บทที่ 4
แผนงานทดลองแบบจัตุรัสลาติน
Latin-square Design

แผนงานทดลองแบบจัตุรัสลาตินเป็นการจัดวิธีการในบล็อคแบบ 2 ทิศทาง คือทางด้านแถว และทางด้านคอลัมน์ เช่น ถ้ามี 4 วิธีการ จะมีแผนผังการจัดวิธีการ ดังนี้

A	D	C	B
B	C	A	D
D	A	B	C
C	B	D	A

จะเห็นว่าทุกวิธีการจะอยู่ในทุกแถวและทุกคอลัมน์ 1 ครั้ง และ ทุกแถวและทุกคอลัมน์เป็นบล็อคที่สมบูรณ์เพราะมีครบทุกวิธีการ ดังนั้นในการวิเคราะห์ความผันแปร จึงสามารถตัดหรือแยกความผันแปรที่เกิดจากความแตกต่างของแถวต่าง ๆ และคอลัมน์ต่าง ๆ ออกไปจากความคลาดเคลื่อนจากการทดลอง

แผนงานทดลองนี้เหมาะกับงานทดลองที่มีความผันแปร 2 แหล่ง (ไม่นับวิธีการ) ถ้าเป็นการทดลองเกษตร ความผันแปรนี้คือความสมบูรณ์ของดินจาก 2 ทิศทาง หรือ การทดลองสาขาอื่น ๆ เช่นการตลาด อาจเขียนผังทดลองใหม่ ดังนี้

A D C B	B C A D	D A B C	C B D A

แถว แทนวันต่าง ๆ

คอลัมน์ แทนร้านค้า

แบบจำลอง

$$Y_{ij(K)} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \tau_{(k)} + \epsilon_{ij(k)}$$

ค่าประมาณของแบบจำลองคือ

$$Y_{ij(k)} = \overline{Y}_{...} + (\overline{Y}_{i..} - \overline{Y}_{...}) + (\overline{Y}_{.j.} - \overline{Y}_{...}) + (\overline{Y}_{..(k)} - \overline{Y}_{...}) + (Y_{ijk} - \overline{Y}_{i..} - \overline{Y}_{.j.} - \overline{Y}_{..(k)} + 2\overline{Y}_{...})$$

ในเมื่อ α_i , β_j , $\tau_{(k)}$ คืออิทธิพลของ แถว คอลัมน์ และ วิธีการตามลำดับ

และ ϵ_{ijk} NID$(0,\sigma^2_\epsilon)$

ตัวอย่าง

ผลผลิตข้าวมิเลท์ซึ่งปลูกในระยะห่างต่าง ๆ กัน 5 ระยะ ดังนี้

Column / Row	1	2	3	4	5	Sum
1	B: 257	E: 230	A: 279	C: 287	D: 202	1255
2	D: 24.5	A: 283	E: 245	B: 280	C: 260	1313
3	E: 182	B: 252	c : 280	D: 246	A: 250	1210
4	A: 203	C: 204	D: 227	E: 193	B: 259	1086
5	C: 231	D: 271	B: 266	A: 334	E: 338	1440
Sum	1118	1240	1297	1340	1309	6304

	A: 2"	B: 4"	c: 6"	D: 8"	E: 10"	
Sum	1349	1314	1262	1191	1188	6304
Mean	269.8	262.8	252.4	238.2	231.6	252.2

Correction factor = 6304'125 = 1,589,617

Total SS : $(257^2 + \ldots + 338^2)$ − CF. = 36,571

SS (Rows) : $(1255^2 + \ldots + 1440^2)/5$ CF. 13,601

SS (Columns) : $(1118^2 + \ldots + 1309^2)/5$ − CF. = 6,146

SS (Treatments) = $(1349^2 + \ldots + 1188^2)/5$ − CF. = 4,156

SS (Error) = 12668

Source of Variation	df.	Sum of squares	Mean Square	F-Ratio
Rows	4	13601	3400	3.22
Columns	4	6146	1536	1.45
Treatments	4	4156	1039	0.98
Error	12 ---	12668	1056	
Total	24	3657 1		

Component Analysis in Latin Square

Source	df.	E (MS) Model 1	E (MS) Model 2
Rows	r - l	$\sigma^2 + r\Sigma\alpha_i^2/(r-1)$	$\sigma^2 + r\sigma_\alpha^2$
Columns	r - l	$\sigma^2 + r\Sigma\beta_j^2/(r-1)$	$\sigma^2 + r\sigma_\beta^2$
Treatments	r - l	$\sigma^2 + r\Sigma\tau_{(k)}^2/(r-1)$	σ^2 t $r\sigma_\tau^2$
Error	(r-l) (r-2)	σ^2	σ^2

ข้อเสียเปรียบของแผนงานทดลองแบบจัตุรัสลาตินคือ ถ้าอิทธิพลของแถว คอลัมน์ และ วิธีการคู่ใดคู่หนึ่ง หรือหลายคู่มีอิทธิพลร่วมกัน ค่าสถิติเอฟที่คำนวณได้จะไม่มีการแจกแจงแบบเอฟในตาราง จึงไม่สามารถทดสอบได้ ดังนั้น หากผู้ทดลองไม่มั่นใจว่ามีอิทธิพลร่วมกันหรือไม่ ก็ไม่ควรใช้แผนงานทดลองแบบนี้ ข้อเสียเปรียบอีกข้อคือ เนื่องจากข้อจำกัดที่จะต้องมีจำนวนแถว จำนวนคอลัมน์ และจำนวนกรรมวิธีที่เท่ากัน ดังนั้น ถ้ามีจำนวนวิธีการมาก ๆ จะประสบปัญหาในการหาหน่วยทดลองให้แถวและคอลัมน์ จัตุรัสที่นิยมมากคือขนาด 5 คูณ 5 ถึงขนาด 8 คูณ 8 และจัตุรัสที่ขนาดโตกว่า 12 คูณ 12 มักไม่ใคร่พบ ส่วนจัตุรัสที่เล็กเกินไป ก็มีปัญหาเพราะให้จำนวน df. สำหรับประมาณความคลาดเคลื่อนจากการทดลองน้อยเกินไป แต่มีวิธีแก้ไขได้โดยการใช้หลาย ๆ จัตุรัสรวมกัน เช่น ขนาด 4 คูณ 4 จำนวน 2 อันจะให้ df. (error) = 15 การแบ่งแยก df. ของการวิเคราะห์จัตุรัสขนาด $r \times r$ จำนวน s จัตุรัสมีวิธีการดังนี้

Source	df.
จัตุรัส	s-l = I
แถวในจัตุรัส	S (r – 1) = 6
คอลัมน์ในจัตุรัส	S (r – 1) = 6
วิธีการ	r – 1 = 3
ความคลาดเคลื่อน	S (r – 1) (r – 2) + (s – 1) (r – 1) = 15
รวม	$sr^2 - 1 = 31$

แสดงการคำนวณผลบวกกำลังสองในจัตุรัสขนาด $r \times r$

ที่มา	df.	Sum of Squares	
		Definition formula	Computing formula
แถว	$r-1$	$r\Sigma(\overline{X}_{i.} - \overline{X}_{..})^2$	$\Sigma X_{i.}^2/r - CF.$
คอลัมน์	$r-1$	$r\Sigma(\overline{X}_{.j} - \overline{X}_{..})^2$	$\Sigma X_{.j}^2/r - CF.$
วิธีการ	$r-1$	$r\Sigma\overline{X}_{(k)} - \overline{X}_{..})^2$	$\Sigma X_{(k)}^2/r - CF$
ความคลาดเคลื่อน	$(r-1)(r-2)$	$\Sigma(X_{ij} - \overline{X}_{i.} - \overline{X}_{.j} - \overline{X}_{(k)} + 2\overline{X}_{..})^2$	by subtraction
รวม	r^2-1	$\sum_i\sum_j(X_{ij(k)} - X_{..})^2$	$\sum_i\sum_j X_{ij}^2 - CF.$

การจัดวิธีการให้หน่วยทดลอง (Randomization)

ในตาราง (ก) ข้างล่าง เป็นตัวอย่างของจัตุรัสลาตินขนาด 3×3 ถึง 8×8 ส่วนจัตุรัสขนาดใหญ่กว่านี้ ก็สร้างเองได้โดยการเลื่อนอักษรไปทางซ้ายมือ 1 ตำแหน่ง ตารางเหล่านี้เรียกว่าจัตุรัสมาตรฐานเพราะอักษรที่อยู่แถวแรก และ คอลัมน์แรกอยู่ในรูปเรียงกันตามลำดับสำหรับจัตุรัสมาตรฐานแต่ละอัน จะขยายเป็นจัตุรัสลาตินได้อีกในจำนวนต่าง ๆ กันในตาราง (ข) เช่น ขนาด 3 × 3 จะกระจายได้ 12 ตาราง ขนาด 4 × 4 กระจายได้ 576 ตาราง เป็นต้น วิธีจัดกรรมวิธีให้หน่วยทดลอง มีดังนี้

1. สำหรับจัตุรัสขนาด 3 × 3 ให้สุ่มแถว และคอลัมน์จากจัตุรัสมาตรฐาน
2. สำหรับจัตุรัสขนาด 4×4 ให้สุ่มจัตุรัสมาตรฐานมา 1 ตาราง แล้วสุ่มแถว และคอลัมน์ คอลัมน์
3. สำหรับจัตุรัสขนาดอื่น ๆ ให้สุ่มแถว และ คอลัมน์ และสุ่มอักษรให้แก่วิธีการ

ตาราง (ก)

3 x 3	4 x 4				5 × 5	6 × 6	7 x 7	x x x
	(a)	(b)	(c)	(d)				
ABC	ABCD	ABCD	ABCD	ABCD	ABCDE	ABCDEF	ABCDEFG	ABCDEFGH
BCA	BADC	BCDA	BDAC	BADC	BAECD	BCFADE	BCDEFGA	BCDEFGHA
CAB	CDBA	CDAB	CADB	CDAB	CDAEB	CFBEAD	CDEFGAB	CDEFGHAS
	DCAB	DABC	DCBA	DCBA	DEBAC	DEABFC	DEFGABC	DEFGHABC
					ECDBA	EADFCB	EFGABCD	EFGHABCD
						FDECBA	FGABCDE	FGHABCDE
							GABCDEF	GHABCDEF

ขนาด	3 × 3	4 × 4	5 × 5	6 × 6	7 × 7
จำนวนจัตุรัสมาตรฐาน	1	4	56	9408	16,942,080

ตาราง (ข)

ขนาด	3 × 3	4 × 4	5 × 5	6 × 6	7 × 7
จำนวนจัตุรัสลาติน	112	576	161,280	812,851,200	61,479,419,904,000

ข้อมูลสูญหาย

ใช้วิธีการประมาณเช่นเดียวกับแบบบล็อคสมบูรณ์ ถ้ามีสูญหาย 1 ค่า ประมาณโดย

$$X = \frac{r(R + C + T) - 2G}{(r-1)(r-2)}$$

ในเมื่อ R,C,T คือผลรวมของแถว, คอลัมน์ และวิธีการที่มีข้อมูลสูญหายตามลำดับ G คือผลรวมทั้งหมด ถ้ามีข้อมูลสูญหายหลาย ๆ จำนวน ให้ใช้วิธีเดียวกับแบบบล็อคสมบูรณ์คือต้องประมาณค่าต่าง ๆ จนเหลือค่าสุดท้ายค่าเดียวจึงใช้สูตรคำนวณ และสลับคำนวณค่าอื่น ๆ บ้างจนครบทุกค่า และย้อนกลับมาคำนวณแต่ละค่าจนครบ 2 รอบ ข้อมูลสูญหายแต่ละค่าทำให้ df ของความคลาดเคลื่อนและผลรวมหายไปค่าละ df และมีผลทำให้ผลบวกกำลังสองของวิธีการเอียงเฉไปทางบวกด้วยจำนวน

$$\text{bias} = \frac{[G - R - C - (r-1)T]^2}{(r-1)(r-2)}$$

ถ้ามีข้อมูลสูญหายเพียงค่าเดียว ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของผลต่างของค่าเฉลี่ยของวิธีการที่มีข้อมูลสูญหาย 1 ค่า กับวิธีการอื่น ๆ คือ

$$S\sqrt{\left(\frac{2}{r} + \frac{1}{(r-1)(r-2)}\right)}$$

การประมาณประสิทธิภาพ

เมื่อต้องการทราบว่าแผนงานทดลองแบบจัตุรัสลาตินซึ่งได้ทำการทดลองสิ้นสุดลงไปแล้ว เมื่อเปรียบเทียบกับการวางแผนแบบสุ่มสมบูรณ์ และ แบบบล็อคสมบูรณ์ จะดีกว่าหรือด้อยกว่า

$$\widehat{MSE}(RCB) = \frac{n_c E_c + (n_t + n_e)E_e}{n_c + n_t + n_e}$$

(rows as blocks)

ถ้า **df** ของ **error** น้อยกว่า 20 ต้องปรับด้วย precision **factor**

$$\text{precision factor} = (n_1 + 1)(n_2 + 3) / (n_2 + 1)(n_1 + 3)$$

ตัวอย่าง กำหนดตารางวิเคราะห์งานทดลองหนึ่ง ดังนี้

Sov	df.	ss	MS
Rows	3	1.95	0.65
Columns	3	6.80	2.27
Varieties	3	7x.93	26.31
Error	6	2.72	0.45

RE : (LS to RCB) = $\widehat{MSE}$ (RCB) / MSE (LS)

rows as blocks

$$\widehat{MSE}(RCB)_{rows} = (2.27)(3) + (3+6)(0.45) / (3+3+6) = 0.91$$

$$\widehat{MSE}(RCB)_{cols} = (3(0.65) + (3+6)(0.45) / (3+3+6) = 0.50$$

$$\text{adjustment factor} = (6+1)(9+3) / (9+1)(6+3) = 0.933$$

$$RE:(LS \text{ to } RCB)_{rows} = \frac{0.91}{0.45}(.933)100 = 189\%$$

$$RE:(LS \text{ to } RCB)_{cols} = \frac{0.50}{0.45}(.933)100 = 104\%$$

$$RE:(LS \text{ to } CRD) = \frac{R + C + (r-1)E}{(r+1)E}$$

$$= \frac{2.92 + 3(0.45)}{5(0.45)} = 1.8977$$

$$= 1.8977(.897)100 = 170.22$$

$$\widehat{MSE}(CRD) \quad \frac{R+C+(r-1)E}{(r+1)}$$

$$\text{adj.factor} = \frac{(6+1)(12+3)}{(12+1)(6+3)} = .897$$

หมายความว่า 100 ซ้ำของจัตุรัสลาติน จะให้ประสิทธิภาพเท่ากับแบบบล็อคสมบูรณ์ที่มีแถวเป็นบล็อค 189 บล็อค นั่นคือ จัตุรัสลาตินให้ประสิทธิภาพเหนือกว่า 89% และทำนองเดียวกัน การวางแผนแบบจัตุรัสลาตินมีประสิทธิภาพเหนือแบบบล็อคสมบูรณ์ที่มีคอลัมน์เป็นบล็อค 4% และมีประสิทธิภาพเหนือการวางแผนแบบสุ่มสมบูรณ์ 70%

ความสัมพันธ์ระหว่างการวางแผนแบบจัตุรัสลาตินและการทดลองแบบแฟคทอเรียลที่มี 3 แฟคเตอร์

ถ้าลองเขียนส่วนผสมของวิธีการของ $3 \times 3 \times 3$ แฟคทอเรียล จะได้ผังดังนี้

	c_1			c_2			c_3		
	b_1	b_2	b_3	b_1	b_2	b_3	b_1	b_2	b_3
a_1	X	Y	Z	Z	X	Y	Y	Z	X
a_2	Z	X	Y	Y	Z	X	X	Y	Z
a_3	Y	Z	X	X	Y	Z	Z	X	Y

โดยที่ส่วนผสมของวิธีการที่ใช้สัญญลักษณ์ X ได้แก่วิธีการต่าง ๆ ดังนี้

(X)

abc_{111}	abc_{122}	abc_{133}
abc_{221}	abc_{232}	abc_{213}
abc_{331}	abc_{312}	abc_{323}

ซึ่งสามารถเขียนใหม่ในรูปจัตุรัสลาติน ดังนี้

(X)

	b_1	b_2	b_3
a_1	c_1	c_2	c_3
a_2	c_3	c_1	c_2
a_3	c_2	c_3	c_1

โดยที่ c_1, c_2, c_3 หมายถึงวิธีการต่าง ๆ ในการวางแผนแบบจัตุรัสลาติน (A, B, C)

ส่วนวิธีการที่ใช้สัญญลักษณ์ Y และ Z ของการทดลองแบบแฟคทอเรียล ก็จะจัดใส่ตารางจัตุรัสลาตินได้เช่นกัน ดังนี้

(Y)

	b_1	b_2	b_3
a_1	c_3	c_1	c_2
a_2	c_2	c_3	c_1
a_3	c_1	c_2	c_3

(Z)

	b_1	b_2	b_3
a_1	c_2	c_3	c_1
a_2	c_1	c_2	c_3
a_3	c_3	c_1	c_2

ในบทต่อไปเมื่อกล่าวถึงเรื่อง "อิทธิพลพัวพัน" และบล็อคไม่สมบูรณ์ จัตุรัสลาตินคือลักษณะหนึ่งของบล็อคไม่สมบูรณ์เพราะมีส่วนผสมของวิธีการไม่ครบทั้งหมดของ 3 แฟคเตอร์ และจัตุรัสแต่ละอันจะสร้างได้โดยให้อิทธิพลของ ABC พัวพันกับบล็อค กล่าวคือ df ของ ABC = 2 (2) (2) = 8 ถ้าแบ่งโดยใช้ modular (ซึ่งจะกล่าวถึงต่อไป) จะแบ่งเป็น 3 ส่วน ๆ ละ 2 df แต่ละส่วนคือ definining contrast ของจัตุรัสแต่ละอัน

Latin Square	Component of ABC
(X)	$(AB^2C)_0$
(Y)	$(AB^2C)_2$
(Z)	$(AB^2C)_1$

การใช้แผนงานทดลองแบบจัตุรัสลาตินในการทดลองทางจิตวิทยา

แผนผังของงานทดลองแบบหนึ่งที่ใช้บ่อยคือ (ให้ $p \times p = 3 \times 3$)

	b_1	b_2	b_3
a_1	c_2	c_1	c_3
a_2	c_3	c_2	c_1
a_3	c_1	c_3	c_2

โดยที่แต่ละ Cell ประกอบด้วยค่าสังเกต n จำนวน และมีแบบจำลอง ดังนี้

$$X_{ijkm} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \text{residual} + \epsilon_{m(ijk)}$$

$$i = 1,2,\ldots,p \;;\; j = 1,2,\ldots,q \;;\; k = 1,2,\ldots,r \;,\; m = 1,2,\ldots,n$$

$$p = q = r,$$

μ คือค่าเฉลี่ยรวบยอด

α_i อิทธิพลของแถวที่ i ซึ่งเป็นค่าคงที่สำหรับค่าสังเกตทุกค่าในประชากร

β_j อิทธิพลของคอลัมน์ที่ j ซึ่งเป็นค่าคงที่สำหรับค่าสังเกตุทุกค่าในประชากร

γ_k อิทธิพลของวิธีการที่ k ซึ่งเป็นค่าคงที่สำหรับค่าสังเกตุทุกค่าในประชากร

residual อิทธิพลทุกอย่างของ แถว คอลัมน์ และวิธีการรวมกันซึ่งไม่สามารถหาโดยตรง ถ้าอิทธิพลร่วมกันเป็นศูนย์ จะมีค่าเฉลี่ยเป็น 0 และความแปรปรวน σ^2_{res}

$\epsilon_{m(ijk)}$ คือความคลาดเคลื่อนจากการทดลองซึ่งเป็นอิสระกัน มีการแจกแจงแบบปกติ มีค่าเฉลี่ยเป็น 0 และความแปรปรวน σ^2_ϵ

และจะมีตารางวิเคราะห์ความแปรปรวนดังนี้

	df.	E(MS)
A	$p - 1$	$\sigma_\epsilon^2 + np\sigma_\alpha^2$
B	$p - 1$	$\sigma_\epsilon^2 + np\sigma_\beta^2$
C (Treatments)	$p - 1$	$\sigma_\epsilon^2 + np\sigma_\gamma^2$
Residual	$(p - 1)(p - 2)$	$\sigma_\epsilon^2 + \sigma_{res.}^2$
Within cell	$p^2(n - 1)$	σ_ϵ^2
Total	$np^2 - 1$	

ตัวอย่าง

A คือโรงพยาบาล มี 3 แห่งคือ a_1, a_2, a_3

B คือยา มี 3 อย่างคือ b_1, b_2, b_3

C คือประเภทของคนไข้ มี 3 ประเภท คือ c_1, c_2, c_3

แผนผังงานทดลองและข้อมูลดิบมีดังนี้

	b_1	b_2	b_3		b_1	b_2	b_3
a_2	c_3	c_2	c_1	a_2	6, 8, 12, 7	0, 0, 1, 4	0, 2, 2, 5
a_1	c_2	c_1	c_3	a_1	2, 5, 3, 1	2, 2, 4, 6	9, 10, 12, 12
a_3	c_1	c_3	c_2	a_3	0, 1, 1, 4	2, 1, 1, 5	0, 1, 1, 4

Cell totals :

	b_1	b_3	b_2	Total		
a_2	33	5	9	47	$= A_2$	
a_1	11	14	43	68	$= A_1$	$n = 4$
a_3	6	28	58	21	$= A_3$	$p = 3$
Total	50	28	58	136	$= G$	
	B_1	B_3	B_2			

Treatment Totals : $C_1 = 29$ $C_2 = 22$ $C_3 = 85$, $n = 4$, $p = 3$, $N = 36$

1. CF. = G^2/N = 513.78 (1 df.)
2. ΣX^2 - CF = 978 -513.78 = 464.22 (35 df)
3. $\Sigma A^2/np$ - CF = 606.17 - 513.78 = 92.39 (2 df)
4. $\Sigma B^2/np$ - CF = 554 - 513.78 = 40.22 (2 df)
5. $\Sigma C^2/np$ - CF = 712.50 - 513.78 = 198.72 (2 df)
6. $\Sigma(ABC)^2/n$ - CF = 878.50 - 513.78 = 364.72 (8 df)
7. SS(Residual) = 6 - (3 + 4 + 5)
   = 364.72 - (92.39 + 40.22 + 98.72)
   = 33.39 (2 df)
8. SS(Within ceils) = 464.22 -364.72 = 99.5 (27 df)

Source of variation	df	SS	MS	F
A = โรงพยาบาล	2	92.3')	46.20	12.52 *
B = ยา	2	40.22	20.11	5.45 *
C = คนไข้	2	198.72	99.36	26.93 *
Residual	2	33.39	16.70	4.53
Within cell	27	99.50	3.69	$f_{.05}$ (2.27) = 3.35

การใช้แผนงานทดลองแบบลาตินซ้ำกันโดยแต่ละจัตุรัสเป็นอิสระกัน

เมื่อต้องการให้ค่าประมาณของความคลาดเคลื่อนเชื่อถือได้ ควรจะมี df ไม่ต่ำกว่า 30 ดังนั้นสำหรับจัตุรัสที่ไม่ใหญ่ จะมี df ของความคลาดเคลื่อนน้อยเกินไป วิธีแก้ไขคือการทำซ้ำกันหลาย ๆ ครั้ง แต่ทั้งนี้จะต้องมีการสุ่มจัดจัตุรัสใหม่ เพื่อให้แต่ละจัตุรัสเป็นอิสระกัน ในทางจิตวิทยา มักใช้บุคคลหรือสัตว์ทดลองเป็นแถว เช่นในตัวอย่างต่อไปนี้ เป็น จัตุรัส ขนาด 4 × 4 คอลัมน์คือเวลาของการทดลอง ส่วนวิธีการคืออิทธิพลของยา 4 ชนิด 2 ชนิดคือ S_1, S_2 เป็นยาตามสูตรมาตรฐานดั้งเดิม ส่วน U_1, U_2 เป็นสูตรที่ได้ปรับปรุงใหม่ ใช้ทดลอง

กับสุนัข 20 ตัว โดยสุ่มที่ละ 4 ตัวเข้ารับวิธีการในแต่ละจัตุรัส จัตุรัสแต่ละอันเป็นแบบสุ่มและเป็นอิสระกัน ได้ข้อมูล ดังนี้

แผนผังจัตุรัส	สุนัข	วัน 1	2	3	4	Total
S_1 S_2 U_2 U_1	1	13.8	17.0	16.0	16.0	62.8
U_2 U_1 S_1 S_2	2	15.8	14.3	14.8	15.4	60.3
S_2 S_1 U_1 U_2	3	15.0	14.5	14.0	15.0	58.5
U_1 U_2 S_2 S_1	4	14.7	15.4	14.8	14.0	58.9
	Σ	59.3	61.2	59.6	60.4	240.5
U_2 U_1 S_1 S_2	5	17.0	16.5	15.0	15.4	63.9
U_1 U_2 S_2 S_1	6	15.1	15.0	15.8	13.4	59.3
S_2 S_1 U_1 U_2	7	15.0	14.0	14.6	15.6	59.2
S_1 S_2 U_2 U_1	8	12.0	13.8	14.0	13.8	53.6
	Σ	59.1	59.3	59.4	58.2	236.0
S_2 U_2 S_1 U_1	9	14.6	15.4	14.0	14.8	58.8
U_1 S_1 U_2 S_2	10	13.6	15.3	17.2	15.3	61.4
U_2 S_2 U_1 S_1	11	14.4	13.8	14.4	15.0	57.6
S_1 U_1 S_2 U_2	12	15.8	15.0	15.2	15.8	61.8
	Σ	58.4	59.5	60.8	60.9	239.6
U_1 U_2 S_1 S_2	13	14.0	13.8	14.0	14.0	55.8
U_2 U_1 S_2 S_1	14	16.2	14.0	13.0	13.0	56.2
S_2 S_1 U_2 U_1	15	13.0	14.0	14.0	13.0	54.0
S_1 S_2 U_1 U_2	16	13.2	16.0	14.9	16.4	60.5
	Σ	56.4	57.8	55.9	56.4	226.5
S_1 U_1 S_2 U_2	17	14.2	14.1	15.0	14.4	57.7
U_1 S_1 U_2 S_2	18	13.0	13.4	13.8	14.0	54.2
U_2 S_2 U_1 S_1	19	15.8	16.0	15.0	15.4	62.2
S_2 U_2 S_1 U_1	20	15.2	16.2	15.0	15.3	61.7
	Σ	58.2	59.7	58.8	59.1	235.8

การคำนวณ

ลองพิจารณาดูตารางวิเคราะห์ของจัตุรัสแต่ละอัน เช่น จัตุรัสที่ (1) มีดังนี้

SS (Total) = $(13.8' + \ldots + 14.0^2)$ $(240.5)^2/16 = 11.294$

ss (วัน) = $(59.3^2 + \; + 60.4^2)/4 - (240.5)^2/16 = 0.546$

SS (สุนัข) = $(62.8^2 + . + 58.9^2)/4 - (240.5)^2/16 = 2.832$

ss (ยา) = $(57.1^2 + 62.2^2 + . \; 62.2^2)/4 - (240.5)^2/16 = 4.756$

SS (error) = $11.294 - 0.546 - 2.832 \quad 4.756 = 3.160$

SOV.	df.	ss	MS	F
Treatments (ยา)	3	4.756	1.585	3.01
สุนัข	3	2.832	0.944	
วัน	3	0.546	0.182	
Error	6	3.160	0.527	
Total	1.5	11.294		

เมื่อทำตารางวิเคราะห์ของจัตุรัสแต่ละอันทั้ง 5 จัตุรัสแล้ว ให้นำเอาผลบวกกำลังสองและ df ของแต่ละจัตุรัสมารวมกัน จะได้ตารางวิเคราะห์ข้างล่างนี้

SOV.	df.	Sum of Squares
Treatments (ยา)	15	*22.57*
สุนัข	15	35.50
วัน	1.5	2.62
Error	30	18.21
Squares	4	7.69
Total	79	86.59

โดยที่

SS (จัตุรัส) = $(240.5^2 + 236.0^2 + \ldots + 235.8^2)/16 - 1178.4^2/80 = \mathbf{7.69}$

ลองพิจารณาผลบวกกำลังสองจากจัตุรัสต่อไปนี้ ซึ่งคือผลรวมของวันจำแนกตามจัตุรัสต่าง ๆ

จัตุรัส	วัน				**Total**
	1	2	3	4	
1	59.3	61.2	59.6	60.5	240.5
2	59.1	59.3	59.4	58.2	236.0
3	58.4	59.5	60.8	60.9	239.6
4	56.4	57.8	55.9	56.4	226.5
5	58.2	59.7	58.8	59.1	235.8
Σ	291.4	297.5	294.5	295.0	1178.4

SS (Cells) = $(59.3^2 + 59.1^2 + \ldots + 59.1^2)/4 \quad (1178.4)^2/80 = 10.31$ (19 df)

SS (วัน) = $(291.4^2 + 297.5^2 + \_\_\_ + 295.0^2)/20 - 1178.4^2/80 = 0.94$ (3 df)

SS (จัตุรัส) = 7.69 (4 df)

SS (วัน $\times$ จัตุรัส) = 10.31 $-$ 0.94 $-$ 7.69 = 1.68 (12 df)

จะเห็นว่าจากตารางผลรวมของ 5 จัตุรัส (ตารางวิเคราะห์)

SS (วัน) = 2.62, df = 15

= SS (วัน) 3 df + SS (วัน $\times$ จัตุรัส) 12 df

= 0.94 (3 df) + 1.68 (12 df) = 2.62 (15 df)

และในทำนองเดียวกัน ค่าผลบวกกำลังสองที่ได้จากตารางผลรวมของจัตุรัส $\times$ ยา ข้างล่าง

	ยา			
จัตุรัสที่ 1	S_1	S_2	U_1	" 2
จัตุรัสที่ 2	S_1	S_2	U_1	" 2
จัตุรัสที่ 3	S_1	S_2	U_1	" 2
จัตุรัสที่ 4	S_1	S_2	U_1	U_2
จัตุรัสที่ 5	S_1	S_2	U_1	U_2

จะมีความสัมพันธ์กับผลบวกกำลังสองในตารางวิเคราะห์รวม ดังนี้

SS (ยา $\times$ จัตุรัส) = 7.42 (12 df)

SS (ยา) = 15.15 (3 df)

SS (ยา) = 22.57 (15 df) จากตารางวิเคราะห์รวม

ดังนั้น ตารางวิเคราะห์รวม จึงอาจเขียนใหม่ได้ ดังนี้

ที่มา	df.	SS	MS	F
จัตุรัส	4	7.69	1.922	
ระหว่างสุนัขในจัตุรัสเดียวกัน	15	35.50	2.367	
ยา	3	15.15	5.050	8.32
วัน	3	0.94	0.313	
จัตุรัส × วัน	12	1.68	0.140	
จัตุรัส × ยา	12	7.42	0.618	
ความคลาดเคลื่อน	30	18.21	0.607	
รวม	79	86.59		

ในการใช้จัตุรัสหลาย ๆ จัตุรัสเช่นนี้ ควรสังเกตดูว่าความคลาดเคลื่อนจากการทดลองของแต่ละจัตุรัสแตกต่างกันมากหรือไม่ ถ้าต่างกันมากแสดงว่าบกพร่องในเทคนิคการทดลองบางประการ สำหรับกรณีในตัวอย่าง ความคลาดเคลื่อนไม่ต่างกันมาก จึงนำมารวมกันเป็น pooled error ได้ มิหนำซ้ำถ้าพิจารณาให้ละเอียดต่อไป จะเห็นว่า MS (จัตุรัส × ยา) = 0.618 และ MS (จัตุรัส × วัน) เป็นค่าที่ไม่มากกว่าความคลาดเคลื่อน จึงควรเอาผลบวกกำลังสอง และ df มารวมกับความคลาดเคลื่อน เพื่อจะได้มี df มาก ๆ จากตัวอย่างเมื่อรวมกันจะได้ SS (pooled error) = 1.68 + 7.42 + 18.21 = 27.31, df = 54 ดังนั้น MS (pooled error) = $\frac{27.31}{54}$ = 0.506 และ

$$F \text{ (treatments)} = \frac{5.050}{0.506} = 9.98$$

การวางแผนแบบจัตุรัสลาตินและให้มีการซ้ำในจัตุรัสเดียวกัน

แผนผังของงานทดลอง เช่น จัตุรัส ขนาด 3 × 3 โดยมีการสุ่มบุคคลเป็นกลุ่ม ๆ ละ n คนเข้ารับการทดลองในแต่ละแถว บุคคลภายในแต่ละกลุ่ม เช่นในกลุ่มที่ 1 ทุกคนจะได้รับการทดลอง 3 วิธีการ/คน แต่ลำดับที่ของการรับวิธีการเป็นแบบสุ่มสำหรับแต่ละคน

แผนผังงานทดลองจะมีดังนี้

	a_1	a_2	a_3
G_1	b_1	b_1	b_1
G_2	b_2	b_2	b_2
G_3	b_3	b_3	b_3

ส่วนแบบจำลองโดยสมมุติว่าไม่มีอิทธิพลร่วมกันระหว่างกลุ่มกับแฟคเตอร์อื่น ๆ มีดังนี้

$$X_{ijkm} = \mu + \delta_k + \pi_{m(k)} + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta'_{ij}$$

sov.	df.	E (MS) A, B Fixed. n Random
Between subjects	**np − 1 = 3n − 1**	
B (Treatments)	p - 1 = 2	$\sigma_\epsilon^2 + p\sigma_\pi^2 + np\sigma_\beta^2$
Error (a)	p (n-l) = 3 (n-l)	$\sigma_\epsilon^2 + p\sigma_\pi^2$
Within subjects	np (p-l) = 6n	
A (คอลัมน์)	p - l = 2	$\sigma_\epsilon^2 + \sigma_{\alpha\pi}^2 + np\sigma_\alpha^2$
AB	(P-l) (P-1) = 4	$\sigma_\epsilon^2 + \sigma_{\alpha\pi}^2 + n\sigma_\beta^2$
A x subj.w.groups	p (n-l) (p-l) = 6n − 6	$\sigma_\epsilon^2 + \sigma_{\alpha\pi}^2$

ตัวอย่าง

		เวลา					
วิธีการ	**บุคคล**	1	2	3	4	5	total
3 6 4 1 5	1	11	15	10	13	10	59
	2	7	8	12	17	16	70
	3	12	17	9	19	18	75
	4	13	16	17	15	15	76
	5	14	17	18	18	15	82
	Σ	57	83	66	82	74	362
4 7 5 3 6	6	8	11	11	15	14	59
	7	13	13	13	5	10	54
	8	19	16	18	14	21	88
	9	8	17	12	14	17	68
	10	9	9	16	10	11	55
	Σ	57	66	70	58	73	324
5 3 6 4 7	11	10	8	13	11	17	59
	12	16	16	18	14	19	83
	13	15	15	16	14	14	74
	14	12	14	15	13	16	70
	15	12	10	14	12	16	64
	Σ	65	63	76	64	82	350

วิธีการ	บุคคล	เวลา					รวม
6 4 7 5 3	16	13	12	16	14	9	64
	17	16	10	19	16	11	72
	18	13	15	13	13	9	63
	19	11	10	13	11	7	52
	20	6	16	13	17	10	6 2
	Σ	59	63	74	71	46	313
7 5 3 6 4	21	11	8	9	12	15	55
	22	20	18	10	18	17	83
	23	16	14	10	12	13	65
	24	14	15	16	16	17	78
	25	11	12	10	15	15	63
	Σ	72	67	55	73	77	344
							1693

1. SS(total) = $(11^2 + 7^2 + \ldots + 15^2)$ $1693^2/125$ = 1327.01 (124df)

2. SS (แถว) = $(59^2 + 70^2 + + 63^2)/5 -$ CF = 495.41 (24df)

3. SS(กลุ่ม) = $(362^2 + 324^2 + + 344^2)/25 -$ CF. = 63.01 (4df)

4. SS(Error(a)) = (2) − (3) = 432.40 (20df)

5. SS(เวลา) = $(313 + 342^2 + + 352^2)/25 -$ CF. = 44.13 (4df)

6. SS (วิธีการ) = $(279^2 + 327^2 + \ldots + 376^2)/25 -$ CF. = 232.0; (4df)

7. SS(Cells) = $(57^2 + 57^2 + + 77^2)/5$ CF. = 414.21 (24df)

8. SS (Latin square error) = (7) − (3) − (5) − (6)

= 414.21 63.02 − 44.13 232.05 = 75.02 (12df)

9. SS(Error) = (1) − (2) − (5) − (6) = 555.42 (92df)

&mm-

SS (บุคคล x เวลา) จากแต่ละจัตุรัส df = 4 (4) = 16

รวมกัน 5 จัตุรัส = 16 x 5 = 80 df SS = 480.40

และรวมกัน SS (error) ในข้อ (8) df = 12 = 75.M

555.42 df = 92

ลำดับที่ วิธีการ	เวลา 1	2	3	4	5	Total
3 6 4 7 5	57	83	66	82	74	362
4 7 5 3 6	57	66	70	58	73	324
5 3 6 4 7	65	63	76	64	82	350
6 4 7 5 3	59	63	74	71	46	313
7 5 3 6 4	72	67	55	73	77	344
	310	342	341	348	352	1693

δ_k คืออิทธิพลของกลุ่ม

$\pi_{m(k)}$ คืออิทธิพลของบุคคลภายในกลุ่ม

$\alpha\beta_{ij}$ คืออิทธิพลร่วมกันของแฟคเตอร์ A และ B แต่หาได้เพียงบางส่วน

df. ของ AB ควรจะต้องมี (p-1) (p-1) แต่ในตารางมีเพียง (p-1) (p-2) ที่หายไป (p-1) คือส่วนความผันแปรระหว่างกลุ่ม แต่เนื่องจากความผันแปรระหว่างกลุ่มส่วนหนึ่งคือความผันแปรของส่วนผสมของ A และ B ทั้งนี้เพราะ

SS (AB) = SS (กลุ่ม) + SS (AB′)

SOV.	df	E (MS) A, B Fixed, random
Between subjects	np-1 = **3n-1**	
ระหว่างกลุ่ม (แถว)	p-l = 2	$\sigma_\epsilon^2 + p\sigma_\pi^2 + np\sigma_\alpha^2$
บุคคลภายในกลุ่ม (E,)	p (n-l) = 3 (n-1)	$\sigma_\epsilon^2 + p\sigma_\pi^2$
within subjects	np (p-l) = 6n	
A (คอลัมน์)	p-l = 2	$\sigma_\epsilon^2 + np\sigma_\alpha^2$
B (วิธีการ)	p-l = 2	$\sigma_\epsilon^2 + np\sigma_\beta^2$
(AB′)	(P-l) (P-2) = 2	$\sigma_\epsilon^2 + n\sigma_{\alpha\beta}^2$
within group (E_b)	p (n-l) (p-l) = 6n − 6	σ_ϵ^2

มีการจัดอีกวิธีหนึ่งตามแผนผังข้างล่างนี้

		a_1	a_2	a_3
	G_1	b_3	b_1	b_2
กลุ่ม	G_2	b_1	b_2	b_3
	G_3	b_2	b_3	b_1

บุคคล n คนในกลุ่มที่ 1 จะได้รับวิธีการ ab_{13}, ab_{21}, ab_{32} ตามลำดับแบบสุ่ม และจะมีแบบจำลอง ดังนี้

$$X_{ijkm} = \mu + \beta_j + \pi_{k(j)} + \delta_i + \delta\beta_{ij} + \delta\pi_{ik(j)}$$

การใช้จัตุรัสขนาด 2 × 2 ซ้ำหลาย ๆ ครั้ง

เนื่องจากการใช้จัตุรัสแบบ 2 × 2 เพียงตารางเดียวจะไม่สามารถหาค่าประมาณของความคลาดเคลื่อนจากการทดลองได้ จึงควรทำซ้ำหลายครั้ง สำหรับแผนผังของจัตุรัสแบบ 2 × 2 นั้นมีเพียง 2 แบบ คือวิธีการอยู่ในรูป A B และ B A ดังนั้นจึงไม่มีความแตกต่างกันระหว่างการซ้ำของจัตุรัสต่าง ๆ ที่เป็นอิสระกัน และการซ้ำของจัตุรัสเดียวกัน เพราะจะได้จำนวนครั้งที่ A และ B ขึ้นต้นก่อนเป็นจำนวนเท่า ๆ กัน ดังตัวอย่างต่อไปนี้

แผนผัง

บุคคล	เวลา 1	เวลา 2
1	**A**	**B**
2	**B**	**A**
3	A	B
4	B	A
5	B	A
6	A	B
7	A	B
8	B	A
9	A	B
10	B	A

ค่าสังเกต

บุคคล	เวลา 1	เวลา 2	รวม
1	9	6	15
2	5	8	13
3	10	Y	19
4	7	7	14
5	4	7	11
6	8	9	17
7	8	4	12
8	5	11	16
9	5	1	6
10	6	4	10
Σ	67	66	133

จัตุรัส	เวลา 1	2	total
1	14	14	28
2	17	16	33
3	12	16	28
4	19	15	28
5	11	5	16
Σ	67	66	133

จัตุรัส	วิธีการ A	B	total
1	17	11	28
2	17	16	33
3	15	13	28
4	19	9	28
5	9	7	16
Σ	77	56	133

1. SS (total) = $(9^2 + 5^2 + \ldots + 4^2) - 133^2/20 = 114.55$
2. SS (Rows) = $(15^2 + 13^2 + \ldots + 10^2)/2 -$ CF = 64.05
3. SS (Columns) = $(67^2 + 66^2)/10 -$ CF = 0.05
4. SS (Treatments) = $(77^2 + 56^2)/10 -$ CF = 22.05
5. SS (error) = (1) − (2) (3) (4) = 28.40 (8 df)

ss (จัตุรัส × เวลา) + ss (จัตุรัส × วิธีการ)

df. = 4 + 4 = 8

sov	df.	SS	MS	F
Treatments	1	22.05	22.05	6.21
Rows	Y	64.05	7.12	
Columns	1	0.05	0.05	
Error	8	28.40	3.55	
Total	19	114.55		

วิเคราะห์ที่มาของ SS (error) และ SS (Rows)

ลองจัดค่าสังเกตใหม่ ดังนี้

ลำดับของวิธีการ	บุคคล	เวลา 1	เวลา 2	รวม
	1	9	6	15
AB	3	10	9	19
	6	8	9	17
	7	8	4	12
	9	5	1	6
		40	29	69

ลำดับของวิธีการ	บุคคล	เวลา 1	เวลา 2	รวม
	2	5	8	13
	4	7	7	14
BA	5	4	7	II
	8	5	II	16
	10	6	4	10
		27	37	64

SS (บุคคล x เวลา) จากตาราง AB + SS (บุคคล x เวลา) จากตาราง BA

= 28.40 = SS (error), df = 4 + 4 = 8

SS (ลำดับที) = $(69^2 + 64^2)/10 - 133^2/20$ = 1.25 (1 df)

SS (บุคคลลำดับเดียวกัน ตาราง AB) = $(15^2 + 19^2 + \ldots + 6^2)/2 \cdot 69^2/10$ = 51.4 (4 df)

SS (บุคคลลำดับเดียวกัน ตาราง BA) = $(13^2 + 14^2 + + 10^2)/2 \cdot 64'110$ = 11.4 (4 df)

Pooled SS (บุคคลลำดับเดียวกัน) = 51.4 + 11.4 = 62.80 (8 df)

SS (rows) – SS (ลำดับที่) = 64.05 – 1.25 = 62.80, df = 9 1 = 8

อิทธิพลต่อเนื่อง (Carry-Over Effects) เมื่อให้วิธีการต่าง ๆ ซ้ำกับบุคคลเดียวกัน

เนื่องจากในแบบจำลองของจัตุรัสลาตินไม่ได้รวมอิทธิพลร่วมกันระหว่างแฟคเตอร์ต่าง ๆ นั่นคืออิทธิพลของวิธีการแต่ละวิธีจะต้องเป็นอิสระกัน ในเรื่องการทดลองทางจิตวิทยาซึ่งมักเป็นการให้วิธีการในเวลาต่าง ๆ กัน เช่นให้ยา จะต้องแน่ใจว่าค่าสังเกตที่ได้ไม่เกี่ยวกับอิทธิพลของยาที่บุคคลนั้นได้รับล่วงหน้า แต่ถ้าข้อสมมุตินี้ไม่จริง ก็หมายความว่าเกิด "อิทธิพลต่อเนื่อง" ของวิธีการเช่น การใช้จัตุรัสขนาด 5 × 5 ถ้าใช้บุคคลเข้ารับการทดลอง 25 คน จะไม่มีปัญหาเรื่องอิทธิพลต่อเนื่อง เพราะทุกคนได้รับวิธีการเดียวในแต่ละเวลา แต่ถ้าเป็นการใช้บุคคลเดียวกันซ้ำสำหรับวิธีการต่าง ๆ ใน 5 ระยะเวลา นั่นคือจะใช้เพียง 5 บุคคล อาจมีปัญหาเรื่องอิทธิพลต่อเนื่อง วิธีแก้คือต้องให้มั่นใจว่าระยะเวลาต้องห่างพอควรจนไม่เกิดอิทธิพลต่อเนื่องแต่อย่างไรก็ตามถ้าเป็นการทดลองเรื่องยา เชื่อว่าจะยังมีอิทธิพลที่ได้รับล่วงหน้าตกค้างอยู่ อีกวิธีหนึ่งที่จะช่วยแก้ปัญหานี้ได้คือการใช้จัตุรัสลาตินที่มีลักษณะ "สมดุลย์" ในแง่ที่ว่าทุก ๆ วิธีการจะต้องใช้ภายหลังวิธีการอื่น ๆ ในจำนวนครั้งที่เท่ากัน ตัวอย่างเช่น ให้จำนวนวิธีการเป็นเลขคู่ วิธีการในแถวที่ 1 ของจัตุรัสคือ

1, 2, n, 3, n-1, 4, n-2, 5, n-3,..

จะเห็นว่าวิธีการในชุด 1, n, n-1, n-2, n-3,... จะเกิดสลับกับวิธีการต่าง ๆ ในชุด 2, 3, 4, 5,... ตัวอย่างเช่น ถ้ามี 4 วิธีการ แถวแรกของจัตุรัสคือ

1 2 4 3

ส่วนแถวต่อไปได้จากการเอา 1 ไปบวกวิธีการต่างในแถวที่อยู่ก่อนหน้า ถ้ารวมแล้วเกิน n = 4 ต้องเอา n ไปหักออกแล้วเก็บเศษไว้ จะได้จัตุรัส 4×4 ดังนี้

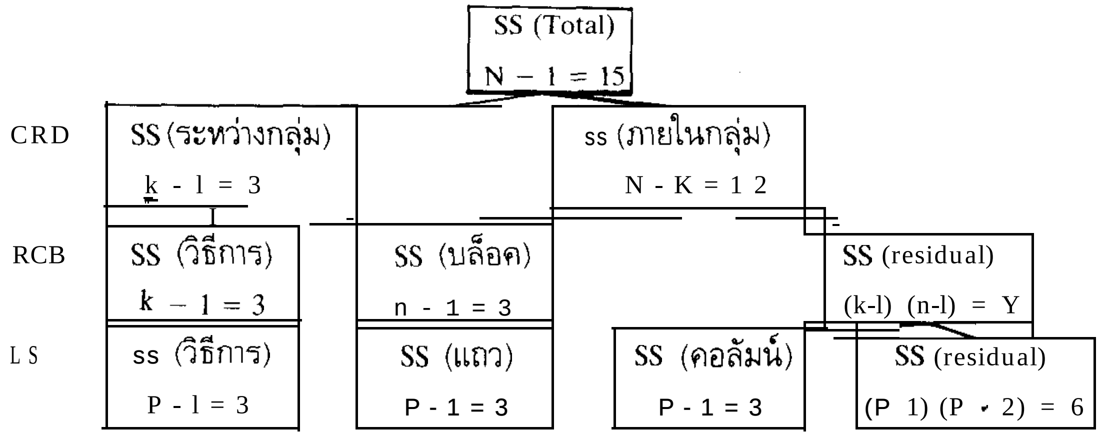
1	2	4	3
2	3	1	4
3	4	2	1
4	1	3	2

ซึ่งจะเห็นว่า 1 ตามหลังวิธีการที่ 2, 3 และ 4 อย่างละ 1 ครั้ง วิธีการที่ 2 ตามหลังวิธีการที่ 1, 3 และ 4 อย่างละ 1 ครั้ง วิธีการที่ 3 ตามหลังวิธีการที่ 1, 2 และ 4 อย่างละ 1 ครั้ง และวิธีการที่ 4 ตามหลังวิธีการที่ 1, 2 และ 3 อย่างละ 1 ครั้งเช่นกัน

ในกรณีที่จำนวนวิธีการเป็นเลขคี่ จะต้องใช้จัตุรัสลาติน 2 จัตุรัส จึงจะทำให้ทุกวิธีการตามหลังวิธีการอื่น ๆ เป็นจำนวนครั้งเท่ากัน สำหรับการสร้างจัตุรัสที่ 1 ใช้วิธีการของเลขคู่ ส่วนอีกจัตุรัสได้จากการกลับชุดของวิธีการในแต่ละแถว เช่นแถวที่ 1 ในจัตุรัสแรกคือ 1,2,5,3,4 วิธีการในแถวแรกของจัตุรัสที่ 2 คือการกลับชุดจะได้ 4,3,5,2,1 และแถวต่อ ๆ ไปได้จากการเพิ่มอีกหนึ่งจากแถวเดิม ตัวอย่างจัตุรัส 5×5 ที่สมดุลย์ คือ

	1	2	5	3	4		4	3	5	2	1
	2	3	1	4	5		5	4	1	3	2
จัตุรัสที่ 1	3	4	2	5	1	จัตุรัสที่ 2	1	5	2	4	3
	4	5	3	1	2		2	1	3	5	4
	5	1	4	2	3		3	2	4	1	5

ความสัมพันธ์ระหว่างการวางแผนแบบ CRD, RCB และจัตุรัสลาติน
(สำหรับการทดลองเกี่ยวกับบุคคล)



แผนผังแสดงการแบ่งผลบวกกำลังสองและ df สำหรับแผนงานทดลองทั้ง 3 แบบ

ถ้าอิทธิพลของแถวและคอลัมน์มีไม่มาก การวางแผนแบบจัตุรัสลาตินจะมีพลังน้อยกว่าแผนงานทดลองทั้งสอง ทั้งนี้เพราะ df ของความคลาดเคลื่อนในจัตุรัสลาตินมีจำนวนน้อยกว่าแผนงานทดลองแบบอื่น ๆ ดังนั้นแผนงานทดลองแบบจัตุรัสลาตินจะมีพลังสูงเมื่อความผันแปรภายในแถวและคอลัมน์มีน้อยเมื่อเทียบกับระหว่างแถวและคอลัมน์

จัตุรัส เกรโค-ลาติน

สมมุติมีจัตุรัสลาติน 2 จัตุรัสในขนาดเดียวกัน จัตุรัสหนึ่งใช้อักษรลาติน อีกจัตุรัสหนึ่งใช้อักษรกรีก และถ้าเอาจัตุรัสทั้งสองมาซ้อนกัน และได้อักษรกรีกทุกตัวคู่กับอักษรลาตินทุกตัวอย่างละ 1 ครั้ง จัตุรัสนั้นเรียกว่าจัตุรัส เกรโค-ลาติน ตัวอย่างของจัตุรัสเกรโค-ลาตินขนาด 4 × 4 ดังนี้

$A\alpha$	$B\beta$	$C\gamma$	$D\delta$
$B\delta$	$A\gamma$	$A\delta$	$C\alpha$
$C\beta$	$D\alpha$	$A\delta$	$B\gamma$
$D\gamma$	$C\delta$	$B\alpha$	$A\beta$

พึงสังเกตว่าอักษรกรีกทุกตัวจะเกิดเพียง 1 ครั้งในทุกแถวและทุกคอลัมน์เช่นเดียวกับอักษรลาติน นั่นคือเฉพาะอักษรกรีกคือจัตุรัสลาติน และการที่เมื่อซ้อนกันแล้วอักษรทุกตัวเกิดควบคู่กัน 1 ครั้ง จึงเรียกว่าจัตุรัสทั้งสองมีลักษณะ "Orthogonal" การแบ่งแยก df และ E(MS) มีดังนี้ (กรณีมี n ค่าสังเกตต่อเซลล์)

ที่มา	df.	E(MS)
ระหว่างแถว (A)	p – 1	$\sigma_\epsilon^2 + np\sigma_\alpha^2$
ระหว่างคอลัมน์ (B)	p – 1	$\sigma_\epsilon^2 + np\sigma_\beta^2$
ระหว่างวิธีการ (อักษรลาติน) (C)	p – 1	$\sigma_\epsilon^2 + np\sigma_\gamma^2$
ระหว่างอักษรกรีก (D)	p – 1	$\sigma_\epsilon^2 + np\sigma_\delta^2$
ความคลาดเคลื่อน	(p – 1) (p – 3)	$\sigma_\epsilon^2 + n\sigma_{res.}^2$
Within cells	$p^2(n-1)$	σ_ϵ^2
Total	np^2-1	

แบบฝึกหัดที่ 4

1. ข้อมูลต่อไปนี้ได้จากการทดลองระบบทำให้บริสุทธิ์ซึ่งจะใช้สารดูดซึมคาร์บอน แฟคเตอร์ที่จะทดลองมี 2 แฟคเตอร์คือ pH และคุณภาพของคาร์บอนซึ่งวัดเป็นเปอร์เซนต์ มี 5 ระดับ ส่วนวิธีการ คือคุณภาพของคาร์บอน แบ่งเป็น 5 เกรด คือ ก ข ค ง จ ได้ข้อมูลดังนี้

pH	เปอร์เซนต์ของคาร์บอน										Total
	0.05		0.10		0.20		0.40		0.80		
4.0	17	ก	39	ง	65	ข	19	ค	12	จ	152
5.0	32	จ	33	ค	61	ก	71	ข	94	ง	291
6.0	56	ค	49	ก	84	ง	90	จ	100	ข	379
7.0	76	ง	81	ข	97	จ	98	ก	100	ค	452
8.0	93	ข	90	จ	97	ค	100	ง	100	ก	480
Total	274		292		404		378		406		1754

เกรด	ก	ข	ค	ง	จ
รวม	325	410	305	393	321

จงวิเคราะห์ข้อมูล

2. จงวิเคราะห์ข้อมูลจากจัตุรัสลาตินซึ่งมีแผนผังการทดลองข้างล่าง

B	A	C	D	1	1	1	2
C	D	A	B	2	3	2	2
A	B	D	C	2	2	1	1
D	C	B	A	4	0	1	3

(Ans. F = 2)

3. จงวิเคราะห์ข้อมูลต่อไปนี้

	C_1	C_2	C_3	C_4	Row totals .
R_1	A_1 12 16 25 32 (85)	A_4 10 16 24 20 (70)	A_3 9 12 15 10 (46)	A_2 4 7 10 12 (33)	234
R_2	A_4 12 15 20 28 (75)	A_2 18 . 10 6 15 (49)	A_1 24 8 16 5 (53)	A_3 10 12 18 15 (55)	232
R_3	A_2 10 6 12 10 (38)	A_3 Y 9 8 7' (33)	A_4 6 5 8 2 (21)	A_1 4 5 7 1 (17)	109
R_4	A_3 4 6 . 7 2 (19)	A_1 4 7 7 1 (19)	A_2 3 4 5 2 (14)	A_4 4 6 ,, 3 2 (15)	Row Total 67
Column Total	217	171	134	120	642
	A_1	'42	A_3	A_4	
Treatment Total	174	134	153	181	

Answer :

Sov.	df.	ss	MS	F
Rows	3	1369.31	456.44	21.76
Cols	3	352.81	117.60	5.61
A	3	85.06	28.35	1.35
Residual	6	151.75	25.29	1.21
Within cells	48	1007.00	20.98	
Total	63	2965.93		

4. การทดลองเพื่อเปรียบเทียบคุณภาพปุ๋ย 5 ชนิดในการวางแผนแบบจัตุรัสลาติน ได้ผลผลิตมันฝรั่ง ดังนี้

คอลัมน์

แถว	1	2	3	4	5	Row Totals
1	A 449	B 444	c 401	D 299	E 292	1885
2	B 463	c 375	D 323	E 264	A 41.5	1840
3	c 393	D 353	E278	A 404	B 425	1853
4	D 371	E 241	A 441	B 410	C 392	1855
5	E 258	A 430	B 450	C 385	D 347	1870
Col. Totals	1934	1843	1893	1762	1871	9303

Treatment totals

A: 2139 B: 2192 c: 1946 D: 1693 E: 1333

จงวิเคราะห์ข้อมูล

5. จงวิเคราะห์ข้อมูลข้างล่างซึ่งคือผลผลิตอ้อยในแปลงทดลองแบบจัตุรัสลาตินเมื่อใช้ปุ๋ยต่าง ๆ กัน 5 ชนิด โดยที่

A : ไม่ใช่ปุ๋ยอะไรทั้งสิ้น

B : ปุ๋ยอนินทรีย์

C : ปุ๋ยคอก 10 ตัน/เอเคอร์

D : ปุ๋ยคอก 20 ตัน/เอเคอร์

E : ปุ๋ยคอก 30 ตัน/เอเคอร์

A 14	E 22	B 20	C 18	D 25
B 19	D 21	A 16	E 23	C 18
D 23	A 15	c 20	B 18	E 23
c 21	B 46	E 24	D 21	A 18
E 23	C 16	D 23	A 17	B 19

6. จงวิเคราะห์ข้อมูลข้างล่างซึ่งคือผลผลิตโกโก้จากการทดลองแบบจัตุรัสลาติน 3 จัตุรัสวิธีการทดลองได้แก่

A : ไม่ใช้ปุ๋ย , B : ใส่ปุ๋ยซุปเปอร์ฟอสเฟต 1.5 ปอนด์/ต้น

C : ใส่ปุ๋ยซุปเปอร์ฟอสเฟต 3.0 ปอนด์/ต้น

B 41	C 25	A 15
A 20	B 32	C 24
C 22	A 12	B 21

C 27	B 28	A 3
A 4	C 17	B 9
B 22	A 4	C 17

A 11	C 15	B 17
B 24	A 14	C 33
C 22	B 20	A 15

7. ใช้แผนงานทดลองแบบจัตุรัสลาตินขนาด 4 × 4 ทดลองโดยใช้จัตุรัสเดิมนี้ทำซ้ำ ๆ กัน 6 ครั้ง กับบุคคลทั้งหมด 24 คน โดยบุคคลแต่ละคนได้รับ 4 วิธีการ จงสร้างตารางวิเคราะห์แสดงการแบ่งแยก df

8. งานทดลองอีกอันหนึ่งมี 5 วิธีการ ใช้แผนงานทดลองแบบจัตุรัสขนาด 5 × 5 ที่เป็นอิสระกัน 4 จัตุรัส แต่ละจัตุรัสใช้หนู 5 ตัวเป็นแถวเพื่อรับวิธีการต่าง ๆ 5 วิธี จงแสดงการแบ่งแยก df

9. ผู้ทดลองคนหนึ่งใช้จัตุรัสขนาด 4 × 4 จำนวน 5 จัตุรัส ในตาราวิเคราะห์ความแปรปรวน เขามีความคลาดเคลื่อนจากการทดลองซึ่งมี df= 54 อยากทราบว่าความคลาดเคลื่อนรวมอิทธิพลของอะไรบ้าง

10. ใช้จัตุรัสขนาด 6 × 6 ซ้ำกัน 5 ครั้ง ในตารางวิเคราะห์ ความคลาดเคลื่อนมี df = 140 อยากทราบว่าความคลาดเคลื่อนรวมอิทธิพลอะไรบ้าง

11. ผู้ทดลองใช้จัตุรัสขนาด 2 × 2 กับผู้ทดลอง 20 คน แต่ละคนได้รับทั้งวิธีการ A และ B

ก. ความคลาดเคลื่อนมี df เป็นเท่าใด

ข. แสดงการแบ่งแยก df ของความคลาดเคลื่อน

12. ผลงานทดลองใช้ยา 4 ชนิดกับกระต่าย 16 ตัว โดยใช้จัตุรัสขนาด 4 × 4 ที่เป็นอิสระกัน 4 จัตุรัส จงแสดงตารางวิเคราะห์แยกแต่ละจัตุรัส

กระต่าย	**วัน**				**กระต่าย**	**วัน**			
	1	2	3	4		1	2	3	4
1	C	A	B	D	1	59	56	41	54
2	B	D	C	A	2	56	58	73	69
3	A	C	D	B	3	45	41	30	28
4	D	B	A	C	4	62	49	63	84
5	A	B	D	C	5	42	39	44	61

กระต่าย	วัน 1	2	3	4	กระต่าย	วัน 1	2	3	4
6	C	A	B	D	6	49	61	38	43
7	B	D	C	A	7	83	81	101	96
8	D	C	A	B	8	56	54	65	58
9	B	D	A	C	9	47	46	62	76
10	A	C	B	D	10	90	74	61	63
11	C	B	D	A	11	79	63	58	87
12	D	A	C	B	12	50	69	66	59
13	D	A	C	B	13	45	61	45	71
14	C	B	D	A	14	52	31	35	81
15	A	D	B	C	15	57	30	57	50
16	B	C	A	D	16	64	83	74	67

Ans.

จัตุรัสที่ 1 : F = 18.11

จัตุรัสที่ 2 : F = 2.77

จัตุรัสที่ 3 : F = 26.28

จัตุรัสที่ 4 : F = 2.46

13. ในงานทดลองหาตำแหน่งของเครื่องบินโดยการใช้แผ่น screen ขนาดต่าง ๆ กัน 5 ขนาด และทำในเวลาต่าง ๆ กัน 5 ระยะเวลา ได้ผลงานทดลองดังนี้

จัตุรัสลาติน	บุคคล	เวลา 1	2	3	4	5	total
	1	19	21	25	27	22	114
	2	22	20	23	31	24	120
3 6 4 7 5	3	26	28	26	31	32	143
	4	17	20	17	14	18	86
	5	28	30	30	31	28	147
	Σ	112	119	121	134	124	610
	6	23	30	29	24	28	134
	7	24	33	28	19	32	136

จัตุรัสลาติน	บุคคล	เวลา 1	2	3	4	5	total
4 7 5 3 6	8	29	30	31	29	28	147
	9	24	26	27	25	31	133
	10	11	18	27	18	24	98
	Σ	111	137	142	115	143	648
	11	18	16	24	24	18	100
	12	29	26	29	29	27	140
5 3 6 4 7	13	30	27	30	30	31	148
	14	25	22	28	26	30	131
	15	15	17	15	16	15	78
	Σ	117	108	126	125	121	597
	16	27	24	27	29	26	133
	17	22	14	12	18	15	81
6 4 7 5 3	18	28	30	34	31	28	151
	19	23	22	25	23	16	109
	20	29	26	28	28	26	137
	Σ	129	116	126	129	111	611
	21	29	28	21	30	24	132
	22	30	31	30	33	30	154
	23	19	19	17	25	24	104
	24	28	20	16	20	21	105
1 5 3 6 4	25	24	27	25	28	27	131
	Σ	130	125	109	136	126	626

ก. จงสร้างตารางวิเคราะห์ความแปรปรวน ($F_{treatments} = 9.22$)

ข. ตรวจสอบว่าผลบวกกำลังสองของ (บุคคล × เวลา) ที่ได้โดยการลบเอา จะเท่ากับผลบวกกำลังสองของ (บุคคล × เวลา) ซึ่งคิดจากแต่ละลำดับของการให้วิธีการ และนำทุกลำดับมารวมกัน