บทที่ 9
การวางแผนแบบบล็อคไม่สมบูรณ์
(Incomplete Block Designs)

ความหมายของแผนงานทดลองที่สมดุลย์ (Balance Designs)

Yates เป็นผู้ริเริ่มสร้างแผนงานทดลองแบบบล็อคไม่สมบูรณ์โดยการลดขนาดของบล็อคสำหรับงานทดลองที่มีแฟคเตอร์เดียวแต่มีหลายระดับ เพื่อให้หน่วยทดลองภายในบล็อคมีความเป็นเอกภาพกัน และต้องการเปรียบเทียบระหว่างคู่ต่าง ๆ ของวิธีการทุก ๆ คู่ด้วยความเที่ยงเท่า ๆ กัน ดังแผนผังงานทดลองที่ (1) เป็นตัวอย่างของบล็อคไม่สมบูรณ์แต่สมดุลย์กัน เนื่องจากวิธีการทั้ง 9 วิธี ถ้าพิจารณาเป็นคู่ของการจับคู่กัน จะเห็นว่า ทุกคู่จะเกิดในบล็อคเดียวกัน 1 ครั้ง เช่น วิธีที่ 1 อยู่คู่กับวิธีการที่ 2 และ 3 ในเรพปริเคทที่ 1 อยู่คู่กับวิธีการที่ 4 และ 7 ในเรพปริเคทที่ 2 อยู่คู่กับวิธีการที่ 5 และ 9 ในเรพปริเคทที่ 3 และอยู่คู่กับวิธีที่ 6 และ 8 ในเรพปริเคทที่ 4 นอกจากจะ "สมดุลย์" แล้ว แผนงานทดลองนี้มีชื่อเรียกพิเศษว่าแผนงานทดลองแบบ "แลททีส" (Lattice Design) ซึ่งจะต้องมีจำนวนวิธีการเป็นกำลังสองของจัตุรัส และมีจำนวนเรพปริเคทเท่ากับขนาดจัตุรัสบวกหนึ่ง ($k = \sqrt{t}$; $r = (k + 1)$ สำหรับวิธีการที่ถอดรากที่สองไม่ได้จะจับกลุ่มบล็อคเป็นเรพปริเคทไม่ได้เหมือนแผนผังที่ 1 แต่ยังคงมีลักษณะ "สมดุลย์" อยู่ จึงเรียกว่า "balanced Incomplete blocks" หรือย่อ ๆ ว่า "BIB" ส่วนในแผนผังที่ (3) มาจากผังที่ (1) แต่จัดแล้วให้มีคุณสมบัติของจัตุรัสลาตินคือ ทุกคู่ของวิธีการเกิดร่วมแถวเดียวกันและคอลัมน์เดียวกันอย่างละ 1 ครั้ง เรียกว่า "จัตุรัสแลททีส" (lattice square) ส่วนในแผนผังที่ (4) มีเพียง 3 แถวแต่มีครบทุกวิธีการในแต่ละแถว ส่วนคอลัมน์คือบล็อคมีเพียง 3 วิธีการแต่เป็นแผนงานทดลองที่ "สมดุลย์" เช่นกัน เพราะทุก ๆ คู่อยู่ในบล็อคเดียวกัน 1 ครั้ง ถ้าพิจารณาให้ดีจะเห็นว่ามีส่วนคล้ายจัตุรัสลาตินที่ไม่สมบูรณ์ บางครั้งจึงเรียกว่า incomeplete latin sq. แต่ชื่อเฉพาะคือ "จัตุรัสยูเด็น" (Youden square) ซึ่งมีชื่อตามผู้สร้างคือ W.J.Youden สำหรับงานทดลองในเรือนเพาะชำ (greenhouse experiments)

Block	Rep.1	Rep.2	Rep.3	Rep.4
(1)	1 2 3	(4) 1 4 7	(7) 1 5 9	(10) 1 8 6
(2)	4 5 6	(5) 2 5 8	(8) 7 2 6	(11) 4 2 9
(3)	7 8 9	(6) 3 6 9	(9) 4 8 3	(12) 7 5 3

แผนผังที่ (1) แสดงแผนงานทดลองที่สมดุลย์ของ 9 วิธีการในบล็อคขนาด 3 หน่วยทดลอง

Block

(1)	1 2 4	(3)	3 4 6	(5)	1 5 6	(7)	1 3 7
(2)	2 3 5	(4)	4 5 7	(6)	2 6 7		

แผนผังที่ (2) แสดงแผนงานทดลองสำหรับ 7 วิธีการในบล็อคขนาด 3 หน่วยทดลอง

	Rep.1	Rep.2	Rep.3	Rep.4
Rows	(1) (2) (3)	(4) (5) (6)	(7) (8) (9)	(10) (11) (12)
(1)	1 2 3	1 4 7	1 6 8	1 9 5
(2)	4 5 6	2 5 8	9 2 4	6 2 7
(3)	7 8 9	3 6 9	5 7 3	8 4 3

แผนผังที่ (3) แสดงการจัด 9 วิธีการในจัตุรัสแลททีส (Lattice Square)

	Columns (blocks)						
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
Rows							
(1)	1	2	3	4	5	6	7
(2)	2	3	4	5	6	7	1
(3)	4	5	6	7	1	2	3

แผนผังที่ (4) แสดงการจัด 7 วิธีการในจัตุรัสลาตินแบบไม่สมบูรณ์

ความหมายของแผนงานทดลองที่สมดุลย์เพียงบางส่วน

สัญญลักษณ์ที่ใช้

t คือจำนวนวิธีการทั้งหมดในการทดลอง

b จำนวนบล็อค

k คือจำนวนวิธีการในแต่ละบล็อค

r คือจำนวนซ้ำของแต่ละวิธีการ

λ คือจำนวนครั้งที่วิธีการแต่ละคู่เกิดพร้อมกันในบล็อคเดียวกัน

N คือจำนวนค่าสังเกตทั้งหมดจากการทดลอง

และเพื่อที่จะมีคุณลักษณะของ BIB เมื่อ

$$N = bk = rt \; ; \quad b = tr/k \; ; \quad \lambda = r(k-1)/(t-1) \; ;$$

$$\lambda(t-1) = r(k-1)$$

แผนงานทดลองแบบสมดุลย์เพียงบางส่วน

(Partially Balanced Incomplete Block Designs = PBIB)

เนื่องจากข้อจำกัดในการสร้างแผนงานทดลองแบบสมดุลย์ทำให้ต้องใช้จำนวนเรพปริเคท อย่างน้อยที่สุดเท่ากับ r=bk/t ซึ่งมักเป็นจำนวนไม่น้อยนัก แต่ถ้าการกำหนดจำนวนเรพปริเคท ไม่ขึ้นอยู่กับปัจจัย 2 อย่างนี้ ทำให้มีอิสระในการตัดสินใจว่าจะใช้จำนวนเรพปริเคทเท่าใด ก็ได้ แต่แผนงานทดลองจะขาดลักษณะ "สมมาตร" ตัวอย่างคือ จัตุรัสแลททีส แต่ไม่ใช้ครบ ทั้ง (k + 1) เรพปริเคท เช่นถ้าใช้ 2 เรพปริเคท เรียกว่า simple lattice ถ้าใช้ 3 เรพปริเคทจาก ทั้งหมด เรียกว่า triple lattice อย่างไรก็ตามแผนงานทดลองแบบนี้จะต้องมีลักษณะที่กำหนด ไว้จากการศึกษาของ Bose and Nair ซึ่งเป็นผู้ตั้งชื่อ "partially balanced" ว่า อย่างน้อยที่สุด จะต้อง มีเงื่อนไขครบ 2 ข้อ เรียกว่า "two associate classes" กล่าวคือ วิธีการบางคู่จะเกิดในบล็อคเดียวกัน จำนวน λ_1 ครั้ง ในขณะเดียวกัน วิธีการบางคู่จะเกิดในบล็อคเดียวกันจำนวน λ_2 ครั้ง โดยที่ λ_1 และ λ_2 ต้องเป็นเลขจำนวนเต็ม แต่วิธีการวิเคราะห์จะยุ่งยากมากขึ้น จึง ไม่นิยมใช้กันมากนัก

3 × 3 Triple Lattice

Block	Rep.1	Rep.2	Rep.3
(1)	1 2 3	(4) 1 4 7	(7) 1 5 9
(2)	4 5 6	(5) 2 5 8	(8) 7 2 6
(3)	7 8 9	(6) 3 6 9	(9) 4 8 3

จากแผนผัง จะเห็นว่า (1) ทุกบล็อคมี k หน่วยเท่า ๆ กัน ทุกวิธีการเกิด r ครั้ง และ ไม่มีวิธีการใดเกิดขึ้นในบล็อคเดียวกันมากกว่า 1 ครั้ง เช่นลองพิจารณาวิธีการที่ (1) จะเกิด พร้อมกับวิธีการ 2 และ 3 ในบล็อค (1) พร้อมกับวิธีการ 4 และ 7 ในบล็อค (4) พร้อมกับ วิธีการ 5 และ 9 ในบล็อค (7) และยังเหลือวิธีการ 6 และ 8 ที่ยังไม่เคยอยู่ในบล็อคเดียวกับ วิธีการที่ 1 ในทำนองเดียวกัน ถ้าพิจารณาวิธีการอื่น ๆ จะพบว่ามี 6 วิธีการที่เคยอยู่ในบล็อคเดียวกัน และเหลืออีก 2 วิธีการที่ไม่ได้อยู่ในบล็อคเดียวกัน จึงเป็นการขาดคุณสมบัติของการ "สมดุลย์" วิธีการคู่ที่อยู่ในบล็อคเดียวกันเรียกว่า first associates ส่วนคู่ที่ไม่ได้อยู่ในบล็อคเดียวกันเรียกว่า second associates

(2) วิธีการทุกคู่เกิดพร้อมกันด้วยจำนวน λ_1 หรือ λ_2 ครั้ง คู่ที่เป็น first associates เกิด λ_1 ครั้ง คู่ที่เป็น second associates เกิด λ_2 ครั้ง จากตัวอย่าง

$$\lambda_1 = 1 \quad , \quad \lambda_2 = 0$$

จำนวนวิธีการคือ k^2 , ขนาดของบล็อคคือ k มีคุณสมบัติพิเศษคือ วิธีการทุกคู่เกิดขึ้นพร้อมกัน 1 ครั้งในบล็อคเดียวกัน แผนงานทดลองที่ใช้เสมอดังปรากฏในแผนที่ 10.1–10.6 ที่ Cochran and Cox ได้สร้างไว้ มีดังนี้

จำนวนวิธีการ	9	16	25	49	64	81
ขนาดของบล็อค	3	4	5	7	8	9
จำนวนเรพปริเคท	4	5	6	8	9	10

พึงสังเกตว่า ถ้าจำนวนวิธีการเป็น 36,100 และ 144 สร้างไม่ได้

ตัวอย่าง น้ำหนักที่เพิ่มขึ้นเป็นปอนด์ต่อวันของหมู 2 ตัว

	Rep.1					Rep.2			
Block				Total	Block				Total
(1)	(1)	(2)	(3)		(4)	(1)	(4)	(7)	
	2.20	1.84	2.18	6.22		1.19	1.20	1.15	3.54
(2)	(4)	(5)	(6)		(5)	(2)	(5)	(8)	
	2.05	0.85	1.86	4.76		2.26	1.07	1.45	4.78
(3)	(7)	(8)	(9)		(6)	(3)	(6)	(9)	
	0.73	1.60	1.76	4.09		2.12	2.03	1.63	5.78
				15.07					14.10

	Rep.3					Rep.4			
Block				Total	Block				Total
(7)	(1)	(5)	(9)		(10)	(1)	(6)	(8)	
	1.81	1.16	1.11	4.08		1.77	1.57	1.43	4.77
(8)	(2)	(6)	(7)		(11)	(2)	(4)	(9)	
	1.76	2.16	1.80	5.72		1.50	1.60	1.42	4.52
(9)	(3)	(4)	(8)		(12)	(3)	(5)	(7)	
	1.71	1.57	1.13	4.41		2.04	0.93	1.78	4.75
				14.21					14.04

SOV.	df.		SS	MS
Replication	k	= 3	0.0774	
Treatments	(k^2-1)	= 8	3.2261	
Blocks (adj.)	(k^2-1)	= 8	1.4206	0.1776
Intra-block	$(k-1)(k^2-1)$	= 16	1.2368	0.0773
total	$(k^3 + k^2 -1)$	= 35	5.9609	

Treatment totals and adjustment factors

t_i	T	B_t	$W = (3T - 4B_t + G)$	Adj.total $T + \frac{1}{4}w$	Mean per unit
1	6.97	18.61	+3.89	7.21	1.80
2	7.36	21.24	-5.46	7.02	1.76
3	8.05	21.16	-3.07	7.86	1.96
4	6.42	17.23	+7.76	6.91	1.73
5	4.01	18.37	-4.03	3.76	0.94
6	7.62	21.03	-3.84	7.38	1.84
7	5.46	18.10	+1.40	5.55	1.39
8	5.61	18.05	+2.05	5.74	1.44
9	5.92	18.47	+1.30	6.00	1.50
G	= 57.42	172.26	0.00	57.43	

ขั้นตอนในการวิเคราะห์แลททีสขนาด k × k ในบล็อคขนาด k หน่วย และมีจำนวนเรพปริเคท r = (k + 1) มี ดังนี้

1. หาผลรวมของบล็อค ผลรวมของเรพปริเคท ผลรวมรวบยอด และผลรวมของวิธีการคือ T

2. สำหรับทุกวิธีการ คำนวณยอดรวม B_t คือยอดรวมของบล็อคที่วิธีการ t ปรากฏ เช่น สำหรับวิธีการที่ 4 จะมี

$$B_t = 4.76 + 3.54 + 4.41 + 4.52 = 17.23$$

และตรวจสอบได้โดย B_t ต้องเป็น k เท่าของยอดรวม T

3. คำนวณค่า

$$W = kt - (k + 1)B_t + G$$

และตรวจสอบว่าผลรวมต้องเป็นศูนย์

4. คำนวณค่า SS (วิธีการ), SS (เรพปริเคท) ตามวิธีปกติ และ SS (บล็อคภายในเรพปริเคท) ซึ่งได้ปรับปรุงสำหรับอิทธิพลของวิธีการแล้ว ดังนี้

$$SS(Blocks)adj. = \frac{W^2}{k^3(k+1)} = (3.89^2+5.46^2+...+1.30^2)/108 = 1.4206$$

5. คำนวณ adjustment factor

$$\mu = \frac{(E_b - E_e)}{k^2 Eb} = (0.1776 - 0.0773)/9(0.1776) = 0.0628$$

ในเมื่อ E_b และ E_e คือ MS (บล็อค) และ MS (intra-block) สำหรับใช้ปรับปรุงยอดรวมของวิธีการ คือ $(T + \mu W)$ ดังปรากฏในตารางการคำนวณ ในกรณีที่ E_b มีค่าน้อยกว่า E_e, ให้ μ มีค่าเป็น o และไม่ต้องมีการปรับปรุงยอดรวมของวิธีการ

6. หากจะใช้การทดสอบแบบ "ที" ต้องหาค่า MS (effective error) ซึ่งเท่ากับ

$$E'_e = E_e (1 + k\mu) = 0.0773(1 + 3X\ 0.0628) = 0.0919$$

7. ค่า MS (วิธีการ) ที่หาไว้ในตารางวิเคราะห์ยังใช้ทดสอบไม่ได้ เนื่องจากยังไม่ได้ปรับปรุงสำหรับอิทธิพลของบล็อค

$$SS(Treatment\ adj.) = (7.21^2+ 7.02^2+...+ 6.00^2)/4 - 57.43^2/36$$
$$= 3.17 \quad (8\ df),\ MS(trt.)adj = 3.17/8 = .3962$$

และใช้ทดสอบกับ effective error mean square

$$F = \frac{.3962}{.0919} = 4.31 \quad with \quad 8,16\ df.$$

8. ถ้าต้องการเปรียบเทียบประสิทธิภาพกับการวางแผนแบบบล็อคสมบูรณ์

RE : (Lattice to RCB.) = $\hat{MSE}$ (RCB) / MS (effective error)

$\hat{MSE}$ (RCB) = pooled MS (blocks) adj. and intra-block error

= (1.4206 + 1.2368) / (8 + 16) = 0.1107 (24 df)

RE : (Lattice to RCB) = 0.1107 / 0.0919 = 1.20 = 120 %

หมายความว่า 4 reps ของ balance lattice ให้ประสิทธิภาพเท่า ๆ กับ 5 reps ของ RCB

การคำนวณค่าข้อมูลสูญหาย

เนื่องจากการใช้แผนงานทดลองแบบแลททีสมักใช้กับงานทดลองขนาดใหญ่ มีจำนวนข้อมูลมาก อาจเกิดปัญหาข้อมูลสูญหาย มีวิธีการคำนวณค่าสูญหาย คือ X ดังนี้

$$X = \frac{k^2T + K(k+1)B - R + G - KT_b - kB_t}{k(k-1)^2}$$

ในเมื่อ T, B, และ R คือยอดรวมของวิธีการ ของบล็อค และของเรพปริเคท ที่มีข้อมูลสูญหาย G คือผลรวมทั้งหมด

T_b คือยอดรวมของวิธีการต่าง ๆ จากทุกเรพปริเคท เฉพาะวิธีการที่อยู่ในบล็อคเดียวกับค่าที่สูญหาย

B_t คือยอดรวมของบล็อคที่มีวิธีการที่สูญหายปรากฏอยู่

ตัวอย่าง สมมุติค่าสังเกตของวิธีการที่ 1 ในเรพปริเคทที่ 1 คือ 2.20 ได้สูญหาย

$T = 4.77,\ B = 4.02,\ R = 12.87,\ G = 55.22$

$T_b = 4.77 + 7.36 + 8.05 = 20.18$

$B_t = 4.02 + 3.54 + 4.08 + 4.77 = 16.41$

$$x = \frac{9(4.77) + 12(4.02) - 12.87 + 55.22 - 3(20.18) - 3(16.41)}{12}$$

$$= 1.98$$

ตัวอย่างของ Partially Balanced Lattices

ข้อมูลต่อไปนี้คือผลผลิต จากถั่วเหลือง ใน **5 x 5 simple lattice** วิธีการคือถั่วพันธุ์ต่าง **q** 25 พันธุ์

											B	C	MC
					Rep.1								
(1)	6	(2)	7	(3)	5	(4)	8	(5)	6		32	+ 61	+ 9.5
(6)	16	(7)	12	(8)	12	(9)	13	(10)	8		61	-8	- 1.3
(11)	17	(12)	7	(13)	7	(14)	9	(15)	14		54	+ 48	+ 7.5
(16)	18	(17)	16	(18)	13	(19)	13	(20)	14		74	- 15	- 2.3
(21)	14	(22)	15	(23)	11	(24)	14	(25)	14		68	+ 17	+ 2.7
											289	+ 103	+ 16.1
					Rep.2								
(1)	24	(6)	13'	(11)	24	(16)	11	(21)	8		80	- 9	- 1.4
(2)	21	(7)	11	(12)	14	(17)	11	(22)	23		80	-23	-3.6
(3)	16	(8)	4	(13)	12	(18)	12	(23)	12		56	- 8	- 1.3
(4)	17	(9)	10	(14)	30	(19)	9	(24)	23		89	- 32	- 5.0
(5)	15	(10)	15	(15)	22	(20)	16	(25)	19		87	31	- 4.8
											392	- 103	- 16.1

					Treatment totals (unadj.)					MC
(1)	30	(2)	28	(3)	21	(4)	25	(5)	21	+ 9.5
(6)	29	(7)	23	(8)	16	(9)	23	(10)	23	- 1.3
(11)	41	(12)	21	(13)	19	(14)	39	(15)	36	+ 7.5
(16)	29	(17)	27	(18)	25	(19)	22	(20)	30	- 2.3
(21)	22	(22)	38	(23)	23	(24)	37	(25)	33	+ 2.7
C	- 1.4		-3.6		- 1.3		- 5.0		-4.8	0.0

Treatment totals (adj.)

(1)	38.1	(2)	33.9	(3)	29.2	(4)	29.5	(5)	25.7
(6)	26.3	(7)	18.1	(8)	13.4	(9)	16.7	(10)	16.9
(11)	47.1	(12)	24.9	(13)	25.2	(14)	41.5	(15)	38.7
(16)	25.3	(17)	21.1	(18)	21.4	(19)	14.7	(20)	22.9
(21)	23.3	(22)	37.1	(23)	24.4	(24)	34.7	(25)	30.9

ขั้นตอนการคำนวณและวิเคราะห์มีดังนี้

1. หายอดรวมของบล็อค (B) ยอดรวมเรพปริเคท ยอดรวมวิธีการ และ Grand total
2. จากแต่ละบล็อค คำนวณค่า C

   C = (ยอดรวมของวิธีการต่าง ๆ ที่อยู่ในบล็อคจากเรพปริเคท) − rB

   ตัวอย่าง จะหาค่า C ของบล็อค 1 ในเรพปริเคทที่ 1

   $$C = 30 + 28 + 21 + 25 + 21 - (2)(32) = +61$$

   ต่อไปหาค่า R_c คือยอดรวมของเรพปริเคทจากค่า C ผลรวมนี้จาก 2 เรพปริเคทต้องเป็นศูนย์
3. คำนวณค่าผลบวกกำลังสองต่าง ๆ เพื่อใส่ตารางวิเคราะห์ตามปกติ ยกเว้น SS (Block) adj

   $$SS(Blocks)adj. = \Sigma C^2/kr(r-1) - \Sigma R_c^2/k^2r(r-1)$$

   $$= (61^2 + 8^2 + \ldots + 31^2)/10 - (103^2 + 103^2)/50 = 501.84$$
4. คำนวณค่า μ คือ weighting factor เพื่อใช้ปรับปรุงยอดรวมวิธีการ

   $$\mu = (E_b - E_e)/k(r-1)E_b$$

   $$= (62.73 - 13.66)/(5)(62.73) = 0.1564$$

   E_b = MS(Blocks) , E_e = MS(intra-block error)

ถ้า E_b น้อยกว่า E_e ให้ $\mu = 0$ และไม่ต้องปรับปรุงยอดรวมวิธีการและทำการวิเคราะห์เช่นเดียวกับการวางแผนแบบบล็อคสมบูรณ์

นำค่า C ทุกค่าคูณกับ μ (μC) เพื่อใช้เป็นค่าปรับปรุงของบล็อคออกจากวิธีการ โดยนำค่า μC จากทั้ง 2 เรพปริเคทมาปรับปรุงกับยอดรวมเดิมของวิธีการ เช่น ค่าปรับปรุงยอดรวมวิธีการที่ 4 คือ

$$25 + 9.5 - 5.0 = 29.5$$

6. จากตารางวิเคราะห์ จะยังทดสอบวิธีการไม่ได้ เพราะยังไม่ได้ปรับปรุง สำหรับการทดสอบวิธีการก่อนการปรับปรุง ให้ถือเสมือนการวิเคราะห์ในบล็อคสมบูรณ์ ส่วนความคลาดเคลื่อนได้จากการนำกำลังสองเฉลี่ยของบล็อคและ intra-block มารวมกันดังนี้

	df.	SS	MS
Treatments (unadj.)	$(k^2-1) = 24$	559.28	23.30
Error	$(k^2-1)(r-1) = 24$	720.32	30.01

ผลการทดสอบโดยค่าที่ยังไม่ปรับปรุงของวิธีการจะไม่ฉับไวนัก แต่ก็ใช้แก้ขัดได้ในกรณีที่ผู้ทดลองมิได้มีจุดประสงค์เพื่อต้องการทดสอบเป็นเบื้องแรก

7. คำนวณค่า SS (Treatments) adj.

ซึ่งมีวิธีหาอีกวิธีจากค่าเดิมที่ยังไม่ปรับปรุง คือ

B_u = unadjusted SS(blocks within replications)
= 350

B_a = adjusted SS(blocks within replication) = 501.84

$$k(r-1)\mu\left\{\left[\frac{r}{(r-1)(1-k\mu)}\right] B_u - B_a\right\} = \text{adj. factor}$$

$$= (5)(1)(0.1564)\left\{\left[\frac{2}{1-(5)(0.1564)}\right](350 - (501.84)\right\} = -85.30$$

SS(Treatment adj.) = SS(Treatment unadj.) - adj. factor
= 559.28 - (-85.30) = 644.58

	df.	SS.	MS.	F-ratio
Treatments(adj.)	24	644.58	26.86	1.97
Intra-block error	16	218.48	13.66	

7. RE:(simple lattice to RCB)=$\hat{MSE}$(RCB)/Effective error variance

$\hat{MSE}$(RCB) = 30.01

Effective error variance = $E_e \left\{ 1 + \frac{rk\mu}{(k+1)} \right\}$

$= (13.66) \left\{ 1 + \frac{(2)(5)(0.1564)}{6} \right\} = 17.22$

RE : $= 30.01/17.22 = 1.74 = 174\%$

ANOVA

SOV.	df.		SS	MS	
Replications	(r-1)	1	212.18		
Treatments(unadj.)	(k^2-1)	24	559.28		
Blocks within replications (adj.)	r(k-1)	8	501.84	62.73	E_b
Intra-block error	(k-1)(rk-k-1)	16	218.48	13.66	E_e
	(rk^2-1)	49	1491.78		

การวิเคราะห์เมื่อใช้แผนงานทดลองเดิมซ้ำกัน (Repetition of designs)

สมมุติจากแผนงานทดลองเดิมจากตัวอย่างที่แล้วมี 2 เรพปริเคท เพราะเป็น Simple lattice ถ้าทำซ้ำกันจำนวน p = 2 ครั้ง ดังนั้น จำนวนเรพปริเคทคือ r = np = 2 (2) = 4 สมมุติจากตัวอย่างเดิม ทำเรพปริเคทที่ 1 และ 2 ซ้ำอย่างละ 1 ครั้ง กลายเป็นเรพปริเคทที่ 3 และ 4 ซึ่งได้เดิม ทำเรพปริเคทที่ 1 และ 2 ซ้ำอย่างละ 1 ครั้ง กลายเป็นเรพปริเคทที่ 3 และ 4 ซึ่งได้ข้อมูลเพิ่มเติม ดังนี้

5 × 5 simple lattice (Rep.3 and Rep.4)

Rep.3										Block totals					
											1	3	Sum	C	$\hat{MC}$
(1)	13	(2)	26	(3)	9	(4)	13	(5)	11	72	32	72	104	+ 63	+ 8.0
(6)	15	(7)	18	(8)	22	(9)	11	(10)	15	81	61	81	142	- 29	-3.7
(11)	19	(12)	10	(13)	10	(14)	10	(15)	16	65	54	65	119	+ 69	+ 8.8
(16)	21	(17)	16	(18)	17	(19)	4	(20)	17	75	74	75	149	- 34	- 4.3
(21)	15	(22)	12	(23)	13	(24)	20	(25)	8	68	68	68	136	+ 30	+ 3.8
										361	289	361	650	+ 99	+ 12.6

															C	MC
					Rep.4							2	4	Sum		
(1)	16	(6)	7	(11)	20	(16)	13	(21)	21	77	80	77	157	− 3	− 0.4
(2)	15	(7)	10	(12)	11	(17)	7	(22)	14	57	80	57	137	+ 2	+ 0.3
(3)	7	(8)	11	(13)	15	(18)	15	(23)	16	64	56	64	0.1	- 1	-0.1
(4)	19	(9)	14	(14)	20.	(19)	6	(24)	16	75	89	75	164	− 49	− 6.2
(5)	17	(10)	18	(15)	20	(20)	15	(25)	14	X4	87	84	171	− 48	− 6.1
										357	392	357	749	99	− 12.5

Treatment totals (4 reps)

(1)	59	(2)	69	(3)	37	(4)	57	(5)	49	− 8.0
(6)	51	(7)	51	(8)	49	(9)	48	(10)	56	− 3.7
(11)	80	(12)	42	(13)	44	(14)	69	(15)	72	− 8.8
(16)	63	(17)	50	(18)	57	(19)	32	(20)	62	− 4.3
(21)	58	(22)	64	(23)	52	(24)	73	(25)	55	-3.8
− 0.4			+0.3		− 0.1		− 6.2		− 6.1	

Adjusted treatment totals

(1)	66.6	(2)	77.3	(3)	44.9	(4)	58.8	(5)	50.9
(6)	46.9	(7)	47.6	(8)	45.2	(9)	38.1	(10)	46.2
(11)	88.4	(12)	51.1	(13)	52.7	(14)	71.6	(15)	74.7
(16)	58.3	(17)	46.0	(18)	52.6	(19)	21.5	(20)	51.6
(21)	61.4	(22)	68.1	(23)	55.7	(24)	70.6	(25)	52.7

การวิเคราะห์

$n = 2,\ p = 2,\ r = 4$

1. หายอดรวมของบล็อค เรพปริเคท และวิธีการ และ Grand total
2. นำยอดรวมของบล็อคจากวิธีการเซ็ทเดียวกัน คือบล็อคในเรพปริเคทที่ 1 รวมกับบล็อคเดียวกันในเรพปริเคทที่ 3 บล็อคในเรพปริเคทที่ 2 รวมกับบล็อคเดียวกันในเรพปริเคทที่ 4 และแต่ละบล็อค หาค่า C

   C = (ยอดรวมวิธีการในบล็อคเดียวกัน จากทุกเรพปริเคท) - n (ยอดรวมกลุ่มของบล็อค)

   ตัวอย่างเช่น จากบล็อคที่ 1 ในเรพปริเคทที่ 2 และ 4 ซึ่งมีวิธีการ (1), (6), (11), (16), (21)

   $C = 59 + 51 + 80 + 63 + 58 - 2\ (157) = -3$

แล้วหายอดรวมของ C ในแต่ละเรพปริเคท (R_c) ผลรวมของ R_c จากทุกเรพปริเคทต้อง = 0

3. หาค่าต่าง ๆ ในตารางวิเคราะห์แบบปกติ ดังนี้

sov.	df		ss	MS
Replications	(r-l)	3	**226.19**	
Treatments (unadj.)	(k^2-1)	24	791.24	
Blocks within replications (adj.)	r (k-l)	(16)	(786.00)	49.12 E_b
Component (a)	n (p-1) (k-1)	8	164.72	
Compohent (b)	n (k-l)	8	621.28	
Intra-block error	(k-l) (rk-k-l)	56	761.56	13.60 E_e
total	(rk^2-1)	66	2564.99	

component (a) = SS(rows x cols interaction)

$SS(total)_{rc} = (32^2+61^2+...+75^2+84^2)/k=5 - (650^2+749^2)/pk^2=50$

= **602.18**

$SS(Rows) = (104^2+142^2+...+171^2)/pk=10 - (650^2+759^2)/50=309.28$

$SS(Cols) = (289^2+361^2+392^2+357^2)/k^2=25 - (650^2+749^2)/50=128.18$

SS(Component (a)) = **602.18 - 309.28 - 128.18 = 164.72**

Component (b) SS $= \Sigma\ C^2/kr(n-1) - \Sigma\ R^2c\ /k^2r(n-1)$

$= (63^2 + 29^2+...+ 48^2)/20 - (99^2 + 99^2)/100 =$ **621.26**

$$\mu = \frac{p(E_b - E_e)}{k\ [\ (r-p)E_b + (p-1)E_e}$$

$$= \frac{(2)(35.52)}{(5)\ [\ (2)(49.12) + 13.60\ 1} = \textbf{0.1270}$$

4. ถ้าจะทดสอบวิธีการ ต้องหาผลบวกกำลังสองของวิธีการที่ปรับปรุงแล้ว หรือจะทำค่า M ไปหักออก โดยที่

$$M = k(n-1)\mu \left[\frac{n}{(n-1)(1 + k\mu)} B_u - B_a \right]$$

B_u = unadjusted SS(blocks) = 309.28 = SS(rows)

B_a = adjusted SS(blocks) for component (b) = **621.28**

5. RE : lattice to RCB) = $\overset{A}{\text{MSE}}$ (RCB) / effective error varince

MSE (RCB) ใช้วิธีการหาเหมือนตัวอย่างก่อน

$$\text{effective error variance} = E_e \left[\ 1 + \frac{nk\mu}{(k + 1)}\ \right]$$

สำหรับตัวอย่างต่าง ๆ ที่กล่าวมาเป็นการใช้แผนงานทดลองแบบแลททีสที่สมดุลย์ซึ่งเป็นแผนงานทดลองแบบหนึ่งของ BIB สำหรับแผนงานทดลองแลททีสมีคุณสมบัติว่าจำนวนวิธีการเป็นกำลังสองของขนาดของบล็อค ($t=K^2$) และทุก ๆ คู่ของวิธีการจะเกิดในบล็อคเดียวกันเป็นจำนวนเท่ากันสำหรับทุก ๆ คู่ แต่เนื่องจากการสร้างแผนงานทดลองแบบนี้ต้องใช้จำนวนเรพปริเคทมาก ดังนั้นจะกล่าวถึงแผนงานทดลองแบบบล็อคไม่สมบูรณ์ (BIB) แต่ใช้จำนวนเรพปริเคทไม่มาก คือไม่เกิน 10 เรพปริเคท และโดยมากแต่ละบล็อคจะมีประมาณไม่เกิน 6 วิธีการ จึงเหมาะสำหรับงานทดลองที่ใช้บล็อคขนาดเล็ก ซึ่งเป็นที่นิยมใช้มากในเรือนเพาะชำ นอกจากนั้นยังนิยมใช้สำหรับงานทดลองเพื่อเปรียบเทียบรสนิยมในอาหาร สิ่งของ และอาชีพ ซึ่งในการเปรียบเทียบสิ่งเหล่านี้โดยให้บุคคลคนเดียวเป็นผู้ทำการเปรียบเทียบปรากฏว่าแต่ละคนจะสามารถจัดอันดับการเปรียบเทียบเมื่อจำนวนไม่มากเกินไปนัก เมื่อมีจำนวนมากบุคคลจะประสบความลำบากใจในการจัดอันดับสิ่งเปรียบเทียบ ดังนั้นแต่ละคนจึงสามารถเปรียบเทียบจำนวนวิธีการต่าง ๆ ได้น้อยกว่าวิธีการทั้งหมดที่อยู่ในการทดลอง ปัญหาคือ จะจัดวิธีการในการทดสอบอย่างไร เช่น ต้องการเปรียบเทียบวัตถุ 10 อย่าง แต่คิดว่าบุคคลจะสามารถจัดอันดับได้อย่างมากไม่เกิน 5 อย่างต่อครั้ง ดังนั้นบุคคลแต่ละคนจึงทำหน้าที่เป็นบล็อค ซึ่งบางครั้งอาจใช้บุคคลหลายคนเป็นหลาย ๆ บล็อค หรืออาจใช้คนเดียวแต่ต้องทิ้งช่วงเวลาให้นานพอสมควร นักสถิติหลายท่านได้ศึกษาและให้ข้อสังเกต และการคำนวณสำหรับการเปรียบเทียบแบบนี้ ได้แก่

1. BRADLEY,R.A. Some statistical methods in taste testing and quality evaluation. BIOMETRICS 9, 22 - 38, 1953.
2. DURBIN, J. Incomplete blocks in ranking experiments. Brit.Jour.Psych. 4, 85-90, 1951
3. BRADLEY, R.A., and TERRY, M.E. The rank analysis of incomplete block designs. I. BIOMETRIKA 39, 324-345, 1952.
4. BRADLEY, R.A. Incomplete block rank analysis : on the appropriateness of the model for a method of paried comparisons. BIOMETRICS 10, 374-390, 1954.
5. CALVIN, L.D. Doubly balanced incomplete block designs for experiments in which the treatment effects are correlated. BIOMETRICS 10, 61-88, 1954.

สำหรับแผนงานทดลองต่าง ๆ แบบ BIB นี้ COCHRAN,W.G.,COX,G.M. ได้รวบรวมไว้ในหนังสือ EXPERIMENTAL DESIGN, สำนักพิมพ์ John Wiley and Son, Inc. second edition, 1968, 469-482.

ซึ่งแต่ละแผนจะมีการคำนวณค่า E คือ Efficiency factor ซึ่งหมายถึงการเปรียบเทียบระหว่าง BIB กับบล็อคสมบูรณ์ ตัวอย่างเช่น ในแผนหนึ่งซึ่งมี 37 วิธีการในบล็อคขนาด 9 หน่วยทดลอง

ให้ค่า Efficiency factor 91% นั่นคือ ผลสูญเสียเนื่องจากการไม่ใช้บล็อคสมบูรณ์ต้องไม่มากกว่า 9% และความสูญเสีย 9% นี้ จะเกิดเฉพาะเมื่อการใช้เรพปริเคท (บล็อค) ที่มี 37 หน่วยทดลอง (คือบล็อคสมบูรณ์) มีลักษณะแบบเดียวกับการใช้บล็อคขนาด 9 หน่วยทดลอง ซึ่งไม่น่าจะเกิดบ่อยนัก ดังนั้นในกรณีที่คิดว่าบล็อคขนาดเล็กมีความเป็นเอกภาพมากกว่าควรใช้ BIB จะดีกว่า ส่วนในอีกกรณีหนึ่งซึ่งมี 7 วิธีการในบล็อคขนาด 2 หน่วยทดลอง ให้ค่า efficiency factor เพียง 58% กรณีนี้ BIB จะดีกว่าเฉพาะเมื่อบล็อคขนาดเล็กสามารถลดความคลาดเคลื่อนจากการทดลองให้เล็กลงได้มาก ๆ

การจัดหน่วยทดลองในการวางแผนแบบบล็อคไม่สมบูรณ์

ต้องให้หน่วยทดลองที่อยู่ในบล็อคเดียวกันมีลักษณะเป็นเอกภาพมากที่สุด สำหรับแผนงานทดลองที่มีหลายเรพปริเคท ต้องให้บล็อคที่อยู่ในเรพปริเคทเดียวกันเหมือนกันมากที่สุด

การจัดวิธีการให้หน่วยทดลอง (Randomization)

แบ่งเป็นขั้นตอน 3 ขั้นตอน ดังนี้

1. จัดบล็อคแบบสุ่ม ถ้าแผนงานทดลองนั้นมีหลายเรพปริเคท ต้อง สุ่มบล็อคที่อยู่ในเรพปริเคทเดียวกัน แยกต่างหากจากเรพปริเคทอื่น
2. จัดตำแหน่งของวิธีการในแต่ละบล็อคแบบสุ่ม
3. จัดวิธีการทดลองให้กับเลขที่ของวิธีการในแผนผังงานทดลองแบบสุ่ม

การวิเคราะห์

การวิเคราะห์แผนงานทดลองแบบ BIB แบ่งเป็นลักษณะกว้าง ๆ ได้ 5 ลักษณะซึ่งได้เขียนกำกับไว้ในแผนผังงานทดลองแล้ว ดังนี้

ลักษณะที่ 1 จัดเป็นหลายเรพปริเคท

จะยกตัวอย่างแผนที่ 11.3 มี 6 วิธีการ ในบล็อคขนาด 2 หน่วย ทั้งหมดมี 5 เรพปริเคท เป็นการทดลองที่มหาวิทยาลัยไอโอวา ในปี 1943 เพื่อเปรียบเทียบอิทธิพลของระยะเวลาแช่แข็งที่มีต่อความอ่อนนุ่มและรสชาดของเนื้อสัตว์ (เนื้อวัว) โดยใช้ระยะเวลาแช่แข็ง 6 ระยะเวลา คือ 0, 1, 2, 4, 9, และ 18 วัน จึงให้เป็นวิธีการโดยให้หมายเลข 1, 2, ..., 6 ตามลำดับ หน่วยทดลอง คือ เนื้อ 30 ก้อนจากวัวตัวเดียวกัน โดยมาจากที่ต่าง ๆ คือ จากกล้ามเนื้อ 4 อัน ๆ ละ 6 ก้อน (เป็น 24 ก้อน) และจาก กล้ามเนื้ออีก 3 อัน ๆ ละ 2 ก้อน (เป็น 6 ก้อน) ดังนั้นเนื้อที่มาจากกล้ามเนื้อเดียวกันน่าจะให้ผลไม่ต่างกันมาก กล้ามเนื้อจึงเป็นบล็อค และจากแต่ละกล้ามเนื้อจะให้ชิ้นส่วน 2 ลักษณะ คือด้ายซ้ายมือและขวามือ ซึ่งคาดว่าเนื้อก้อนที่อยู่ด้านซ้ายมือและขวามือในกล้ามเนื้อ (สัน) เดียวกัน จะให้ลักษณะที่คล้ายคลึงกันมากกว่าต่างกล้ามเนื้อ ดังนั้นจึง

จับคู่ให้อยู่ในบล็อคเดียวกัน จึงกลายเป็นบล็อคขนาด 2 หน่วยทดลอง รวมทั้งหมด 15 บล็อค ซึ่งในการจับกลุ่มเป็นเรพปริเคท ต้องให้เป็นเนื้อจากสันเดียวกัน แต่ละเรพปริเคทมี 3 บล็อค ดังนั้น 4 สันแรกแต่ละสันทำหน้าที่เป็น 1 เรพปริเคท ส่วนที่เหลือ 3 สันหลังรวมกันเป็นอีก 1 เรพปริเคท ส่วนผลการทดลองวัดโดยการให้คะแนน 0–10 คะแนน โดยใช้กรรมการ 4 คน (รวมเป็นยอดรวม 40 คะแนน) คะแนนสูงหมายถึงเนื้อที่อ่อนนุ่มมาก ได้ข้อมูลจากการทดลองดังนี้

Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3
B	B	B
(1) 7 (2) 17 24	(1) 17 (3) 27 44	(1) 10 (4) 25 35
(3) 26 (4) 25 51	(2) 23 (5) 27 50	(2) 26 (6) 37 63
(5) 33 (6) 29 62	(4) 29 (6) 30 59	(3) 24 (5) 26 50
137	153	148

Rep. 4	Rep. 5
B	B
(1) 2.5 (5) 40 65	(1) 11 (6) 27 38
(2) 25 (4) 34 59	(2) 24 (3) 21 45
(3) 34 (6) 32 66	(4) 26 (5) 32 58
190	141

ระยะเวลาแช่แข็ง (วัน)	วิธีการ	T	B_t	Q	W	T + μW	Adj. means
0	1	70	206	-66	19	71.8	14.4
1	2	115	241	-11	24	117.3	23.5
2	3	132	256	8	17	133.6	26.7
4	4	139	262	16	15	140.4	28.1
9	5	158	285	31	-24	155.7	31.1
18	6	155	288	22	-51	150.2	30.0
	G =	769	1538	0	0	769.0	

t = 6, k = 2, r = 5, b = 15

1. หายอดรวมของบล็อค (B) เรพปริเคท, G และ ยอดรวมของวิธีการ (T)

2. แต่ละวิธีการ คำนวณค่า B_t, Q, W

B_t = ผลรวมของบล็อคต่าง ๆ ที่มีวิธีการ t ปรากฏอยู่

$W = (t - k)\,T - (t - 1)\,B_t + (k - 1)\,G = 4\,T - 5\,B_t + G$

$Q = kT - B_t = 2T - B_t$

ผลรวมของคอลัมน์ Q และ W ต้องเป็น 0

3. สร้างตารางวิเคราะห์ ได้ดังนี้

		df	ss.	MS.
Replication	(r-l)	4	298.5	
Treatment (unadj.)	(t-1)	5	1059.8	
Blocks within reps. (adj.)	(b-r)	10	213.4	21.34 E_b
Intra-block error	(tr-t-b+l)	10	77.3	7.73 E_e
total	(tr-1)	29	1649.0	

โดยที่

SS(blocks within replications, adj. for trt.effects)

= SS (blocks, unadj.) - SS (treatments, abj.) - SS (treatments, unadj.)

$$SS(\text{Blocks, unadj.}) = (24^2+51^2+\ldots+58^2)/2 - (137^2+153^2+\ldots+141^2)/6$$

$$= 20763.5 - 20010.5 = 753.0$$

$$SS(\text{Treatments, adj.}) = (t-1)\,Q^2/\,ktr(k-1)$$

$$= \frac{5}{(2)(6)(5)(1)} \cdot (66^2+11^2+\ldots+22^2) = 520.2$$

$$SS(\text{Blocks within reps,adj.}) = 753.0 + 520.2 - 1059.8 = 213.4$$

4. μ = weighting factor

$$\mu = \frac{r(E_b - E_e)}{rt(k-1)E_b + k(b-r-t+1)E_e}$$

$$= \frac{5(21.34 - 7.73)}{(30)(21.34) + (10)(7.73)} = 0.09484$$

Adjusted treatment totals = T + μw

SS(Trt. total ,adj.) = $(71.8^2 + 117.3^2 + \ldots + 150.2^2) - (769)^2/30$

= 943.61 (5df)

MS(trt. total, adj.) = 943.61/5 = **188.72**

5. Effective error variance per unit

= E_e [1 + (t-k)μ] = **7.73** [1 + (4)(0.0948)] = 10.66

6. Ho : $\tau_i = 0$, Ha : $\tau_i \neq 0$, i = 1,2,...,6

$$F = \frac{\text{MS(trt.) adj.}}{\text{MS(effective error)}} = 188.72/10.66 = 17.7^*$$

7. $$MSE\ (RCB) = \frac{SS(\text{blocks w. reps adj.}) + SS(\text{Intra-block error})}{\text{pooled df.}}$$

= (313.4 + 77.3)/20 = 290.7/20 = 14.53

RE : ('BIB to RCB) = 14.53/10.66 = 1.36 = 136%

ลักษณะที่ (2) เมื่อรวมกันเป็นกลุ่มของเรพปริเคท

ใช้การวิเคราะห์คล้ายกับลักษณะที่ (1) แต่มีการเปลี่ยนแปลงในการจำแนก df. ในตารางวิเคราะห์ และการคำนวณค่าของ μ ดังนี้

ให้ c คือจำนวนกลุ่มของเรพปริเคท การจำแนกในตารางวิเคราะห์ มีดังนี้

	df.	MS
Groups	(c - 1)	
Treatments(unadj.)	(t - 1)	
Blocks w.gr. (adj.)	(b - c)	E_b
Intra-block error	(tr-t-b-1)	E_e
total	tr - 1	

μ = weighting factor

$$= \frac{(b-c)(E_b - E_e)}{t(k-1)(b-c)E_b + (t-k)(b-c-t+1)E_e}$$

ลักษณะที่ (3) แผนงานทดลองที่ไม่จัดเป็นเรพปริเคทหรือกลุ่มของเรพปริเคท

ใช้วิธีการวิเคราะห์แบบเดียวกับลักษณะที่ (1) แต่มีการเปลี่ยนแปลงเล็กน้อยเนื่องจากไม่มีเรพปริเคท จึงตัดอิทธิพลของเรพปริเคทออกไป ดังนั้น ตารางวิเคราะห์ มีดังนี้

	df.	MS
Treatments (unadj.)	(t - 1)	
Blocks (adj.)	(b - 1)	E_b
Intra-block error	(tr - t - b +1)	E_e
total	(tr - 1)	

$$M = \text{weighting factor} = \frac{(b-1)(E_b - E_e)}{t(k-1)(b-1)E_b + (t-k)(b-t)E_e}$$

ลักษณะที่ (4) การทดลองที่มีจำนวนวิธีการและขนาดของบล็อคเท่ากัน (t = b)

เป็นแผนงานทดลองที่จัดเป็นเรพปริเคทไม่ได้ ใช้วิธีการวิเคราะห์เช่นเดียวกับลักษณะที่ (3) แต่การคำนวณจะง่ายขึ้น เนื่องจาก t = b กล่าวคือสามารถคำนวณผลบวกกำลังสองที่ปรับปรุงแล้วของบล็อคได้โดยตรง

ตัวอย่าง เป็นการทดลองเปรียบเทียบข้าวโพด 13 สายพันธุ์ เนื่องจากไม่มีจำนวนเรพปริเคทสำหรับ 13 วิธีการ จึงเลือกให้แต่ละวิธีมี 4 ซ้ำในบล็อคขนาด 4 หน่วยทดลอง ได้ผลผลิตเป็นปอนด์ต่อแปลง ดังนี้

Block									Block totals
1	(3)	25.3	(6)	19.9	(9)	29.0	(11)	24.6	98.8
2	(3)	23.0	(4)	19.8	(8)	33.3	(12)	22.7	98.8
3	(10)	16.2	(11)	19.3	(12)	31.7	(13)	26.6	93.8
4	(2)	27.3	(5)	27.0	(8)	35.6	(11)	17.4	107.3
5	(7)	23.4	(8)	30.5	(9)	30.8	(10)	32.4	**117.1**
6	(4)	30.6	(5)	32.4	(6)	27.2	(10)	32.8	**123.0**
7	(1)	34.7	(5)	31.1	(9)	25.7	(12)	30.5	**122.0**
8	(3)	34.4	(5)	32.4	(7)	33.3	(13)	36.9	**137.0**
9	(1)	38.2	(2)	32.9	(3)	37.3	(10)	31.3	**139.7**

10	(2)	28.7	(4)	30.7	(9)	26.9	(13)	35.3	121.6
11	(1)	36.6	(4)	31.1	(7)	31.1	(11)	28.4	127.2
12	(1)	31.8	(6)	33.7	(8)	27.8	(13)	41.1	134.4
13	(2)	30.3	(6)	31.5	(7)	39.3	(12)	26.7	127.8
									1548.5

$t = b = 13,\ r = k = 4$

NO.	T	B_t	W	T + M W
1	141.3	523.3	-362.4	136.7
2	119.2	496.4	-238.5	116.2
3	120.0	474.3	33.9	120.4
4	112.2	470.6	8.1	112.3
5	122.9	489.3	-120.0	121.4
6	112.3	484.0	-151.8	110.4
7	127.1	509.1	-319.8	123.0
8	127.2	457.6	299.1	131.0
9	112.4	459.5	143.1	114.2
10	112.7	473.6	-23.4	112.4
11	89.7	427.1	327.6	93.9
12	111.6	442.4	341.1	115.9
13	139.9	486.8	63.0	140.7
	1548.5	6194.0	0	1548.5

1. หายอดรวมของบล็อค (B) ยอดรวมวิธีการ (T) และแต่วิธีการ หา B_t คือยอดรวมของบล็อคที่มีวิธีการ t ปรากฏอยู่ พึงสังเกตว่า ยอดรวมของคอลัมน์ B_t ต้องเท่ากับ k เท่าของยอดรวมทั้งหมด (KG)
2. หาค่า W สำหรับแต่ละวิธีการ

$$W = (t - k)T - (t - 1)B_t + (k - 1)G$$
$$= 9T - 12B_t + 3G$$

$(\Sigma W_i = 0)$

3.

		df.	SS.	MS.	
Treatments(unadj.)	(t-1)	12	542.67		
Blocks (adj.)	(b-1)	12	475.27	39.61	E_b
Intra-block error	(tr-2t + 1)	27	538.21	19.93	E_e
total	(tr - 1)	51	1556.15		

$$SS(\text{blocks})\text{adj.} = \Sigma\ W^2/tr(t-k)(k-1)$$

$$= (\ 362.4^2 + 238.5^2 + \ldots + 63.0^2)/(4)(13)(9)(3)(= 1404)$$

$$= 475.27$$

4.

$$\mu = \frac{E_b - E_e}{t(k-1)E_b} = \frac{19.68}{(13)(3)(39.61)} = 0.0127$$

5. Effective error mean square per unit

$$= E_e[1 + (t - k)M] = 19.93[1 + (9)(0.0127) = 22.2$$

ลักษณะที่ (5) งานทดลองขนาดเล็ก

เป็นงานทดลองที่จะให้จำนวน df ของบล็อค และความคลาดเคลื่อนภายในบล็อคน้อยมาก จึงต้องปรับปรุงการคำนวณเล็กน้อย ซึ่งจะใช้ตัวอย่างเดิม สมมุติว่ามีลักษณะที่ (5)

(1) หายอดรวมของบล็อค (B) วิธีการ (T) และหา B_t สำหรับทุกวิธีการ

(2) แต่ละวิธีการ หาค่า t′ = adjusted treatment means

$$t' = m + \frac{(t-1)}{tr(k-1)}\ Q$$

$$m + \frac{12}{(13)(4)(3)}\ Q = m + 0.0769\ Q$$

m = grand mean = G/N = 1548.5/52 = 29.78

$Q = kT - B_t = 4T - B_t$

และ $\Sigma\ Q = 0$

$$SS(\text{Treatments})\ \text{adj.} = \frac{t-1}{rtk(k-1)}\ \Sigma\ Q^2$$

$$= \frac{12}{(4)(13)(4)(3)}\ (41.9^2 + 19.6^2 + \ldots + 72.8^2\ ) = 328.55$$

		df.	ss	MS	F
Blocks (unadj.)	(b-1)	12	689.38		
Treatments (adj.)	(t-1)	12	328.55	21.38	1.37
Intra-block error	(tr-t-b-1)	27	538.22	19.93	E_e
total	(tr-1)	51	1556.15		

แผนงานทดลองแบบบล็อคลูกโซ่ (Chain Block Designs)

Youden และ Conner ได้สร้างแบบทดลองขึ้นเพื่อใช้กับงานทดลองที่มีข้อจำกัด คือ

(1) ขนาดของบล็อคถูกจำกัด ในขณะเดียวกัน จำนวนวิธีการที่ต้องการทดสอบมากกว่าขนาดบล็อค

(2) การเปรียบเทียบภายในบล็อคมีประสิทธิภาพสูงมาก จึงไม่มีความจำเป็นต้องใช้หลายซ้ำ เพียง 1 หรือ 2 ซ้ำก็เพียงพอแล้ว

แผนงานทดลองแบบนี้นิยมใช้ในการทดลองทางแพทย์ เป็นแผนงานทดลองที่ต่างกับแบบอื่น คือมีวิธีการจำนวนหนึ่งได้ 2 เรพปริเคท ในขณะที่วิธีการอีกจำนวนหนึ่งได้เพียง 1 เรพปริเคท จึงเหมาะกับสถานการณ์ที่ไม่อาจให้มีหลายเรพปริเคทได้ แผนผังข้างล่างเป็นลักษณะหนึ่งของแผนงานทดลองแบบบล็อคลูกโซ่ เมื่อมีวิธีการทั้งหมด 17 วิธีการ จัดใส่ในบล็อคขนาด 6 หน่วยทดลองและ 5 หน่วยทดลอง

Block

1	2	3	4	5
A_1	C_2	E_3	G_4	I_5
B_1	D_2	F_3	H_4	J_5
C_1	E_2	G_3	I_4	A_5
D_1	F_2	H_3	J_4	B_5
k_1	l_2	m_3	n_4	o_5
p_1	q_2			

(1)

Block

1	2	3
A_1	D_2	G_3
B_1	E_2	H_3
C_1	F_2	I_3
D_1	G_2	A_3
E_1	H_2	B_3
F_1	I_2	C_3
j_1	k_2	l_3

ตัวอักษรหมายถึงวิธีการต่าง ๆ อักษรตัวใหญ่หมายถึงวิธีการที่มี 2 ซ้ำ อักษรตัวเล็กหมายถึงวิธีการที่มีเพียง 1 ซ้ำ ตัวเลขที่กำกับอยู่หมายถึงบล็อคที่วิธีการนั้น ๆ อยู่

จากแผนผังที่ (1) จะเห็นว่าวิธีการ C และ D ปรากฏในบล็อคที่ (1) และ (2) จึงทำหน้าที่เป็น "ตัวเชื่อม" ระหว่างบล็อคที่ (1) และ (2) ต่อมา วิธีการ E และ F ปรากฏทั้งในบล็อคที่ (2) และ (3) จึงทำหน้าที่เป็น "ตัวเชื่อม" ของ 2 บล็อคนี้ ในทำนองเดียวกัน วิธีการ G และ H ทำหน้าที่เป็นตัวเชื่อมของบล็อค (3) กับ (4) เช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จนในที่สุด วิธีการ A และ B ทำหน้าที่เป็นตัวเชื่อมของบล็อคที่ (5) กับ (1) เป็นอันครบวงจร จะเห็นว่าแผนงานทดลองนี้ต่างกับแผนงานทดลองอื่น ๆ ที่ลักษณะ "ตัวเชื่อม" ระหว่างบล็อค ในแต่ละบล็อคจะประกอบด้วยวิธีการกลุ่มหนึ่งซึ่งทำหน้าที่เป็น "ตัวเชื่อม" ระหว่างบล็อคที่อยู่ใกล้เคียง จึงเรียกวิธีการกลุ่มนี้ว่า "กลุ่มเบสิค" (basic groups) ขนาดของกลุ่มเบสิคต้องไม่น้อยกว่า 2 วิธีการดังตัวอย่างในแผนผังที่ (1) และมีมากกว่า 2 วิธีการก็ได้ เช่นในตัวอย่างในแผนผังที่ (2) กลุ่มเบสิค ประกอบ

ด้วย 3 วิธีการ อย่างไรก็ดี จำนวนวิธีการในกลุ่มเบสิคต้องเท่ากันทุกบล็อคในแผนงานทดลองเดียวกัน ในการสร้างแผนงานทดลองแบบนี้ ต้องพิจารณาก่อนว่า จากจำนวนวิธีการทั้งหมดที่ต้องการเปรียบเทียบ มีวิธีการใดบ้างที่ต้องการให้มี 2 ซ้ำ เพื่อจะได้ให้วิธีการในกลุ่มเบสิค มีจำนวนมากที่สุด เช่นในแผนผังที่ (2) ต้องการเปรียบเทียบ 12 วิธีการ และต้องการให้ 9 วิธีการมี 2 ซ้ำ และ 3 วิธีการมีเพียงซ้ำเดียว ถ้าจะใช้บล็อคขนาด 7 วิธีการจะต้องใช้ 3 บล็อค และเพื่อให้วิธีการมีการซ้ำตามที่ต้องการ กลุ่มเบสิคจะมีได้อย่างมากคือ 3 วิธีการ เพราะว่าในแต่ละบล็อคจะมีกลุ่มเบสิค 2 กลุ่ม เพื่อทำหน้าที่เชื่อมกับบล็อคที่อยู่ข้างเคียง 2 ด้าน

สำหรับการวิเคราะห์ ควรศึกษาเพิ่มเติมจากหนังสืออ้างอิง

จัตุรัสยูเด็น (Youden Squares)

เป็นลักษณะของบล็อคไม่สมบูรณ์และจัตุรัสลาตินรวมกัน Youden เป็นผู้สร้างในปี 1940 เป็นแผนงานที่ลดความผันแปร 2 ทิศทาง คือบล็อค และ คอลัมน์ ตัวอย่าง มีดังนี้

Block	treatments			
(1)	1	2	3	$t = b = 4$
(2)	2	3	4	$r = k = 3$
(3)	3	4	1	$\lambda = 2$
(4)	4	1	2	

จะเห็นว่าเป็นส่วนหนึ่งของจัตุรัสลาติน ขนาด 4 × 4 ข้างล่างนี้ ลักษณะที่เกี่ยวข้องนี้จะเป็นจริงสำหรับจัตุรัสยูเด็นที่มี t=b และ k=r ข้อสังเกตคือ แม้ว่าจัตุรัสยูเด็นจะมาจากจัตุรัสลาตินที่มีจำนวนคอลัมน์หายไปตั้งแต่ 1 คอลัมน์ขึ้นไปก็จริง แต่ในทางกลับกัน จัตุรัสลาตินที่มีคอลัมน์หายไปตั้งแต่ 1 คอลัมน์ขึ้นไป อาจไม่มีลักษณะเป็นจัตุรัสยูเด็นเสมอไป

1	2	3	4
2	3	4	1
3	4	1	2
4	1	2	3

จัตุรัสลาตินขนาด 4 × 4

การสร้างจัตุรัสยูเด็น

วิธีสร้างที่ง่ายที่สุด คือการสร้างจัตุรัสลาตินโดยการเลื่อนตัวเลขแต่ละแถวไปทางขวามือ 1 ตำแหน่ง และเลื่อนตัวอื่น ๆ ตามไป เรียกว่า cyclic Latin squares เมื่อได้จัตุรัสลาตินตามต้องการแล้ว จะสร้างจัตุรัสยูเด็นได้โดยการตัดคอลัมน์ใดก็ได้ออกไป 1 คอลัมน์ สำหรับจัตุรัสที่มีจำนวนวิธีการเป็น 4, 5, 6, 8, 9 และ 10 จะสร้างจัตุรัสยูเด็นได้เพียงแบบเดียว สำหรับจัตุรัสที่มี 7 วิธีการ จะสร้างจัตุรัสยูเด็นได้ทั้งหมดถึง 3 แบบ โดยวิธีต่าง ๆ ดังนี้

1. โดยการตัดคอลัมน์สุดท้ายออก จะได้จัตุรัสยูเด็นสำหรับ 7 วิธีการในบล็อคขนาด 6 วิธีการ โดยมี $t = b = 7,\ k = r = 6,\ \lambda = 5$

2. โดยการเลือกคอลัมน์ที่ติดกันมาคู่หนึ่ง และอีกคอลัมน์หนึ่งซึ่งอยู่ห่างไป 1 ลำดับ เช่นสมมุติเลือกคอลัมน์ที่ (2) และ (3) คอลัมน์ถัดไป 1 ลำดับคือคอลัมน์ที่ (5) จะได้แผนผังจัตุรัสดังนี้

1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	1
3	4	5	6	7	1	2
4	5	6	7	1	2	3
5	6	7	1	2	3	4
6	7	1	2	3	4	5
'7	1	2	3	4	5	6

7×7 Latin square

2	3	5
3	4	6
4	5	7
5	6	1
6	7	2
7	1	3
1	2	4

$k = r = 3$

$t = b = 7$

$\lambda = 1$

ส่วนที่เหลืออีก 4 คอลัมน์ จากจัตุรัสลาติน จะกลายเป็นจัตุรัสยูเด็นแบบที่ (3) สำหรับ 7 วิธีการ คือ จัตุรัสยูเด็นที่มี $t = b = 7,\ k = r = 4,\ \lambda = 2$

สำหรับรายละเอียดเพิ่มเติม ควรศึกษาจากหนังสืออ้างอิง