บทที่ 1
หลักเบื้องต้นเกี่ยวกับการวางแผนงานทดลอง

ความหมายของงานทดลอง

หมายถึงงานทดลองที่ได้เตรียมการไว้เพื่อให้ได้มาซึ่งข่าวสารหรือข้อเท็จจริงเพื่อใช้สนับสนุน หรือคัดค้านผลสรุปที่ได้จากการทดลองครั้งก่อน ๆ แบ่งออกเป็น 3 ประเภทคือ

1. งานทดลองเบื้องต้น (Preliminary Experiments)

ผู้ทดลองจะใช้กรรมวิธีจำนวนมากทดลองพร้อม ๆ กัน เพื่อหาแนวทางสำหรับงานทดลองครั้งต่อไป ซึ่งจะทำโดยละเอียดยิ่งขึ้น ปกติกรรมวิธีต่าง ๆ จะมีแค่ 1 ซ้ำ

2. งานทดลองวิกฤต (Critical experiments)

ผู้ทดลองจะเปรียบเทียบผลตอบสนองระหว่างวิธีการต่าง ๆ โดยต้องมีจำนวนซ้ำที่มากพอสำหรับตรวจสอบความแตกต่าง เป็นการทดลองต่อจากการทดลองเบื้องต้น เป็นลักษณะงานทดลองที่จะกล่าวถึงโดยละเอียดในบทต่อ ๆ ไป

3. งานทดลองสาธิต (Demonstrational Experiments)

เป็นงานทดลองที่ผู้สาธิตจะเปรียบเทียบวิธีการใหม่ ๆ กับวิธีการดั้งเดิมที่ใช้เป็นแบบมาตรฐาน

จุดประสงค์ของงานทดลอง

ผู้ทดลองจะต้องแจ้งจุดประสงค์ของงานทดลองโดยชัดเจน ถ้าจุดประสงค์หลายอย่างต้องแจ้งว่าอันใดสำคัญมากน้อยเป็นลำดับต่างกันอย่างไร เพราะแผนงานทดลองบางอันจะมีประสิทธิภาพสูงในการเปรียบเทียบกรรมวิธีบางอันสูงกว่ากรรมวิธีอื่น ๆ ต้องกำหนดสมมติฐานที่ใช้ทดสอบ และอิทธิพลต่าง ๆ ที่ต้องการประมาณค่า

หน่วยทดลอง (Experimental Unit or Experimental plot)

หมายถึงหน่วย หรือ วัสดุสิ่งของซึ่งเป็นหน่วยที่ได้รับกรรมวิธีในการให้กรรมวิธีแต่ละครั้ง อาจเป็นสัตว์ทดลอง 1 ตัว ต้นไม้ 1 ต้น นก 10 ตัวในกรงเดียวกัน

กรรมวิธี (Treatment)

หมายถึงวิธีการทดลองซึ่งมีการวัดผลของอิทธิพลเพื่อใช้เปรียบเทียบกับวิธีการอื่น ๆ

หน่วยตัวอย่าง (Sampling Unit)

เป็นส่วนหนึ่งของหน่วยทดลองซึ่งใช้สำหรับวัดอิทธิพลของกรรมวิธีที่ใช้ทดลอง อาจเป็นทั้งหน่วยของหน่วยทดลองก็ได้ เช่น การชั่งน้ำหนักหมูทั้งตัวภายหลังกินอาหารที่ใช้ทดลอง

ครบตามกำหนดระยะเวลา หรืออาจเป็นส่วนหนึ่งของหน่วยทดลอง เช่นใบไม้ที่สุ่มมา 1 ใบ เพื่อวัดปริมาณวิตามินซี หรือการเก็บเกี่ยวพืชจากแปลงทดลองเพียงบางส่วนแบบสุ่ม

ความคลาดเคลื่อนจากการทดลอง (Experimental error)

คือความผันแปรของข้อมูลที่เก็บมาจากหน่วยทดลองซึ่งได้รับวิธีการทดลองชนิดเดียวกัน ภายใต้สภาวะเดียวกัน ความผันแปรนี้มีแหล่งกำเนิด 2 ทางคือ

1. เป็นความผันแปรที่แฝงอยู่ในหน่วยทดลอง
2. เป็นความผันแปรที่เกิดจากขาดเอกภาพในระหว่างดำเนินการทดลอง

เช่นการทดลองโดยใช้หนูเป็นหน่วยทดลอง ถ้าไม่คัดเลือกหนูที่มีอายุ และพันธุ์เดียวกัน เป็นความผันแปรที่แฝงอยู่ในหน่วยทดลอง เพราะหนูมีความแตกต่างตามสายพันธุกรรม แต่ถ้าในระหว่างการทดลอง ถ้าไม่ควบคุมให้ทุกกรงได้รับ ความร้อน แสงสว่าง และ ปัจจัยอื่น ๆ เท่าเทียมกัน เป็นการขาดความเอกภาพในการดำเนินการทดลอง

แผนงานทดลองที่ดีจะต้องพยายามให้ความคลาดเคลื่อนจากการทดลองมีค่าน้อยที่สุด เพราะเป็นการเพิ่มพลังการทดลอง และช่วยลดขนาดของช่วงเชื่อมั่นให้สั้นลง ความคลาดเคลื่อนจากการทดลองจะมีค่าเล็กลงได้โดย

1. พยายามลดความผันแปรต่าง ๆ ที่แฝงอยู่ในหน่วยทดลอง
2. เลือกใช้เทคนิคงานทดลองที่เหมาะสม

การซ้ำ และหน้าที่ของการซ้ำ (Replication)

ถ้าวิธีการทดลองอันหนึ่งปรากฏมากกว่า 1 ครั้งในการทดลองเดียวกัน เรียกว่าวิธีการนั้นมี "การซ้ำ" การซ้ำมีประโยชน์ดังนี้

1. ทำให้สามารถหาค่าประมาณของความคลาดเคลื่อนจากการทดลองได้
2. เพิ่มความเที่ยงตรงแก่งานทดลอง เพราะทำให้ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของค่าเฉลี่ยกรรมวิธีเล็กลง
3. เพื่อควบคุมความแปรปรวน

การควบคุมความคลาดเคลื่อนจากการทดลอง

ทำได้ 3 วิธี คือ

1. โดยการเลือกแผนงานทดลองที่เหมาะสม
2. โดยการใช้การวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมกัน (Covariance analysis)
3. โดยการเลือกขนาดและรูปร่างของหน่วยทดลองที่เหมาะสม

การเลือกแผนงานทดลองที่เหมาะสม

เช่นถ้าหน่วยทดลองมีความสัมพันธ์กันและต้องการทดสอบความแตกต่างของกรรมวิธี 2 อัน อาจใช้การทดลองแบบจับคู่ ซึ่งคือการวางแผนแบบบล็อคสมบูรณ์นั่นเอง การวางแผน

แบบนี้ช่วยลดขนาดความคลาดเคลื่อนจากการทดลองได้ในกรณีที่หน่วยทดลองมีความแตกต่างกัน โดยการจับกลุ่มหน่วยทดลองที่มีลักษณะคล้ายคลึงกันไว้ในกลุ่มเดียวกัน เพื่อให้ความแตกต่างภายในกลุ่มเดียวกันซึ่งเรียกว่า "บล็อค" มีน้อยที่สุด และจะมีประสิทธิภาพสูงถ้าความแตกต่างระหว่างบล็อคมีมากจนเห็นได้ชัด บล็อคเหล่านี้ทำหน้าที่เป็น "ซ้ำ" ให้กับกรรมวิธี เมื่อกรรมวิธีที่ใช้ทดลองมีจำนวนมาก จะต้องจัดหาหน่วยทดลองภายในบล็อคเดียวกันให้มากตามด้วย จะทำให้ความคลาดเคลื่อนจากการทดลองสูงขึ้น จึงมีแผนงานทดลองประเภท "บล็อคไม่สมบูรณ์" ซึ่งบล็อคหนึ่งจะมีเพียงบางส่วนของกรรมวิธีทั้งหลาย มิใช่ทั้งหมด การวางแผนแบบ Split-Plot ก็เป็นการวางแผนแบบบล็อคไม่สมบูรณ์แบบหนึ่ง

การวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมกัน (Analysis of Covariance)

ใช้เมื่อความผันแปรของหน่วยทดลองบางส่วนมีสาเหตุจากคุณลักษณะอื่นประกอบ ซึ่งจะได้กล่าวโดยละเอียดต่อไป

รูปร่างและขนาดของหน่วยทดลอง

จะกล่าวโดยละเอียดในหัวข้อ "เทคนิคการสร้างแปลงทดลองสำหรับงานทดลองเกษตร"

การสุ่ม (Randomization)

การจัดกรรมวิธีให้หน่วยทดลองแบบสุ่มมีประโยชน์เพื่อให้ความมั่นใจว่าจะได้ค่าประมาณของความคลาดเคลื่อนจากการทดลองมีคุณลักษณะ "ไม่เอียงเฉ" (unbiased estimate) และให้ได้ค่าประมาณที่ดีของค่าเฉลี่ยของกรรมวิธีและความแตกต่างของค่าเฉลี่ยกรรมวิธี ท่าน R.A. Fisher เป็นผู้ริเริ่มให้ความสำคัญกับการสุ่ม ซึ่งอาจใช้วิธีการต่าง ๆ ได้หลายวิธี เช่น การโยนเหรียญ ลูกเต๋า แต่ที่นิยมมากคือการใช้ตารางเลขสุ่ม เป็นวิธีการที่มีผลให้กรรมวิธีทุกอันมีโอกาสเท่ากันที่จะใช้กับหน่วยทดลองทุกหน่วย ท่าน ค็อคแครน และ ค็อกซ์ ได้เขียนในหนังสือ Experimental Designs (1957) ซึ่งนับเป็นหนังสือเกี่ยวกับแผนงานทดลองที่สมบูรณ์ที่สุดเล่มหนึ่ง ในจำนวนน้อยเล่มที่มีอยู่เกี่ยวกับการสุ่มกรรมวิธีให้กับหน่วยทดลอง ดังนี้

"Randomization is somewhat analogous to insurance, in that it is a precaution against disturbances that may or may not occur, and that may or may not be serious if they do occur."

ข้อสมมุติเบื้องต้นและการแจกแจงที่สำคัญในการวิเคราะห์ความแปรปรวน

การแจกแจงแบบไคสแควร์ (Chi-square distribution)

F.R. Helmert เป็นผู้สร้างการแจกแจงแบบไคสแควร์ในปี 1876 และ คาร์ล เปียร์สัน เป็นผู้ปรับปรุงเพื่อใช้สำหรับการทดสอบสมมติฐาน ในปี 1900 การแจกแจงแบบไคสแควร์มีความสัมพันธ์อย่างใกล้ชิดกับการแจกแจงแบบปกติ ดังนี้

ถ้า X มีการแจกแจงแบบปกติ ด้วยค่าเฉลี่ย μ และความแปรปรวน σ^2 นั่นคือ $E(X) = \mu$, $E(X - \mu)^2 = \sigma^2$ และตัวแปรเชิงสุ่มแบบปกติมาตรฐาน คือ $Z = (X - \mu)/\sigma^2 \sim n(0,1)$ และค่ากำลังสองของเทอมนี้ คือ $Z^2 = (X - \mu)^2/\sigma^2$ จะเป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีการแจกแจงแบบไคสแควร์ ด้วย df = 1 การแจกแจงของ $\chi^2_{(1)}$ จะมีค่าไม่ติดลบคืออยู่ระหว่าง 0 ถึง ∞ และเบ้มากเพราะพื้นที่ 68% อยู่ระหว่าง 0 ถึง 1 ส่วนอีก 32% อยู่ระหว่าง 1 ถึง ∞

ถ้าสุ่มตัวอย่างขนาด 2 หน่วยจากประชากรปกติ และตัวอย่างที่สุ่มมาเป็นอิสระกัน ให้ X_1 และ X_2 เป็นค่าสังเกตที่ได้จากตัวอย่าง จะแปลงให้เป็นคะแนนมาตรฐานโดย

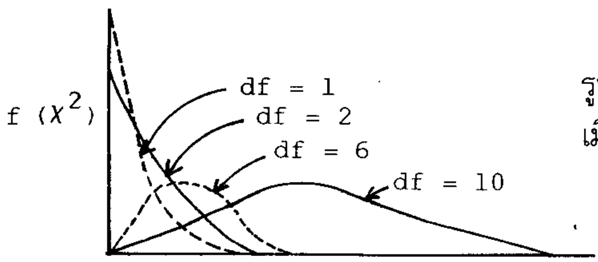
$Z_1^2 = (X_1 - \mu)^2/\sigma^2$ และ $Z_2^2 = (X_2 - \mu)^2/\sigma^2$

และเนื่องจากทั้ง 2 จำนวนนี้เป็นอิสระกัน ดังนั้น ผลรวมคือ $Z_1^2 + Z_2^2 = \chi^2_{(2)}$ จะมีการแจกแจง แบบไคสแควร์ df = 2 ซึ่งรูปร่างการแจกแจงจะลดความเบ้ลงนิดหน่อย และถ้าสุ่มตัวอย่างที่เป็นอิสระกันมา n จำนวน จากประชากรปกติที่มีค่าเฉลี่ย μ และความแปรปรวน σ^2

$$\chi^2_{(n)} = \frac{\sum^n (X - \mu)^2}{\sigma^2} = \Sigma Z^2$$ จะมีการแจกแจงแบบไคสแควร์ df = n

รูปร่างการแจกแจงของไคสแควร์ขึ้นอยู่กับ df เมื่อมี df>2 จะมีฐานนิยมอยู่ที่ df-2 สำหรับการแจกแจงแบบไคสแควร์โดยทั่วไปจะมีค่าเฉลี่ย = df และมีความแปรปรวน = 2df ยิ่งมี df สูงขึ้นจะมีรูปร่างคล้ายกับการแจกแจงแบบปกติเข้าไปทุกที

ในการทดลองวิจัย เนื่องจากมักไม่ทราบค่าของ μ จึงต้องสนใจการแจกแจงของ



รูปแสดงการแจกแจงของ χ^2 เมื่อมี df. ต่าง ๆ กัน

$\sum^n (X - \bar{X})^2/\sigma^2$ โดยที่ $\sum^n (X - \bar{X})^2/\sigma^2$ จะมีการแจกแจงแบบไคสแควร์ df.=n-1 เพราะ

$$\begin{aligned}
\sum^n (X - \mu)^2 &= \sum^n [(X - \bar{X}) - (\bar{X} - \mu)]^2 \\
&= \sum^n (X - \bar{X})^2 - 2(\bar{X} - \mu)\underbrace{\sum^n (X - \bar{X})}_{=0} + \sum^n (\bar{X} - \mu)^2 \\
&= \sum^n (X - \bar{X})^2 + n(\bar{X} - \mu)^2
\end{aligned}$$

$$\sum^n \frac{(X - \mu)^2}{\sigma^2} = \frac{\sum^n (X - \bar{X})^2}{\sigma^2} + \frac{n(\bar{X} - \mu)^2}{\sigma^2}$$

$$\sum^n (X - \mu)^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{(n)df}$$

เทอมสุดท้ายเขียนใหม่ ดังนี้ $(\bar{X} - \mu)^2/\sigma^2/n \sim \chi^2_{(1)df}$
เทอมที่เหลือคือ $\sum^{n} (X - \bar{X})^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{(n-1)df.}$
เทอมสุดท้าย คือ $\sum^{n} (X - \bar{X})^2/\sigma^2 = (n-1)S^2/\sigma^2$
ใช้สำหรับทดสอบสมมติฐาน $Ho : \sigma^2 = \sigma^2_0$

การแจกแจงแบบเอฟ

$$F = \frac{\chi^2_{(\nu_1)}/\nu_1}{\chi^2_{(\nu_2)}/\nu_2}$$

R.A. Fisher (1924) เป็นผู้สร้างการแจกแจงของอัตราส่วนนี้ ในปี 1934 G.W.Snedecor ได้ขนานนามการแจกแจงของอัตราส่วนนี้ว่าการแจกแจงแบบ F เพื่อเป็นเกียรติแก่ผู้สร้างคือ Fisher อัตราส่วนนี้ใช้ทดสอบ

$$Ho : \sigma^2_1 = \sigma^2_2 \qquad Ho : \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k$$

ความสัมพันธ์ระหว่างการแจกแจงแบบ "ที" ไคสแควร์" และ "เอฟ"

$$T = \frac{(\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n}}{\sqrt{\chi^2_{(n-1)}/(n-1)}} = \frac{(\bar{X} - \mu)}{S/\sqrt{n}}$$

$$\chi^2_{(n-1)} = (n-1)S^2/\sigma^2$$

$$T^2 = \frac{Z^2}{\chi^2_{(n-1)}/(n-1)} = F \quad ; \quad \nu_1 = 1,\ \nu_2 = n - 1$$

การหาค่าคาดหมายของผลบวกกำลังสอง
แบบจำลองที่ 1 แผนงานทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์

$$X_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} \quad ; \quad i = 1,2,\ldots,t$$
$$j = 1,2,\ldots,r$$

τ_i = constant fixed effects

$E(\tau_i) = \tau_i$

$\sum^{t} \tau_i = 0$

$E(\sum^{t} \tau_i) = E(\tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_t) = 0$

$E(\sum \tau_i)^2 = E(\tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_t)^2$

$= E[\tau_1(\tau_1+\tau_2+\ldots+\tau_t)+\ldots+ \tau_t (\tau_1+\tau_2+\ldots+\tau_t)]$

but $(\tau_1+\tau_2+\tau_3\ldots+\tau_t) = 0$

so

$E(\sum \tau_i)^2 = 0$

$$E(\Sigma\tau_i^2) = E(\tau_1^2 + \tau_2^2 + \ldots + \tau_t^2) = \tau_1^2 + \tau_2^2 + \ldots + \tau_2^2 = \sum^{t}\tau_i^2$$

$$\varepsilon_{ij} \sim NID\ (0,\ \sigma_\varepsilon^2)$$

$$E(\varepsilon_{ij}) \Rightarrow 0$$

$$E(\Sigma\varepsilon_{ij}) = 0$$

$$E(\sum_{j=1}^{r}\varepsilon_{ij}^2) = r(\mu_\varepsilon^2 + \sigma_\varepsilon^2)$$

$$= r(0 + \sigma_\varepsilon^2)$$

$$= r\,\sigma_\varepsilon^2$$

เพราะว่า $E(X^2) = \mu^2 + \sigma^2$

$$E(\sum^{n}X^2) = n(\mu^2 + \sigma^2)$$

$$E(\sum^{r}\varepsilon_{ij})^2 = r(r\mu_\varepsilon^2 + \sigma_\varepsilon^2)$$

$$= r(0 + \sigma_\varepsilon^2)$$

$$= r\sigma_\varepsilon^2$$

เพราะว่า $E(\sum^{n}X_i)^2 = E\ (X_1+X_2+\ldots+X_n)^2$

$$= E\ [X_1(X_1+X_2+\ldots+X_n) + \ldots + X_n(X_1+X_2+\ldots+X_n)]$$

$$= E\ (X_1^2+X_2^2+\ldots+X_n^2) + n(n-1)E(X_i)E(X_{i'})\ ;\ i \neq i$$

$$= n\ (\mu^2 + \sigma^2) + n(n-1)\mu^2$$

$$= \cancel{n\mu^2} + n\sigma^2 + n^2\mu^2 - \cancel{n\mu^2}$$

$$= n^2\mu^2 + n\sigma^2$$

$$= n(n\mu^2 + \sigma^2)$$

μ = Grand Mean

$E\ (\mu) = \mu$

(1) Expectation of Treatment Sum of Squares :

$$SS(Treatments) = \sum^{t}\frac{(\Sigma^{r}X_{ij})^2}{r} - \frac{(\Sigma\Sigma^{tr}X_{ij})^2}{tr}$$

แทนค่า $X_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij}$;

และแปลงให้อยู่ในรูป $\sum^{t}(\sum^{r}X_{ij})^2/r$:

$$E\ [\sum^{t}\frac{(\sum^{r}X_{ij})^2}{r}] = E\ \{\sum^{t}\frac{[\sum^{r}(\mu + \tau_i+\varepsilon_{ij})]^2}{r}\}$$

$$= \frac{1}{r}\sum^{t}E\{[\sum^{r}(\mu + \tau_i + \varepsilon_{ij})]^2\}$$

$$= \frac{1}{r}\sum^{t} E\,[r\mu + r\tau_i + \sum^{r}\varepsilon_{ij}]^2$$

$$= \frac{1}{r}\sum^{t} E\,[r^2\mu^2 + r^2\tau_i^2 + (\sum^{r}\varepsilon_{ij})^2 + 2r^2\mu\tau_i$$

$$+ 2r\mu\sum^{r}\varepsilon_{ij} + 2r\tau_i\sum^{r}\varepsilon_{ij}]$$

$$= \frac{1}{r}\sum^{t} (\,r^2\mu^2 + r^2\tau_i^2 + r\sigma_{\varepsilon_t}^2 - 2r^2\mu\tau_i$$

$$= tr\mu^2 + r\sum^{t}\tau_i^2 + t\sigma_\varepsilon^2 + 2r\mu\sum\tau_i$$

$$(\text{but } \sum^{t}\tau_i = 0)$$

$$= tr\mu^2 + r\sum^{t}\tau_i^2 + t\sigma_\varepsilon^2$$

$$(2)\quad E\left[\frac{(\sum\sum^{tr} X_{ij})^2}{tr}\right] = E\left\{\frac{[\sum\sum^{tr}(\mu + \tau_i + \varepsilon_{ij})]^2}{tr}\right\}$$

$$= \frac{1}{tr}\,E\,[\,(tr\mu + r\sum^{t}\tau_i + \sum\sum^{tr}\varepsilon_{ij})^2]$$

$$= \frac{1}{tr}\quad E[\,t^2r^2\mu^2 + r^2(\sum^{t}\tau_i)^2 + (\sum\sum^{tr}\varepsilon_{ij})^2$$

$$+ 2tr^2\mu\sum^{t} \quad 2tr\mu\sum\sum^{tr}\varepsilon_{ij} + 2r \quad \sum\sum^{tr}\varepsilon_{ij})$$

$$= \frac{1}{tr}\quad (t^2r^2\mu^2 + tr\sigma_\varepsilon^2)$$

เพราะว่า

$$E(\sum^{t}\tau_i)^2 = 0$$

$$E(\sum\sum^{tr}\varepsilon_{ij})^2 = tr(tr\mu_\varepsilon^2 + \sigma_\varepsilon^2) = tr\sigma_\varepsilon^2$$

$$E(\sum^{t}\tau_i) = 0$$

$$E(\sum\sum^{tr}\varepsilon_{ij}) = tr\mu_\varepsilon = 0$$

ดังนั้น

$$E\left[\frac{(\sum\sum^{tr} X_{ij})^2}{tr}\right] = tr\mu^2 + \sigma_\varepsilon^2$$

(3) ดังนั้น $E(\text{Treatment SS}) = (tr\mu^2 + r\sum^{t}\tau_i^2 + t\sigma_\varepsilon^2 - (tr\mu^2 + \sigma_\varepsilon^2)$

$$= r\sum^{t}\tau_i^2 + (t-1)\sigma_\varepsilon^2$$

$$E(\text{Treatment MS}) = \sigma_\varepsilon^2 + r\sum^{t}\tau_i^2/(t-1)$$

(พึงสังเกตว่า เมื่อ Ho จริง , $E(\text{MSTr.}) = \sigma_\varepsilon^2$)

Expectation of Experimental Error Sum of Squares

$$SSE = \sum^{tr}\sum X_{ij}^2 - \sum^{t} \frac{(\sum^{r} X_{ij})^2}{r}$$

$$E \sum^{t} \frac{(\sum X_{ij})^2}{r} = tr\mu^2 + r\sum^{t}\tau_i^2 + t\sigma_\varepsilon^2$$

$$E(\sum^{tr}\sum X_{ij}^2) = E[\sum^{tr}\sum (\mu + \tau_i + \varepsilon_{ij})^2]$$

$$= \sum^{t} E[\sum^{r} (\mu^2 + \tau_i^2 + \varepsilon_{ij}^2 + 2\mu\tau_i + 2\mu\varepsilon_{ij} + 2\tau_i\varepsilon_{ij})]$$

$$= \sum^{t} E(r\mu^2 + r\tau_i^2 + r\sigma_\varepsilon^2 + 2r\mu\tau_i)$$

เพราะว่า

$$E(\sum\varepsilon_{ij}^2) = r(\mu_\varepsilon^2 + \sigma_\varepsilon^2) = r\sigma_\varepsilon^2 , \quad E(\sum\varepsilon_{ij}) = r\mu_\varepsilon = 0$$

ดังนั้น $$E(\sum^{tr}\sum X_{ij}^2) = tr\mu^2 + r\sum^{t}\tau_i^2 + tr\sigma_\varepsilon^2 + 2r\mu\sum^{t}\tau_i$$

แต่ $\sum\tau_i = 0$, ดังนั้น

$$E(\sum^{tr}\sum X_{ij}^2) = tr\mu^2 + r\sum^{t}\tau_i^2 + tr\sigma_\varepsilon^2$$

ดังนั้น

$$E(SSE) = (tr\mu^2 + r\sum^{t}\tau_i^2 + tr\sigma_\varepsilon^2 - (tr\mu^2 + r\sum^{t}\tau_i^2 + t\sigma_\varepsilon^2)$$

$$= (tr - t)\sigma_\varepsilon^2$$

$$E(MS.Error) = \frac{(tr - t)\sigma_\varepsilon^2}{tr - t} = \sigma_\varepsilon^2$$

Expectatation of Total Sum of Squares

$$SS(total) = \sum^{t}\sum^{r} X_{ij}^2 - (\sum^{t}\sum^{r} X_{ij})^2/tr$$

$$E(SS_{total}) = (tr\mu^2 + r\sum^{t}\tau_i^2 + tr\sigma_\varepsilon^2) - (tr\mu^2 + \sigma_\varepsilon^2)$$

$$= r\sum^{t}\tau_i^2 + (tr - 1)\sigma_\varepsilon^2$$

$$E(MS_{total}) = \sigma_\varepsilon^2 + r\sum^{t}\tau_i^2/(tr-1)$$

และเมื่อ Ho : $\tau_i = 0$; for all i เป็นความจริง

$$E(MS_{total} = \sigma_\varepsilon^2$$

แต่ถ้า Ho ไม่จริง $E(MS_{total})$ และ $E(MS_{treatments}) > \sigma_\varepsilon^2$

Model 2 (Random - Effects Model)

τ_i random variable $\sim$ NID $(0, \sigma_\tau^2)$

$E(\tau_i) = \mu_\tau = 0, \quad E(\tau_i^2) = \sigma_\tau^2$.

ส่วนข้อสมมุติของ ε_{ij} เหมือนแบบจำลองที่ 1 ดังนั้น เมื่อใช้วิธีการหาเช่นเดียวกับแบบจำลองที่ (1) จะได้ค่าคาดหมายของแต่ละเทอม ดังนี้

$$E\left(\sum^{t}\sum^{r} X_{ij}^2\right) = tr\mu^2 + tr\sigma_\tau^2 + tr\sigma_\varepsilon^2$$

$$E\left[\sum^{t} \frac{\left(\sum^{r} X_{ij}\right)^2}{r}\right] = tr\mu^2 + tr\sigma_\tau^2 + t\sigma_\varepsilon^2$$

$$E\left[\sum^{t} \frac{\left(\sum^{r} X_{ij}\right)^2}{tr}\right] = tr\mu^2 + r\sigma_\tau^2 + \sigma_\varepsilon^2$$

$$E(MS_{trt.}) = \frac{(t-1)\sigma_\varepsilon^2 + r(t-1)\sigma_\tau^2}{(t-1)} = \sigma_\varepsilon^2 + r\sigma_\tau^2$$

$$E(MS_{error}) = \frac{(tr - t)\sigma_\varepsilon^2}{tr - t} = \sigma_\varepsilon^2$$

ข้อสมมุติต่าง ๆ ของการวิเคราะห์ความแปรปรวน

(1) ข้อสมมุติว่าประชากรต้องมีการแจกแจงแบบปกติ

จะเห็นจากข้อสมมุติในแบบจำลองทั้ง 2 แบบว่า ε_{ij} ต้องมีการแจกแจงแบบปกติ ซึ่งเท่ากับสมมุติว่าข้อมูลทั้งหลายมีการแจกแจงแบบปกตินั่นเอง หากประชากรไม่มีการแจกแจงแบบปกติ เช่น อาจมีลักษณะที่เบ้ หรือ kurtosis หรือทั้งเบ้และ kurtosis เปียร์สัน (1931) พบว่าการแจกแจงของเอฟจะถูกกระทบกระเทือนน้อยมากเมื่อข้อสมมุติเกี่ยวกับลักษณะสมมาตรเป็นเท็จ และแม้ว่าจะมีลักษณะ leptokurtic ก็ไม่เป็นไร เช่นกัน นอกจากจะมีลักษณะ leptokurtic และ platykurtic อย่างเด่นชัด โดยเฉพาะสำหรับแบบจำลองที่ (1) ผู้ทดลองไม่จำเป็นต้องสนใจการแจกแจงของวิธีการ เพราะว่าแม้จะมีการแจกแจงที่เบ้หรือ kurtosis แต่ถ้าทุกประชากรมีลักษณะแบบเดียวกัน จะไม่มีผลกระทบกระเทือนต่อการแจกแจงของเอฟ

(2) ข้อสมมุติว่าความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนต้องเป็นเอกภาพ

(assumption of Homogeneity of population error variances)

หากข้อสมมุตินี้ไม่จริง จะไม่มีผลกระทบมากมายต่อการแจกแจงแบบเอฟ เนื่องจากการแจกแจงแบบเอฟมีลักษณะ "robust" สำหรับข้อสมมุติข้อนี้ อย่างไรก็ตาม หากใช้ขนาดตัวอย่างที่ต่างกัน จะให้ผลกระทบมากกว่าการใช้ขนาดตัวอย่างที่เท่า ๆ กันทุก ๆ กลุ่ม หากต้องการทดสอบข้อสมมุตินี้ มีวิธีการหลายวิธี ดังนี้

Ho : $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_k^2 = \sigma_\varepsilon^2$

Ha : ความแปรปรวนไม่เท่ากันทั้งหมด

(ก) ใช้แบบทดสอบของ Bartlett (1937)

$$B = \frac{2.30259}{C} \left[\nu \mathrm{Log}_{10} MS_{error} - \sum_{i}^{k} (\nu_i \mathrm{Log}_{10} S_i^2) \right]$$

$$C = 1 + \frac{\sum^{k} \frac{1}{\nu_i} - \frac{1}{\nu}}{3(k-1)} \quad , \quad \nu = \text{error df.}, \quad \nu_i = \text{df. of } S_i^2$$

$$B \sim \chi^2 \quad df. = (k-1)$$

(ข) ใช้แบบทดสอบของ Hartley (1940, 1950)

$$F_{max} = \frac{\text{Largest of k variances}}{\text{Smallest of k variances}} = \frac{S^2_{largest}}{S^2_{smallest}}$$

df. = k and (r − 1)

F_{max} จะมีการแจกแจงตามตารางที่ D.10 และปฏิเสธ Ho เมื่อโตกว่าค่าตาราง

(ค) ใช้แบบทดสอบของ Cochran (1941)

$$C = \frac{S^2_{i \; largest}}{\sum^{k} S_i^2}$$

$S^2_{i \; largest}$ คือความแปรปรวนที่สูงที่สุดของกลุ่มต่าง ๆ จาก k กลุ่มวิธีการ

$\sum^{k} S_i^2$ คือผลรวมของความแปรปรวนของทุกกลุ่ม

ตัวสถิติ C จะมีการแจกแจงตามค่าในตารางที่ D. 11

เนื่องจากที่กล่าวมาแล้วว่าการแจกแจงแบบเอฟไม่มีความฉับไวต่อข้อสมมุตินี้เมื่อเป็นเท็จจึงไม่จำเป็นต้องตรวจสอบคุณสมบัตินี้เป็นกิจวัตร นอกจากกรณีที่มีข้อสงสัย ซึ่งถ้าเป็นจริงจะต้องแปลงข้อมูล

(3) ข้อสมมุติว่าอิทธิพลต่าง ๆ ต้องเป็นแบบเชิงบวก

(Assumption of Additivity of Effects)

เป็นข้อสมมุติเบื้องต้นของการวางแผนงานทดลอง โดยการเขียนแบบจำลองของข้อมูลอยู่ในรูปเชิงบวก ถ้าข้อสมมุตินี้ไม่จริง ต้องใช้วิธีการแปลงค่า (จะทดสอบได้ด้วยวิธีการทดสอบของ ตูกีย์ (Tukey's test for Nonadditivity of treatment effects)

การแปลงข้อมูล (Transformations)

ประโยชน์ของการแปลงข้อมูล คือ

- เพื่อให้ความแปรปรวนเป็นเอกภาพ

- เพื่อให้การแจกแจงภายในแต่ละกลุ่มวิธีการเป็นแบบปกติ

- เพื่อให้อิทธิพลของวิธีการเป็นแบบเชิงบวก ตัวอย่างเช่น ถ้าอิทธิพลของวิธีการและบล็อคเป็นแบบผลคูณ ค่าคาดหมายของความคลาดเคลื่อน คือ $E(MSE) = \sigma^2_\varepsilon + \sigma^2_{\tau\beta}$ ซึ่งควรจะเป็น $E(MSE) = \sigma^2_\varepsilon$ และถ้า Ho เป็นจริงจะไม่มีค่าสถิติสำหรับทดสอบความแตกต่างของวิธีการ อนึ่งสำหรับข้อมูลบางชุดที่มีลักษณะต่อไปนี้ จะไม่สามารถแปลงเป็นการแจกแจงแบบปกติได้ คือ (1) เมื่อค่าเฉลี่ยของวิธีการมีค่าไม่แตกต่างกันมาก แต่มีความแปรปรวนต่างกัน (2) เมื่อค่าเฉลี่ยวิธีการผันแปรแบบเป็นอิสระกับความแปรปรวน (3) เมื่อความแปรปรวนของวิธีการต่าง ๆ เป็นเอกภาพ แต่การแจกแจงของวิธีการมีลักษณะรูปร่างการแจกแจงที่ต่างกัน ดังนั้น หากไม่สามารถแปลงข้อมูลได้ ต้องใช้วิธีการทดสอบของสถิติไม่มีพารามิเตอร์

(1) Square-Root Transformation

ใช้สำหรับข้อมูลที่มีค่าเฉลี่ยวิธีการเป็นสัดส่วนกับความแปรปรวน นั่นคือมีการแจกแจงแบบปัวซอง ซึ่งมี $\mu = \sigma^2$ มักเกิดจากข้อมูลที่ได้มาจากการนับ และมีความน่าจะเป็นของเหตุการณ์เล็กมากข้อมูลที่แปลงแล้ว คือ X' จะมีการแจกแจงแบบปกติ โดยที่ $X' = \sqrt{X}$ สำหรับค่า X ต่าง ๆ ที่น้อยกว่า 10 ควรใช้ $X' = \sqrt{X + .5}$ หรือ $X' = \sqrt{X + 1}$

ตัวอย่างในตารางข้างล่างแสดงการแปลงค่าแบบถอดกรณฑ์ที่สอง

	x (ข้อมูลเดิม)			แปลงเป็น $X' = \sqrt{X-.5}$		
	b_1	b_2	b_3	b_1	b_2	b_3
	3	6	12	1.87	2.55	3.54
	0	4	6	.71	2.12	2.55
	4	2	6	2.12	1.58	2.55
	2	4	10	1.58	2.12	3.24
	2	7	6	1.58	2.74	2.55
x =	2.2	4.6	8.0	1.57	2.22	2.89
S^2 =	2.2	3.4	8.0	.28	.20	.22

(2) Logarithmic Transformation

ใช้เมื่อค่าเฉลี่ยของวิธีการเป็นสัดส่วนกับส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน โดยที่

$X' = Log_{10}X$ หรือ $X' = Log_{10}(X + 1)$

(3) Reciprocal Transformation

ใช้เมื่อข้อมูลให้กำลังสองของค่าเฉลี่ยเป็นสัดส่วนกับส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน โดยที่

$X' = 1/X$ หรือ $X' = 1/(X + 1)$

เทคนิคการสร้างแปลงทดลองสำหรับงานทดลองเกษตร (Plot Technique)

จะต้องพิจารณา 2 ปัจจัย คือ

1. ขนาดและลักษณะของแปลงทดลองภายในบล็อค
2. ขนาดและลักษณะของบล็อค

ขนาดและลักษณะของแปลงทดลองภายในบล็อค (Size and shape of plots)

จากการศึกษาของ Fairfield Smith ซึ่งตีพิมพ์ในวารสารการเกษตร ในปีค.ศ. 1938 พบว่า ความแปรปรวนต่อพื้นที่ทดลองขนาด X หน่วยประมาณโดย

$$V_x = V_1/x^b$$

โดยที่ b คือคุณลักษณะของพื้นดินที่ทำการทดลอง ถ้า $b = 1$; $V_x = V_1/x$ หมายความว่าหน่วยต่าง ๆ ที่สร้างแปลงทดลองขนาด x หน่วยไม่มีความสัมพันธ์กันเลย ในทางตรงข้าม เมื่อ $b = 0$ และ $V_x = V_1$ หมายความว่า แม้จะใช้แปลงทดลองขนาดใหญ่ก็ไม่ช่วยเพิ่มประสิทธิภาพแต่อย่างไร เพราะทั้ง x หน่วยมีความสัมพันธ์กันโดยสมบูรณ์ ค่าของ b จะอยู่ระหว่าง 0 กับ 1

ขนาดของหน่วยทดลอง (size of unit)	จำนวนซ้ำ (replicates)	ความแปรปรวนของค่าเฉลี่ยของกรรมวิธีต่อพื้นที่ 1 หน่วยทดลอง
x	r	V_x/r
$x/2$	$2r$	$V_{x/2} / 2r$
$x/3$	$3r$	$V_{x/3} / 3r$
.	.	.
.	.	.
x/k	kr	$V_{x/k} / kr$

ตารางข้างบนนี้เป็นการกระจายสูตรของ Fairfield Smith โดยสมมุติว่าถ้ามีพื้นที่ทำการทดลองซึ่งมีขนาดจำกัด ถ้าแบ่งเป็นแปลงขนาดพื้นที่ x หน่วย จะได้ทั้งหมด r แปลง (r plots) ถ้าใช้ขนาดพื้นที่ x/2 หน่วยจะได้ 2r แปลง ถ้าใช้พื้นที่ขนาด x/3 หน่วย จะได้ทั้งหมด 3r แปลง ฯลฯ เมื่อพิจารณาความแปรปรวนของค่าเฉลี่ยกรรมวิธีจะเห็นว่าความแปรปรวนจะลดลงเมื่อ k เพิ่มขึ้น

เช่นลองพิจารณาเมื่อมี kr ซ้ำ ความแปรปรวนของค่าเฉลี่ยกรรมวิธี คือ

$$\frac{1}{kr} \frac{V_1}{(\frac{x}{k})^b} = \frac{V_1}{rx^b} \frac{1}{k^{(1-b)}}$$

จึงให้ข้อสรุปว่าควรใช้แปลงขนาดเล็กที่สุด (เพื่อให้ k โตที่สุด) นอกจากนี้ยังมีปัจจัยอื่นที่จะต้องพิจารณาร่วมกันอีก คือ

1. การทดลองบางอันจำเป็นต้องเว้นเนื้อที่ที่อยู่ริมขอบด้านที่ติดกับแปลงทดลองที่ได้รับกรรมวิธีอื่น เพื่อป้องกันไม่ให้รับอิทธิพลจากกรรมวิธีที่อยู่ในแปลงข้างเคียง (carryover treatment effects)

2. อาจจำเป็นต้องใช้เครื่องทุ่นแรงการเกษตรในการเก็บเกี่ยวพืช ซึ่งถ้าใช้แปลงขนาดเล็กเกินไปอาจไม่สะดวก อาจเป็นการเพิ่มรายจ่ายด้านอื่น

ถ้าใช้แปลงขนาดเล็ก พบว่าสัดส่วนของพื้นที่ที่ต้องตัดออกเป็น guard rows มีขนาดสูง บวกกับอาจต้องเสียค่าใช้จ่ายสูงสำหรับการปฏิบัติการด้านอื่น จึงทำให้นิยมใช้แปลงทดลองขนาดปานกลาง เช่นการทดลองวิจัยดินสำหรับปลูกมันฝรั่ง นิยมใช้แปลงขนาด 1/80 ถึง 1/20 ของเอเคอร์ การทดลองปลูกต้นแอปเปิล พบว่าต้องปลูกต้นไม้กั้นข้างละ 1 ต้น ดังผังงานทดลองข้างล่าง

```
          .  .  .  .
          .  .  .  .
   ...    e  g  e  g    ...       e = experimental tree
   ...    g  e  g  e    ...       g = guard tree
   ...    e  g  e  g    ...
```

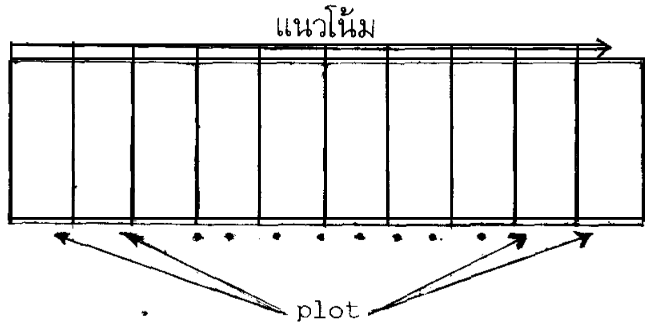
แสดงว่าต้นไม้ประมาณครึ่งหนึ่งไม่ได้ใช้สำหรับการทดลอง ถ้าใช้แปลงทดลองขนาดใหญ่ จะลดสัดส่วนต้นไม้ที่ไม่ได้ใช้ทดลองลงได้ ดังนั้นบางครั้งงานทดลองที่ต้องใช้ต้นไม้ปลูกกันระหว่างต้น อาจเปลี่ยนไปใช้ปลูกแปลงละ 1 ต้น เหล่านี้ไม่มีข้อบังคับชัดแจ้ง ถือความเหมาะสมสำหรับการทดลองแต่ละอันเป็นเกณฑ์

นอกจากนั้น ยังพบว่า รูปร่างของแปลงทดลองควรเป็นแบบยาวแต่แคบสำหรับพื้นที่ที่มีความสมบูรณ์สม่ำเสมอกัน เพราะสหสัมพันธ์ระหว่างแปลงทดลองขนาดเล็กจะมีค่าน้อยกว่าแปลงจัตุรัส แต่ถ้าพื้นที่ไม่สม่ำเสมอกัน การสร้างแปลงแบบยาวหน้าแคบให้ตั้งฉากกับทิศทางความสมบูรณ์ของดินจะให้ประสิทธิภาพด้อยกว่าแปลงรูปจัตุรัส ดังนั้น หากไม่ทราบว่ามีทิศทางความสมบูรณ์ของดิน จึงควรใช้แปลงจัตุรัส หรืออาจต้องใช้แบบสี่เหลี่ยมผืนผ้าเพื่อ สะดวกสำหรับเครื่องทุ่นแรงเกษตร

สำหรับแผนงานทดลองแบบจัตุรัสลาติน ควรให้แปลงทดลองมีรูปร่างเป็นจัตุรัสสี่เหลี่ยมให้มากที่สุด

รูปร่างและขนาดของบล็อค

ขนาดของบล็อคขึ้นอยู่กับ จำนวนกรรมวิธี รูปร่างและขนาดของหน่วยทดลอง หน่วยทดลองทั้งหลายที่อยู่ในบล็อคเดียวกันต้องมีความเป็นเอกภาพ คือมีความแตกต่างกันน้อยที่สุด บล็อคมีหน้าที่จำแนกความแตกต่างออกไปอีก 1 ทิศทาง เช่นถ้าแนวโน้มความสมบูรณ์ของดินมีทิศทางจากทิศเหนือไปทิศใต้ บล็อคทั้งหลายจะต้องตั้งอยู่บนเส้นแนวโน้มนี้ ดังรูป



ส่วนประสิทธิภาพของบล็อคยังขึ้นอยู่กับจำนวนหน่วยทดลองภายในบล็อคด้วย ดังตารางข้างล่างนี้

ประสิทธิภาพของบล็อคที่มี x แปลงทดลอง

x	5	10	20	40
b = 0.2	1.56	1.30	1.13	1
b = 0.7	1.12	1.06	1.03	1

จากตาราง จะเห็นว่าบล็อคขนาดเล็กจะมีประสิทธิภาพสูงกว่าบล็อคขนาดใหญ่จึงเป็นสาเหตุหนึ่งของการใช้บล็อคไม่สมบูรณ์

การทดลองที่เกี่ยวกับสัตว์

สำหรับการทดลองเรื่องอาหารหมู ควรใช้หมู 6 ตัวเป็น 1 หน่วยทดลอง กล่าวคือให้หมู 6 ตัวกินอาหารพร้อมกัน ไม่ควรใช้หมูตัวเดียวเป็น 1 หน่วยทดลอง เพราะในการเลี้ยงทั่วไปหมูถูกเลี้ยงเป็นกลุ่ม ดังนั้นจะต้องมีการแก่งแย่งอาหารภายในแต่ละกลุ่ม

ในการทดลองเกี่ยวกับการเล็มพืชล้มลุก หรือพืชที่ใช้ปลูกหมุนเวียน หรือการเล็มหญ้ามักมีปัญหาในการใช้แปลงทดลองที่เล็กเกินไป เพราะถ้าปล่อยให้วัวเข้าไปเล็มหญ้าทีละตัวต่อแปลง วัวกลับเกิดภาวะตื่นตกใจที่ต้องแยกจากเพื่อนและไม่ค่อยเล็มพืช แต่กลับใช้เวลาส่วนใหญ่เดินไปมาโดยรอบแปลงทดลองเพื่อหาทางหนีออกมา จึงควรแก้ปัญหาโดยการใช้แปลงขนาดใหญ่ โดยจะต้องเสียสละด้านประสิทธิภาพจะลดลง ขนาดแปลงทดลองของวัวที่เหมาะควรเป็นแปลงละ 1 ถึง 5 เอเคอร์