เฉลยแบบฝึกหัดบทที่ 2

1. จงวิเคราะห์ข้อมูลของวิธีการต่าง ๆ ต่อไปนี้

ก	ข	ค	
27	22	37	
45	24	38	
44	42	25	
31	41	47	
38	31	23	
185	160	170	G = 515

$t = 3, r = 5, N = 15$

(1) $\Sigma\Sigma X_{ij}^2 = (27^2+45^2+\ldots+23^2) = 18737$ (15 df)

(2) $CF = G^2/N = (515)^2/15 = 17681.67$ (1 df)

(3) $\Sigma T_i^2/r = (185^2+160^2+170^2)/5 = 63.33$ (3 df)

(4) $SST = (1)-(2) = 1055.33$ (14 df)

(5) $SSTr = (3)-(2) = 63.33$ (2 df)

(6) $SSE = (1)-(3)$ หรือ $(4)-(5) = 992$ (12 df)

SOV	df	SS	MS	F
Between treatments	2	63.33	31.67	0.38
Experimental error	12	992.00	82.67	$f_{2,12}^{.05} = 3.89$
	14	1055.33		

สรุปว่าวิธีการทั้ง 3 ไม่ต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ

2. สุ่มหนู 20 ตัวให้เข้ารับการทดลอง 2 วิธี (วิธีละ 20 ตัว) หนูกลุ่มหนึ่งให้เป็น "กลุ่มควบคุม" คือทิ้งให้อดอาหารระยะหนึ่ง อีกกลุ่มเป็นกลุ่ม "เข้ารับการทดลอง" คือให้อยู่ในกรงซึ่งกั้นทางเดินไว้พิเศษเหมือนเขาวงกต จะมีทางออกได้ทางเดียว ให้กลุ่มทดลองลองอยู่ในกรงดังกล่าวก่อน 12 ชั่วโมงและให้อดอาหารระยะหนึ่งด้วย เมื่อปล่อยหนูทั้ง 2 กลุ่ม ในกรง

ดังกล่าว แล้วนับจำนวนครั้งที่วิ่งพบจุดบอดจนถึงครั้งสุดท้ายที่วิ่งรวดเดียวออกประตูได้ จงทดสอบความแตกต่างด้วยการทดสอบแบบ "ที" และการวิเคราะห์ความแปรปรวน พึงสังเกตว่า (T = 1.74)

Control							Experimental						
10	7	9	6	8	6	10	12	7	9	6	5	9	9
13	9	7	12	12	15	6	9	6	4	8	4	9	10
9	11	9	13	4	9		11	6	9	7	10	7	

$\Sigma X_1 = 185$, $\Sigma X_2 = 157$, $G = 342$, $CF = (342)^2/40 = 3351.21$

$\bar{X}_1 = 7.85$, $\bar{X}_2 = 9.25$, $\Sigma X_1^2 = 1863$, $\Sigma X_2^2 = 1327$

$$S_1^2 = \{1863-(185)^2/20\}/19 = 151.75/19$$

$$S_2^2 = \{1327-(157)^2/20\}/19 = 94.55/19$$

$$S_p^2 = (151.75+94.55)/38 = 246.3/38 = 6.48$$

$Ho : \mu_1 = \mu_2$, $Ha : \mu_1 \neq \mu_2$

วิธีที่ 1 : ใช้ t-test

$$T = \frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2}{\sqrt{S_p^2(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})}} = \frac{7.85-9.25}{\sqrt{6.48(\frac{1}{20}+\frac{1}{20})}} = -1.739$$

$t_{.025,38} = \pm 1.96$

สรุปว่าวิธีการทั้ง 2 ไม่ต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ

วิธีที่ 2 ใช้ F-test

SOV	df	SS	MS	F-ratio
Between treatments	1	19.6	19.60	3.025
Experimental error	38	246.3	6.48	$f_{.05;1,38} = 4.08$
total	39	265.9		

(1) $SST = (\Sigma X_1^2+\Sigma X_2^2)-CF = (1863+1327)-2924.1 = 265.9$

(2) $SSTr = (185^2+157^2)/20-CF = 19.6$

(3) $SSE = (1)-(2) = 246.3$

$Ho : \tau_i = 0$, $Ha : \tau_i \neq 0$, $i = 1, 2$

$F = 3.025$ ไม่อยู่ในเขตวิกฤต

ยังปฏิเสธ Ho ไม่ได้เช่นกัน

ข้อสังเกต เมื่อมี 2 วิธีการ

$T^2 = F$, $(-1.739)^2 = 3.025$

3. ในการศึกษาคุณภาพของ molasses โดยวัดดีกรีของค่า Brix จาก molasses ที่สุ่มมาจาก 3 ท้องที่

ก. จงทดสอบว่าท้องที่ทั้ง 3 ให้ค่าดีกรี Brix เท่ากันหรือไม่

ข. ท่านจะยอมรับสมมุติฐานว่าดีกรี Brix มีค่าเป็น 82 สำหรับ

ข.1 ทุกท้องที่รวมกัน

ข.2 แต่ละท้องที่

ท้องที่

1	2	3
81.6	81.8	82.1
81.3	84.7	79.6
82.0	82.0	83.1
79.6	85.6	80.7
78.4	79.9	81.8
81.8	83.2	79.9
80.2	84.1	82.6
80.7	85.0	81.9

วิธีทำ ควรแปลงข้อมูล $X'_{ij} = X_{ij} - 70$

ท้องที่									ΣX	$\bar{X}$	decode
1	11.6	11.3	12.0	9.6	8.4	11.8	10.2	10.7	85.6	10.7	80.70
2	11.8	14.7	12.0	15.6	9.9	13.2	14.1	15.0	106.3	13.29	83.29
3	12.1	9.6	13.1	10.7	11.8	9.9	12.6	11.9	91.7	11.46	81.46

$G = 283.6$

$t = 3, r = 8, N = 24$

(1) $CF = (283)^2/24 = 3351.21$

(2) $\Sigma T_i^2/r = (85.6^2+106.3^2+91.7^2)/8 = 3379.49$

(3) $\Sigma\Sigma X_{ij}^2 = 3427.78$

(4) $SST = (3)-(1) = 76.57$ $\quad$ $df = N-1 = 23$

(5) $SSTr = (2)-(1) = 28.28$ $\quad$ $df = t-1 = 2$

(6) $SSE = (4)-(5) = 48.29$ $\quad$ $df = N-t = t(r-1) = 21$

ANOVA

SOV	df	SS	MS	F-ratio
ระหว่างท้องที่	2	28.28	14.14	6.15**
Error	21	48.29	2.30	$f_{.01(2, 21)} = 5.78$
total	23	76.57		

(ก) $Ho : \tau_i = 0 , i = 1, 2, 3$

$Ha : \tau_i \neq 0$

$F = 6.15^* , f_{.01(2,21)} = 5.78$

จึงปฏิเสธ Ho และสรุปว่า degree ของค่า Brix ของ molasses จากท้องที่ทั้ง 3 ไม่เท่ากันทั้งหมด

(ข) $Ho : \mu = 82 , Ha : \mu \neq 82 , \mu =$ ค่าเฉลี่ยรวมยอด

$$T = \frac{(\bar{\bar{X}}-\mu_0)}{S_{\bar{\bar{x}}}} = \frac{82.82-82.00}{.3095} = -0.58$$

$\bar{\bar{X}} = G/N = 81.82$

$S_{\bar{\bar{x}}} = \sqrt{MSE/N} = \sqrt{2.30/24} = .3095$

$t_{.025,21} = 2.080$

ยอมรับ Ho และสรุปว่า ดีกรีค่า Brix สำหรับทุกท้องที่รวมกันเป็น 82

(ข.2) $Ho : \mu_1 = 82 , Ha : \mu_1 \neq 82$

$T = (\bar{X}_1-82)/S_{\bar{x}_1}$

$= (80.7-82)/0.54 = -2.4$

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{MSE}{r}} = \sqrt{\frac{2.30}{8}} = .54$$

$t_{.025, 21} = 2.080$

$-2.4 < -2.080$

จึงปฏิเสธ Ho และสรุปว่า degree ค่า Brix ของห้องที่ (I) ต่างจาก 82 อย่างมีนัยสำคัญ

Ho : μ_2 = 82 , Ha : $\mu_2 \neq$ 82

$T = (\bar{X}_2 - \mu_0)/S_{\bar{X}_2} = (83.29 - 82.00)/.54 = 2.388^*$

สรุปว่า degree ค่า Brix ของห้องที่ (2) ต่างจาก 82 อย่างมีนัยสำคัญ

Ho : μ_3 = 82 , Ha : $\mu_3 \neq$ 82

$T = (\bar{X}_3 - \mu_0)/ S_{\bar{X}_3} = (81.46 - 82.00)/.54 = -1.0$

สรุปว่า degree ค่า Brix ของห้องที่ (3) ไม่ต่างจาก 82 อย่างมีนัยสำคัญ

4. กำหนดให้ข้อมูลจากตัวอย่างที่สุ่มจากประชากร 4 กลุ่ม มีข้อมูลสรุปในตารางข้างล่าง จงทดสอบว่ามาจากประชากรเดียวกันหรือไม่?

	1	2	3	4
mean ($\bar{X}_i$)	0.261	0.296	0.312	0.135
S_i	0.21	0.17	0.19	0.08
replicate	44	44	44	44

$\bar{\bar{X}} = (1.004)/4 = .251$

$S_p^2 = MSE = \Sigma S_i^2/4$

$= \{(.21)^2 + (.17)^2 + (.19)^2 + (.08)^2\}/4$

$= .1155/4 = .028875$

$t = 4, r = 44, N = 4(44) = 176$

$SSTr = r\sum_i^4 (\bar{X}_{i.} - \bar{\bar{X}})^2 = 44$

$= 44\{(.261 - .251)^2 + (.296 - .251)^2 + (.312 - .251)^2 + (.135 - .251)^2\}$

$= 44(.0193) = .8493$

ANOVA

SOV	df	SS	MS	F
ระหว่างวิธีการ	3	.8493	.2831	9.8**
ความคลาดเคลื่อนจากการทดลอง	172	4.9665	.028875	

175 $\quad f_{.01(3,\ 172)} = 3.78$

$Ho: \tau_i = 0 ; Ha: \tau_i \neq 0 ; i = 1, 2, 3, 4$

F = 9.8 ตกในเขตวิกฤต

จึงปฏิเสธ Ho ด้วยความเชื่อมั่น 99% สรุปว่าค่าเฉลี่ยของ 4 ประชากรนี้ไม่เท่ากันทั้งหมด (มีความแตกต่างอย่างมีนัยสำคัญ)

5. เปอร์เซ็นต์การดูดซึมของแผ่นคอนกรีตที่ผลิตจากส่วนผสมต่าง ๆ 5 สูตร มีดังนี้ จงทดสอบว่าความแตกต่างของการดูดซึมมีนัยสำคัญหรือไม่?

สูตร	ก	ข	ค	ง	จ	รวม
	6.7	5.1	4.4	6.7	6.5	
	5.8	4.7	4.9	7.2	5.8	
	5.8	5.1	4.6	6.8	4.7	
	5.5	5.2	4.5	6.3	5.9	
รวม	23.8	20.1	18.4	27.0	22.9	G = 112.2

$t = 5, r = 4, N = 20$

(1) $CF = (112.2)^2/20 = 629.44$

(2) $\Sigma\Sigma X_{ij}^2 = (6.7^2 + 5.8^2 + \ldots + 5.9^2) = 643.8$

(3) $\Sigma T_i^2/r = \{(23.8)^2 + (20.1)^2 + (18.4)^2 + (27.0)^2 + (22.9)^2\}/4 = 640.605$

(4) $SST = (2) - (1) = 14.36$

(5) $SSTr = (3) - (1) = 11.165$

(6) $SSE = (4) - (5) = 3.195$

ANOVA

SOV	df	SS	MS	F
ระหว่างวิธีการ	4	11.165	2.79	13.1**
Error	15	3.195	0.213	
	19	14.36		$f_{.01}^{(4, 15)} = 4.89$

Ho : $\tau_i = 0$, Ha : $\tau_i \neq 0$; i = 1, 2, ..., 5

F = 13.1**

สรุปว่าเปอร์เซ็นต์การดูดซึมของแผ่นคอนกรีตจากส่วนผสม 5 สูตร มีความแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ ด้วยความเชื่อมั่น 99%

6. **บริษัทขายยาแก้ปวด 4 บริษัทต่างโฆษณาว่ายาแก้ปวดของตนสามารถแก้ปวดได้รวดเร็วกว่ายาชนิดอื่น ได้มีการนำยาทั้ง 4 ชนิดมาทดสอบกับผู้ทดลองจำนวนหนึ่งแล้วบันทึกเวลาเป็นวินาทีที่ทำให้อาการปวดหายไป 50% จงทดสอบว่ายาแก้ปวดเหล่านี้มีอิทธิพลไม่ต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ**

	บริษัท (ก)	บริษัท (ข)	บริษัท (ค)	บริษัท (ง)	
	28	34	29	22	
	19	23	24	31	
	30	20	33	18	
	25	16	21	24	
$X_{i.}$ =	102	93	107	95	G = 397

(1) CF = $(397)^2/16$ = 9850.56

(2) $\Sigma\Sigma X_{ij}^2$ = $(28^2+19^2+\ldots+24^2)$ = 10,303

(3) $\Sigma T_i^2/r$ = $(102^2+93^2+107^2+95^2)/4$ = 9.881.75

(4) SST = (2) − (1) = 452.44

(5) SSTr = (3) − (1) = 31.19

(6) SSE = (4) − (5) = 421.25

ANOVA

SOV	df	SS	MS	F
Treatments	3	31.19	10.4	0.296
Error	12	421.25	35.1	
	15	452.44		

$Ho: \tau_i = 0, Ha: \tau_i \neq 0; i = 1, 2, 3, 4$

$F = 0.296 < 1$ จึงไม่มีนัยสำคัญ

สรุปว่าสรรพคุณยาแก้ปวดของทั้ง 4 บริษัท ไม่ต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ

7. สมาคมผู้บริโภคสุ่มเครื่องอบผ้าด้วยแก๊สจาก 3 ยี่ห้อมายี่ห้อละ 5 เครื่อง และบันทึกเวลาที่ใช้อบผ้า 1 กิโลกรัม จนแห้ง จงทดสอบประสิทธิภาพของเครื่องอบ

ก	ข	ค	
42	52	38	
36	48	44	
47	43	33	
43	49	35	
38	51	32	
206	243	182	G = 631

$t = 3, r = 5, N = 15$

(1) $CF = (631)^2/15 = 26,544.07$

(2) $\Sigma\Sigma X_{ij}^2 = (42^2+36^2+\ldots+32^2) = 27139$

(3) $\Sigma T_i^2/r = (206^2+243^2+182^2)/5 = 26,921.8$

(4) $SST = (2)-(1) = 594.93$

(5) $SSTr = (3)-(1) = 377.73$

(6) $SSE = (4)-(5) = 217.20$

ANOVA

SOV	df	SS	MS	F
Treatments	2	377.73	188.86	10.4**
Error	12	217.20	18.10	
	14	594.93		

$f_{.01}^{(2,12)} = 6.93$

$Ho: \tau_i = 0, Ha: \tau_i \neq 0; i = 1, 2, 3$

$F = 10.4^{**}$

ปฏิเสธ Ho สรุปว่าประสิทธิภาพของเครื่องอบอย่างน้อย 1 คู่ที่มีความแตกต่างอย่างมีนัยสำคัญสูงยิ่ง (α = .01)

8. สุ่มยางรถยนต์จาก 6 ยี่ห้อมายี่ห้อละ 4 เส้น แล้วบันทึกระยะทางห้ามล้อเป็นฟุต ในขณะขับความเร็ว 25 ไมล์/ชั่วโมง จงทดสอบความแตกต่างของยางเหล่านี้

ก	ข	ค	ง	จ	ฉ	
22	25	17	21	27	20	
20	23	19	24	29	14	
24	26	15	25	24	17	
18	22	18	23	25	15	
84	96	69	93	105	66	G = 513

t = 6, r = 4, N = 24

(1) $CF = (513)^2/24 = 10{,}965.38$

(2) $\Sigma\Sigma X_{ij}^2 = (22^2+20^2+\ldots+15^2) = 11{,}349$

(3) $\Sigma T_i^2/r = (84^2+96^2+\ldots+66^2)/4 = 11{,}265.75$

(4) $SST = (2)-(1) = 383.62$

(5) $SSTr = (3)-(1) = 300.37$

(6) $SSE = (4)-(5) = 83.25$

SOV	df	SS	MS	F
Treatments	5	300.37	60.074	12.99**
Error	18	83.25	4.625	
	23	383.62		

$f_{.01}^{(5,\ 18)} = 4.25$

$Ho : \tau_i = 0$, $Ha : \tau_i \neq 0$; $i = 1, 2, \ldots, 6$

F = 12.99**

สรุปว่า ยาง 6 ชนิด มีความแตกต่างอย่างมีนัยสำคัญยิ่ง (α = .01)

9. คะแนนสอบของนักเรียน 2 กลุ่ม มีดังนี้

กลุ่มที่ 1: 12 26 31 12 14 16 10 ; $\bar{X}_1 = 17.29$

กลุ่มที่ 2: 8 14 29 7 14 6 ; $\bar{X}_2 = 13.00$

จงทดสอบ Ho : $\mu_1 = \mu_2$

$t = 2, r_1 = 7, r_2 = 6, N = 13$

$\Sigma X_{1j} = 121,\ \Sigma X_{1j}^2 = 2477,\ \Sigma(X-\bar{X}_1)^2 = 385.43$

$\Sigma X_{2j} = 78\ ,\ \Sigma X_{2j}^2 = 1382,\ \Sigma(X-\bar{X}_2)^2 = 368$

$G = 199,\ \Sigma\Sigma X_{ij}^2 = 3859,\ S_p^2 = \frac{(385.43+368)}{6+5} = \frac{753.43}{11} = 68.49$

Ho : $\mu_1 = \mu_2$, Ha : $\mu_1 \neq \mu_2$

วิธีที่ 1 ใช้ t-test

$$T = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)}{\sqrt{S_p^2(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2})}} = \frac{(17.29-13.00)}{\sqrt{68.49(\frac{1}{7}+\frac{1}{6})}} = \frac{4.29}{4.604} = 0.93$$

$\boxed{t_{.025,\ 11} = 2.201}$ คะแนน 2 กลุ่มไม่ต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ

วิธีที่ 2 ใช้ F-test

(1) $CF = (199)^2/13 = 3,046.23$

(2) $\Sigma\Sigma X_{ij}^2 = 3859$

(3) $\Sigma T_i^2/r_i = \frac{(121)^2}{7}+\frac{(78)^2}{6} = 3105.57$

(4) $SST = (2)-(1) = 812.77$

(5) $SSTr = (3)-(1) = 59.34$

(6) $SSE = (4)-(5) = 753.43$

ANOVA

SOV	- df	SS	MS	F
Treatments	1	59.34	59.34	0.866
Error	11	753.43	68.49	
	12			

เนื่องจาก $F < 1$ จึงไม่มีนัยสำคัญ และได้ข้อสรุปเหมือน t-test

พึงสังเกตว่า $\sqrt{F} = \sqrt{.866} = .93 = T$

10. ผู้ผลิตสินค้าได้สุ่มสินค้าตัวอย่างทีละ 100 ชิ้นจากวิธีการผลิต 3 วิธี แล้วนับสินค้าที่ชำรุด ได้ข้อมูลข้างล่าง จงทดสอบว่าข้อมูลเหล่านี้มาจากประชากรที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากันหรือไม่

process 1 : 2 2 7 2 5 4 3 $\Sigma X_1 = 25, \Sigma X_1^2 = 111$

process 2 : 7 3 7 9 4 5 3 $\Sigma X_2 = 38, \Sigma X_2^2 = 238$

process 3 : 8 4 5 9 10 11 9 $\Sigma X_3 = 56, \Sigma X_3^2 = 488$

$\Sigma X^2 = 837$

$t = 3, r = 7, N = 21, G = 119, CF = (119)^2/21 = 674.34$

(1) $SST = 837 - 674.34 = 162.66$

(2) $SSTr = (25^2 + 38^2 + 56^2)/7 - CF = 69.23$

(3) $SSE = (1) - (2) = 93.43$

SOV	df	SS	MS	F
Treatments	2	69.23	34.62	6.67**
Error	18	93.43	5.19	
	20	162.66		

$f_{.01}^{(2, 18)} = 6.01$

$Ho : \tau_i = 0 , Ha : \tau_i \neq 0 , i = 1, 2, 3$

$F = 6.67^{**}$

ปฏิเสธ Ho และสรุปว่าสินค้าชำรุดโดยเฉลี่ยของ 3 กระบวนการมีความแตกต่างอย่างมีนัยสำคัญสูงยิ่ง

11. สุ่มอิฐที่ผลิตได้มา 20 ก้อน แล้วนำไปเก็บในที่เก็บ 4 ประเภทแบบสุ่ม ในระหว่างการทดลองปรากฏว่าเกิดความผิดพลาดทำให้อิฐเสียไป 6 ก้อน เมื่อเก็บไว้ครบ 1 สัปดาห์ ได้นำอิฐเหล่านั้นมาหาปริมาณน้ำคิดเป็นเปอร์เซ็นต์ ดังนี้

วิธีเก็บ	ปริมาณน้ำ					$X_{i.}$	r_i
1	7.3	8.3	7.6	8.4	8.3	39.9	5
2	5.4	7.4	7.1			19.9	3
3	8.1	6.4				14.5	2
4	7.9	9.5	10.0	7.1		34.5	4

ก. จงเขียนแบบจำลองที่เหมาะกับข้อมูลนี้

ข. จงทดสอบว่าปริมาณน้ำจากวิธีเก็บต่าง ๆ มีความแตกต่างอย่างมีนัยสำคัญหรือไม่

$t = 4, \Sigma r_i = 14, G = 108.8, CF = (108.8)^2/14 = 845.53$

$$\Sigma\Sigma X_{ij}^2 = 863.36, \Sigma T_i^2/r_i = \frac{(39.9)^2}{5}+\frac{(19.9)^2}{3}+\frac{(14.5)^2}{2}+\frac{(34.5)^2}{4} = 853.09$$

(1) $SST = 863.36 - CF = 17.83$

(2) $SSTr = 853.09 - CF = 7.56$

(3) $SSE = (1)-(2) = 10.27$

(ก) แบบจำลอง คือ

$X_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij}$; $i = 1, 2, 3, 4$, $j = 1, \ldots, r_i$

$r_1 = 5, r_2 = 3, r_3 = 2, r_4 = 4$

τ_i = อิทธิพลของที่เก็บประเภทที่ i, ε_{ij} เป็น random component จากอิฐ j^{th} ซึ่งรับวิธี i^{th}

ANOVA

SOV	df	SS	MS	F
Treatments	3	7.56	2.52	2.45
Error	10	10.27	1.027	
	13	17.83		

$f_{.05}^{(3, 10)} = 3.71$

$H0 : \tau_i = 0$, $Ha : \tau_i \neq 0$, $i = 1, 2, 3, 4$

$F = 2.45 < 3.71$, ยังปฏิเสธ Ho ไม่ได้

สรุปว่าเปอร์เซ็นต์น้ำในอิฐจากวิธีเก็บ 4 ประเภท ไม่ต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ

12. ข้อมูลต่อไปนี้ได้จากการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์เพื่อเปรียบเทียบคุณภาพของสี 4 ชนิด ในด้านการสะท้อนแสง ได้สุ่มแผ่นทดลองให้กับสีต่างๆ ได้ข้อมูลจากเครื่องวัดโดยเฉพาะ ดังนี้

สี	1	2	3	4
	195	45	230	110
	150	40	115	55
	205	195	235	120
	120	65	225	50
	160	145		80
		195		

ก. จงหาค่าประมาณของ residual variance

ข. คุณภาพของสีเหล่านี้แตกต่างกันหรือไม่

ค. จงสร้าง 95% ช่วงเชื่อมั่นของค่าเฉลี่ยของสีชนิดที่ 1

(1) $G = 2735,\ CF = (2735)^2/20 = 374{,}011.25$

(2) $\frac{\Sigma T_i^2}{r_i} = \frac{830^2}{5}+\frac{685^2}{6}+\frac{805^2}{4}+\frac{415^2}{5} = 412{,}454.41$

(3) $\Sigma\Sigma X_{ij}^2 = 457{,}875$

(4) $SST = (3)-(1) = 83{,}863.75$

(5) $SSTr = (2)-(1) = 38{,}424.16$

(6) $SSE = (4)-(5) = 45{,}439.59$

SOV	df	SS	MS	F
Treatments	3	38,424.16	12,808.05	4.51*
Error	16	45,439.59	2,839.97	
	19	83,863.75		

$f_{.05}^{(3,\ 16)} = 3.24$

$t_{.025,\ 16} = 2.12$

(ก) ค่าประมาณของ residual variance $= \hat{\sigma}_\varepsilon^2 = MSE = 2{,}839.97$

(ข) Ho : $\tau_i = 0$, Ha : $\tau_i \neq 0$, i = 1, 2, 3, 4

$F = 4.51^* > 3.24$

ปฏิเสธ Ho และสรุปว่าคุณภาพของสีมีความแตกต่างอย่างมีนัยสำคัญ

(ค) 95% ช่วงเชื่อมั่นของ μ_1

$$S_{\bar{x}_1} = \sqrt{\frac{MSE}{r_1}} = \sqrt{\frac{2839.97}{5}} = 23.83$$

$$= \bar{X}_1 \pm t_{.025,\,16} S_{\bar{x}_1}$$

$$= 166 \pm (2.12)(23.83)$$

$$= 115.48,\ 216.52$$

13. กำหนดตารางวิเคราะห์ความแปรปรวนให้

ก. จงเขียนแบบจำลอง และอธิบายความหมายของแต่ละเทอม

ข. จงทดสอบว่ากรรมวิธีทั้ง 6 มีค่าเฉลี่ยของประชากรไม่ต่างกัน

ค. จงหาความแปรปรวนของค่าเฉลี่ยของกรรมวิธี

ง. ถ้าค่าเฉลี่ยของวิธีการที่ 3 เป็น 193.7 จงสร้าง 95% ช่วงเชื่อมั่นของค่าเฉลี่ยของประชากรของวิธีการที่ 3

จ. สมมุติว่าส่วนประกอบของความแปรปรวนคงเดิม ถ้าจะเปลี่ยนไปใช้ 9 หน่วย ทดลองใ วิธีการ และ 4 ตัวอย่างย่อย/หน่วยทดลอง แผนใหม่นี้จะดีกว่าหรือด้อยกว่าแผนเดิม

SOV	df	MS	E(MS)
Treatments	5	12489	$\sigma_\delta^2 + 3\sigma^2 + 30/5\,\Sigma\tau^2$
Exp.units within treatments	54	3349	$\sigma_\delta^2 + 3\sigma^2$
Determination per exp.unit	120	627	σ_δ^2

t = 6, r = 10, s = 3, N = 180

(ก) $Y_{ijk} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} + \delta_{ijk}$; i = 1, 2, ..., 6

μ = overall mean　　j = 1, 2, ..., 10

k = 1, 2, 3

τ_i = อิทธิพลของวิธีการ i

ε_{ij} = อิทธิพลเชิงสุ่มจากหน่วยทดลอง j ของวิธีการ i

δ_{ijk} = อิทธิพลเชิงสุ่มจากตัวอย่างย่อย k ของหน่วยทดลอง j ของวิธีการ i

(ข) $Ho: \tau_i = 0, Ha: \tau_i \neq 0, i = 1, 2, ..., 6$

$$F = \frac{12489}{3349} = 3.73^{**},\ f_{.05}^{(5,54)} = 2.4$$

$$f_{.01}^{(5,54)} = 3.4$$

สรุปว่ามีความแตกต่างอย่างมีนัยสำคัญสูงยิ่งระหว่างวิธีการทั้ง 6

(ค) $V(\bar{y}_{i..}) = \frac{MSE}{rs} = \frac{3349}{30} = 111.63$

$S_{\bar{y}_{i..}} = \sqrt{111.63} = 10.56$

(ง) 95% ช่วงเชื่อมั่นของ μ_3 คือ

$\bar{y}_3 \pm t_{.025, 54} S_{\bar{y}_3}$

$193.7 \pm (1.96)(10.56)$

$193.7 \pm 20.7 = 173, \quad 214.4$

(จ) $r' = 9,\ s' = 4$

$$\hat{V}'(\bar{y}) = \frac{MSE'}{r's'} = \frac{\hat{\sigma}_\delta^2 + s'\hat{\sigma}_\varepsilon^2}{r's'} = \frac{627 + 4(907.33)}{(9)(4)} = 118.23$$

$$V(\bar{y}) = \frac{MSE}{rs} = 111.63$$

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{\sigma}_\delta^2 &= 627 \\ \sigma_\varepsilon^2 &= \frac{3349 - 627}{3} = 907.33 \end{aligned}}$$

$$\text{RE (แบบเดิม VS แบบใหม่)} = \frac{M\hat{S}E'}{MSE} = \frac{118.23}{111.63} = 1.06$$

$$= 106\%$$

สรุปได้ว่าแบบเดิมดีกว่า 6% คือถ้าแบบเดิมใช้ 100 ซ้ำ แบบใหม่ต้องเพิ่มอีก 6 ซ้ำ จึงจะให้ความเที่ยงตรง (precision) เท่ากัน

14. **ผู้ทดลองปลูกข้าว 5 สายพันธุ์โดยสุ่มปลูกในแปลงทดลองที่มีอยู่ 30 แปลง ชนิดละ 6 แปลง แต่เขาเก็บเกี่ยวข้าวจากพื้นที่ที่สุ่มมาขนาด 3 คูณ 8 ฟุต จำนวน 8 แห่ง/แปลง และนำข้าวจากพื้นที่ตัวอย่างมาหาค่าวิเคราะห์เคมี 3 ค่าวิเคราะห์/พื้นที่ตัวอย่าง จงแสดงการแบ่ง df และแสดงค่าคาดหมายของกำลังสองเฉลี่ย และหาอัตราส่วนของ F เพื่อใช้ทดสอบความแตกต่างของวิธีการ**

$t = 5, r = 6, tr = 30, s = 8, d = 3, N = trsd = 720$

ANOVA

SOV	df	E(MS)
ข้าว	$(t-1) = 4$	$\sigma_\delta^2 + 3\sigma_s^2 + 24\sigma_\varepsilon^2 + 144\frac{\Sigma\tau_i^2}{4}$
แปลง	$t(r-1) = 25$	$\sigma_\delta^2 + 3\sigma_s^2 + 24\sigma_\varepsilon^2$
ตัวอย่างย่อย/แปลง	$tr(s-1) = 210$	$\sigma_\delta^2 + 3\sigma_s^2$
ค่าวิเคราะห์/ตัวอย่าง	$trs(d-1) = 480$	σ_δ^2
	719	

$y_{ijkl} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} + S_{ijk} + \delta_{ijkl}$; $i = 1, 2, ..., 5$

Ho : $\tau_i = 0$, Ha : $\tau_i \neq 0$ $j = 1, 2, ..., 6$

ตัวสถิติที่ใช้ทดสอบคือ $k = 1, 2, ..., 8$

$l = 1, 2, 3$

$$F = \frac{MS\,(\text{วิธีการ})}{MSE} = \frac{MS\,(\text{ข้าว})}{MS\,(\text{แปลง})}$$

15. จากตารางวิเคราะห์ข้างล่าง

ก. จงหาค่าคาดหมายของกำลังสองเฉลี่ย โดยสมมุติว่าสนใจเฉพาะกลุ่มที่มีอยู่ในการทดลอง แต่หน่วยทดลอง และค่าวิเคราะห์เป็นแบบสุ่ม

ข. ทดสอบความแตกต่างของค่าเฉลี่ยประชากร และอธิบายความหมาย

ค. หาความแปรปรวนของค่าเฉลี่ยของวิธีการ (ก)

SOV	df	MS	E(MS)
Groups	3	600	$\sigma_\delta^2 + 3\sigma_\varepsilon^2 + 30\frac{\Sigma\tau_i^2}{3}$
Experimental units within groups	36	120	$\sigma_\delta^2 + 3\sigma_\varepsilon^2$
Determination per experimental unit	80	12	σ_δ^2

(ก) $t = 4, r = 10, s = 3$

(ข) Ho : $\tau_i = 0$, Ha : $\tau_i \neq 0$; $i = 1, 2, ..., 4$

$$F = \frac{MSTr}{MSE} = \frac{600}{120} = 5^{**}$$

$f_{.05}^{(3,36)} = 2.8$, $f_{.01}^{(3,36)} = 4.3$

สรุปว่าค่าเฉลี่ยของประชากรมีความแตกต่างอย่างมีนัยสำคัญสูงยิ่ง

(ค) $V(\bar{y}_{i..}) = \frac{MSE}{rs} = \frac{120}{10(3)} = 4$

16. **จงหาค่าประมาณของส่วนประกอบของความแปรปรวน** (Components of variance) **และอธิบายความหมายของแต่ละเทอมในแบบจำลอง** $Y_{ijk} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} + \delta_{ijk}$ **พร้อมทั้งแสดงข้อสมมุติของแบบจำลอง** (model II)

SOV	df	MS	E(MS)
Among treatments	4	20	$\sigma_\delta^2 + 2\sigma_\varepsilon^2 + 8\sigma_\tau^2$
Experimental units with in trts.	15	15	$\sigma_\delta^2 + 2\sigma_\varepsilon^2$
Determination per experimental unit	20	4	σ_δ^2

$t = 5, r = 4, d = 2$

μ = overall mean

τ_i = อิทธิพลของวิธีการ i

ε_{ij} = อิทธิพลเชิงสุ่มจากหน่วยทดลองที่ j ของวิธีการ i

δ_{ijk} = อิทธิพลเชิงสุ่มจากตัวอย่างย่อยที่ k จากหน่วยทดลอง j ของวิธีการ i

ข้อสมมุติ $\tau_i \sim NID(0, \sigma_\tau^2)$

$\varepsilon_{ij} \sim NID(0, \sigma_\varepsilon^2)$

$\delta_{ijk} \sim NID(0, \sigma_\delta^2)$

ค่าประมาณของ components of variance

$\hat{\sigma}_\delta^2 = 4,\ \sigma_\varepsilon^2 = (15-4)/2 = 5.5,\ \sigma_\tau^2 = (20-15)/8 = .625$

17. **จากตารางวิเคราะห์ข้างล่าง**

ก. **จงหาความแปรปรวนของค่าเฉลี่ยกรรมวิธี**

ข. **จงทดสอบ** $Ho: \sigma_\tau^2 = 0$ **และอธิบายข้อสรุป**

ค. **ถ้าค่าเฉลี่ยของวิธีการที่** 1 **เป็น** 80 **จงหา** 95% **ช่วงเชื่อมั่นของค่าเฉลี่ยของประชากร**

วิธีการที่ 1

SOV	df	SS	MS	E(MS)
Treatments	3	1800	600	$\sigma_\delta^2+3\sigma^2+30\sigma_\tau^2$
Experimental units/trts	36	3600	100	$\sigma_\delta^2+3\sigma^2$
Det. per expt. units	80	960	12	σ_δ^2

(ก) $t = 4, r = 10, s = 3$

$$V(\bar{y}_{i..}) = \frac{MSE}{rs} = \frac{100}{30} = 3.33$$

(ข) Ho : $\sigma_\tau^2 = 0$, Ha : $\sigma_\tau^2 \neq 0$

$$F = \frac{MSTr}{MSE} = \frac{600}{100} = 6^{**}, \ f_{.01}^{(3,36)} = 4.4$$

สรุปว่า มีความแตกต่างอย่างมีนัยสำคัญสูงยิ่ง ระหว่างวิธีการทั้งหลายในประชากรนี้

(ค) 95% ช่วงเชื่อมั่นของ μ_1 ถ้า $\bar{y}_{1..} = 80$ คือ

$= \bar{y}_{1..} \pm t_{.025,36} S_{\bar{y}_{1..}}$

$= 80 \pm (1.96)(1.82)$

$= 80 \pm 3.58$

$= 76.42, \quad 83.58$

$S_{\bar{y}_{1..}} = \sqrt{3.33}$

$= 1.82$

$t_{.025,36} = \pm 1.96$

18. จากตารางวิเคราะห์ข้างล่าง

ก. จงทดสอบความแตกต่างของวิธีการและอธิบายข้อสรุป

ข. หาค่าคาดหมายของกำลังสองเฉลี่ย

ค. หาความแปรปรวนของค่าเฉลี่ยกรรมวิธี

ง. เปรียบเทียบประสิทธิภาพกับแผนทดลองใหม่ซึ่งจะใช้ 10 หน่วยทดลอง/วิธีการ และค่าวิเคราะห์ 1 ค่าวิเคราะห์/หน่วยทดลอง

(ข)

SOV	df	MS	E(MS)
Treatments	4	960	$\sigma^2+2\sigma_\varepsilon^2+16\Sigma\tau_i^2/4$
Experimental units within trts.	35	320	$\sigma^2+2\sigma_\varepsilon^2$
Determination per experimental unit	40	20	σ^2

(ก) Ho : $\tau_i = 0$, Ha : $\tau_i \neq 0$, i = 1, 2, ..., 5 $\boxed{t = 5, r = 8, s = 2}$

$$F = \frac{MSTr}{MSE} = \frac{960}{320} = 3.0^* \; ; \; f_{.05}^{(4,\,35)} = 2.6$$

สรุปว่ามีความแตกต่างอย่างมีนัยสำคัญระหว่างวิธีการทั้ง 4

(ค) $V(\bar{y}_{i..}) = \frac{MSE}{rs} = \frac{320}{8(2)} = 20$

(ง) $r' = 10, s = 1$

$$\boxed{\begin{aligned}\hat{\sigma}_\delta^2 &= 20 \\ \hat{\sigma}_\varepsilon^2 &= \frac{320-20}{2} = 150\end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} \hat{MSE}' &= \hat{\sigma}_\delta^2 + s'\hat{\sigma}_\varepsilon^2 \\ &= 20 + (1)(150) \\ &= 170 \end{aligned}$$

$$\hat{V}(\bar{y})' = \frac{\hat{MSE}'}{r's'} = \frac{170}{10(1)} = 17$$

RE (แบบเก่า VS แบบใหม่) = $\frac{\hat{V}(\bar{y})'}{V(\bar{y})} = \frac{17}{20} = 0.85 = 85\%$

แบบใหม่ดีกว่า เพราะแบบเดิมใช้ 100 ซ้ำจะให้ความเที่ยงตรง = 85 ซ้ำของแบบใหม่

19. **ถ้าแบ่งประชากรในกรุงเทพฯ เป็น 5 ภาค แต่ละภาคสุ่มมา 5 อำเภอ แต่ละอำเภอสุ่มมา 4 บล็อค (ชุมนุมอาคาร) และแต่ละบล็อคสุ่มตัวอย่าง (ครัวเรือนตัวอย่าง) มา 3 ครัวเรือน เพื่อใช้ศึกษาเรื่องรายได้ของหัวหน้าครอบครัว จงแสดงการแบ่ง df ในตารางวิเคราะห์**

t = 5, r = 5, s = 4, d = 3, N = 300

SOV	df
ภาค	t − 1 = 4
อำเภอ/ภาค	t(r − 1) = 20
บล็อค/อำเภอ	tr(s − 1) = 75
ครัวเรือน/บล็อค	trs(d − 1) = 200
	<u>299</u>

20. **จงแสดงการแบ่ง df ของงานทดลองต่อไปนี้**

ฉีดฮอร์โมนสเปรย์ให้แก่ต้นผลไม้ในสวนซึ่งมีทั้งหมด 100 ต้นแบบสุ่มสมบูรณ์ ทุก ๆ วิธีการ เวลาฉีดใช้ฉีดพร้อมกันที่ละ 2 ต้น (4 วิธีการใช้กับต้นไม้ 8 ชุด ที่เหลืออีก 2 วิธีการ การใช้กับต้นไม้ 9 ชุด) แล้วเก็บผลผลิตตัวอย่างมาต้นละ 4 ตัวอย่าง

$\Sigma r_i = 50, t = 6, r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 8, r_5 = r_6 = 9, s = 8, N = 400$

ต้นไม้ 2 ต้น = 1 หน่วยทดลอง

SOV	df
วิธีการ	$t-1 = 5$
Experimental error (ต้นไม้/วิธีการ)	$\sum_{i}^{6}(r-1) = 44$
Sampling error (ผลผลิต/ต้น)	$\sum_{i=1}^{6} r_i(s-1) = 350$
	399

21. ในการเปรียบเทียบพื้นที่เกษตร 8 ท้องที่ ได้สุ่มอำเภอตัวอย่างมาท้องที่ละ 5 อำเภอ แต่ละอำเภอสุ่มมา 20 ฟาร์มเพื่อศึกษา "รายได้ของฟาร์ม" ได้ข้อสรุปดังนี้

SS (Total) corrected = 8183000 , SS (ระหว่างอำเภอ/ท้องที่) = 352000

MS (ระหว่างพื้นที่เกษตร) = 33000

ก. จงสร้างตารางวิเคราะห์ความแปรปรวนของ "รายได้ของฟาร์ม"

ข. จงหาความแปรปรวนของค่าเฉลี่ยของพื้นที่เกษตร

ค. สมมุติว่าเลือกสุ่มมาเพียง 2 อำเภอ/ท้องที่ และ 50 ฟาร์ม/อำเภอ จะให้ประสิทธิภาพเมื่อเทียบกับแผนทดลองเดิมอย่างไร

ง. ถ้าพื้นที่เกษตร 8 ท้องที่นั้นได้มาแบบเจาะจง อยากทราบว่า "รายได้ของฟาร์ม" แตกต่างตามท้องที่หรือไม่

(ก) $t = 8, r = 5, s = 20, N = 800$

ANOVA

SOV	df	SS	MS	E(MS)
ระหว่างพื้นที่เกษตร	7	231,000	33,000	$\sigma^2 + 20\sigma_\varepsilon^2 + 100\Sigma\tau_i^2/7$
อำเภอ/ท้องที่	32	352,000	11,000	$\sigma^2 + 20\sigma_\varepsilon^2$
ระหว่างฟาร์ม/อำเภอ	760	7,600,000	10,000	σ^2
Total	799	8,183,000		

(ข) $V(\bar{y}_{i..}) = \frac{MSE}{rs} = \frac{11,000}{5(20)} = 110$

(ค) $r' = 2, s' = 50$

$\hat{\sigma}^2 = 10,000$
$\hat{\sigma}^2_\varepsilon = \frac{11,000-10,000}{20} = 50$

$\hat{MSE}' = \hat{\sigma}^2 + s'\hat{\sigma}^2_\varepsilon$

$= 10,000+(50)(50) = 12,500$

$\hat{V}(\bar{y})' = \frac{\hat{MSE}'}{r's'} = \frac{12,500}{2(50)} = 125$

RE (แบบเดิม VS แบบใหม่) = $\frac{\hat{V}(\bar{y})'}{V(\bar{y})} = \frac{125}{110} = 1.14 = 114\%$

แบบเดิมดีกว่า 14%

(ง) $Ho : \tau_i = 0, Ha : \tau_i \neq 0, i = 1, 2, ..., 8$

$F = \frac{\text{MS (พื้นที่)}}{\text{MS (อำเภอ)}} = \frac{33,000}{11,000} = 3.0^*$, $f^{(7,32)}_{.05} = 2.3$

สรุปว่ารายได้ของฟาร์มในท้องที่ 8 แห่งนั้นมีความแตกต่างอย่างมีนัยสำคัญ

22. กำหนดตารางวิเคราะห์ความแปรปรวนของการทดลองแบบสุ่มสมบูรณ์ที่มี 4 วิธีการ 8 หน่วยทดลอง/วิธีการ 3 ตัวอย่างย่อย/หน่วยทดลอง และ 2 ค่าวิเคราะห์/ตัวอย่างย่อย ดังนี้

SOV	df	MS
Treatments	3	19200
Among experimental units alike	28	4800
Among samples per experimental unit	64	2400
Between determinations per sample	96	1200

จงพิจารณาว่า ถ้าเปลี่ยนไปใช้ 12 หน่วยทดลอง/วิธีการ 2 ตัวอย่างย่อย/หน่วยทดลอง และค่า 1 ค่าวิเคราะห์/ตัวอย่างย่อย จะมีผลในการประมาณค่าอิทธิพลของวิธีการอย่างไร เมื่อเทียบกับแบบเดิม

$\hat{\sigma}^2_\delta = 1200$
$\hat{\sigma}^2_\eta = \frac{2400-1200}{2}$
$= 600$
$\hat{\sigma}^2_\varepsilon = \frac{4800-2400}{(2)(3)}$
$= 400$

$t = 4, r = 8, s = 3, d = 2$

$V(\bar{y}_{i...}) = \frac{MSE}{rsd} = \frac{4800}{8(3)(2)} = 100$

$r' = 12, s' = 2, d' = 1$

$\hat{MSE}' = \hat{\sigma}^2_\delta + d'\hat{\sigma}^2_\eta + d's'\hat{\sigma}^2_\varepsilon$

$= 1200+(1)(600)+(1)(2)400$

$= 2600$

$\hat{V}(\bar{y}_{i..})' = \frac{\hat{MSE}'}{r's'd'} = \frac{2600}{12(2)(1)} = 108.33$

RE (แบบเดิม VS แบบใหม่) $= \frac{\hat{V}(\bar{y}_{i..})'}{V(\bar{y}_{i..})} = \frac{108.33}{100} = 1.08 = 108\%$

สรุปว่าแบบเดิมดีกว่า 8%

23. นำแบตเตอรี่ที่คุณภาพเหมือนกัน 30 ลูกมาสุ่มเพื่อนำไปใช้งานในระดับอุณหภูมิที่ต่างกัน 5 ระดับ แล้วบันทึกอายุการใช้งานเป็นวินาทีได้ดังนี้

0°C	25°C	50°C	75°C	100°C
55	60	70	72	65
55	61	72	72	66
57	60	73	72	60
54	60	68	70	64
54	60	77	68	65
56	60	77	69	65

จงวิเคราะห์ข้อมูลข้างบนนี้

$t = 5, r = 6, N = 30$ ควรแปลงข้อมูลเป็น $X'_{ij} = X_{ij} - 50$

$G = 437, CF = (437)^2/30 = 6365.63$

$\Sigma\Sigma X_{ij}^2 = 7747, \Sigma T_i^2/r = 7634.17$

(1) $SST = 7747 - CF = 1381.37$

(2) $SSTr = 7634.17 - CF = 1268.54$

(3) $SSE = (1) - (2) = 112.83$

ANOVA

SOV	df	SS	MS	F
ระหว่างอุณหภูมิ	4	1268.54	317.14	70.3**
error	25	112.83	4.51	$f_{.01}^{(4,25)} = 4.18$
	29	1381.54		

อายุการใช้งานของแบตเตอรี่ ณ ระดับอุณหภูมิต่าง ๆ 5 ระดับ มีความแตกต่างอย่างมีนัยสำคัญสูงยิ่ง

24. ถ้าประชากรปกติ 4 ประชากร มีความแปรปรวนเท่ากัน คือ $\sigma^2 = 25$ และมี $\mu_1 = 50$, $\mu_2 = 60$, $\mu_3 = 50$, $\mu_4 = 60$ จะต้องใช้ค่าสังเกตกลุ่มละเท่าใดจึงจะให้ความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธ Ho : $\tau_i = 0$ มีค่าอย่างน้อยที่สุด 0.90 เมื่อใช้ $\alpha = 0.05$

$$\mu = (50+60+50+60)/4 = 55$$

$$\Sigma\tau_i^2 = \sum_{i=1}^{4}(\mu_i-\mu)^2 = (-5^2+5^2+(-5)^2+5^2) = 100$$

$$\Sigma\tau_i^2/\sigma^2 = 100/25 = 4$$

$$\Phi^2 = \frac{r\Sigma\tau_i^2}{t\sigma^2} = \frac{r(4)}{4} = r$$

$$\Phi = \sqrt{r}$$

จากตาราง V เมื่อ $\nu_1 = (t-1) = 3$, $\nu_2 = t(r-1)$

$r = \Phi^2$	$\Phi = \sqrt{r}$	$\nu_2 = t(r-1)$	β	$1-\beta$
4	2.0000	12	~.18	~.82
5	2.2326	16	~.07	~.93
6	2.4500	20	~.04	~.96
7	2.6500	24	~.015	~.985

ดังนั้นถ้าต้องการให้ P (ปฏิเสธ Ho : $\tau_i = 0$) มีค่าอย่างน้อยที่สุด .90 เมื่อใช้ $\alpha = .05$ ต้องใช้อย่างน้อย 5 ซ้ำต่อวิธีการ

25. นักเคมี 4 คน ทำการวิเคราะห์หาค่าเปอร์เซ็นต์ของเมทิลแอลกอฮอล์ในส่วนผสมเคมีชนิดหนึ่ง ได้ผลการทดลองดังนี้

นักเคมี	เปอร์เซ็นต์ของเมทิลแอลกอฮอล์		
1	84.99	84.04	84.38
2	85.15	85.13	84.88
3	84.72	84.48	85.16
4	84.20	84.10	84.55

(ก) ค่าวิเคราะห์จากนักเคมีทั้ง4 คน มีความแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญที่ $\alpha = .05$ หรือไม่

(ข) จงหาพลังการทดสอบ (power of the test) เพื่อตรวจจับ (detect) ว่า $\sum_{i=1}^{4}\tau_i^2/\sigma^2 = 3.5$

(ค) ถ้านักเคมีคนที่ (2) เป็นพนักงานใหม่ จงสร้างการทดสอบที่เป็นอิสระกัน (orthogonal) และมีความหมาย (meaningful) ซึ่งผู้ทดลองควรจะได้กำหนดคำถามนี้ไว้ล่วงหน้าก่อนทำการทดลอง (สร้าง 1 ชุด = 3 contrast)

(ง) ถ้าต้องการตรวจจับว่า $\sum_{i=1}^{4} \tau_i^2/\sigma^2 = 1.5$ ด้วยความน่าจะเป็นไม่ต่ำกว่า .95 จะต้องใช้ขนาดตัวอย่างเท่าใด?

วิธีทำ ควรแปลงข้อมูลก่อนเพื่อสะดวกในการสร้าง ANOVA

ให้ $Y'_{ij} = Y_{ij} - 84$

นักเคมี	เปอร์เซ็นต์เมทิลแอลกอฮอล์			รวม
1	0.99	0.04	0.38	1.41
2	1.15	1.13	0.88	3.16
3	0.72	0.48	1.16	2.36
4	0.20	0.10	0.55	0.85
				7.78

$t = 4, r = 3, N = 12$

(1) $CF = (7.78)^2/12 = 5.0440$

(2) $\Sigma\Sigma Y_{ij}^2 = 6.9468$

(3) $\Sigma T_i^2/r = 18.2658/3 = 6.0886$

(4) $SST = (2) - (1) = 1.9028$

(5) $SSTr = (3) - (1) = 1.0446$

(6) $SSE = (4) - (5) = 0.8582$

ANOVA

SOV	df	SS	MS	F
ระหว่างนักเคมี	3	1.0446	0.3482	4.87*
error	12	.8582	0.0715	
	15	1.9028		

$f_{.05}^{(3,12)} = 3.49$

(ก) Ho : $\tau_i = 0$, Ha : $\tau_i \neq 0$, i = 1, 2, 3, 4

$F = 4.87^*$

สรุปว่าค่าวิเคราะห์จากนักเคมี 4 คน มีความแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ

(ข) กำหนดให้ $\sum_{i=1}^{4} \tau_i^2/\sigma^2 = 3.5$, r = 3, t = 4

$$\Phi^2 = \frac{r\Sigma\tau_i^2}{a\sigma^2} = \frac{3(3.5)}{4} = 2.625, \ \Phi = 1.62$$

จากตาราง V เมื่อ $\nu_1 = 3$, $\nu_2 = 12$, $\alpha = 0.05$

จะได้ $\beta = .35$, $1-\beta = .65$

นั่นคือถ้าต้องการตรวจจับว่า $\Sigma\tau_i^2/\sigma^2 = 3.5$ ด้วยระดับนัยสำคัญ 0.05 แล้วจะมีพลังการทดสอบ = 0.65

(ค) ควรสร้างการเปรียบเทียบ ดังนี้

(1) Ho : $\mu_2 = (\mu_1+\mu_3+\mu_4)/3$ คือเปรียบเทียบค่าวิเคราะห์ของคนที่ 2 กับคนอื่น ๆ

Ha : $\mu_2 \neq (\mu_1+\mu_3+\mu_4)/3$

(2) Ho : $\mu_3 = (\mu_1+\mu_4)/2$, Ha : $\mu_3 \neq (\mu_1+\mu_4)/2$

(3) Ho : $\mu_1 = \mu_4$, Ha : $\mu_1 \neq \mu_4$

	Contrast	(1) 1.41	(2) 3.16	(3) 2.36	(4) 0.85	$\Sigma C_i T_i$	$r\Sigma C_i^2$	SS = $(\Sigma C_i T_i)^2/r\Sigma C_i^2$
1.	t_2 VS อื่น ๆ	−1	3	−1	−1	4.86	(3)(12)	.6561
2.	t_3 VS t_1, t_4	−1	0	2	−1	2.46	(3)(6)	.3362
3.	t_1 VS t_4	+1	0	0	−1	0.56	(3)(2)	.0523
								1.0446

SOV	df	SS	MS	F-ratio
ระหว่างนักวิเคราะห์	(3)	(1.0446)	(.3482)	
2 VS 1, 3, 4	1	.6561	.6561	9.18*
3 VS 1, 4	1	.3362	.3362	4.70
1 VS 4	1	.0523	.0523	< 1
error	12	.8582	.0715	

$f_{.01}^{(1,12)} = 4.75$

สรุปว่าค่าวิเคราะห์จากนักเคมีใหม่ (2) แตกต่างจากบุคคลอื่น ๆ อย่างมีนัยสำคัญ แต่ระหว่างนักเคมีเก่าไม่มีความแตกต่างอย่างมีนัยสำคัญ

ข้อสังเกต contrast ชุดนี้เป็นอิสระกัน เพราะผลรวม SS ได้ SS (วิธีการ)

(ง) $\Sigma\tau_i^2/\sigma^2 = 1.5, 1-\beta = 0.95$, จงหาค่า r

$$\Phi^2 = \frac{r(1.5)}{4} = .375r$$

r	Φ^2	Φ	$\nu_2 = 4(r-1)$	β	power $= 1-\beta$
10	3.75	1.93	4(9) = 36	.15	.85
12	4.50	2.12	4(11) = 44	.05	.95
15	5.625	2.37	4(14) = 56	.02	.98

นั่นคือจะต้องใช้ r = 12 จึงจะมีพลังการทดสอบอย่างต่ำ .95 เพื่อตรวจจับ $\Sigma\tau_i^2/\sigma^2 = 1.5$

26. ในการศึกษาอายุการใช้งานของแบตเตอรี่ 3 ชนิด ๆ ละ 5 ลูก ได้ข้อมูลดังนี้

ยี่ห้อ	อายุการใช้งานเป็นสัปดาห์					รวม	ค่าเฉลี่ย
1	100	96	92	96	92	476	95.2
2	76	80	75	84	82	337	67.4
3	108	100	96	98	100	502	100.4
	$\bar{Y}_{..} = 1315/15 = 87.67$					1315	

แปลงข้อมูล $Y'_{ij} = Y_{ij} - 75$, t = 3, r = 5, N = 15

ยี่ห้อ	อายุการใช้งาน					รวม
1	25	21	17	21	17	101
2	1	5	0	9	7	22
3	33	25	21	23	25	127
						250

(1) CF = $(250)^2/15 = 4{,}166.67$

(2) $\Sigma\Sigma Y_{ij}^2 = 5{,}550$

(3) $\Sigma T_i^2/r = 26{,}814/5 = 5{,}362.8$

(4) SST = (2) − (1) = 1,383.33

(5) SSTr = (3) − (1) = 1,196.13

(6) SSE = (4) − (5) = 187.2

SOV	df	SS	MS	F
แบตเตอรี่	2	1,196.13	598.06	38.3**
error	12	187.20	15.6	
	14	1,383.33		

$f^{.01}_{2,12} = 6.93$

(ก) $Ho: \tau_i = 0$, $Ha: \tau_i \neq 0$, $i = 1, 2, 3$

$F = 38.3^{**}$

ปฏิเสธ Ho และสรุปว่าอายุการใช้งานของ 3 ยี่ห้อมีความแตกต่างอย่างมีนัยสำคัญสูงยิ่ง

(ข) Estimate the components of the appropriate statistical model.

model: $Y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij}$

$\hat{\mu} = \overline{Y}_{..} = 87.67$

$\hat{\tau}_i = \overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{..}$

$\hat{\tau}_1 = 95.2 - 87.67 = 7.53$, $\hat{\tau}_2 = 67.4 - 87.67 = -20.27$

$\hat{\tau}_3 = 100.4 - 87.67 = 12.73$

ส่วน $\hat{\varepsilon}_{ij} = Y_{ij} - \overline{Y}_{i.}$

(ค) จงสร้างช่วงเชื่อมั่น95% ของอายุการใช้งานเฉลี่ยของแบตเตอรี่ยี่ห้อ (2)

95% ช่วงเชื่อมั่นของ μ_2 คือ $\overline{Y}_{2.} \pm t_{.025,12} S_{\bar{Y}}$

$\boxed{S_{\bar{Y}} = \sqrt{\frac{MSE}{r}}}$

$= 67.4 \pm (2.179)(\sqrt{15.6/5})$

$= 63.54, 71.26$

(ง) จงสร้างช่วงเชื่อมั่น95% เพื่อประมาณความแตกต่างของอายุการใช้งานของชนิดที่ 2 และ 3

95% ช่วงเชื่อมั่นของ $\mu_3 - \mu_2$ คือ $\overline{Y}_{3.} - \overline{Y}_{2.} \pm t_{.025} S_{(\bar{Y}_{3.} - \bar{Y}_{2.})}$

$$S_{(\bar{Y}_{3.}-\bar{Y}_{2.})} = \sqrt{\frac{2MSE}{r}}$$

$= (100.4-67.4) \pm (2.179)(\sqrt{2(15.6)/5})$

$= 33 \pm 5.44$

$= 27.56,\ \ 38.44$

(ง) ท่านจะเลือกใช้แบตเตอรี่ชนิดใด?

จากข้อมูล $\bar{Y}_{3.}$ มีค่าสูงสุด ลองเปรียบเทียบกับกลุ่มอื่น ๆ

Contrast	$\bar{Y}_1$ 95.2	$\bar{Y}_2$ 67.4	$\bar{Y}_3$ 100.4	$\Sigma C_i \bar{Y}_i$	ΣC_i^2	SS = $(r\Sigma C_i\bar{Y}_i)^2/\Sigma C_i^2$	F = SS/MSE
1) t_3 VS t_1, t_2	−1	−1	+2	38.2	6	1,216.03	79.95**
2) t_3 VS t_1	−1	0	+1	5.2	2	67.60	4.33
3) t_2 VS t_1, t_3	+1	−2	+1	60.8	6	3,080.50	197.47**

จากการทดสอบพบว่า แบตเตอรี่ที่ 1 และ 3 ไม่ต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ จึงมีคุณภาพทัดเทียมกัน ดังนั้นในการตัดสินใจซื้อต้องคำนึงถึงปัจจัยราคาด้วย ถ้ามีราคาเท่ากันก็ควรซื้อชนิดที่ 3 แต่ถ้าชนิดที่ (1) มีราคาย่อมเยากว่ามากก็ควรซื้อชนิดที่ (1) ส่วนชนิดที่ (2) มีคุณภาพด้อยกว่าอย่างมีนัยสำคัญสูงยิ่ง

(จ) ถ้าผู้ผลิตจะยอมให้มีการเปลี่ยนแปลงแบตเตอรี่ที่ใช้งานได้ต่ำกว่า 85 สัปดาห์ จงหาเปอร์เซ็นต์ที่เขาจะต้องชดเชย

จากข้อมูลที่ได้จากการทดลองพบว่าอายุการใช้งานของแบตเตอรี่ชนิดที่ (2) ทุกลูกต่ำกว่า 85 สัปดาห์ ส่วนชนิดอื่น ๆ ทุกลูกสูงกว่า 85 สัปดาห์ นั่นคือเปอร์เซ็นต์การชดเชย = 5/15 = .33 = 33%