั่น 95% สำหรับ $\pi_i - \pi_j$, $i < j$ ดังนี้

$$\pi_i - \pi_j = (p_i - p_j) \pm \sqrt{7.81}\sqrt{\frac{4(15)-41}{6(4)3}(2/6)} = (p_i - p_j) \pm 0.830$$

$\pi_1 - \pi_2 = (6/6-5/6) \pm 0.830 = 0.167 \pm 0.830$

$\pi_1 - \pi_3 = (6/6-1/6) \pm 0.830 = 0.833 \pm 0.830$

$\pi_1 - \pi_4 = (6/6-3/6) \pm 0.830 = 0.500 \pm 0.830$

$\pi_2 - \pi_3 = (5/6-1/6) \pm 0.830 = 0.667 \pm 0.830$

$\pi_2 - \pi_4 = (5/6-3/6) \pm 0.830 = 0.333 \pm 0.830$

$\pi_3 - \pi_4 = (1/6-3/6) \pm 0.830 = -0.333 \pm 0.830$

จาก 6 ช่วงนั้น จะมีช่วง $\pi_1 - \pi_3$ เท่านั้นที่ไม่รวม 0 ไว้ด้วย จึงแสดงว่า $\pi_1$ และ $\pi_3$ แตกต่างกันจริง

เมื่อเราควบคุม $\alpha = 0.05$ เราได้ $q = \binom{4}{2} = 6$ ค่า $Z_{q,\alpha}$ จากตารางจะเป็น 2.64 ดังนั้นช่วงเชื่อมั่น 95% สำหรับ $\pi_i - \pi_j$, $i < j$ จึงเป็น

$$\pi_i - \pi_j = (p_i - p_j) \pm 2.64\sqrt{\frac{4(15)-41}{6(4)3}(2/6)} = (p_i - p_j) \pm 0.783$$

$\pi_1 - \pi_2 = 0.167 \pm 0.783$

$\pi_1 - \pi_3 = 0.833 \pm 0.783$ $\quad$ $\pi_1 - \pi_4 = 0.500 \pm 0.783$

$\pi_2 - \pi_3 = 0.667 \pm 0.783$ $\quad$ $\pi_2 - \pi_4 = 0.333 \pm 0.783$

$\pi_3 - \pi_4 = -0.333 \pm 0.783$

สำหรับ $\pi_1$ และ $\pi_3$ น่าจะแตกต่างกันจริง ส่วนคู่อื่นๆ ไม่น่าจะแตกต่างกัน

ถ้ากำหนด $\varphi = (\pi_1 + \pi_2) / 2 - (\pi_1 + \pi_2) / 2$ แล้วเราจะสร้างช่วงเชื่อมั่น 95% ของ $\varphi$ ซึ่งทำได้ดังนี้

$$\hat{\varphi} = (p_1 - p_2)/2 - (p_3 - p_4)/2$$

$$= (6/6-5/6)/2 - (1/6-3/6)/2 = 0.583$$

$$S^2 = \frac{4(15)-41}{6(4)3} \{(1/2)^2 + (1/2)^2 + (-1/2)^2 + (-1/2)^2\}/6 = 0.044$$

$$S = 0.210$$

$$\varphi = 0.583 \pm \sqrt{7.81}\ (0.210) = 0.583 \pm 0.587$$

เราจะเห็นได้ว่า ค่าเฉลี่ยของ $\pi_1$ และ $\pi_2$ จะไม่แตกต่างจากค่าเฉลี่ยของ $\pi_3$ และ $\pi_4$ เพราะช่วงเชื่อมั่น 95% สำหรับ $\varphi$ ได้รวมค่า 0 ไว้ด้วย

### 2.5.3 การแยกส่วนในตัวสถิติคอคราน (Partitioning Cochran Statistic Q)

เมื่อพบว่าประชากรหรือกรรมวิธีมีความผันแปรอย่างมีนัยสำคัญ นั่นคือปฏิเสธสมมติฐานหลัก Ho ถ้าต้องการตรวจสอบดูว่ากลุ่มของกรรมวิธี หรือกลุ่มของตัวอย่างนั้นแตกต่างกันหรือไม่ ก็สามารถทำได้โดยการแยกตัวสถิติทดสอบคอคราน Q ออกเป็นส่วนๆ และแต่ละส่วนนี้จะวัดแหล่งของความผันแปรที่ระบุไว้

สมมติว่า k กรรมวิธี แบ่งออกเป็น 2 กลุ่ม โดยที่กลุ่มแรกมี $k_1$ กรรมวิธี และกลุ่มที่สองมี $k_2$ กรรมวิธี แล้วกำหนดตัวสถิติ $U_1$ และ $U_2$ เป็น

$$U_1 = \sum_{j=1}^{k_1} c_j \qquad \text{และ} \qquad U_2 = \sum_{j>k_1}^{k} c_j$$

นั่นคือ $U_1$ และ $U_2$ เป็นจำนวน 1 ในกลุ่มแรก และที่สอง ของกรรมวิธี

ตัวสถิติทดสอบความแตกต่างระหว่างกลุ่มของกรรมวิธีกำหนดไว้ดังนี้

$$Q_d = \left(\frac{k-1}{k_1 k_2}\right) \frac{(k_2 U_1 - k_1 U_2)^2}{kN - \Sigma R_i^2}$$

ตัวสถิติทดสอบ $Q_d$ นี้มีการแจกแจงไคสแควร์ ด้วยองศาความเป็นอิสระ 1

ถ้าต้องการเปรียบเทียบกรรมวิธีภายในกลุ่ม 1 หรือกลุ่ม 2 ก็ใช้ตัวสถิติทดสอบ $Q_1$ หรือ $Q_2$ ดังนี้

$$Q_1 = \left(\frac{k(k-1)}{k_1}\right) \frac{k_1 \Sigma c_j^2 - U_1^2}{kN - \Sigma R_i^2} \qquad (j=1,2,..,k_1)$$

และ $Q_2 = (\frac{k(k-1)}{k_2})\frac{k_2\Sigma c_j^2 - U_2^2}{kN - \Sigma R_i^2}$ $(j=k_1+1,k_1+2,..,k)$

ตัวสถิติทดสอบ $Q_1$ และ $Q_2$ นี้มีการแจกแจงไคสแควร์ ด้วยองศาความเป็นอิสระ $k_1-1$ และ $k_2-1$ ตามลำดับ

จะเห็นได้ว่า $Q = Q_d + Q_1 + Q_2$

**ตัวอย่าง** ในการเปรียบเทียบกรรมวิธีต่างๆ 8 กรรมวิธี โดยอาศัยหน่วยตัวอย่างที่สุ่มมา 8 หน่วย ได้ข้อมูลจากการทดลอง ดังนี้

| กรรมวิธี | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | รวม |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| หน่วยตัวอย่าง 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 3 |
| 6 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 5 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 8 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 6 |
| รวม | 1 | 0 | 3 | 2 | 3 | 3 | 0 | 3 | 15 |

สมมติฐานที่จะทดสอบ คือ

$$Ho : \pi_1 = \pi_2 = ... = \pi_8$$

ค่าของตัวสถิติทดสอบ

$$Q = \frac{8(7)\{1^2+0^2+...+0^2+3^2\} - 7(15^2)}{8(15) - (0^2+1^2+...+6^2)} = 14.71$$

แต่ $\chi^{2(7)}_{.05} = 14.07$ จึงปฏิเสธสมมติฐานหลัก

เมื่อเราแบ่งกรรมวิธีออกเป็น 2 กลุ่ม กลุ่มแรกมี 5 กรรมวิธี แต่กลุ่มที่สองมี 3 กรรมวิธี ดังนั้นเราจะได้

$$U_1 = 1 + 0 + 3 + 2 + 3 = 9$$

$$U_2 = 3 + 0 + 3 = 6$$

ดังนั้น $Q_d = (\frac{7}{5(3)})\frac{\{3(9) - 5(6)\}^2}{120-71} = 0.09$

ซึ่งแสดงว่าทั้งสองกลุ่มกรรมวิธีไม่น่าจะแตกต่างกัน

สำหรับ $Q_1$ และ $Q_2$ คำนวณได้เป็น

$$Q_1 = \left(\frac{8(7)}{5}\right)\frac{5\,(1^2+0^2+3^2+2^2+3^2) - 9^2}{120-71} = 7.77$$

$$Q_2 = \left(\frac{8(7)}{3}\right)\frac{3\,(3^2+0^2+3^2) - 6^2}{120-71} = 6.86$$

เนื่องจาก $\chi^{2(5-1)}_{.05} = 9.49$ และ $\chi^{2(3-1)}_{.05} = 5.99$จึงสรุปได้ว่า กลุ่มแรกไม่แตกต่างกัน แต่กลุ่มที่สองจะแตกต่างกัน

เราจะเห็นได้ว่า

$$Q_d + Q_1 + Q_2 = 0.09 + 7.77 + 6.86 = 14.72$$

ซึ่งมีค่าเท่ากับ Q = 14.71 (แตกต่างกันเล็กน้อยเนื่องจากการปัดเศษ)