บทที่ 6
การทดลองแบบแฟคทอเรียล
(FACTORIAL EXPERIMENTS)

แฟคเตอร์ คือชนิดของวิธีการ แต่ละแฟคเตอร์จะมีหลายวิธีการหรืออย่างน้อย 2 วิธีการขึ้นไปเช่นถ้าอาหารเป็นแฟคเตอร์ การทดลองนั้นจะประกอบด้วยสูตรอาหารตั้งแต่ 2 สูตรขึ้นไป ถ้าอุณหภูมิสำหรับอบขนมเป็นแฟคเตอร์ การทดลองนั้นจะต้องใช้อุณหภูมิหลาย ๆ ระดับอบขนม การทดลองแบบแฟคทอเรียลจะต้องมีแฟคเตอร์อย่างน้อยที่สุด 2 แฟคเตอร์ขึ้นไป เช่นการทดลองปลูกข้าวหลาย ๆ พันธุ์ และในขณะเดียวกันทดลองปุ๋ยหลาย ๆ ชนิด แทนที่จะทำการทดลองแยกต่างหากเป็น 2 การทดลอง เอามารวมกันเป็นการทดลองเดียวกันเพราะเป็นเรื่องเกี่ยวกับข้าวเหมือนกัน วิธีการจะอยู่ในรูปส่วนผสมของระดับต่าง ๆ ของ 2 แฟคเตอร์ เช่นนี้จะมีประโยชน์ที่สามารถทดสอบความแตกต่างของพันธุ์ข้าว และปุ๋ยได้พร้อม ๆ กันในการทดลองเดียวกัน และยังเพิ่มประโยชน์อีกข้อหนึ่งด้วย คือสามารถทดสอบว่า พันธุ์ข้าวและชนิดของปุ๋ยมีอิทธิพลร่วมกันหรือไม่ ถ้ามีพันธุ์ข้าว 5 พันธุ์ และ ปุ๋ย 3 ชนิด รวมกันมีทั้งหมด (5) (3) = 15 วิธีการ เรียกว่าการทดลองแบบ 5 × 3 แฟคทอเรียล สัญญลักษณ์ที่ใช้ จะใช้อักษรตัวใหญ่แทนแฟคเตอร์และอักษรตัวเล็กแทนระดับของแฟคเตอร์ การทดลองแบบแฟคทอเรียลขนาดที่เล็กที่สุดคือขนาด 2 × 2 แฟคทอเรียล ซึ่งมีวิธีการการเขียนส่วนผสมของกรรมวิธี ดังนี้

	Level	Factor A					
		a_1	a_2	a_1	a_2	a_1	a_2
Factor	b_1	a_1b_1	a_2b_1	(1)	a	00	10
B	b_2	a_1b_2	a_2b_2	b	ab	01	11

ตารางแสดง ผลหลัก ผลเดี่ยว และ ผลร่วม

Factor A / Factor B	level	a_1	a_2	Mean	a_2-a_1 = Simple effects A
	b_1	30	32	31	2
(1)	b_2	36	44	40	8
	Mean	33	38	35.5	5 = Main effect A
Simple effests B	b_2-b_1	6	12		9 = Main effect B

	level	a_1	a_2	Mean	a_2-a_1
	b_1	30	32	31	2
(2)	b_2	36	26	31	-10
	Mean	33	29	31	-4
	b_2-b_1	6	-6	0	

Level		a_1	a_2	Mean	a_2-a_1
	b_1	30	32	31	2
(3)	b_2	36	38	37	2
	Mean	33	3.5	34	2
	b_2-b_1	6	6	6	

อิทธิพล 3 อย่างที่ควรกล่าวถึงคือ

ผลเดี่ยว (Simple Effect) คือผลต่างของระดับของแฟคเตอร์หนึ่ง ณ ระดับคงที่ของอีกแฟคเตอร์หนึ่ง ดังนั้น สำหรับการทดลองที่มี 2 × 2 แฟคทอเรียล จะมีผลเดี่ยวทั้งหมด 4 อัน คือ (ดูจากตารางที่ (3) ประกอบ)

1. ผลเดี่ยวของ A ที่ระดับ b_1 คือ $(a_2b_1 - a_1b_1) = 32 - 30 = 2$
2. ผลเดี่ยวของ A ที่ระดับ b_2 คือ $(a_2b_2 - a_1b_2) = 38 - 36 = 2$
3. ผลเดี่ยวของ B ที่ระดับ a_1 คือ $(a_1b_2 - a_1b_1) = 36 - 30 = 6$
4. ผลเดี่ยวของ B ที่ระดับ a_2 คือ $(a_2b_2 - a_2b_1) = 38 - 32 = 6$

ผลหลัก (Main Effect) คือ ค่าเฉลี่ยของผลเดี่ยว ดังนั้น

ผลหลักของ $A = 1/2\ (a_2b_2 - a_1b_2) + (a_2b_1 - a_1b_1) = (2 + 2)/2 = 2$

ผลหลักของ $B = 1/2\ (a_2b_2 - a_2b_1) + (a_1b_2 - a_1b_1) = (6 + 6)/2 = 6$

ผลร่วม (Interaction) คือผลต่างของผลเดี่ยว

ถ้าคิดจากผลต่างของผลเดี่ยวของแฟคเตอร์ A

$AB = 1/2\ (a_2b_2 - a_1b_2) - (a_2b_1 - a_1b_1) = (2 - 2)/2 = 0$

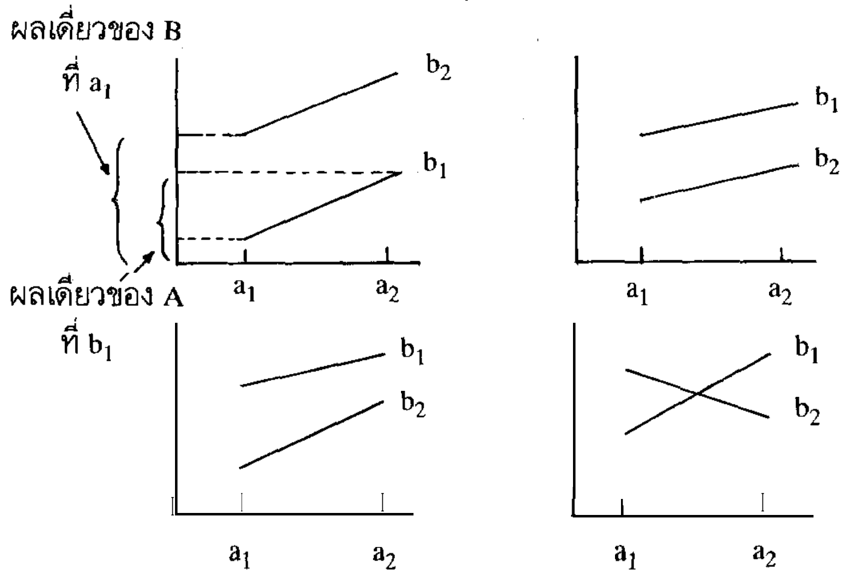
ถ้าคิดจากผลต่างของผลเดี่ยวของแฟคเตอร์ B

$AB = 1/2\ (a_1b_2 - a_1b_1) - (a_2b_2 - a_2b_1) = (6 - 6)/2 = 0$

ทั้ง 2 วิธีต้องให้ค่าเดียวกัน

ลองพิจารณาจากข้อมูลสมมุติในตาราง จะเห็นว่า ในตารางที่ (1) AB = 3
ในตารางที่ (2) : AB = −6
และในตารางที่ (3) : AB = 0
ดังนั้นบางครั้งอิทธิพลร่วมกันอาจเป็นแบบบวก หรือลบก็ได้ ส่วนในกรณีที่ AB = 0 แสดงว่าแฟคเตอร์ A และ B ไม่มีผลร่วมกัน หรือเป็นอิสระกันนั่นเอง แต่การที่คำนวณค่า AB ที่ต่างไปจากศูนย์ จะสรุปทันที่ว่า A และ B มีผลร่วมกันยังไม่ได้ จะต้องหาผลบวกกำลังสอง ของ AB และทดสอบด้วยค่าเอฟจากตารางวิเคราะห์ความแปรปรวน

รูปแสดง ผลร่วม



จากรูปจะเห็นว่าถ้าผลเดี่ยวของแฟคเตอร์หนึ่ง ไม่คงที่ ณ ระดับต่าง ๆ ของอีกแฟคเตอร์หนึ่ง จะเกิดอิทธิพลร่วมกัน ระหว่างแฟคเตอร์ทั้งสอง และเส้นผลตอบสนองจะมีลักษณะไม่ขนานกัน

ตัวอย่าง

จำนวนวิตามินซีในใบผักคะน้า

ขนาดของใบต่อตัวอย่าง	ไม่แช่ด่างทับทิม (b_1) 0.25 gm. (a_1)	ไม่แช่ด่างทับทิม (b_1) 1.00 gm. (a_2)	แช่ด่างทับทิม (b_2) 0.25 gm. (a_1)	แช่ด่างทับทิม (b_2) 1.00 gm. (a_2)	Total	
เรพปริเคท 1	39.5	38.6	27.2	24.6	129.9	
เรพปริเคท 2	43.1	39.5	23.2	24.2	130.0	
เรพปริเคท 3	45.2	33.0	24.8	22.2	125.2	
Total	127.8 (1)	111.1 a	75.2 b	71.0 ab	Factorial effect ΣC_iT_i	ss $\frac{(\Sigma C_iT_i)^2}{r \Sigma c_i^2}$
ขนาดใบผักตัวอย่าง	-1	1	-1	1	-20.9	36.40
ด่างทับทิม	-1	-1	1	1	-92.7	716.11
ผลร่วม	1	-1	-1	1	12.5	13.02
						765.53

ที่มา	df.	ss	MS	F
เรฟปริเคท	2	3.76		
วิธีการ	(3)	(765.53)		
ขนาดตัวอย่าง (A)	1	36.40	36.40	4.45
ด่างทับทิม (B)	1	716.11	716.11	87.54**
ผลร่วม (AB)	1	13.02	13.02	1.59
ความคลาดเคลื่อน	6	49.08	8.18	

สรุปว่าไม่มีอิทธิพลร่วมกันระหว่างขนาดใบผักตัวอย่างและการใช้ด่างทับทิม จำนวนวิตามินซีจากใบผักทั้ง 2 ขนาดไม่ต่างกัน แต่จำนวนวิตามินซีที่ตรวจพบจากใบผักที่แช่ด่างและไม่แช่ด่างแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ เมื่อพิจารณาจากข้อมูลจะเห็นว่าจำนวนวิตามินจากใบผักที่ไม่แช่ด่างทับทิมมีจำนวนสูงกว่าจากใบผักที่แช่ด่าง ทั้งนี้เป็นเพราะด่างทับทิมช่วยให้การตรวจค่าวิเคราะห์ชัดเจนขึ้น

ตัวอย่างที่ 2

น้ำหนักที่เพิ่มขึ้นของหมูที่เลี้ยงด้วยอาหารที่ใส่แอนตี้ไบโอติค 0 และ 40 มิลลิกรัม และให้วิตามิน บี หนึ่งสอง จำนวน 0 และ 5 มิลลิกรัม

แอนตี้ไบโอติค	**O (b_1)**		**40 mg. (b_2)**			
B_{12}	**O (a_1)**	**5mg. (a_2)**	**0 (a_1)**	**5mg. (a_2)**		
	1.30	1.26	1.05	1.52		
	1.19	1.21	1.00	1.56		
	1.08	1.19	1.05	1.55		
Total	3.57	3.66	3.10	4.63	Factorial effect	SS
บี$_{12}$ (A)	- 1	1	- 1	1	1.62	.2187
แอนตี้ไบโอติค (B)	- 1	- 1	1	1	0.50	.0208
ผลร่วม (AB)	1	- 1	- 1	1	1.44	.1728

ที่มา	**df.**	**SS**	M S	F
ระหว่างวิธีการ	(3)	(0.4123)		
แอนตี้ไบโอติค (B)	1	0.0208	0.0208	5.68'
บี$_{12}$ (A)	1	0.2187	0.2187	59.75**
ผลร่วม (AB)	1	0.1728	0.1728	47.21**
ความคลาดเคลื่อน	8	0.0293	0.00366	

ค่าเฉลี่ยของวิธีการ

แอนตี้ไบโอติค	0		40 mg.	
บี$_{12}$	0	5 mg.	0	5 mg.
ค่าเฉลี่ย	1.19	1.22	1.03	1.54

ผลการทดสอบปรากฏว่าอิทธิพลร่วมมีนัยสำคัญ แสดงว่าอิทธิพลของแอนตี้ไบโอติค และวิตามินบี$_{12}$ ไม่เป็นอิสระกัน เมื่อตรวจดูจากผลรวมของวิธีการ จะเห็นว่า น้ำหนักหมูที่ให้

อาหารเสริมด้วยวิตามินบี$_{12}$ แต่ไม่ให้แอนตี้ไบโอติคจะมีน้ำหนักเพิ่มขึ้นไม่ต่างกันมาก (3.57 และ 3.66) ทั้งนี้เป็นเพราะสารบางอย่างที่ลำไส้หมูได้ทำลายอิทธิพลของวิตามินบี$_{12}$ แต่ถ้าให้วิตามินควบคู่กับให้แอนตี้ไบโอติค กลับทำให้น้ำหนักหมูเพิ่มขึ้นมากกว่าไม่ให้วิตามิน (แต่ให้แอนตี้ไบโอติค) ทั้งนี้เป็นเพราะแอนตี้ไบโอติคลดอิทธิพลของสารที่ทำลายวิตามินบีที่อยู่ในลำไส้หมู ในกรณีที่แฟคเตอร์ทั้ง 2 มีอิทธิพลร่วมกันเช่นนี้ ไม่ควรอธิบายผลการทดสอบของอิทธิพลหลัก เนื่องจากอิทธิพลทั้ง 2 ไม่เป็นอิสระกัน

ตัวอย่างการทดลองที่มี 3 แฟคเตอร์ (2 × 3 × 4)

เป็นการทดลองเลี้ยงหมูด้วยอาหารเสริม 3 อย่าง ในการทดลองแบบบล็อคสมบูรณ์ที่มี 2 บล็อค ข้อมูลคือน้ำหนักที่เพิ่มขึ้นภายหลังให้อาหารเสริมดังกล่าวระยะเวลาหนึ่ง

Lysine (L)	Methionine (M)	Protein (P)	Replication 1	(Blocks) 2	Treatment Total
0	0	12	1.11	0.97	2.08
		14	1.52	1.45	2.997
	0.025	12	1.09	0.99	2.08
		14	1.27	1.22	2.49
	0.050	12	0.85	1.21	2.06
		14	1.67	1.24	2.91
0.05	0	12	1.30	1.00	2.30
		14	1.55	1.53	3.08
	0.025	12	1.03	1.21	2.24
		14	1.24	1.34	2.58
	0.050	12	1.12	0.96	2.08
		14	1.76	1.27	3.03
0.10	0	12	1.12	1.13	2.35
		14	1.38	1.08	2.46
	0.025	12	1.34	1.41	2.75
		14	1.40	1.21	2.61
	0.050	12	1.34	1.19	2.53
		14	1.46	1.39	2.85

Lysine, L (L)	Methionine (M)	Protien (P)	Replications 1	2	Treatment Total
0.15	0	12	1.19	1.03	2.22
		14	0.80	1.29	2.09
	0.025	12	1.36	1.16	2.52
		14	I.42	1.39	2.81
	0.050	12	1.46	1.03	2.4')
			1.62	1.27	2.89
Total			31.50	28.97	ho.47

1. c = $(60.47)^2/48$ = 76.1796 (1 df)
2. SS (Total) = $(1.11^2 + 0.97^2 + \ldots + 1.62^2 + 1.27')$ − C = 2.0409 (47 df)
3. SS (Treatments) = $(2.08' + 2.97^2 + \ldots + 2.89^2)/2$ − C = 1.2756 (23 df)
4. SS (Replications) = $(31.50^2 + 28.97^2)/24$ − C = 0.1334 (1 df)
5. SS (Error) = 2.0409 − (I.2756 + 0.1334) = 0.6319 (23 df)

L × M

(M) Methionine	Lysine (L) 0	.05	.10	.15	Total
0	5.05	5.38	4.81	4.31	19.55
0.025	4.57	4.82	5.36	5.33	20.08
0.050	4.97	5.11	5.38	5.38	20.84
Total	14.59	IS.31	15.55	15.02,	60.47

(5.05 = 2.08 + 2.97)... etc.

6. SS $(\text{Cells})_{LM}$ = $(5.05^2) + \ldots + 5.38^2)/4$ − c = 0.3406 (11 df)
7. SS (lysine) = $(14.59^2 + \ldots + 15.02^2)/12$ − c = 0.0427 (3 df)
8. SS (Methionine) = $(19.55^2 + 20.08^2 + 20.84^2)/16$ − C = 0.0427 (2 df)
9. SS (L x M) = SS $(\text{cells})_{LM}$ − SS (L) − SS (M)

= 0.3496 − (0.0427 + 0.0526) = .2543 (6 df)

M × P

Mafhionine	Protien		Total
	12	14	
0	x.05	10.60	19.55
0.025	9.59	10.4')	20.08
0.050	9.16	11.68	20.84
total	27.70	32.17	60.47

10. 8.95 = 2.08 + 2.30 + 2.35 + 2.22. etc.

I I SS (Cells),, = $(X.052 + ,,, + 11.68^2)/8 - c$ = 0.6702 (5 df)

12. SS (Protien) = $(27.70^2 + 32.77^2)/24 \quad C$ = 0.5355 (1 df)

13. SS (Methioninc) = 0.0427 (จากข้อ 8) (2 df)

14. SS (M X P) = SS $(Cells)_{MP}$ SS (P) - SS (M)

= 0.6702 - (0.5355 + 0.0526) = 0.0821 (2 df)

L x P

Protien	Lysine				Total
	0	0.05	0.10	0. 15	
12	6.22	6.62	7.63	7.23	21.10
14	8.37	X.69	7.92	7.79	32.77
Total	14.59	15.31	15.55	15.02	60.47

15. 6.22 = 2.08 + 2.08 + 2.06 ,... etc.

16. SS $(Cells)_{LP}$ = $(6.22^2 + \_\_\_ + 7.79^2)/6 - C$ = 0.8181 (7 df)

17. SS (L x P) = $SS(Cells)_{LP}$ - SS (L) - SS (P)

= 0.8181 - (0.5355 + 0.0427) = 0.2399 (3 df)

18. SS (LMP) = I.2756 (0.0427 + 0.0526 + 0.5355 + 0.2543

+ 0.2821 + 0.2399) = 0.0685 (6 df)

sov.	df.	ss	MS
Replications	1	0.1334	
Lysine, L (l = 4)	3	0.0427	0.0142
Methionine, M (m = 3)	2	0.0526	0.0263
Protien, P (p = 2)	1	0.5355	0.5355**
L M	6	0.2543	0.0424
L P	3	0.2399	0.0800
M P	2	0.0821	0.0410
LMP	6	0.0685	0.0114
Error	23	0.6319	0.0275

แบบจำลองและค่าคาดหมายของกำลังสองเฉลี่ย

เมื่อมี 2 แฟคเตอร์ แบบจำลองของค่าสังเกตที่ k ซึ่งรับวิธีการ A ที่ระดับ i และวิธีการ B ที่ระดับ j คือ

$$X_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \epsilon_{ijk}$$

μ = ค่าเฉลี่ยรวบยอด $\quad i = 1,2,\ldots,a$

α_i = อิทธิพลของแฟคเตอร์ A ที่ระดับ i $\quad j = 1,2,\ldots,b$

β_j = อิทธิพลของแฟคเตอร์ B ที่ระดับ j $\quad k = 1,2,\ldots,r$

ϵ_{ij} = อิทธิพลอื่น ๆ

$(\alpha\beta)_{ij}$ = อิทธิพลร่วมกันของระดับที่ i ของ A และระดับที่ j ของ B

ถ้าเป็นการวางแผนแบบแฟคทอเรียลในบล็อคสมบูรณ์และจัตุรัสลาติน ต้องเพิ่มพารามิเตอร์อีก 1 ตัว และ 2 ตัวตามลำดับ ดังนี้

$$X_{ijk} = \mu + \rho_i + \alpha_j + \beta_k + (\alpha\beta)_{jk} + \epsilon_{ijk} \qquad \text{(RCB)}$$

$i = 1,2,\ldots,r \quad ; \quad j = 1,2,\ldots,a \quad ; \quad k = 1,2,\ldots,b$

และ

$$X_{ij(kl)} = \mu + R_i + C_j + \alpha_{(k)} + \beta_{(l)} + (\alpha\beta)_{(kl)} + \epsilon_{ij(kl)}$$

$i = 1,2,\ldots,r; \quad j = 1,2,\ldots,r; \ k = 1,2,\ldots,a; \quad l = 1,2,\ldots,b; \ ab = r$

4

ข้อสมมุติ กรณี 2 แฟคเตอร์ในการวางแผนแบบสุ่มสมบูรณ์

แบบจำลองที่ 1 (แบบคงที่)

$$\sum_i \alpha_i = 0 , \quad \sum_j \beta_j = 0 , \quad \sum_i (\alpha\beta)_{ij} = 0 , \quad \sum_j (\alpha\beta)_{ij} = 0$$

$$\epsilon_{ijk} \sim NID\ (\theta, \sigma^2_\epsilon)$$

แบบจำลองที่ 2 (แบบสุ่ม)

$$\alpha_i \sim NID\ (0, \sigma^2_\alpha) , \quad \beta_j \sim NID\ (0, \sigma^2_\beta) , \quad (\alpha\beta)_{ij} \sim NID\ (0, \sigma^2_{\alpha\beta})$$

$$\epsilon_{ijk} \sim NID\ (0, \sigma^2_\epsilon)$$

แบบจำลองที่ 3 (แบบผสม)

เมื่อ A เป็นแบบคงที่ และ B เป็นแบบสุ่ม

$$\sum_i \alpha_i = 0 , \quad \beta_j \sim NID(0, \sigma^2_\beta) , \quad \sum_i (\alpha\beta)_{ij} = 0$$

$\epsilon_{ijk} \sim NID\ (0, \sigma^2_\epsilon)$, พึงสังเกตว่า $\Sigma_j (\alpha\beta) \neq 0$

สมมติฐาน

แบบจำลองที่ 1

Ho : $\alpha_i = 0$; $i = 1,2,...,a$

Ho : $\alpha_i \neq 0$

Ho : $\beta_j = 0$; $j = 1,2,...,b$

Ha : $\beta_j \neq$ Cl

Ha : $(\alpha\beta)_{ij} = \theta$, $i = 1,2 ,..., a$, $j = 1,2 ,..., b$

Ha : $(\alpha\beta)ij \neq 0$

แบบจำลองที่ 2

Ho : $\sigma^2_\alpha = 0$

Ha : $\sigma^2_\alpha \neq 0$

Ho : $\sigma^2_\beta = 0$

Ha : $\sigma^2_\beta \neq 0$

$Ho : \sigma^2_{\alpha\beta} = 0$

$Ha : \sigma^2_{\alpha\beta} \neq 0$

แบบจำลองที่ 3

$Ho : \alpha_i = 0 , \quad i = 1,2,...,a$

$Ha : \alpha_i \neq 0$

$Ha : \sigma^2_\beta = 0$

$Ha : \sigma^2_\beta \neq 0$

$Ho : \sigma^2_{\alpha\beta} = 0,$

$Ha : \sigma^2_{\alpha\beta} \neq 0$

ค่าคาดหมายของกำลังสองเฉลี่ย

Mean Squares	Fixed effects	Random effects	Mixed Model A Fixed, B Random
A	$\sigma^2 + rbK^2_\alpha$	$\sigma^2 + r\sigma^2_{\alpha\beta} + rb\sigma^2_\alpha$	$\sigma^2 + r\sigma^2_{\alpha\beta} + rbK^2_\alpha$
B	$\sigma^2 + raK^2_\beta$	$\sigma^2 + r\sigma^2_{\alpha\beta} + ra\sigma^2_\beta$	$\sigma^2 + ra\sigma^2_\beta$
AB	$\sigma^2 + rK^2_{\alpha\beta}$	$\sigma^2 + r\sigma^2_{\alpha\beta}$	$\sigma^2 + r\sigma^2_{\alpha\beta}$
Error	σ^2	σ^2	σ^2

F-Ratio สำหรับทดสอบสมมติฐาน

Mean Squares	Fixed effects	Random effects	Mixed Model A Fiied, B Random
A	A/E	NAB	A/AB
B	B/E	B/AB	B/E
AB	AB/E	AWE	AB/E
E			

แบบจำลองเมื่อมี 3 แฟคเตอร์ (CRD)

$$X_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk} + \epsilon_{ijkl}$$

$i = 1,2,\ldots,a$

$j = 1,2,\ldots,b$

$k = 1,2,\ldots,c$

$l = 1,2,\ldots,r$

μ = ค่าเฉลี่ยรวบยอด

α_i = อิทธิพลของระดับ i ของแฟคเตอร์ A

β_j = อิทธิพลของระดับ j ของแฟคเตอร์ B

γ_k = อิทธิพลของระดับ k ของแฟคเตอร์ C

$(\alpha\beta)_{ij}$ = อิทธิพลร่วมกันของระดับ i ของแฟคเตอร์ A และระดับ j ของแฟคเตอร์ B

$(\alpha\gamma)_{ik}$ = อิทธิพลร่วมกันของระดับ i ของแฟคเตอร์ A และระดับ k ของแฟคเตอร์ C

$(\beta\gamma)_{jk}$ = อิทธิพลร่วมกันของระดับ j ของ B และระดับ k ของ C

$(\alpha\beta\gamma)_{ijk}$ = อิทธิพลร่วมกันของระดับ i ของ A, ระดับ j ของ B และระดับ k ของ C

ϵ_{ijkl} = อิทธิพลอื่น ๆ

Assumption : (3 - Factor in CRD.)

Model 1

$$\sum_i \alpha_i = \sum_j \beta_j = \sum_k \gamma_k = \sum_i (\alpha\beta)_{ij} = \sum_j (\alpha\beta)_{ij} = \sum_i (\alpha\gamma)_{ik} = \sum_k (\alpha\gamma)_{ik}$$
$$= \sum_j (\beta\gamma)_{jk} = \sum_k (\beta\gamma)_{jk} = \sum_i (\alpha\beta\gamma)_{ijk} = \sum_j (\alpha\beta\gamma)_{ijk} = \sum_k (\alpha\beta\gamma)_{ijk} = 0$$

$$\epsilon_{ijkl} \sim NID\ (0, \sigma^2_\epsilon)$$

Model 2

$$\alpha_i \sim NID\ (0, \sigma^2_\alpha) \quad ; \quad \beta_j \sim NID\ (0, \sigma^2_\beta)\ ,\ \gamma_k \sim NID\ (0, \sigma^2_\gamma)$$

$$(\alpha\beta)_{ij} \sim NID\ (0, \sigma^2_{\alpha\beta})\ ,\ (\alpha\gamma)_{ik} \sim NID\ (0, \sigma^2_{\alpha\gamma}),\ (\beta\gamma)_{jk} \sim NID\ (0, \sigma^2_{\beta\gamma})$$

$$(\alpha\beta\gamma)_{ijk} \sim NID\ (0, \sigma^2_{\alpha\beta\gamma})\ ,\ \epsilon_{ijkl} \sim NID(0, \sigma^2_\epsilon)$$

Model 3 (A Fixed, B and C Random)

$\sum_i \alpha_i = 0, \beta_j \sim NID(0, \sigma^2_\beta), \quad \gamma_k \sim NID(0, \sigma^2_\gamma)$

$\sum_i (\alpha\beta)_{ij} = 0, \quad \sum_i (\alpha\gamma)_{ik} = 0, \quad (\beta\gamma)_{jk} \sim NID(0, \sigma^2_{\beta\gamma})$

$\sum_i (\alpha\beta\gamma)_{ijk} = 0, \quad \epsilon_{ijkl} \sim NID(0, \sigma^2_\epsilon)$

พึงสังเกตว่า

$\sum_j (\alpha\beta)_{ij} \neq 0, \quad \sum_k (\alpha\gamma)_{ik} \neq 0, \quad \sum_j (\alpha\beta\gamma)_{ijk} \neq 0,$

$\sum_k (\alpha\beta\gamma)_{ijk} \neq 0$

ค่าคาดหมายของกำลังสองเฉลี่ย

Mean Squares	**Model 1**	**Model 2**
A	$\sigma^2 + rbcK^2_\alpha$	$\sigma^2 + r\sigma^2_{\alpha\beta\gamma} + rc\sigma^2_{\alpha\beta} + rb\sigma^2_{\alpha\gamma} + rbc\sigma^2_\alpha$
B	$\sigma^2 + racK^2_\beta$	$\sigma^2 + r\sigma^2_{\alpha\beta\gamma} + rc\sigma^2_{\alpha\beta} + ra\sigma^2_{\beta\gamma} + rac\sigma^2_\beta$
C	$\sigma^2 + rabK^2_\gamma$	$\sigma^2 + r\sigma^2_{\alpha\beta\gamma} + rb\sigma^2_{\alpha\gamma} + ra\sigma^2_{\beta\gamma} + rab\sigma^2_\gamma$
AB	$\sigma^2 + rcK^2_{\alpha\beta}$	$\sigma^2 + r\sigma^2_{\alpha\beta\gamma} + rc\sigma^2_{\alpha\beta}$
AC	$\sigma^2 + rbK^2_{\alpha\gamma}$	$\sigma^2 + r\sigma^2_{\alpha\beta\gamma} + rb\sigma^2_{\alpha\gamma}$
BC	$\sigma^2 + raK^2_{\beta\gamma}$	$\sigma^2 + r\sigma^2_{\alpha\beta\gamma} + ra\sigma^2_{\beta\gamma}$
ABC	$\sigma^2 + rK^2_{\alpha\beta\gamma}$	$\sigma^2 + r\sigma^2_{\alpha\beta\gamma}$
Error	σ^2	σ^2

Mean Squares	Model 3 : A Fixed, B,C Random.
A	$\sigma^2 + r\sigma^2_{\alpha\beta\gamma} + rc\sigma^2_{\alpha\beta} + rb\sigma^2_{\alpha\gamma} + rbcK^2_{\alpha}$
B	$\sigma^2 + ra\sigma^2_{\beta\gamma} + rac\sigma^2_{\beta}$
C	$\sigma^2 + ra\sigma^2_{\beta\gamma} + rab\sigma^2_{\gamma}$
AB	$\sigma^2 + r\sigma^2_{\alpha\beta\gamma} + rc\sigma^2_{\alpha\beta}$
AC	$\sigma^2 + r\sigma^2_{\alpha\beta\gamma} + rb\sigma^2_{\alpha\gamma}$
BC	$\sigma^2 + ra\sigma^2_{\beta\gamma}$
ABC	$\sigma^2 + r\sigma^2_{\alpha\beta\gamma}$
Error	σ^2

สมมุติฐาน

Mean Squares	Model 1	Model 2	Model 3 (A Fixed, B,C Random)
A	A/E	ไม่มีค่าทดสอบ	ไม่มีค่าทดสอบ
B	B/E	ไม่มีค่าทดสอบ	B/BC
C	C/E	ไม่มีค่าทดสอบ	C/BC
AB	AB/E	AB/ABC	AB/ABC
AC	AC/E	AC/ABC	AC/ABC
BC	BC/E	BC/ABC	BC/E
ABC	ABC/E	ABC/E	ABC/E
ERROR			

จะเห็นว่า บางค่าในแบบจำลองที่ 2 และ 3 จะไม่มีค่าสถิติสำหรับทดสอบ แต่ถ้าต้องการทดสอบ ต้องใช้วิธีการประมาณ โดยพิจารณาจากค่าคาดหมายของกำลังสองเฉลี่ย เช่น

$$Ho : \sigma^2_\gamma = 0, \quad Ha : \sigma^2_\gamma \neq 0$$

อัตราส่วนของเอฟจะเป็นหนึ่งจากการพิจารณาค่าคาดหมายของกำลังสองเฉลี่ย เมื่อ

$$F' = \{(c) + (ABC)\} \;/\; \{(AC) + (BC)\}$$

F' จะมีการแจกแจงโดยประมาณเอฟ ด้วย ν_1 และ ν_2 ที่ต้องประมาณ ดังนี้

$$\nu_1 = \frac{\{(C) + (ABC)\}^2}{\frac{(C)^2}{f_C} + \frac{(ABC)^2}{f_{ABC}}}$$

$$\nu_2 = \frac{(AC) + (BC)^{\;2}}{\frac{(AC)^2}{f_{AC}} + \frac{(BC)^2}{f_{BC}}}$$

โดยที่ $C = MS(C)$, $ABC = MS(ABC)$ เป็นต้น

และ $f_C = df(C)$, $f_{ABC} = df(ABC)$ เป็นต้น

การทดลองแบบแฟคทอเรียล กรณีที่มีค่าสังเกต 1 ตัวต่อ 1 วิธีการ

(One observation per cell)

ถ้าทำการทดลองแบบแฟคทอเรียลที่มีเพียง 1 ซ้ำ จะได้ค่าสังเกตเพียงค่าเดียวต่อ 1 วิธีการ สมมุติเป็นการทดลองที่มี 2 แฟคเตอร์จะมีตัวแบบสถิติเชิงเส้น ดังนี้

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \epsilon_{ij} \qquad \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, a \\ j = 1, 2, \ldots, b \end{array}$$

สมมุติทั้ง 2 แฟคเตอร์ เป็นแบบกำหนด จะมีตารางวิเคราะห์ดังนี้

ตารางวิเคราะห์ความแปรปรวนสำหรับการจำแนกแบบ 2 ทาง และมีค่าสังเกตเซลล์ละ 1 ตัว

Source of Variation	Degrees of Freedom	Sum of Squares	Mean Square	Experted Mean Square
A	a- 1	$\sum_{i=1}^{a} \frac{Y_{i.}^2}{b} - \frac{Y_{..}^2}{ab}$	MS_A	$\sigma^2 + \frac{b\Sigma\alpha_i^2}{a-1}$
B	b – 1	$\sum_{j=1}^{b} \frac{Y_{.j}^2}{a} - \frac{Y_{..}^2}{ab}$	MS_B	$\sigma^2 + \frac{a.\Sigma\beta_j^2}{(b-1)}$
Residual หรือ AB	(a- 1) (b – 1)	ลบเอา	$MS_{Residual}$	$\sigma^2 + \frac{\Sigma\Sigma(\alpha\beta)_{ij}^2}{((a-1)\ (b-1)}$
Total	ab – 1	$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} Y_{ij} - \frac{Y_{..}^2}{ab}$		

เมื่อพิจารณาช่อง E (MS) จะเห็นว่าไม่มีเทอมใดที่ใช้เป็นค่าประมาณของ σ^2 เพราะอิทธิพลจากผลกระทบของ 2 ปัจจัย คือ $(\alpha\beta)_{ij}$ และ experimental error คือ σ^2 อยู่รวมกัน เราไม่สามารถจะแยก 2 เทอมนี้ออกจากกัน ผลที่ตามมาคือ การไม่มีตัวสถิติสำหรับทดสอบอิทธิพลหลัก นอกเสียจากจะทราบว่าไม่มีอิทธิพลของผลกระทบของ 2 แฟคเตอร์ ในกรณีที่ไม่มีผลกระทบ หรือ $(\alpha\beta)_{ij} = 0$ สำหรับทุกค่า i และ j เราจะได้ตัวแบบใหม่ คือ

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \epsilon_{ij} \qquad \begin{array}{l} i = 1,\dots, a \\ j = 1,\dots, b \end{array}$$

และค่า residual mean square จะเป็นค่าประมาณของ σ^2 และใช้ MS residual สำหรับทดสอบ A และ B

การตรวจสอบนัยสำคัญของอิทธิพลร่วม 2 ปัจจัย

ต้องใช้วิธีของ Tukey (1949) โดยการแบ่ง SS ของ residual ออกเป็น single-degree-of-freedom ของ non additivity (interaction) และอีกส่วนหนึ่งเป็นของ error ซึ่งมี df = (a – 1) (b – 1) – 1

ให้ SS_N = Sum of Squares due to Non additivity

$$SS_N = \frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} Y_{ij}\ Y_{i.}\ Y_{.j} - Y_{..}(SS_A + SS_B + \frac{Y_{..}^2}{ab})}{ab\ SS_A\ SS_B}$$

(1 df)

$$SS_E = SS_{Residual} - SS_N$$

$$df = (a-1(b-1) - 1$$

ตัวอย่าง สิ่งแปลกปลอมในเคมีภัณฑ์ชนิดหนึ่งจะมีมากหรือน้อยขึ้นอยู่กับอิทธิพลของแรงดัน (pressure) และอุณหภูมิ ผลจากการทดลองมีดังนี้

อุณหภูมิ (°F)	ความดัน 25	30	35	40	45	$y_{i.}$
100	5	4	6	3	5	23
125	3	1	4	2	3	13
150	1	1	3	1	2	8
$y_{.j}$	9	6	13	6	10	44 = $y_{..}$

$$SS_A = \sum_{i=1}^{a} \frac{Y_{i.}^2}{b} - \frac{Y_{..}^2}{ab}$$

$$= \frac{23^2 + 13^2 + 8^2}{5} - \frac{44^2}{(3)(5)} = 23.33$$

$$SS_B = \sum_{i=1}^{b} \frac{Y_{.j}^2}{a} - \frac{Y_{..}^2}{ab}$$

$$= \frac{9^2 + 6^2 + 13^2 + 6^2 + 10^2}{3} - \frac{44^2}{(3)(5)} = 11.60$$

$$SS_T = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} Y_{ij}^2 - \frac{Y_{..}^2}{ab}$$

$$= 166 - 129.07 = 36.93$$

$$SS_{Residual} = SS_T - SS_A - SS_B$$

$$= 36.93 - 23.33 - 11.60 = 2.00$$

$$\sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} Y_{ij} Y_{i.} Y_{.j} = (5)(23)(9) + (4)(23)(6) + \ldots + (2)(8)(10) = 7236$$

$$SS_N = \frac{\left[\sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} Y_{ij} Y_{i.} Y_{.j} - Y_{..}\left(SS_A + SS_B + \frac{Y_{..}^2}{ab}\right)\right]^2}{ab\ SS_A\ SS_B}$$

$$= \frac{[7236 - (44)(23.33 + 11.60 + 129.07)]^2}{(3)(5)(23.33)(11.60)}$$

$$= \frac{[20.00]^2}{4059.42} = 0.0985 \quad (df = 1)$$

$$SS_E = SS_{Residual} - SS_N$$

$$= 2.00 - .0985 = 1.9015 \quad (df = 15 - 1)$$

Source of Vaiation	Degrees of Freedom	Sum of Squares	Mean Square	F
A = อุณหภูมิ	2	23.33	11.67	42.97**
B = ความดัน	4	11.60	2.90	10.68*
Non addivity	1	0.0985	0.0985	0.36
Error	7	1.9015	0.2716	
Total	14	36.93		

1. ทดสอบ nonadditivity

$Ho : (\alpha\beta)_{ij} = 0 \qquad i = 1,2,3 \; ; \; j = 1,2,3,4$.

$Ha : (\alpha\beta)_{ij} \neq 0$

$F = 0.0985 / .2716 = 0.36$ ns.

สรุปว่า ข้อมูลนี้ไม่มีหลักฐานว่ามีอิทธิพลร่วมกันระหว่างความดันและอุณหภูมิ

2. ทดสอบอิทธิพลหลัก

ก. $Ho : \alpha_i = 0$, $Ha : \alpha_i \neq 0$, $i = 1,2,3$

$F = 11.67 / .2716 = 42.97^{**}$

สรุปว่า อุณหภูมิ มีอิทธิพลต่อความไม่บริสุทธิ์ (impurity) ในเคมีภัณฑ์

ข. $Ho : \beta_j = 0$, $Ha : \beta_j \neq 0$; $j = 1,2,3,4$

$F = 2.90 / .2716 = 10.68^{*}$

สรุปว่า ความดันมีอิทธิพลต่อความไม่บริสุทธิ์ (impurity) ในเคมีภัณฑ์

ข้อสังเกต

สรุปได้ว่าการทดลองแบบแฟคทอเรียลก็มี 2 แฟคเตอร์ และแต่ละเซลล์มีค่าสังเกตเพียงค่าเดียว ข้อมูลที่ได้จะมีลักษณะคล้ายกับการวางแผนทดลองแบบบล็อคสมบูรณ์มาก แม้แต่ตัวแบบก็เหมือนกัน แต่ในสภาวะการทดลองที่แท้จริงจะต่างกัน คือ ถ้าเป็นการทดลองแบบแฟคทอเรียล จะต้องทำการทดลอง t = ab ในลำดับการทดลองแบบสุ่ม (ramdom order) แต่ถ้าเราให้แฟคเตอร์หนึ่งเป็นบล็อค สมมุติให้ factor B เป็นบล็อค จะมีการสุ่มเฉพาะ a ระดับของ แฟคเตอร์ A **ภายใน**แต่ละบล็อค ส่วน b ระดับของ B ไม่มีการสุ่ม

พลังการทดสอบ ของการทดลองแบบแฟคทอเรียล (2 แฟคเตอร์)

1. ตัวแบบกำหนด

แฟคเตอร์	ϕ^2	ν_1	ν_2
A	$\dfrac{br \sum_{i=1}^{a} \alpha_i^2}{a\sigma^2}$	a - 1	ab (r – 1)
B	$\dfrac{ar \sum_{j=1}^{b} \beta_j^2}{b\sigma^2}$	b - 1	ab (r – 1)
AB	$\dfrac{ar \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} (\alpha\beta)_{ij}^2}{\sigma^2 [(a-1)(b-1)+1]}$	(a- 1) (b – 1)	ab (r – 1)

ตัวอย่าง

a = 3, b = 3, r = 4 และ มี ANOVA ดังนี้

sov.	df.	ss	MS	F
A	2	10,683.72	5,341.86	7.91
B	2	39,118.72	19,558.36	28.97
AB	4	9,613.77	2,403.44	3.56
Error	27	18,230.75	675.21	
Total	35	77,646.96		

ต้องการทราบว่าที่ใช้ 4 ซ้ำ จะเพียงพอสำหรับปฏิเสธความแตกต่างของ A ได้ $\sum_{i=1}^{3} \alpha_i^2$ = 800 ด้วยความน่าจะเป็นที่สูงพอควรหรือไม่

$$\phi^2_{(A)} = \frac{br\sum_{i=1}^{a}\alpha_i^2}{a\sigma^2} = \frac{3\,(4)\,(800)}{3\,(675.21)} = 4.74$$

จาก Chart V, $\alpha = .05$, $\nu_1 = 2$, $\nu_2 = 27$ จะได้ $\beta = .09$ นั่นคือ เมื่อใช้ 4 ซ้ำ ให้ $1 - \beta$ หรือพลังการทดสอบ = .91 หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งว่า เรามีโอกาส 91% ที่จะปฏิเสธ (อย่างถูกต้อง) $H_0 : \alpha_i = 0$ ถ้า A มีความแตกต่างตามขนาดที่ระบุไว้ ($\sum_{i=1}^{3}\alpha_i^2 = 800$)

2. พลังการทดสอบของตัวแบบเชิงสุ่ม และแบบผสม

ยังคงใช้เส้น OC ใน Chart 6 สำหรับ random model และ mixed models ค่า λ , ν_1 ν_2 มีดังนี้

Random effects Model

แฟกเตอร์	λ	ν_1	ν_2
A	$\sqrt{1 + \frac{bn\,\sigma_\alpha^2}{\sigma^2 + r\sigma_{\alpha\beta}^2}}$	a - 1	(a − 1) (b − 1)
B	$\sqrt{1 + \frac{an\,\sigma_\beta^2}{\sigma^2 + r\sigma_{\alpha\beta}^2}}$	b − 1	(a- 1)(b − 1)
AB	$\sqrt{1 + \frac{r\,\sigma_{\alpha\beta}^2}{\sigma^2}}$	(a − 1) (b − 1)	ab (r − 1)

แฟคเตอร์	พารามิเตอร์	ν_1	ν_2	Chart
A (Fixed)	$\phi^2 = \frac{bn \sum_{i=1} \alpha_i^2}{a[\sigma^2 + r\sigma_{\alpha\beta}^2]}$	a - 1	(a 1)(b - 1)	V
B (Random)	$\lambda = 1 + \frac{ar\,\sigma_\beta^2}{\sigma^2}$	b - i	ab (r- 1)	VI
AB	$\lambda = 1 + \frac{r\sigma_{\alpha\beta}^2}{\sigma^2}$	(a- 1)(b- 1)	ab(r- 1)	V1

กฎการหาผลบวกกำลังสอง สำหรับการทดลองแบบแฟคทอเรียล

กฎข้อ 1 ต่อไปจะเขียนเทอมความคลาดเคลื่อน $\epsilon_{ij...m}$ ใน Model เป็น $\epsilon_{(ij...)m}$ ในเมื่อ subscript m แทน replication เช่น ถ้ามี 2 แฟคเตอร์ จาก ϵ_{ijk} จะเป็น $\epsilon_{(ij)k}$

กฎข้อ 2 ในแต่ละ Model จะประกอบด้วย

1. μ = general mean จำนวน 1 เทอม
2. $\epsilon_{(ij...)m}$ = error term จำนวน 1 เทอม
3. Main effects จำนวน $\binom{k}{1} = k$ เทอม
4. 2-factor interaction จำนวน $\binom{k}{2}$ เทอม
5. 3-factor interactions จำนวน $\binom{k}{3}$ เทอม

•
•
•
•

6. k-factor interaction จำนวน 1 เทอม

กฎข้อ 3 จะแบ่ง subscripts ของทุก ๆ เทอมใน model เป็น 3 ประเภท คือ

1. **ตัวเป็น (live-subscripts)** คือตัวที่ปรากฏในแต่ละเทอมแต่ต้อง**ต้องไม่อยู่ในวงเล็บ**
2. **ตัวตาย (dead-subscripts)** คือตัวที่ปรากฏในเทอมนั้นแต่**อยู่ในวงเล็บ**
3. **ไม่ปรากฏ** (absent-subscripts)คือตัวที่ปรากฏใน Model แต่ **ไม่ปรากฏในเทอมนั้น ๆ**

ตัวอย่างเช่น $(\alpha\beta)_{ij}$ ทั้ง i และ j เป็น**ตัวเป็น**, k **ไม่ปรากฏ** $\epsilon_{(ij)k}$: k เป็น**ตัวเป็น** ส่วน i และj เป็น**ตัวตาย**

แต่ละอัน กับ จำนวนระดับลบหนึ่ง ของ live subscript

กฎข้อ 4 จำนวน df ของแต่เทอมใน model ได้จากผลคูณของจำนวนระดับของ dead subscript

เช่น df ของ เทอม $(\alpha\beta)_{ij} = (a-1)(b-1)$

ของ $\epsilon_{(ij)k} = ab(r-1)$

กฎข้อ 5

1. ให้ 1 แทน Correction factor ในเมื่อ

$$1 = \frac{(\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\cdots\sum_{m=1}^{r} Y_{ij\ldots m})^2}{ab\ldots r}$$

2. ทุก ๆ เทอม ให้เขียนยอดรวมค่าสังเกตทั้งหมด ในรูป $\Sigma\Sigma\cdots\Sigma$ แล้วจัดลำดับเครื่องหมาย Σ ใหม่ โดยเอาเครื่องหมายที่ต้องการหา SS ไว้หน้าสุด นั่นคือ

2.1 เขียนผลรวม $= \Sigma_{i=1}^{a}\ \Sigma_{j=1}^{b}\ \Sigma_{k=1}^{c}\ Y_{ijk}$

2.2 ถ้าจะหา SS (b) ต้อง จัดลำดับใหม่ เป็น

$$\sum_{j=1}^{b}(\sum_{i=1}^{a}\sum_{r=1}^{r} Y_{ijrk})$$

2.3 เปลี่ยนจำนวนในวงเล็บให้อยู่ในรูป "dot subscript"

$$\sum_{j=1}^{b}(\sum_{i=1}^{a}\sum_{r=1}^{r} Y_{ijk}) = \sum_{j=1}^{b}(Y_{\cdot j\cdot})$$

2.4 ยกกำลังสองเฉพาะเทอมที่อยู่ในวงเล็บ และหารด้วยผลคูณของระดับของ subscript มีเครื่องหมายจุด และหักด้วย courection factor

$$SS\ (B) = \frac{\sum_{j=1} Y_{\cdot j\cdot}^2}{ar} - \frac{Y_{\cdots}^2}{abr}$$

SS (B) มี df = b-1 นั่นคือจะมีเทอมที่ยกกำลังสองอยู่ b-1 เทอม เทอมแรก $\sum_{i=1}^{b}$ มีอยู่ b เทอม เฉพาะเทอมนี้เรียกว่า un corrected sum of squares ต้องเอา correction factor ซึ่งมี 1 df มาหักออก จึงจะเหลือ b − 1 เทอม เท่ากับ df = b − 1

ดังนั้น ถ้าจะหา SS (AB) ซึ่งมี df = (a-l) (b-l) เมื่อกระจายแล้ว จะได้ ab − a − b + 1 ดังนั้น จะหา SS (AB) ดังนี้

ab	$-a$	$-b$	$+1$	
$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r} Y_{ijk}$	$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r} Y_{ijk}$	$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r} Y_{ijk}$	$\frac{Y_{...}^2}{abr}$	(1)
$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\sum_{k=1}^{r} Y_{ijk})$	$\sum_{i=1}^{a}(\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r} Y_{ijk})$	$\sum_{j=1}^{b}(\sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{r} Y_{ijk})$	$\frac{Y_{...}^2}{abr}$	(2)
$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(Y_{ij.})$	$\sum_{i=1}^{a}(Y_{i..})$	$\sum_{j=1}^{b}(Y_{.j.})$	$\frac{Y_{...}^2}{abr}$	(3)
$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\frac{Y_{ij.}^2}{r}$	$\sum_{i=1}^{a}\frac{Y_{i..}^2}{br}$	$\sum_{j=1}^{b}\frac{Y_{.j.}^2}{ar}$	$\frac{Y_{...}^2}{abr}$	(4)

รวมทุกคอลัมน์ในขั้นที่ (4) โดยพิจารณาเครื่องหมายของแต่ละคอลัมน์ จะได้

$$SS\ (AB) = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\frac{Y_{ij.}^2}{r} - \sum_{i=1}^{a}\frac{Y_{i..}^2}{br} - \sum\frac{Y_{.j.}^2}{ar} + \frac{Y_{...}^2}{abr}$$

$$= SS\ (cell)_{A\times B} \quad SS\ (A) - SS\ (B)$$

กฎการหา Expected Mean Square

กฎข้อที่ 1 อิทธิพลทุกอันจะมี Variancecomponent (แบบสุ่ม) หรือ fixed factor (แบบกำหนด) ที่เกี่ยวข้องด้วยอยู่ 1 เทอม ถ้าอิทธิพลนั้นเป็น interaction ซึ่งมี factor ที่เป็นแบบสุ่มปนอยู่อย่างน้อย 1 จำนวน จะพิจารณาว่า interaction ของอิทธิพลนั้นทั้งหมดเป็นแบบสุ่ม จะใช้อักษรกรีกเป็น subscript ของ Variance component เพื่อแสดงว่าอิทธิพลนั้นเป็นแบบสุ่มเช่นถ้า A (กำหนด) และ B (แบบสุ่ม) variance component ของ B คือ σ^2_β variance component ของ AB คือ $\sigma^2_{\alpha\beta}$ ส่วน fixed effect จะใช้ SS ของ model component ของ factor นั้น ๆ แล้วหารด้วย df. เช่น อิทธิพลของ A คือ $\sum^{a}\alpha_i^2/(a-1)$

กฎข้อ 2 เมื่อจะหา Expected Mean Squares จะต้องสร้างตาราง ซึ่งแต่ละแถว คือแต่ละเทอมใน Model ส่วน Column คือ subscript เขียนจำนวนระดับของ factor เหนือ subscript ของมันและระบุว่าเป็น F (กำหนด) หรือ R (แบบสุ่ม) ส่วน replicate ให้ถือเป็นแบบสุ่มเสมอ

จะหา E (MS) ของ 2-factor ใน CRD (แบบกำหนด) จะมี model ดังนี้

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \epsilon_{(ij)k}, \quad \begin{matrix} i = 1,\ldots, a \\ j = 1,\ldots,b \\ k = 1,\ldots, r \end{matrix}$$

จะมีตาราง ดังนี้

	F	F	R
	a	b	r
Factor	i	j	k
α_i			
β_j			
$(\alpha\beta)_{ij}$			
$\epsilon_{(ij)k}$			

(1) ในแต่ละแถว เติม 1 ถ้ามี dead subscript ตัวใดตัวหนึ่งที่จับคู่ได้กับ subscript ใน Column

	F	F	R
	a	b	r
Factor	i	j	k
α_i			
β_j			
$(\alpha\beta)_{ij}$			
$\epsilon_{(ij)k}$	1	1	

(dead subscript คือ Subscript ที่อยู่ในวงเล็บ)

(2) ในแต่ละแถว ถ้ามี subscript ตัวใดจับคู่ได้กับ subscript ทางด้าน Column ให้เลข 0 ถ้า Column นั้น เป็น fixed factor และ ให้เลข 1 ถ้า Column นัน เป็น random factor.

	F	F	R
	a	b	l
Fartor	i	j	k
α_i	0		
β_j		0	
$(\alpha\beta)_{ij}$	0	0	
$\epsilon_{(ij)k}$	1	1	1

(3) ส่วนตำแหน่งอื่น ๆ ที่เหลือในแต่ละแถว ให้เขียนจำนวนระดับ (ซึ่งเขียนไว้เหนือแต่ละ Column)

	F	F	R
	a	b	r
Factor	i	j	k
α_i	0	b	r
β_j	a	0	r
$(\alpha\beta)_{ij}$	0	0	r
$\epsilon_{(ij)k}$	1	1	1

4. **หลักการหา** E (MS) ของแต่ละ model component

4.1 **ปิดทุก Column** ที่ หัว Column เป็น live script ของ component นั้น

4.2 ตรวจดูแถวที่มี subscript อย่างน้อย 1 ตัวตรงกับ subscripts ของ component ที่กำลังพิจารณา คูณตัวเลข (ที่เปิดอยู่) ของแถวเหล่านั้น แล้วคูณกับ fixed หรือ random factor จากกฎข้อ 1 ผลรวมที่ได้คือ E (MS) ของ model component ที่กำลังพิจารณา ตัวอย่างเช่นจะหา E (MSA)

1. ต้องปิด Column i เพราะ A มี model component คือ α_i, i เป็น live subscript

row	Factor	F a i	F b j	R r k	
1	α_i	0	b	r	$br \dfrac{\Sigma\alpha_i^2}{(a-1)}$
2	$(\alpha\beta)_{ij}$	0	0	r	$0 \times \sigma^2_{\alpha\beta} = 0$
3	$\epsilon_{(ij)k}$	1	1	1	$1 \times \sigma^2 = \sigma^2$

2. นำตัวเลขที่มองเห็นของแถวที่มี subscript. i, มาคูณกัน คือ br (แถว 1), O (แถว 3) และ 1 (แถว 4) จะได้

$$E(MSA) = \sigma^2 + \frac{br\,\Sigma\alpha_i^2}{a-1}$$

การหา Expected Mean Square ของ Two-Factor Fixed Effects Model

Factor	F a i	F b j	R r k	Expected Mean Square
α_i	0	b	r	$\sigma^2 + \dfrac{br\,\Sigma\alpha_i^2}{a-1}$
β_j	0	0	I	$\sigma^2 + \dfrac{ar\,\Sigma\beta_j^2}{b-1}$
$(\alpha\beta)_{ij}$	0	0	r	$\sigma^2 + \dfrac{r\,\Sigma\Sigma(\alpha\beta)^2_{ij}}{(a-1)(b-1)}$
$\epsilon_{(ij)k}$	1	1	1	σ^2

การหา Expected **Mean** Square **ของ Two-Factor Mixed Model**

	F	R	R	Expected
	a	b	r	Mean
	i	j	k	Squar
α_i	0	b	r	$\sigma^2 + r\sigma^2_{\alpha\beta} + \frac{br\,\Sigma\alpha_i^2}{a-1}$
β_j	a	1	I	$\sigma^2 + ar\sigma^2_{\beta}$
$(\alpha\beta)_{ij}$	0	1	I	$\sigma^2 + r\sigma^2_{\alpha\beta}$
$\epsilon_{(ij)k}$	1	1	1	σ^2

การหา Expected Mean Square ของ Two-Factor Random Model

	R	R	R	Expected
	a	b	r	Mean
Factor	i	j	k	Square
α_i	1	b	r	$\sigma^2 + r\,\sigma^2_{\alpha\beta} + br\,\sigma^2_{\alpha}$
β_j	a	1	r	$\sigma^2 + r\,\sigma^2_{\alpha\beta} + ar\,\sigma^2_{\beta}$
$(\alpha\beta)_{ij}$	1	1	I	$\sigma^2 + r\,\sigma^2_{\alpha\beta}$
$\epsilon_{(ij)k}$	1	1	1	σ^2

การหา Expected Mean Square ของ Three-Factor Random Model

Factor	R a i	R b j	R c k	R r l	Expected Mean Square
α_i	1	b	c	r	σ^2 t r $\sigma^2_{\alpha\beta\gamma}$ + br $\sigma^2_{\alpha\gamma}$ + cr σ^2 + bcr σ^2_{α}
4	a	1	c	r	σ^2 + r $\sigma^2_{\alpha\beta\gamma}$ t ar $\sigma^2_{\beta\gamma}$ + cr 5
γ_k	a	b	1	I	σ^2 t r $\sigma^2_{\alpha\beta\gamma}$ + ar $\sigma^2_{\beta\gamma}$ + br $\sigma^2_{\alpha\gamma}$ + abr σ^2_{γ}
$(\alpha\beta)_{ij}$	1	1	c	r	σ^2 + r $\sigma^2_{\alpha\beta\gamma}$ + cr $\sigma^2_{\alpha\beta}$
$(\alpha\gamma)_{ik}$	1	b	1	r	σ^2 + r $\sigma^2_{\alpha\beta\gamma}$ + br $\sigma^2_{\alpha\gamma}$
$(\beta\gamma)_{jk}$	a	1	1	r	σ^2 + r $\sigma^2_{\alpha\beta\gamma}$ + ar $\sigma^2_{\beta\gamma}$
$(\alpha\beta\gamma)_{ijk}$	1	1	1	r	σ^2 + r $\sigma^2_{\alpha\beta\gamma}$
$\epsilon_{(ijk)1}$	1	1	1	1	σ^2

2.k Factorial Designs.

แผนงานทดลองแบบ 2^k เหมาะสำหรับระยะเริ่มต้นงานทดลองที่มี factor ที่ต้องการสำรวจค้นคว้าหลาย factor เมื่อกำหนดให้ทุก factor มีเพียง 2 ระดับ จะได้จำนวนวิธีการที่น้อยที่สุดสำหรับศึกษาอิทธิพลของทั้ง k factor นั้น เนื่องจากทุก factor มีเพียง 2 ระดับ ดังนั้นผลตอบสนองจะเป็นแบบเชิงเส้นโดยประมาณ

แผนงานทดลองแบบ 2^2

มีเพียง 2 factor คือ A และ B แต่ละ factor มี 2 ระดับจะเรียกว่าระดับ "ต่ำ" และ ระดับ "สูง" เช่นต้องการศึกษาอิทธิพลของความเข้มข้นของ A ของ reactant และอิทธิพลการปรากฏของตัวเร่งที่มีต่อเวลาตอบสนองของกระบวนการเคมี ให้ A คือความเข้มข้นของ reactant ซึ่งจะสนใจ 2 ระดับคือ 15% และ 25% ส่วน B คือตัวเร่ง มี 2 ระดับคือ ระดับสูงหมายถึงมีตัวเร่ง ระดับต่ำคือ ไม่มีตัวเร่ง ทำการทดลองแบบ CRD ที่มี 3 ซ้ำ ได้ข้อมูล ดังนี้

standard order	ส่วนผสมของวิธีการ				รวม
(1)	A ต่ำ, B ต่ำ	28	25	27	80
a	A สูง, B ต่ำ	36	32	32	100
b	A ต่ำ, B สูง	18	19	23	60
ab	A สูง, B สูง	31	30	29	90

อิทธิพลของ A ที่ระดับต่ำของ B (simple effect A at b_1)

$$= [a - (1)] / n$$

อิทธิพลของ A ที่ระดับสูงของ B (simple effect A at b_2)

$$= [ab - b] / n$$

ค่าเฉลี่ยของอิทธิพลของ A ทั้ง 2 ระดับของ B คือ main effect A

$$A = \frac{1}{2n} [ab - b] + [a - (1)]$$

$$= \frac{1}{2n} [ab + a - b - (1)]$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้อิทธิพลของ B ที่ระดับต่ำ และระดับสูงของ A คือ [b – (1)] / n และ [ab – a] / n ตามลำดับ ดังนั้น main effect B คือค่าเฉลี่ยของ 2 อิทธิพล นี้ คือ

$$B = \frac{1}{2n}\{[ab - a] + [b - (1)]\}$$
$$= \frac{1}{2n}[ab + b - a - (1)]$$

ส่วน interaction AB คือ ค่าเฉลี่ยของผลต่างของ simple effect 2 ระดับ จะหาจาก simple effect ของ A หรือ B ก็ได้

หาจาก simple effect ของ A

$$AB = \frac{1}{2n}[ab - b] - [a - (1)]$$
$$= \frac{1}{2n}[ab + 1 - a - b]$$

หาจาก simple effect ของ B

$$AB = \frac{1}{2n}[ab - b] \quad [a - (1)]$$
$$= \frac{1}{2n}[ab + (1) - a - b]$$

จากตัวอย่าง

$$A = \frac{1}{2(3)}(90 + 100 - 60 - 80) = = \frac{50}{2(3)} = 8.33$$

$$B = \frac{1}{2(3)}(90 + 60 \quad 100 - 80) = \frac{-30}{2(3)} = -5.00$$

$$AB = \frac{1}{2(3)}(90 \text{ t } 80 \quad 100 - 60) = \frac{10}{2(3)} = 1.67$$

เมื่อจะหา SS ของ A,B, AB เรานิยมหาโดยวิธี contrast เช่น

$$\text{Contreat } A = ab + a - b - (1)$$

ถ้าหาจากหา treatment total

$$SS(A) = \frac{[ab + a - b - (1)]^2}{4r} = \frac{(50)^2}{4(3)} - 208.33$$

$$SS(B) = \frac{[ab + b - a - (1)]^2}{4r} = \frac{(-30)^2}{4(3)} = 75.00$$

$$SS(AB) = \frac{[ab + (1) - a - b]^2}{4r} = \frac{(10)^2}{4(3)} = 8.33$$

$$ss(total) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{r} Y_{ijk}^2 - \frac{Y_{...}^2}{4r}$$

$$= 9398.00 - 9075.00 = 323.00$$

$$SSE = SS_T - SS_A - SS_B - SS_{AB}$$

$$= 323.00 - 208.33 - 75.00 - 8.33$$

$$= 31.34 \qquad df = 4(r-1) = 4(2) = 8$$

จากตารางวิเคราะห์ พบว่าทั้ง main effect A และ B มีนัยสำคัญ และ interaction AB ไม่มีนัยสำคัญ ทำให้อธิบายอิทธิพลของ A และ B ได้ง่ายเนื่องจากอิทธิพลทั้ง 2 เป็นอิสระกัน

Source of Variation	df	Sum of Squares	Mean Square	F
A	1	208.33	208.33	53.15**
B	1	75.00	75.00	19.13**
AB	1	8.33	8.33	2.13
Error	8	31.34	3.92	
Total	11	323.00		

ในการหา contrast เรานิยมเขียนวิธีการในรูป Standard order

	(1)	a	b	ab
A :	-1	+1	-1	+1
B:	-1	-1	+1	+1
AB:	+1	-1	-1	+1

(เครื่องหมายของ interaction ได้จากผลคูณของ A และ B)

สรุปได้ว่า เมื่อได้ contrast ของอิทธิพลที่ต้องการแล้ว

อิทธิพลของ $AB...K = \frac{2}{r2^k} \left(Contrast_{AB...K} \right)$

และ

$$SS_{AB...K} = \frac{1}{r\,2^k} (Contrast_{AB...K})^2$$

ตัวอย่าง 2^3 factorial

จะศึกษาอิทธิพลของเปอร์เซนต์คาร์บอนเนต แรงอัด และความเร็วของสายพานที่มีต่อการบรรจุน้ำอัดลม

	แรงอัด (B)			
	25 psi		30psi	
เปอร์เซนต์	**ความเร็ว (c)**		**ความเร็ว (c)**	
คาร์บอนเนต (A)	200	250	200	250
10	-3 -1 -4 = (1)	-1 0 -1 = c	-1 0 -1 = b	1 1 2 = bc
12	0 1 1 = a	2 1 3 = ac	2 3 5 = ab	6 5 11 = abc

$$SS = \frac{(Contrast)*}{23\ r} = \frac{(Contrast)^2}{8\ r}$$

วิธีการ	Factorial Effect						
	A	B	AB	C	AC	BC	ABC
(1) = -4	-	-	+		+	+	
a = 1	+					+	+
b = -1		+			+		t
ab = 5	+	+	+				
c = -1			+	+			t

	A	B	AB	C	AC	BC	ABC
ac = 3	+			+	+		
bc = 2		+		+		+	
abc = 11	+	+	+	+	+	+	+

$$A = \frac{2}{8(2)} [a - (1) \text{ t } ab - b \text{ t } ac - c + abc - bc]$$

$$= \frac{1}{8} [1 - (-4) \text{ t } 5 - (-1) \text{ t } 3 - (-1) \text{ t } 11 - 2]$$

$$= \frac{24}{8} = 3.00$$

$$B = \frac{2}{8(2)} [b + ab + bc + abc - (1) - a - c - ac]$$

$$= \frac{1}{8} [-1 + 5 + 2 + 11 - (-4) - 1 - (-1) - 3]$$

$$= \frac{18}{8} = 2.25$$

$$C = \frac{2}{8(2)} [c + ac + bc + abc - (1) - a - b - ab]$$

$$= \frac{1}{8} [-1 + 3 + 2 + 11 - (-4) - 1 - (-1) - 5]$$

$$= \frac{14}{8} = 1.75$$

$$AB = \frac{2}{8(2)} [ab - a - b + (1) + abc - bc - ac + c]$$

$$= \frac{1}{8} [5 - 1 - (-1) + (-4) + 11 - 2 - 3 + (-1)]$$

$$= \frac{6}{8} = 0.75$$

$$AC = \frac{2}{8(2)} [(1) - a + b - ab - c + ac - bc + abc]$$

$$= \frac{1}{8} [-4 - 1 + (-1) - 5 - (-1) + 3 - 2 + 11]$$

$$= \frac{2}{8} = 0.25$$

$$BC = \frac{2}{8(2)} [(1) + a - b - ab - c - ac + bc + abc]$$

$$= \frac{1}{8} [-4 + 1 - (-1) - 5 - (-1) - 3 + 2 + 11]$$

$$= \frac{4}{8} = 0.50$$

$$ABC = \frac{2}{8(2)} [abc - bc - ac + c - ab + b + a - (1)]$$

$$= \frac{1}{8} [11 - 2 - 3 + (-1) - 5 + (-1) + 1 - (-4)]$$

$$= \frac{4}{8} = 0.50$$

$$SS(A) = \frac{(24)^2}{8(2)} = 36.00$$

$$SS(B) = \frac{(18)^2}{8(2)} = 20.25$$

$$SS(C) = \frac{(14)^2}{8(2)} = 12.25$$

$$SS(AB) = \frac{(6)^2}{8(2)} = 2.25$$

$$SS(AC) = \frac{(2)^2}{8(2)} = 0.25$$

$$SS(BC) = \frac{(4)^2}{8(2)} = 1.00$$

$$SS(ABC) = \frac{(4)^2}{8(2)} = 1.00$$

Source of Variation	df	Sum of Squares	Mean Square	F
A = เปอร์เซนต์คาร์บอนเนต	1	36.00	36.00	57.14**
B = แรงวัด	1	20.25	20.25	22.14**
C = ความเร็ว	1	12.25	12.25	19.44**
AB	1	2.25	2.25	3.57
AC	1	0.25	0.25	0.40

BC	1	1.00	1.00	1.59
ABC	1	1.00	1.00	1.59
Error	8	5.00	0.63	
Total	15	78.00		

การวิเคราะห์งานทดลองแบบ 2^k โดยทั่ว ๆ ไป

ในงานทดลองแบบ 2^k factorial ซึ่งคืองานทดลองที่มี k factor ทุก factor มี 2 ระดับ จะมี main effect อยู่ k อัน, มี 2-factor interaction อยู่ $\binom{k}{2}$ อัน, มี 3-factor interaction อยู่ $\binom{k}{3}$ อัน, ... และมี k-factor interaction อยู่ 1 อัน รวมกันจะมีอิทธิพลทั้งหมด 2^k-1 อัน เมื่อมีหลาย factor ควรใช้ standard order แทนวิธีการ เช่นถ้ามี 2^4 factor จะมีวิธีการ 16 อันคือ (1), a, b, ab, c, ac, bc, abc, d, ad, bd, abd, cd, acd, bcd และ abcd

เมื่อจะประมาณอิทธิพลและค่าผลบวกกำลังสอง ซึ่งใช้การหา contrast โดยการใช้ตารางเครื่องหมายบวกและลบนั้น ยังมีอีกวิธีหนึ่งคือการกระจาย เช่น

$$\text{contrast}_{AB...K} = (a \pm 1)(b \pm 1)...(k \pm 1)$$

ให้เครื่องหมาย**ลบ**แก่วงเล็บที่มี factor ที่ต้องการหา และเครื่องหมาย**บวก**แก่วงเล็บที่ไม่มี factor ที่ต้องการหา เช่นใน 2^3 factorial จะหา contrast AB โดยวิธีกระจาย ดังนี้

$$\begin{aligned}\text{contrast}_{AB} &= (a-1)(b-1)(c+1) \\ &= abc + ab + c + (1) - ac - bc - a - b\end{aligned}$$

หรือใน 2^5 factorial จะหา contrast ABCD ดังนี้

$$\begin{aligned}\text{contrast}_{ABCD} &= (a-1)(b-1)(c-1)(d-1)(e+1) \\ &= abcde + cde + bde + ade + bce + ace + abe \\ &\quad + e + abcd + cd + bd + ad + bc + ac + ab \\ &\quad + (1) - a - b - c - abc - d - abd - acd - bcd - ae \\ &\quad - be - ce - abce - de - abde - acde - bcde\end{aligned}$$

หมายเหตุ แทน "1" ด้วย (1)

การวิเคราะห์ 2^k factorial

Source of Variation	df	Sum of Squares
k Main Effects		
A	1	SS_A
B	1	SS_B
.	.	.
.	.	.
.	.	.
K	1	SS_K
$\binom{k}{2}$ Two - Factor Interactions		
AB	1	SS_{AB}
AC	1	SS_{AC}
.	.	.
.	.	.
.	.	.
JK	1	SS_{JK}
$\binom{k}{3}$ Three Factor Interactions		
ABC	1	SS_{ABC}
ABD	1	SS_{ABD}
	.	.
	.	.
	.	.
IJK	1	SS_{IJK}
$\binom{k}{k}$ = 1 k – Factor Interaction		
ABC...K	1	$SS_{ABC...K}$
Error	$2^k(r-1)$	SS_E
Total	$r2^k-1$	SS_T

การทดลองแบบ 2^k และมีเพียง 1 ซ้ำ

(A Single Replicate of the 2^k Design)

สำหรับกรณีที่มีหลาย factor เช่น $2^5 = 32$ วิธีการ หรือ $2^6 = 64$ วิธีการ ผู้ทดลองอาจมีทรัพยากรจำกัด จึงอาจทำการทดลองได้เพียงวิธีการละ 1 ครั้ง ดังนั้น จึงไม่สามารถหาค่าประมาณของ experimental error จึงไม่อาจทดสอบอิทธิพลต่าง ๆ เพราะไม่มี mean square error วิธีแก้ปัญหาคือผู้ทดลองต้อง**มีเหตุผลเพียงพอที่จะยอมรับว่า อิทธิพลของ high order interaction ไม่มีนัยสำคัญ** (ก่อนทำการทดลอง) ดังนั้น ค่า mean square ของ intercation เหล่านั้น คือ ค่าประมาณของ σ^2 เหมือนกับ mean square error จึงสามารถนำมารวมกันเพื่อใช้เป็นค่าประมาณของ σ^2 วิธีนี้ควรใช้กับงานทดลองที่ขนาดไม่ต่ำกว่า 2^4

ตัวอย่าง การทดลองผลิตเคมีภัณฑ์ชนิดหนึ่ง ใน pilot plant มี factor ที่มีอิทธิพลต่อ filtration rate ของผลิตภัณฑ์นี้ 4 อย่าง คือ อุณหภูมิ (A), แรงอัด (B), ความเข้มข้นของ reactant (C) และอัตราการหมุนเวียน (D = stirring rate) ทุก factor มี 2 ระดับ ได้ข้อมูลจากการทดลองเพียงครั้งเดียว = 16 runs (แบบ random) ทั้งนี้ assume ว่า 3-factor และ 4-factor interaction สามารถละทิ้งได้ เราจึงจะใช้เป็นค่าประมาณของ error

	A_0				A_1			
	B_0		B_1		B_0		B_1	
	C_0	C_1	C_0	C_1	C_0	C_1	C_0	C_1
D_0	45	68	48	80	71	60	65	65
D_1	43	75	45	70	100	86	104	96

Source of Variation	df	Sum of squares	Mean square	F
A	1	1870.56	1870.56	73.15**
B	1	39.06	39.06	1.53
C	1	390.06	390.06	15.25*
D	1	855.56	855.56	33.46**
AB	1	0.06	0.06	<1
AC	1	1,314.06	1314.06	51.39**
AD	1	1,105.56	1105.56	43.24**

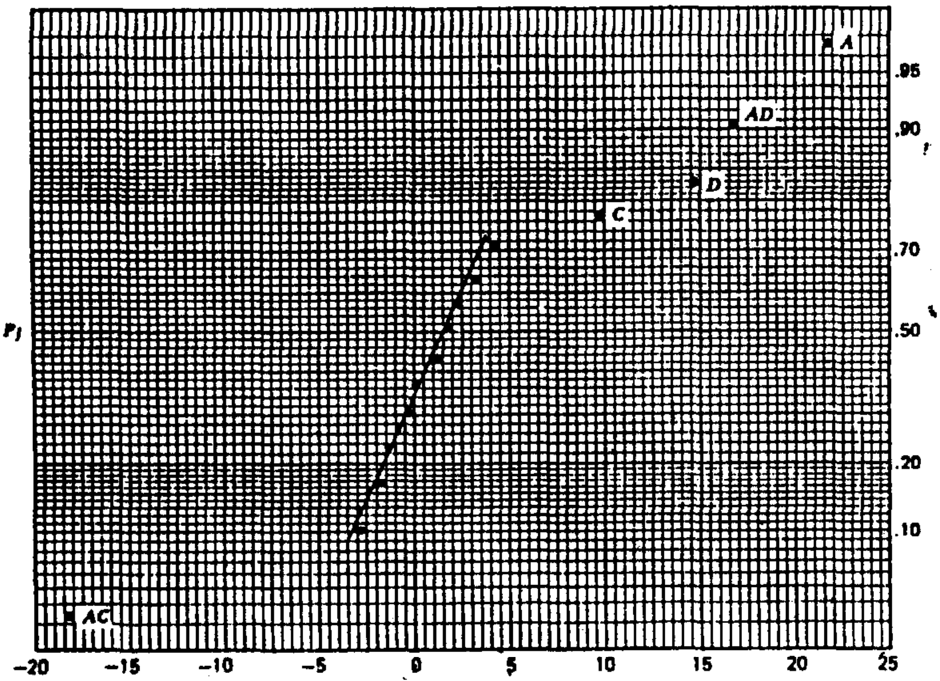
Source of Variation	df	Sum of squares	Mean square	F
BC	1	22.56	22.56	< 1
BD	1	0.56	0.56	< 1
CD	1	5.06	5.06	C l
Error	5	127.84	25.57	
Total	15	5,730.94		

จาก ANOVA พบว่า อิทธิพลหลัก คือ A (อุณหภูมิ) C (ความเข้มข้น) และ D (Stirring rate) มีนัยสำคัญ แต่ B (แรงอัด) ไม่มีนัยสำคัญ ในขณะเดียวกัน interaction AC และ AD ก็มีนัยสำคัญ

ยังมีการวิเคราะห์ unreplicated 2^k factorial อีกวิธีหนึ่งจากข้อเขียนของ **Daniel, C** (1959) เรื่อง "Use of Half-Normal Plots in Interpreting Factorial Two Level Experiments." Technometric, Vol. 1, pp.311-342. เสนอแนะว่า ถ้าข้อมูลจากการทดลองเป็นอิสระและมีการแจกแจงแบบปกติ ดังนั้นค่าประมาณของอิทธิพลทั้ง 2^k-1 อัน จากการทดลองแบบ 2^k จะมีการแจกแจงแบบปกติด้วย วิธีช่วยในการตรวจหาอิทธิพลที่มีนัยสำคัญวิธีหนึ่ง คือการพล็อตอิทธิพลเหล่านั้นใน normal probability paper ซึ่งคือกระดาษกราฟแบบธรรมดา แต่มี scale ที่เมื่อพล็อตแล้วกราฟการแจกแจงสะสมของ $N(\mu,\sigma^2)$ จะเป็นเส้นตรง เมื่อพล็อตอิทธิพลทั้งหลายในกระดาษดังกล่าวแล้ว อิทธิพลที่ไม่มีนัยสำคัญ นั่นคือมีสาเหตุจาก random error จะมีการแจกแจงแบบปกติ คือจะเรียงต่อกันเป็นเส้นตรง

ก่อนจะพล็อต จะต้องเรียงลำดับอิทธิพลทั้งหลายก่อน แล้วหาความน่าจะเป็น P_j ในเมื่อ $P_j = (j-.5)/(2^k-1)$, $j = 1,2,\ldots,2^k-1$ อิทธิพลที่ละทิ้งได้ จะมีแนวโน้มที่จะตกอยู่ในแนวเส้นตรง ส่วนอิทธิพลที่มีนัยสำคัญจะตกอยู่นอกเส้นนั้น อิทธิพลที่ละทิ้งได้เหล่านั้น เรานำมารวมกันเป็นค่าประมาณของ error ได้

จากตัวอย่าง pilot plant เราจะหาอิทธิพลต่าง ๆ จากตารางเครื่องหมาย + และ – ดังนี้



Ordered effects far the 2^4 factorial

Contrast Constants for the 2' Design

	A	B	AB	C	AC	BC	ABC	D	AD	BD	ABD	CD	ACD	BCD	ABCD
(1)	-	-	+	-	+	+	-	-	+	+	-	+	-	-	+
a	+	-	-	-	-	+	+	-	-	+	+	+	+	-	-
b	-	+	-	-	+	-	+	-	+	-	+	+	-	+	-
ab	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+
c	-	-	+	+	-	-	+	-	+	+	-	-	+	+	-
ac	+	-	-	+	+	-	-	-	-	+	+	-	-	+	+
bc	-	+	-	+	-	+	-	-	+	-	+	-	+	-	+
abc	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-
d	-	-	+	-	+	+	-	+	-	-	+	-	+	+	-
ad	+	-	-	-	-	+	+	+	+	-	-	-	-	+	+
bd	-	+	-	-	+	-	+	+	-	+	-	-	+	-	+
abd	+	+	+	-	-	-	-	+	+	+	+	-	-	-	-
cd	-	-	+	+	-	-	+	+	-	-	+	+	-	-	+
acd	+	-	-	+	+	-	-	+	+	-	-	+	+	-	-
bcd	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-
abcd	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

Order (j)	Effect	Estimate	(j − .5)/15
15	A	21.67	.9667
14	AD	16.63	.9000
13	D	14.63	.8333
12	C	9.88	.7667
11	ABD	4.13	.7000
10	B	3.13	.6333
9	BC	2.38	.5667
8	ABC	1.88	.5000
7	ABCD	1.38	.4333
6	AB	0.13	.3667
5	BD	−0.38	.3000
4	CD	−0.13	.2333
3	ACD	−0.63	.1667
2	BCD	−2.63	.1000
1	AC	−18.13	.0333

[1] **Normal probability paper is simply graph paper with the ordinate scaled so that the graph of the cumulative $N(\mu, \sigma^2)$ distribution is a straight line.**

จากกราฟของอิทธิพลที่เรียงลำดับ จะเห็นว่า อิทธิพลที่ไม่มีนัยสำคัญจะอยู่ในแนวเส้นตรง ส่วนอิทธิพลขนาดใหญ่จะตกอยู่นอกเส้น เนื่องจากอิทธิพลขนาดใหญ่ไม่มี 3-factor หรือ 4-factor interaction เราจึงสามารถรวมอิทธิพลดังกล่าวเพื่อใช้เป็นค่าประมาณของ error ตามที่เราได้กระทำไว้แต่เดิมถูกต้องแล้ว

เราอาจปรับปรุงการวิเคราะห์เรื่อง pilot plant ได้อีก จากการสังเกตกราฟ พบว่า อิทธิพลของ B (แรงอัด) ไม่มีนัยสำคัญ และ interaction ของ B ทั้งหมด ได้แก่ AB, BC, ABC, ABD, BD, BCD และ ABCD ก็ไม่มีนัยสำคัญ เราจึงจะตัด factor B ออกจากงานทดลอง จึงเหลือเป็น 2^3 factorial ซึ่งประกอบด้วย factor A, C และ D ที่มี 2 ซ้ำ รวมกันเป็น 16 runs ซึ่งจะดูได้จากตารางเครื่องหมาย Contrast ของ Column A,C,D จะกลายเป็น 2 ระดับของ 2^3 factorial. จะได้ผลวิเคราะห์ ดังนี้

Source of Variation	df	Sum of squares	Mean square	F
A = อุณหภูมิ	1	1870.56	1870.56	83.36**
C = ความเข้มข้น	1	390.06	390.06	17.38**
D = stirring rate	1	855.56	855.56	38.13**
AC	1	1,314.06	1314.06	58.56**
AD	1	1105.56	1105.56	49.27**

Source of Variation	d f	Sum of squares	Mean square	F
CD	1	5.06	5.06	CI
ACD	1	10.56	10.56	<1
Error	5	179.52	22.44	
Total	15	5730.94		

ผลสรุปการวิเคราะห์เหมือนเดิม

กล่าวโดยทั่วไปได้ว่า ถ้ามี single replicate ของ 2^k และมี h factor (h<k) ที่จะตัดทิ้งได้ **ดังนั้นข้อมูลเดิมจะกลายเป็น** 2^{k-h} factor ที่มี 2^h replicates.

การคำนวณผลบวกกำลังสองตามวิธีการของ Yates

ในการทดสอบแบบ 2^k แฟคทอเรียล คือทุกแฟคเตอร์มี 2 ระดับ Yates ได้ค้นคว้าวิธีการคำนวณผลบวกกำลังสองของอิทธิพลต่าง ๆ ซึ่งมีวิธีการดังนี้

1. เขียนส่วนผสมของวิธีการทั้งหมดโดยเรียงตามลำดับ เช่น

   2 แฟคเตอร์ คือ A,B : (1), a, b, ab

   3 แฟคเตอร์ คือ A,B,C : (1), a, b, ab, c, ac, bc, abc

   4 แฟคเตอร์ คือ A,B,C,D : (1), a, b, ab, c, ac, bc, abc, d, ad, bd, abd, cd, acd, bcd, abcd

   และควรแบ่งออกเป็น 2 ช่วง ๆ ละเท่า ๆ กัน
2. หาผลรวมของคอลัมน์ที่ (1) ตอนบน โดยการจับคู่รวมกันตามลำดับ

   หาผลรวมของคอลัมน์ที่ (2) ตอนล่าง โดยการจับคู่ลบกันตามลำดับ (หลัง-หน้า)
3. ทำคอลัมน์ที่ (3) จากคอลัมน์ (2) ด้วยวิธีเดียวกัน และใช้วิธีเดียวกันนี้กับคอลัมน์ต่อ ๆ ไปจนครบ k คอลัมน์ สำหรับ 2^k แฟคทอเรียล
4. จำนวนแรกในคอลัมน์ที่ k คือผลรวมทั้งหมด (G) ส่วนที่เหลือคือตัวตั้งของ contrast $(\Sigma c_i T_i)$

การคำนวณค่าผลบวกกำลังสองด้วยวิธีการของ Yates ของ 2^3 แฟคทอเรียล

วิธีการ	(1)	(2)	(3)	effect
(1)	(1) + a	(1) + a + b + ab	(1) + a + b + ab + c + ac + bc + abc	= G
a	b + ab	c + ac + bc + abc	a − (1) + ab − b + ac − c + abc + bc	= A
b	c + ac	a − (1) + ab − b	b + ab − (1) − a + bc + abc − c − ac	= B
ab	bc + abc	ac − c + abc − bc	ab − b a + (1) + abc − bc − ac + c	= AB
c	a − (1)	b + ab − (1) a	c + ac + bc + abc − (1) − a − b − ab	= c
ac	ab − b	bc + abc − c − ac	ac − c + abc − bc − a + (1) − ab + b	= AC
bc	ac − c	ab − b − a + (1)	bc + abc − c − ac − b − ab + (1) + a	= BC
abc	abc − bc	abc − bc − ac + c	abc bc − ac + c ab + b + a − (1)	= ABC

ขั้นต่อไปคือการหาผลบวกกำลังสองของอิทธิพลต่าง ๆ เช่น

SS (A) = $(A)^2 / 2^3.r$ เป็นต้น

ตัวอย่าง

2^4 แฟคทอเรียล มีผลรวมของค่าสังเกตจาก 2 reps. ดังนี้ (กำหนดให้ SS (total) = 217.51)

กรรมวิธี	ผลรวม
(1)	58.9
a	59.9
b	50.1
ab	53.1
c	48.2
ac	52.7
bc	52.6
abc	47.1
d	65.2
ad	50.8
bd	58.2
abd	54.1
cd	57.6
acd	51.0
bcd	51.3
abcd	56.2
	865.0

วิธีการ	ผลรวม	(1)	(2)	(3)	(4)	ss.
(1)	58.9	118.8	222.0	420.6	865.0	= Grand total
a	59.9	103.2	198.6	444.Q	-19.2	11.52
b	50.1	98.9	228.3	1.0	-19.6	12.00
ab	53.1	99.1	216.1	-20.2	15.8	7.80
c	48.2	116.0	4.0	-14.8	-35.6	39.61
ac	50.7	112.3	-3.0	-4.8	9.8	3.00
bc	52.6	108.6	-18.5	-6.0	19.0	11.28
abc	47.1	107.5	-1.7	21.8	-8.8	2.42
d	65.2	1.0	-15.6	-23.4	23.8	17.70
ad	50.8	3.0	0.8	-12.2	-21.2	14.05
bd	58.2	2.5	-3.7	-7.0	10.0	3.18
abd	54.1	-5.5	-1.1	16.8	27.8	24.15
cd	57.6	-14.4	2.0	16.4	11.2	3.92
acd	51.0	-4.1	-8.0	2.6	23.8	17.70
bcd	51.3	-6.6	10.3	-10.0	-13.8	5.95
abcd	56.2	4.9	11.5	1.2	11.2	3.92

ANOVA

SOV.	df.	SS.	MS.	F
Main effects :				
A	1	11.52	11.52	4.68
B	1	12.00	12.00	4.90
c	1	39.61	39.61	16.10
D	1	17.70	17.70	7.20
2-factor interaction :				
AB	1	7.80	7.80	3.17
AC	1	3.00	3.00	1.22
AD	1	14.05	14.05	5.71
BC	1	11.28	11.28	4.59
BD	1	3.13	3.13	1.27
CD	1	3.92	3.92	1.59
S-factor interaction :				
ABC	1	2.42	2.42	0.98
ABD	1	24.15	24.15	9.82
ACD	1	17.70	17.70	7.20
BCD	1	5.95	5.95	2.42
4-factor interaction :				
ABCD	1	3.92	3.92	1.59
Error	16	39.36	2.46	
total	31	217.51		

การวางแผนแบบแฟคทอเรียลเมื่อจำนวนซ้ำภายกลุ่มไม่เท่ากัน

ลองพิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

	b_1	b_2	b_3
a_1	7,6,4 3,6,2	8,12,16,24 17,19,21,22	16,14,17 8,15
a_2	23,14,9 18,22,26	11,15,26,31 26,14,13	9,27,31,42 16,17,18,20

	b_1	b_2	b_3
a_1	$n_{11} = 6$ $T_{11} = 28$	$n_{12} = 8$ $T_{12} = 139$	$n_{13} = 5$ $T_{13} = 70$
a_2	$n_{21} = 6$ $T_{21} = 112$	$n_{22} = 7$ $T_{22} = 136$	$n_{23} = 8$ $T_{23} = 180$

1. หาค่าเฉลี่ยฮาร์โมนิค

$$\tilde{n}_h = \frac{ab}{(1/n_{11} + 1/n_{12} + \ldots + 1/n_{ab})}$$

$$= \frac{6}{1/6 + 1/8 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8} = 6.48$$

2. สร้างตารางค่าเฉลี่ยของเซลล์ต่าง ๆ

	b_1	b_2	b_3	
a_1	$\bar{X}_{11} = 4.67$	$\bar{X}_{12} = 17.38$	$\bar{X}_{13} = 14.00$	$T_{1.} = 36.05$ $\bar{X}_{1.} = 12.02$
a_2	$\bar{X}_{21} = 18.67$	$\bar{X}_{22} = 19.43$	$\bar{X}_{23} = 22.50$	$T_{2.} = 60.60$ $\bar{X}_{2.} = 20.20$
	$T_{.1} = 23.34$ $\bar{X}_{.1} = 11.67$	$T_{.2} = 36.81$ $\bar{X}_{.2} = 18.41$	$T_{.3} = 36.50$ $\bar{X}_{.3} = 18.25$	$T = 96.65$ $\bar{X} = 16.11$

1. $CF = (96.65)^2 \;/\; (2)(3) = 1556.87$

2. $1/b\,(\sum_i X_{i.}^2) = (36.05^2 + 60.60^2)\,/\,3 = 1657.32$

3: $1/a\,(\sum_j X_{.j}^2) = (23.34^2 + 36.81^2 + 36.50^2)\,/\,2 = 1615.99$

4. $\sum_i \sum_j X_{ij}^2 = (4.67^2 + \ldots + 22.50^2) = 1752.22$

5. $\sum_i \sum_j \sum_k X_{ijk}^2 = (7^2 + 6^2 + \ldots + 20^2) = 13{,}913$

6. SS (A) $= \tilde{n}_h \left[(2) - (1)\right]$

$= 6.48\,(1657.32 - 1556.87) = 650.92$

7. SS (B) $= \tilde{n}_h \left[(3) - (1)\right]$

$= 6.48\,(1615.99 - 1556.87) = 383.10$

8. SS (AB) $= \tilde{n}_h \left[(\sum_i \sum_j \bar{X}_{ij}^2 - \sum_i \bar{X}_{i.}^2/b - \sum_j \bar{X}_{.j}^2/a + CF)\right]$

$= 6.48\,(1752.22 - 1657.32 - 1615.99 + 1556.87)$

9. SS (Error) = SS (within cells)

$= \sum_{i,j,k} X_{ijk}^2 - \sum_{i,j} (T_{ij}^2/n_{ij})$

$= 13913 - (28^2/6 + 139^2/8 + \ldots + 180^2/8)$

$= 1604.26$

Source of Variation	Degrees of Freedom	Sum of Squares	Mean Squares	F - Ratio
A	1	650.92	650.92	13.80
B	2	383.10	191.55	4.06
AB	2	231.85	115.93	2.46
Error	34	1604.26	47.18	

แบบฝึกหัดบทที่ 6

1. ผลงานทดลองดูแรงต้านทานของ standard resistance ภายใต้อุณหภูมิ และความชื้นระดับต่าง ๆ ดังนี้

อุณหภูมิ	-20° F		70° F		160° F	
ความชื้น	10%	50%	10%	50%	10%	50%
	23	24	26	24	25	27
	24	24	25	25	26	26
	25	25	26	26	26	28
	24	26	26	26	28	28

จงวิเคราะห์ข้อมูล

2. ตารางวิเคราะห์งานทดลองหนึ่ง มีดังนี้

ที่มา	df	Mean Square
ระหว่างพื้นที่ดิน	4	625
ระหว่างโครงการอนุรักษ์ดิน	3	400
พื้นที่ × โครงการ	12	225
ระหว่างฟาร์ม	80	100

ก. สมมุติทั้งพื้นที่และโครงการเป็นแบบกำหนดล่วงหน้า จงทดสอบความแตกต่างของพื้นที่และโครงการอนุรักษ์ดิน

ข. สมมุติพื้นที่ และโครงการเป็นแบบสุ่ม จงทดสอบความแตกต่างของพื้นที่ และโครงการ

3. พื้นที่เกษตรจำแนกตามลักษณะดิน และการถือครอง ของชาวนา 36 คน มีดังนี้

การถือครอง	ลักษณะดิน			
	1	2	3	4
เป็นเจ้าของที่ดิน	37.0	50.0	49.0	56.0
	40.1	28.6	43.7	69.0
	57.0	37.2	27.0	54.7

เป็นผู้เช่า	36.0	42.0	50.9	55.0
	52.0	54.5	34.0	41.0
	38.0	58.0	43.8	54.6
เป็นผู้เช่าและเจ้าของ	72.6	54.0	67.4	63.0
ทีดินบางส่วน	65.2	58.6	32.5	45.0
	71.0	29.0	43.8	60.0

กำหนดให้การถือครองเป็นแบบกำหนด ลักษณะดินเป็นแบบสุ่ม จงวิเคราะห์ข้อมูล

4. ใช้ปุ๋ย 4 ชนิดทดลองกับพืช 5 สายพันธุ์ ในแปลงทดลองทั้งหมด 60 แปลง โดยสุ่มมารับวิธีการละ 3 แปลง ได้ข้อมูลดังนี้

ปุ๋ย	สายพันธุ์ 1	2	3	4	5
	57	26	39	23	48
1	46	38	39	36	35
	28	20	43	18	48
	67	44	57	74	61
2	72	68	61	47	60
	66	64	61	69	75
	95	92	91	98	78
3	90	89	82	85	89
	89	99	98	85	95
	92	96	98	99	99
4	88	95	93	90	98
	99	99	98	98	99

ก. จงสร้างตารางวิเคราะห์ความแปรปรวน

ข. จงหาค่าคาดหมายของค่าเฉลี่ย กำหนดให้ ปุ๋ย และสายพันธุ์ถูกเลือกมาแบบสุ่ม

ค. จงหาค่าคาดหมายของค่าเฉลี่ย กำหนดให้ ปุ๋ย และสายพันธุ์ถูกกำหนดมาล่วงแล้ว

ง. จงหาค่าคาดหมายของค่าเฉลี่ย กำหนดให้ ปุ๋ยถูกกำหนดล่วงหน้า สายพันธุ์เป็นแบบสุ่ม

5. พนักงานรักษาความสะอาด ได้ทดลองขัดพื้นด้วยขี้ผึ้ง 3 ชนิด แต่ละชนิดใช้เวลาต่าง ๆ กัน 3 ช่วงเวลา พื้นที่ทดลองเป็นพื้นที่มีลักษณะเหมือนกัน 18 ห้อง โดยสุ่มมารับวิธีการละ 2 ห้อง จงวิเคราะห์ข้อมูล

ขี้ผึ้ง	A			B			C		
เวลาที่ใช้ขัดถู	15	30	45	15	30	45	15	30	45
	7.0	7.5	8.2	7	7.2	7.1	8	9.2	9.6
	8	7.4	8.6	7	7.6	7	8	9.4	9.5

ข้อมูลต่อไปนี้คือความหนาแน่นของอิฐ ที่ผลิตโดยใช้ส่วนผสมขนาดต่าง ๆ 3 ระดับ ความดัน 3 ระดับ และ อุณหภูมิเตาอบ 3 ระดับ แต่ละวิธีการมี 2 ซ้ำ จงวิเคราะห์ข้อมูล

ขนาด	ความดัน	อุณหภูมิ 1900		2000		2300	
5-10	5.0	340	375	316	386	374	350
	12.5	388	370	338	214	334	366
	20.0	378	378	348	378	380	398
10-15	5.0	260	244	388	304	266	234
	12.5	322	342	300	420	234	258
	20.0	330	298	260	366	350	284
15-20	5.0	134	140	146	194	152	212
	12.5	186	30	412	428	194	208
	20.0	40	210	436	490	230	254

7. ข้อมูลต่อไปนี้คือผลผลิตมันฝรั่งโดยใช้ส่วนผสมของปุ๋ย ไนโตรเจน โปรแตสเซียม และฟอสฟอรัส ระดับต่าง ๆ ดังนี้

เรพปริเคท 1						เรพปริเคท 2					
npk		npk		npk		npk		npk		npk	
133	45	211	39	333	70	212	83	211	56	133	65
111	34	313	62	311	40	221	52	321	49	112	48
221	42	222	65	212	45	322	65	333	92	311	56
323	69	233	92	132	53	313	101	122	75	332	79
213	58	123	56	121	54	111	50	312	86	213	95
331	51	332	91	223	69	331	61	232	74	222	81
232	72	131	73	322	85	132	89	223	109	231	84
122	56	112	55	113	60	123	90	113	68	323	103
312	82	321	75	231	78	233	122	131	98	121	64
Σ	509	Σ	608	Σ	554	Σ	713	Σ	707	Σ	675
					1671						2095

8. กำหนดตารางวิเคราะห์ของงานทดลองหนึ่ง ดังนี้

ที่มา	df	Mean Square
เรพปริเคท	4	70
วิธีการ		
A	3	50
B	3	160
AB	9	40
ความคลาดเคลื่อน	60	10

จงอธิบายอิทธิพลของ A และ B กำหนดให้

ก. ระดับต่าง ๆ ของ A และ B เป็นแบบกำหนด

ข. ระดับต่าง ๆ ของ A และ B เป็นแบบสุ่ม

ค. ระดับต่าง ๆ ของ A เป็นแบบกำหนด และระดับต่าง ๆ ของ B เป็นแบบสุ่ม

ง. ระดับต่าง ๆ ของ A เป็นแบบสุ่ม และระดับต่าง ๆ ของ B เป็นแบบกำหนด

9. ชาวสวนฉีดส่วนผสมของไนโตรเจนให้ต้นไม้ แล้วหาค่าวิเคราะห์คือจำนวนไนโตรเจนที่จับอยู่ที่ใบ และทิ้งไว้ในระยะเวลา 2 ระยะเวลา แต่ละระยะเวลาได้ตรวจหาค่าวิเคราะห์คือจำนวนไนโตรเจนที่เหลือจับอยู่ที่ใบไม้ เพื่อต้องการทราบอัตราการดูดซึมของพืชจงวิเคราะห์ข้อมูล (2 replicates)

ระยะเวลา	ระดับของไนโตรเจน		
	n_1	n_2	n_3
b	2.29	6.50	8.75
	2.24	5.94	9.52
t_1	0.46	3.03	2.49
	0.19	1.00	2.04
t_2	0	0.75	1.40
	0.26	1.16	1.81

10. จงวิเคราะห์ข้อมูลต่อไปนี้

Replicate 1				Replicate 2				Replicate 3				Replicate 4			
(1)	7	b	24	ab	36	bc	31	a	28	ac	31	abc	66	(1)	11
abc	39	ac	31	(1)	19	ac	36	c	24	b	19	a	31	bc	29
a	30	c	21	abc	41	b	30	ab	35	(1)	13	c	21	ac	33
bc	27	ab	39	c	30	a	33	bc	26	abc	36	b	25	ab	43

11. กำหนดให้ A และ B เป็นแบบกำหนดล่วงหน้า จงอธิบายผลการทดสอบ

ที่มา	df	MS.
Replicates	3	192
A	1	100
B	1	2500
AB	1	900
Experimental error	9	32

ผลรวมวิธีการ

	a_0	a_1	Σ
b_0	120	80	200
b_1	160	240	400
Σ	280	320	600

12. แผ่นคอนกรีตบล็อคผลิตจากปัจจัยหลัก 2 อย่างคือ วัตถุดิบจากผู้ผลิต 3 แห่ง, และส่วนผสม 4 สูตร ความทนทานวัดได้ ดังนี้

ผู้ผลิต	เรพปริเคท	ส่วนผสม ก	ข	ค	ง
1	1	57	65	93	102
	2	46	73	92	108
2	1	26	44	81	96
	2	38	67	90	99
3	1	39	57	96	105
	2	40	60	100	116

จงวิเคราะห์ข้อมูล

13. งานทดลองหนึ่งมีข้อมูลสูญหาย 2 ค่า จงประมาณค่าข้อมูลที่สูญหายและสร้างตารางวิเคราะห์ความแปรปรวน

บล็อค	วิธีการ 1	2	3	4	total
1	43	35	37	42	157
2	45	39	40	47	171
3	42	30	M''	43	$115 + M''$
4	M'	43	48	49	$140 + M'$
5	41	34	36	44	155
total	$171 + M'$	181	$161 + M''$	225	$738 + M' + M''$

14. การทดลอง 2 × 2 แฟคทอเรียล แต่ละกลุ่มมี 8 คน ได้ค่าสังเกต ดังนี้

A_1B_1	: 8 6 9 9 8 7 6 3	ANS. A	: F = 3.77
A_1B_2	: 5 8 10 7 10 7 8 5	B	: F ∠ 1.00
A_2B_1	: 10 9 4 8 8 4 3 6	AB	: F = 1.60
A_2A_2	: 5 7 3 5 3 5 5 8 .		

จงวิเคราะห์ข้อมูล

15. การทดลองแบบ 2 × 2 แฟคทอเรียลใน CRD. แต่ละกลุ่มมี 5 คน กำหนดให้ SS (error) = 80 และผลรวมของวิธีการทั้ง 4 คือ A_1B_1 = 15, A_1B_2 = 20 A_2B_1 = 25, A_2B_2 = 40

ก. จงทดสอบนัยสำคัญของวิธีการ (F = 4.67)

ข. ทดสอบนัยสำคัญของอิทธิพลหลัก และอิทธิพลร่วม A : F = 9.00, B : F = 4.00
AB : F = 1.00

16. กำหนดให้ข้อมูลจาก 2 × 2 × 2 แฟคทอเรียล มีดังนี้ จงวิเคราะห์ข้อมูล

A_1				A_2			
B_1		'32		B_1		B_2	
C_1	C_2	C_1	C_2	C_1	C_2	C_1	C_2
8	5	10	5	7	6	5	2
6	8	9	9	10	8	7	7
9	10	4	3	6	7	4	5
9	7	8	5	7	6	7	7
8	10	8	3	5	8	6	5
7	7	4	5	7	9	8	9
6	8	3	5	6	8	10	6
3	5	6	8	10	9	6	6

(A : F∠ 1.00, B : F = 7.39, c : F ∠ 1.00, AB : F Ƶ 1.00, AC : F ∠ 1.00, BC : F = 2.4
ABC : F∠1)

17. จงวิเคราะห์ข้อมูลต่อไปนี้

A_1				A_2			
B_1		B_2		B_1		B_2	
7	6	10	3	10	1	1	9
7	8	1	2	2	4	10	6
4	1	3	2	8	3	10	5
1	7	9	5	10	4	6	6

A_1				A_2			
B_1		B_2		B_1		B_2	
5	7	9	2	3	6	7	3
9	7	4	4	1	9	3	9
6	8	1	7	4	3	8	5
8	7	3	1	3	4	8	3
9	9	10	8	4	4	3	7
8	3	3	9	1	10	5	2

(A:F ∠ 1.00,B:F ∠ 1.00,C:F ∠ 1.00, AB:F = 4.05,AC:F ∠ 1.00,BC:F ∠ 1.00, ABC: F ∠ 1.00)

18. จงวิเคราะห์ข้อมูลต่อไปนี้

A_1			A_2			A_3			A_4		
B_1	B_2	B_3	B_1	B_2	B_3	B_1	B_2	B_3	B_1	B_2	B_3
38	54	65	24	21	35	36	35	35	45	45	34
45	34	86	43	67	45	81	36	65	55	98	65
22	54	62	56	98	76	22	54	67	34	65	65
23	23	26	75	46	89	23	65	76	34	34	43
45	32	42	43	55	98	45	78	55	45	54	36

(A : F = 1.34, B : F = 3.49, AB : F ∠ 1.00

19. จงวิเคราะห์ข้อมูลต่อไปนี้

	Catalyst					
	A		B		C	
Replicates	3	S	3	5	3	5
1	68	82	90	96	82	88
2	83	79	68	80	71	78
3	66	75	70	91	68	78
4	66	76	84	92	74	80

20. จงวิเคราะห์ข้อมูลจากการทดลองแบบแฟคทอเรียลแต่ไม่มีการซ้ำ

อุณหภูมิ ซ.	ความเข้มข้น ต่ำ	ปานกลาง	สูง
100	44	46	42
200	51	55	55
300	50	50	48

21. จงวิเคราะห์ข้อมูลจากการทดลองแบบแฟคทอเรียลที่มีการซ้ำต่อไปนี้

Gauge Block	ไมโครมิเตอร์ 1	2	3	4	5
A	.0110	.0115	.0130	.0151	.0121
B	.0135	.0127	.0132	.0155	.0128
C	.0127	.0124	.0132	.0152	.0130

22. การทดลองเรื่องดินระเบิด และไม่มีการซ้ำ ได้ข้อมูลดังนี้ จงวิเคราะห์ข้อมูล

ชนิดของผงระเบิด :		A			B			C		
จำนวนผงระเบิด : มิลลิกรัม		5	10	15	5	10	15	5	10	15
อุณหภูมิ ° ฟ.	ความดัน psi.									
-50	10000	7.4	7.0	6.8	5.4	5.0	4.8	7.2	6.9	6.6
	15000	7.5	7.2	6.7	5.5	5.2	4.7	7.2	6.6	6.5
	20000	7.4	7.4	6.0	5.4	5.4	4.0	7.2	6.7	6.2
75	10000	6.6	6.6	5.8	4.6	4.6	3.8	6.8	7.2	‘4.9
	15000	6.8	6.6	6.6	4.8	4.6	4.6	6.9	7.0	5.0
	20000	6.8	6.2	5.9	4.8	4.2	3.9	7.0	7.1	5.0
200	10000	5.1	5.1	5.1	3.1	3.1	3.1	6.0	4.9	4.8
	15000	5.1	4.8	4.9	3.1	2.8	2.9	6.4	4.8	4.1
	20000	5.2	4.7	5.0	3.2	2.7	3.0	5.9	4.9	2.0

23. การทดลองศึกษาจุดระเบิดของสวิช ชนิดไม่มีซ้ำ ได้ข้อมูลในตารางข้างล่าง จงวิเคราะห์ข้อมูล

แผ่นเหล็ก	Primary initiator (Mg.)	ความดัน (psi)		
		12000	20000	28000
ไม่ใช่เทฟลอน	5	12.3	10.6	15.2
	10	10.4	9.5	15.0
	15	8.8	9.1	14.5
เทฟลอน	5	12.4	11.7	15.0
	10	11.0	11.0	14.6
	15	11.0	9.8	14.6