บทที่ 6

Heteroscedasticity

6.1 ความหมาย และ ผลสะท้อน

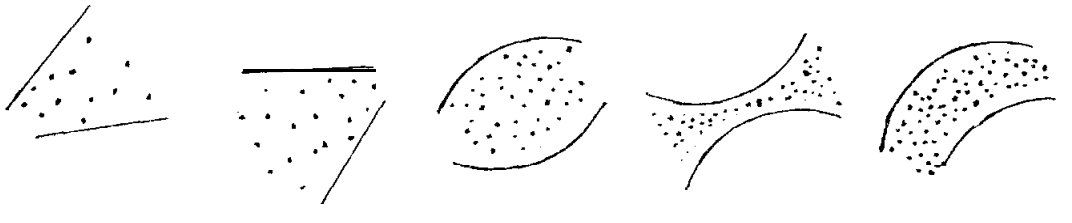
จากข้อตกลงสมการถดถอยเดิมคือ $E(u_i u_j)=\sigma^2, i=j$ ทั้งนี้เพื่อควบคุมให้ u มีความแปรปรวนคงที่อันมีผลให้ Y มีความแปรปรวนคงที่ในทุก ๆ ซ้ำ (Replication) ของ X หรือเสนอในรูปเมตริกซ์ได้ดังนี้คือ $V(U)=E(U'U)=\sigma^2 V$ โดยที่สมาชิกในแนวทะแยงของ V ต้องคงที่เท่ากันตลอดในทุกค่าของ $i; i=1,2,...,n$ สถานการณ์เช่นนี้เรียกว่า Homoscedasticity หากข้อตกลงนี้ไม่เป็นจริงคือพบว่า $V(u_i)$ ไม่คงที่แต่กลับผันแปรค่าไปตามค่าของตัวแปรอิสระบ้าง ผันแปรค่าไปตามขนาดของตัวอย่าง (กรณี Grouped Observation) บ้าง ผันแปรไปตามค่าของ Y บ้าง หรือแม้แต่ผันแปรค่าไปตามกาลเวลา[1] ซึ่งในสถานการณ์เช่นนี้ เป็นเครื่องชี้ว่าได้เกิดความขัดแย้งกับข้อตกลงเดิมคือ Homoscedasticity ขึ้นแล้ว เราเรียกสถานการณ์นี้ว่า Heteroscedasticity

ตัวอย่างที่เห็นได้ชัดที่จะยกมาประกอบพิจารณา ซึ่งเป็นสถานการณ์ที่ต้องเกิดปัญหา Heteroscedasticity อย่างแน่นอนคือ

1. กรณี Grouped Observation ที่ใช้ค่าเฉลี่ยของแต่ละกลุ่มเป็นค่าสังเกต
2. กรณี Random coefficient Model

---

[1] ถ้านำ Residual e มาพล๊อตร่วมกับตัวแปรอิสระ พล๊อตร่วมกับตัวแปรตามพล๊อตร่วมกับขนาดตัวอย่างย่อย หรือพล๊อตร่วมกับเวลา (t) จะพบว่าจุดต่าง ๆ ใน Scattergram มีลักษณะของกลุ่มที่ไม่เป็นแถบขนาน (ซึ่งแสดงว่ามีความผันแปรคงที่) แต่จะกลับพบเป็นรูปทรงแบบอื่น เช่น



ในตัวอย่างแรก สมมุติเราทำการทดลองเพาะปลูกข้าวโพดพันธุ์สุวรรณ 1 ในศูนย์ทดลอง m ศูนย์ แต่ละศูนย์ใช้แปลงทดลอง n_i เท่ากัน เช่น n_i=a แปลง ตลอดในทุกศูนย์ เราจะพบว่าไม่เกิดปัญหา Heteroscedasticity แต่ประการใด) แล้วใช้ค่าเฉลี่ยของตัวแปรต่าง ๆ ในแต่ละศูนย์เป็นข้อมูลในการวิเคราะห์สมการถดถอย สมมุติว่า Y คือผลผลิตข้าวโพดพันธุ์สุวรรณ 1 X_2 คือกำลังแรงงาน X_3 คือค่าใช้จ่าย (ต้นทุนการผลิต) ดังนั้นสมการเดิมคือ

$$Y_{it} = \beta_1+\beta_2X_{2it}+\beta_3X_{3it}+u_{it} \quad ; \; t=1,2,\ldots,n_i \; : \; i=1,2,\ldots,m$$

โดยที่ Y_{it}, X_{2it}, X_{3it} หมายถึงผลผลิต กำลังแรงงานและต้นทุนในการผลิตสำหรับแปลงทดลองที่ t ของศูนย์ทดลองที่ i จะเปลี่ยนรูปเป็น

$$\bar{Y}_i = \beta_1+\beta_2\bar{X}_{2i}+\beta_3\bar{X}_{3i}+\bar{u}_i \quad ; \; i=1,2,\ldots,m$$

โดยที่ $\bar{Y}_i, \bar{X}_{2i}, \bar{X}_{3i}$ คือ ผลผลิตถัวเฉลี่ย กำลังแรงงานถัวเฉลี่ย และต้นทุนถัวเฉลี่ยสำหรับการผลิตต่อ 1 แปลงทดลองของศูนย์ทดลองที่ i

จากสมการ $\bar{Y}_i = \beta_1+\beta_2\bar{X}_{2i}+\beta_3\bar{X}_{3i}+\bar{u}_i$; i=1,2,...,m ข้างต้น หากเราพิจารณาที่ Stoechastic Term คือ $\bar{u}_i$ จะพบว่า

$$E(\bar{u}_i)^2 = E\left(\frac{1}{n_i}\sum_t^{n_i} u_{it}\right)^2 = \frac{1}{n_i^2} E\left(\sum_t^{n_i} u_{it}\right)^2$$

$$= \frac{1}{n_i^2} E\left\{\sum_t^{n_i} u_{it}^2 + \sum_{t\neq s}^{n_i}\sum^{n_i} u_{it}u_{is}\right\}$$

$$= \frac{1}{n_i^2} (n_i\sigma^2 + 0)$$

$$= \frac{\sigma^2}{n_i} \quad ; \; i=1,2,\ldots,m$$

$$E(\bar{U}\bar{U}') = \begin{bmatrix} \frac{\sigma^2}{n_1} & & & \\ & \frac{\sigma^2}{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{\sigma^2}{n_m} \end{bmatrix} = \sigma^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{n_1} & & & \\ & \frac{1}{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{n_m} \end{bmatrix}_{m \times m} = \sigma^2 V$$

$$= \sigma^2 V \neq \sigma^2 I_m$$

จะเห็นว่าแบบจำลองรูปนี้มีผลให้ $V(U) \neq \sigma^2 I_m$ การแก้ปัญหาให้ใช้ WLS คือ $\hat{\beta} = (\bar{X}'V^{-1}\bar{X})^{-1}\bar{X}'V^{-1}\bar{Y}$; $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{m-k}(\bar{Y}'V^{-1}\bar{Y} - \hat{\beta}'\bar{X}'V^{-1}\bar{Y})$ และ $\hat{V}(\hat{\beta}) = \hat{\sigma}^2(\bar{X}'V^{-1}\bar{X})^{-1}$ จะใช้ OLS มิได้

สำหรับกรณีเฉพาะคือ เมื่อ $n_1 = n_2 = \ldots = n_m = a$ จะพบว่า $E(\bar{U}\bar{U}') = \frac{\sigma^2}{a} I_n$ กรณีนี้ $V(\bar{u}_i)$ มีค่าคงที่เท่ากับ $\frac{\sigma^2}{a}$ มิใช่ σ^2 การประมาณค่าจึงอาศัยวิธี OLS ได้ หรือถ้าปรารถนาจะใช้ WLS ก็สามารถกระทำได้ กล่าวคือ $E(\bar{U}\bar{U}') = \sigma^2 \text{diag}\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{a}, \ldots, \frac{1}{a}\right) = \sigma^2 V$ ดังนั้น $V^{-1} = \text{diag}(a, a, \ldots, a)$

นั่นคือ $\hat{\beta} = (\bar{X}'V^{-1}\bar{X})^{-1}\bar{X}'V^{-1}\bar{Y} = \frac{a}{a}(\bar{X}'\bar{X})^{-1}\bar{X}'\bar{Y} = (\bar{X}'\bar{X})^{-1}\bar{X}'\bar{Y}$

$$\sigma^2 = \frac{1}{m-k}(\bar{Y}'V^{-1}\bar{Y} - \hat{\beta}'\bar{X}'V^{-1}\bar{Y}) = \frac{a}{m-k}(\bar{Y}'\bar{Y} - \hat{\beta}'\bar{X}'\bar{Y})$$

$$\hat{V}(\hat{\beta}) = \hat{\sigma}^2(\bar{X}'V^{-1}\bar{X})^{-1} = \frac{\sigma^2}{a}(\bar{X}'\bar{X})^{-1}$$

อีกตัวอย่างหนึ่งคือกรณีของ Random Coefficent Model ซึ่งเป็นแบบจำลองที่เราถือว่า β_j มิใช่ตัวคงที่ แต่ β_j กลับเป็นตัวแปรสุ่ม หรือเรียกอีกชื่อหนึ่งว่า Varying Parameter Model ซึ่งเป็นแบบจำลองที่สอดคล้องกับสถานการณ์ของงานสำรวจแบบแบ่งชั้นภูมิ ซึ่งพารามิเตอร์ β_j ในแต่ละชั้นภูมิย่อมเป็นค่าเฉพาะตัว และไม่อาจถือว่าคงที่เท่ากันตลอดทุกชั้นภูมิ หรือแม้แต่ในกรณีของอนุกรมเวลา ค่าพารามิเตอร์ β_j ในแต่ละเวลาอ้างอิง (Reference Period) ย่อมมีค่าเฉพาะตัว และเรามิอาจถือว่า β_j จะต้องคงที่เท่ากันเสมอในทุกช่วงเวลาอ้างอิง

แบบจำลองสำหรับ Random Coefficient เสนอได้ดังนี้

$$Y_i = \beta_{2i}X_{2i}+\beta_{3i}X_{3i}+\ldots+\beta_{ki}X_{ki} \quad ; \; i=1,2,\ldots,n$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \beta_{ji} X_{ji} \quad ; \quad i=1,2,\ldots,n$$

โดยที่ β_{ji} มิใช่ตัวคงที่ แต่เป็นตัวแปรสุ่ม ดังนั้นค่าของ β_{ji} จึงมีค่าที่ประกอบไปด้วยค่าคงที่ β_j ผนวกอยู่กับ Random Error v_{ji} นั่นคือ $\beta_{ji} = \beta_j+v_{ji}$; $i=1,2,\ldots,n$: $j=2,3,\ldots,k$ โดยที่ $E(v_{ji})=0$, $E(v_{st},v_{pq})=0$ เมื่อ $s\neq p$, $t\neq q$ และ $E(v_{ji}^2)=\alpha_j$; $j=2,3,\ldots,k$

ดังนั้น $$Y_i = (\beta_2+v_{2i})X_{2i}+(\beta_3+v_{3i})X_{3i}+\ldots+(\beta_k+v_{ki})X_{ki} \quad ; \; i=1,2,\ldots,n$$

$$= \beta_2X_{2i}+\beta_3X_{3i}+\ldots+\beta_kX_{ki}+(v_{2i}X_{2i}+v_{3i}X_{3i}+\ldots+ {}_{ki}X_{ki})$$

$$= \beta_2X_{2i}+\beta_3X_{3i}+\ldots+\beta_kX_{ki}+u_i \quad ; \; i=1,2,\ldots,n$$

จะเห็นได้ว่าแบบจำลอง

$$Y_i = \beta_2X_{2i}+\beta_3X_{3i}+\ldots+\beta_kX_{ki}+u_i \quad ; \; i=1,2,\ldots,n$$

เป็นแบบจำลองที่มีปัญหา Heterocedasticity กล่าวคือ

$$E(u_i) = E(v_{2i}X_{2i}+v_{3i}X_{3i}+\ldots+v_{ki}X_{ki}) = 0$$

$$E(u_tu_s) = E(\sum_{j=2}^{k} v_{jt} X_{jt})(\sum_{j=2}^{k} v_{js} X_{js}) = 0 \quad \text{เมื่อ } s \neq t$$

แต่ $$E(u_i^2) = E(\sum_{j=2}^{k} v_{ji} X_{ji})^2$$

$$= E(\sum_{j=2}^{k} v_{ji}^2 X_{ji}^2) + E(\sum_{j=2}^{k} v_{jt} X_{jt})(\sum_{j=2}^{k} v_{js} X_{js})$$

$$= \sum_{j=2}^{k} \alpha_j X_{ji}^2 \quad ; \; i=1,2,\ldots,n$$

โดยที่ α_j คือความแปรปรวนของ v_{ji}

จะเห็นได้ว่า

$$E(UU') = \begin{bmatrix} \sum_j^k \alpha_j X_{j1}^2 & & & \\ & \sum_j^k \alpha_j X_{j2}^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_j^k \alpha_j X_{jn}^2 \end{bmatrix}_{nxn} = W \neq \sigma^2 I_n$$

ในกรณีของ Random Coefficient Model นี้ถ้าเราสามารถประมาณค่า $V(v_{ji})$ คือ α_j ได้ เราย่อมทราบค่าสมาชิกทุกตัวของ W ได้ การประมาณค่าพารามิเตอร์ $\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_k$ ก็ย่อมกระทำได้โดยอาศัยวิธี EGLS คือ $\hat{\beta} = (X'\hat{W}^{-1}X)^{-1}X'\hat{W}^{-1}Y$,

$\sigma^2 = \frac{1}{n-(k-1)}(Y'\hat{W}^{-1}Y - \hat{\beta}'X'\hat{W}^{-1}Y)$, $\hat{V}(\hat{\beta}) = \hat{\sigma}^2(X'\hat{W}^{-1}X)^{-1}$

จากตัวอย่างที่ยกมาประกอบเพื่อให้เห็นภาพทั่วไปของ Heteroscedasticity นี้ นักศึกษาคงสังเกตเห็นได้ว่า เราจำเป็นจะต้องประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธี GLS หรือ EGLS เสมอ อย่างไรก็ตามเมื่อประมวลปัญหาอันเป็นผลสะท้อนของ Heteroscedasticity แล้ว จะพบว่าเมื่อใดก็ตามที่ตัวแปรสุ่ม u มีความแปรปรวนไม่คงที่จะก่อให้เกิดผลกระทบคือเราไม่อาจประมาณค่า β_j ด้วยช่วงเชื่อมั่น (Interval Estimation) รวมตลอดถึงการตรวจสอบนัยสำคัญของ β_j โดยอาศัย OLS ได้ แต่ถ้ามีความจำเป็นต้องใช้ OLS ด้วยเหตุหนึ่งเหตุใดก็จะพบว่า $\hat{\beta}_j$ ที่ได้ ไม่มี Efficiency ค่า $\hat{V}(\hat{\beta}_j)$จะสูงเกินไป คือเวคเตอร์ $\hat{\beta}$ ขาดคุณสมบัติของ BLUE อันจะมีผลให้ได้ช่วงเชื่อมั่นของ $\hat{\beta}_j$ และช่วงพยากรณ์ของ E(Y) กว้างเกินไปรวมทั้งมีผลให้ค่า t-test ต่ำกว่าความจริง ซึ่งจะก่อให้เกิดการยอมรับสมมุติฐาน $H_0: \beta_j = 0$ ได้ง่ายกว่าปกติ มีผลสืบเนื่องไปถึงการตัดตัวแปรอิสระที่สอดคล้องกับ β_j ทิ้งไป ทั้งที่ตัวแปรอิสระตัวนั้นอาจมีความสำคัญเป็นอย่างยิ่งก็ได้ วิธีการประมาณค่าที่เหมาะสมสำหรับสถานการณ์เช่นนี้นักวิจัยจึงมีทางเลือกเป็น 2 ทาง คือ GLS (หรือ WLS) และ EGLS (หรือ EWLS) อย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น

สำหรับปัญหา Random Coefficient Model นั้น ถ้าเราสามารถประมาณค่า α_j ; $j=1,2,\ldots,k$ ได้เราย่อมประมาณค่า β ได้โดยอาศัย EGLS คือ

$$\hat{\beta} = (X'\hat{W}^{-1}X)^{-1} X'\hat{W}^{-1}Y \quad \text{และ} \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-(k-1)}(Y'\hat{W}^{-1}Y-\hat{\beta}'X'\hat{W}^{-1}Y)$$

ปัญหาเฉพาะหน้าก็คือ W = ? หรืออีกนัยหนึ่ง $\hat{\alpha}_j$ = ?

การประมาณค่า α_j สำหรับแบบจำลองนี้เสนอโดยฮิลเดรธและฮุค (Clifford Hildreth and James Houch, 1968)[1] ดังนี้

เนื่องจาก $u_i = \sum_{j=2}^{k} v_{ji}X_{ji}$; $i=1,2,\ldots,n$ ดังนั้น $V(u_i) = \sum_{j=2}^{k} \alpha_j X_{ji}^2$ การประมาณค่า α_j ให้ดำเนินการดังนี้

1) จากสมการเดิมคือ $Y_i = \beta_2X_{2i}+\beta_3X_{3i}+\ldots+\beta_kX_{ki}+u_i$; $i=1,2,\ldots,n$ โดยที่ $u_i = \sum_{j=2}^{k} v_{ji}X_{ji}$ ให้ประมาณค่า β_j ; $j=2,3,\ldots,k$ โดยวิธี OLS คือ $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$ แล้วหา Residual vector e เมื่อ $e = Y-\hat{Y} = Y-X\hat{\beta}$

2) จาก Resudual vector e จะพบว่า

$$\begin{aligned} e = Y-X\hat{\beta} &= (X\beta+U) - X(X'X)^{-1}X'(X\beta+U) \\ &= U-X(X'X)^{-1}X'U \\ &= (I_n-X(X'X)^{-1}X')U \\ &= MU \quad \text{เมื่อกำหนดให้} \quad M = I_n - X(X'X)^{-1}X' \end{aligned}$$

---

[1] อ่านรายละเอียดและติดตามรายงานการวิจัยเดิมได้จาก Maddala, G.S.,**Op.Cit.**, p.392 และ Judge, G.G. et. al., **Op.Cit.**, p.138

นั่นคือ

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

หรือ $e_j = m_{j1}u_1 + m_{j2}u_2 + \cdots + m_{jn}u_n = \sum_i^n m_{ji}u_i$ คือแถวที่ j ของเวคเตอร์ e ซึ่งเมื่อพิจารณา $E(e_j)$ และ $V(e_j)$ จะพบว่า $E(e_j)=0$ และ $V(e_j) = \sum_i^n m_{ji}^2 \; V(u_i)$

แต่ $$u_i = \sum_{j=2}^{k} v_{ji}X_{ji}$$

ดังนั้น $$V(e_j) = E(e_j^2) = \sum_i^n m_{ji}^2 V(\sum_{j=2}^{k} v_{ji}X_{ji}) = \sum_i^n m_{ji}^2 (\sum_{j=2}^{k} \alpha_j X_{ji})$$

$$= (\sum_i^n m_{ji}^2)(\sum_{j=2}^{k} \alpha_j X_{ji}^2); \quad j=1,2,\ldots,n$$

หรือ

$$E\begin{bmatrix} e_1^2 \\ e_2^2 \\ \vdots \\ e_n^2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} m_{11}^2 & m_{12}^2 & \cdots & m_{1n}^2 \\ m_{21}^2 & m_{22}^2 & \cdots & m_{2n}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n1}^2 & m_{n2}^2 & & m_{nn}^2 \end{bmatrix}}_{n\times n} \underbrace{\begin{bmatrix} X_{21}^2 & X_{31}^2 & \cdots & X_{k1}^2 \\ X_{22}^2 & X_{32}^2 & & X_{k2}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{2n}^2 & X_{3n}^2 & & X_{kn}^2 \end{bmatrix}}_{n\times(k-1)} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix}}_{(k-1)\times 1}$$

หรือ $E(\dot{e}) = \dot{M}\,\dot{X}\,\alpha$ หรือ $\dot{e} = \dot{M}\,\dot{X}\,\alpha + \varepsilon$ เมื่อ $E(\varepsilon) = 0$

หรือ $\dot{e} = Z\alpha + \varepsilon$ เมื่อ $Z = \dot{M}\,\dot{X}$

3) จากสมการ $e = Z\alpha+\varepsilon$ ให้ประมาณค่าเวคเตอร์ α ด้วยวิธี OLS คือ

$$\hat{\alpha} = (Z'Z)^{-1}Z'\dot{e}$$

เราก็จะได้ค่าประมาณของเวคเตอร์ α หรือค่าประมาณของ α_j คือ $\hat{\alpha}_j$; $j=2,3,\ldots,k$ ตามต้องการ

4) แทนค่า α_j ของแมตริกซ์ W ด้วย $\hat{\alpha}_j$ จะได้ $\hat{W}$ ดังนี้

$$\hat{W} = \begin{bmatrix} \sum_{j=2}^{k} \hat{\alpha}_j X_{j1} & & & \\ & \sum_{j=2}^{k} \hat{\alpha}_j X_{j2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{j=2}^{k} \hat{\alpha}_j X_{jn} \end{bmatrix}_{n\times n} \quad X = \begin{bmatrix} X_{21} & X_{31} & \cdots & X_{k1} \\ X_{22} & X_{32} & \cdots & X_{k2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{2n} & X_{3n} & \cdots & X_{kn} \end{bmatrix}_{n\times(k-1)}$$

ดังนั้น $\hat{\beta} = (X'\hat{W}^{-1}X)^{-1}X'\hat{W}^{-1}Y$, $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-(k-1)}(Y'\hat{W}^{-1}Y-\hat{\beta}'X'\hat{W}^{-1}Y)$

และ $\hat{V}(\hat{\beta}) = \hat{\sigma}^2(X'\hat{W}^{-1}X)^{-1}$

หมายเหตุ พิจารณาระบบสมการ $\dot{e} = \dot{M}\dot{X}\alpha+\varepsilon = Z\alpha+\varepsilon$ จะเห็นได้ว่าสมาชิกของ Z_j คือ แถวที่ j ใด ๆ ของ Z คือ

$$Z_j = m_{j1}^2X_{j1}^2 + m_{j2}^2X_{j2}^2 + \ldots + m_{jn}^2X_{jn}^2$$

แสดงว่า Z_j เป็น Quadratic Form หรือ Z เป็น Matrix of Quadratic Form วิธีประมาณค่า β ตามขั้นตอน 1-4 ข้างต้นจึงเรียกว่า Minimum Norm Quadratic Unbiased Estimation (MINQUE)

อนึ่งเนื่องจาก $\hat{\alpha}$ ประมาณได้จากสมการ $\dot{e} = z\alpha+\varepsilon$ จึงเป็นไปได้ที่ $\hat{\alpha}_j$ บางค่าติดลบ ซึ่งเป็นสิ่งที่เราไม่อาจยอมรับได้เพราะ α_j ก็คือ $V(v_{ji})$ ซึ่งต้องเป็นบวกเสมอ วิธีแก้ปัญหานี้ที่ง่ายที่สุดคือ ถ้า $\hat{\alpha}_j$ ค่าใดติดลบให้กำหนดให้ $\hat{\alpha}_j$ ตัวนั้นเท่ากับ 0 หรืออาจใช้วิธีอื่นเช่น วิธีของเบย์ วิธี Quadratic Programming วิธี Constrained ML ประมาณค่า α_j ; $j=2,3,\ldots,k$ ก็ได้

6.2 ปัญหา Heteroscedasticity แบบต่าง ๆ และการประมาณค่า σ_i^2 เพื่อใช้ใน EGLS

ในที่นี้จะเสนอรูปแบบของ Heteroscedasticity รูปแบบอื่น ๆ ที่แสดงให้เห็นว่า $E(UU') = \sigma^2 V = W \neq \sigma^2 I_n$ และเราไม่ทราบค่าสมาชิกของ V ซึ่งจำเป็นต้องหาค่าประมาณมาใช้แทนเพื่อให้สามารถใช้ GLS ได้ โดยจะเสนอไว้เพียง 2 วิธีให้เห็นเป็นแนวทาง วิธีอื่น ๆ ให้อ่านรายละเอียดได้จาก Judge, G.G., **Op. Cit.**, p.135-144

6.2.1 $V(u_i)$ คงที่เฉพาะในชั้นภูมิและผันแปรไปในระหว่างชั้นภูมิ

ในกรณีที่ทำการวิจัยโดยอาศัยข้อมูลจากการสำรวจแบบแบ่งชั้นภูมิ เราจะพบว่าสมการถดถอยที่ควรใช้สำหรับสถานการณ์เช่นนี้คือ สมการถดถอยเฉพาะในแต่ละชั้นภูมิ เพราะ พารามิเตอร์ β จะเหมาะสมพอสำหรับชั้นภูมิของตนเท่านั้น ไม่อาจนำไปอนุมานกันได้กับชั้นภูมิอื่น สิ่งที่จำเป็นต้องกระทำในสถานการณ์เช่นนี้ก็คือ เราจะต้องประมาณค่า เวคเตอร์ β ของทั้งกลุ่มประชากรโดยอาศัยข้อสนเทศจากชั้นภูมิมาใช้

สมมุติว่า เราจำแนกประชากรเป็น m ชั้นภูมิ และจำแนกขนาดตัวอย่าง n ออกเป็น m ส่วน ๆ ละ n_h หน่วย โดยที่ $n_1+n_2+\ldots+n_m = n$

ให้ $Y_h = X_h\beta_h + U_h$; $h=1,2,\ldots,m$

คือสมการถดถอยสำหรับชั้นภูมิที่ h โดยที่

$$Y_h' = (Y_{h_1}, Y_{h_2}, \ldots, Y_{h_{n_h}}),\ \beta_h' = (\beta_{1h}, \beta_{2h}, \ldots, \beta_{kh})$$

$U_h' = (u_{h_1}, u_{h_2}, \ldots, u_{h_{n_h}})$

และ $X_h = \begin{bmatrix} 1 & X_{2h_1} & X_{3h_1} & \cdots & X_{kh_1} \\ 1 & X_{2h_2} & X_{3h_2} & \cdots & X_{kh_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & X_{2h_{n_h}} & X_{3h_{n_h}} & \cdots & X_{kh_{n_h}} \end{bmatrix}$ คือแมตริกซ์ขนาด $n_h x k$

โดยที่

X_{jh} ; $j=1,2,\ldots,k$; $h=1,2,\ldots,m$ คือตัวแปรอิสระที่ j ที่ช่วยอธิบายความผันผวนในค่าของ Y สำหรับชั้นภูมิที่ h

Y_{h_i} ; $i=1,2,\ldots,n_h$; $h=1,2,\ldots,m$ คือค่าที่ i ของตัวแปรตามสำหรับชั้นภูมิที่ h

X_{jh_i} ; $i=1,2,\ldots,n_h$; $h=1,2,\ldots,m$; $j=2,3,\ldots,k$ คือค่าที่ i ของตัวแปรอิสระ ที่ j สำหรับชั้นภูมิที่ h

แต่เนื่องจากแบบจำลองจะต้องเป็นแบบจำลองสำหรับอนุมาณสู่กลุ่มประชากรเดียวกัน ถึงแม้ว่าจะจำแนกประชากรนั้นออกเป็น m ชั้นภูมิ แต่พารามิเตอร์ β จะต้องเป็นพารามิเตอร์ของประชากรทั้งกลุ่ม[1] ด้วยเหตุนี้ เราจึงกำหนดให้ทุกชั้นภูมิมีพารามิเตอร์ β_h ร่วมกันเป็น $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k)'$ นั่นคือ

$$y_h = X_h\beta + U_h \quad ; \; h=1,2,\ldots,m$$

---

[1] ถ้าใช้ต่างกัน ผลการวิเคราะห์จะอนุมานสู่เฉพาะชั้นภูมิ มิอาจอนุมานสู่ประชากรทั้งกลุ่มได้

เมื่อเสนอในรูปแมตริกซ์จะพบระบบสมการดังนี้

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_m \end{bmatrix} \beta + \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_m \end{bmatrix} \quad \text{หรือ} \quad Y = X\beta + U$$

สำหรับการประมาณค่า β ให้กระทำดังนี้

เนื่องจาก $V(U) = \text{diag}\ (\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_m^2) = W$ โดยที่ σ_h^2 มีค่าคงที่เฉพาะในชั้นภูมิที่ h ดังนั้น โดยอาศัย GLS จะพบว่า

$$\hat{\beta} = (X'W^{-1}X)^{-1}\ X'W^{-1}Y$$

$$= \left[(X_1', X_2', \ldots, X_m') \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & & \\ & \sigma_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_m^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_m \end{bmatrix} \right]^{-1} \left[(X_1', X_2', \ldots, X_m') \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & & \\ & \sigma_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_m^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_m \end{bmatrix} \right]$$

$$= \left[\sum_{h=1}^{m} \frac{1}{\sigma_h^2} X_h' X_h \right]_{kxk}^{-1} \left[\sum_{h=1}^{m} \frac{1}{\sigma_h^2} X_h' Y_h \right]_{kx1}$$

$$V(\hat{\beta}) = (X'W^{-1}X)^{-1}$$

$$= \left[(X_1', X_2', \ldots, X_m') \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & & \\ & \sigma_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_m^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_m \end{bmatrix} \right]^{-1}$$

$$= \left[\sum_{h=1}^{m} \frac{1}{\sigma_h^2} X_h' X_h \right]_{kxk}^{-1}$$

แต่เนื่องจาก σ_h^2 เป็นค่าคงที่เฉพาะในชั้นภูมิ h=1,2,...,m ดังนั้นการประมาณค่า σ_h^2 จึงกระทำได้โดยอาศัย OLS กล่าวคือในชั้นภูมิที่ h

$$Y_h = X_h\beta + U_h \quad ; \; h=1,2,\ldots,m$$

เราทราบว่า $V(U_h) = \sigma_h^2 I_n$ ซึ่งไม่ขัดกับข้อตกลงของสมการถดถอย ดังนั้น

$$\hat{\beta} = (X_h'X_h)^{-1} X_h'Y$$

$$\hat{\sigma}_h^2 = \frac{1}{n-k} (Y_h'Y_h - \hat{\beta}' X_h'Y_h) \quad ; \; h=1,2,\ldots,m$$

เมื่อแทนที่ σ_h^2 ด้วย $\hat{\sigma}_h^2$ ค่าประมาณของ β จึงหาได้โดยอาศัย EGLS โดยที่

$$V = \text{diag}\ (\hat{\sigma}_1^2, \hat{\sigma}_2^2, \ldots, \hat{\sigma}_m^2)$$

ดังนั้น

$$\hat{\hat{\beta}} = [\sum_{h=1}^{m} \hat{\sigma}_h^{-2} X_h' X_h]^{-1} [\sum_{h=1}^{m} \hat{\sigma}_h^{-2} X_h' Y_h]$$

$$\hat{V}(\hat{\hat{\beta}}) = [\sum_{h=1}^{m} \hat{\sigma}_h^{-2} X_h' X_h]^{-1}$$

6.2.2 σ_i เป็น Linear Function ของตัวแปรอิสระ : $\sigma_i = \sum_{j}^{s} \alpha_j Z_{ji}$

สิ่งที่เป็นไปได้ในการเสาะหารูปแบบของ Heteroscedasticity นอกเหนือจากที่ศึกษาผ่านมาแล้ว เราอาจกำหนดรูปแบบอื่น ๆ ที่เหมาะสมได้อีกหลายแบบซึ่งนักวิจัยสามารถตรวจสอบดูว่าเหมาะสมเพียงใดด้วยการตรวจสอบนัยสำคัญ รูปแบบของ Heteroscedasticity รูปหนึ่งที่น่าสนใจคือ Standard Deviation ของ u_i เป็น Linear Function ของตัวแปรอิสระ กล่าวคือ

$$\sigma_i = \alpha_1+\alpha_2 Z_{2i}+\alpha_3 Z_{3i}+\ldots+\alpha_s Z_{si} \quad ; \; s<k$$

โดยที่ Z_j คือตัวแปรอิสระ X_j หรือฟังก์ชั่นของตัวแปรอิสระ X_j และ α_j คือพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่า

พิจารณาสมการ

$$Y_i = \beta_1+\beta_2X_{2i}+\beta_3X_{3i}+\ldots+\beta_kX_{ki}+u_i \quad ; \; i=1,2,\ldots,n$$

โดยมีข้อตกลงว่า $E(u_i)=0$, $E(u_iu_t)=0$ เมื่อ $i\neq t$ และ

$$E(u_i^2)=\sigma_i^2= (\alpha_1+\alpha_2Z_{2i}+\ldots+\alpha_sZ_{si})^2 = (Z_i'\alpha)^2 \text{ เมื่อ}$$

$$Z_i' = (1,Z_{2i},Z_{3i},\ldots,Z_{si}) \text{และ } \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_s \end{bmatrix}$$

ด้วยเหตุนี้

$$V(U) = E(UU') = \begin{bmatrix} (Z_1'\alpha)^2 & & & \\ & (Z_2'\alpha)^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & (Z_n'\alpha)^2 \end{bmatrix}_{nxn} = W$$

ถ้าเราทราบเวคเตอร์ α เราย่อมประมาณค่า β ได้โดยวิธี GLS ดังนี้

$$\hat{\beta} = (X'W^{-1}X).^{-1} X'V^{-1}Y$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-k} (Y'W^{-1}Y - \hat{\beta}'X'W^{-1}Y)$$

ปัญหาก็คือ เราไม่อาจหาค่าของแมตริกซ์ W ได้ เพราะสมาชิกของ W ติดอยู่ในเทอมของ Unknown Vector กล่าวคือ $W_{ii} = \sigma_i^2 = (Z_i'\alpha)^2$ ทางออกสำหรับปัญหานี้ก็คือ เราต้องพยายามหาหนทางประมาณค่าเวคเตอร์ α ให้ได้ ซึ่งมีได้ 3 วิธีคือ วิธี OLS วิธี GLS และวิธี ML ในที่นี้จะกล่าวถึงเฉพาะวิธี OLS ดังขั้นตอนต่อไปนี้

1. จากแบบจำลอง $Y = X\beta+U$ ให้ประมาณค่า β โดยวิธี OLS ได้ $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$ แล้วคำนวณหา Residual vector ได้ $e = Y-\hat{Y} = Y-X\hat{\beta}$

2. กำหนดให้ $u_i \sim N(0,\sigma_i^2)$

$$E(u_i^2) = \int_{-\infty}^{\infty} u_i^2 f(u_i)\, du_i = \sigma_i^2 = (Z_i'\alpha)^2$$

ในขณะเดียวกันทราบว่า $E(|u_i|) = 2\int_0^{\infty} u_i f(u_i)\, du_i = \frac{\sigma_i\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$ [1]

นั่นคือ $E(|u_i|) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sigma_i = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sqrt{E(u_i^2)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(Z_i'\alpha)$

ถ้ากำหนดให้ $c = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$

จะพบว่า $E(|u_i|) = c(Z_i'\alpha)$

และเมื่อกำหนดให้ $v_i = |e_i| - E(|u_i|)$; $i=1,2,\ldots,n$ คือ Residual ชุดใหม่โดยที่ $e = Y-\hat{Y} = Y-X\hat{\beta}$ คือ OLS - Residual จากสมการ $Y=X\beta+U$ จึงทำให้ได้สมการสำหรับประมาณค่า α ดังนี้

$$|e_i| = E(|u_i|) + v_i$$

$$|e_i| = c(Z_i'\alpha) + v_i \quad ; i=1,2,\ldots,n$$

---

[1]

$$E(|u_i|) = \int_{\infty}^{\infty} |u_i| f(u_i) du_i = 2\int_0^{\infty} u_i f(u_i) du_i = 2\int_0^{\infty} u_i \frac{1}{\sigma_i\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{u_i}{\sigma_i})^2} du_i$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} (\frac{u_i}{\sigma_i}) e^{-\frac{1}{2}(\frac{u_i}{\sigma_i})^2} du_i$$

$$= \frac{\sigma_i\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} 2w_i\, e^{-w_i^2}\, dw_i$$

$$= \frac{\sigma_i\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-w_i^2}\, dw_i^2$$

$$= \frac{\sigma_i\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(1) = \frac{\sigma_i\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$$

หรือ

$$|e_1| = c\alpha_1 + c\alpha_2 Z_{21} + c\alpha_3 Z_{31} + \ldots + c\alpha_s Z_{s1} + v_1$$

$$|e_2| = c\alpha_1 + c\alpha_2 Z_{22} + c\alpha_3 Z_{32} + \ldots + c\alpha_s Z_{s2} + v_2$$

$$\vdots$$

$$|e_n| = c\alpha_1 + c\alpha_2 Z_{2n} + c\alpha_3 Z_{3n} + \ldots + c\alpha_s Z_{sn} + v_n$$

หรือ

$$\underset{n\times 1}{\begin{bmatrix} |e_1| \\ |e_2| \\ \vdots \\ |e_n| \end{bmatrix}} = \underset{n\times s}{\begin{bmatrix} 1 & Z_{21} & Z_{31} & \cdots & Z_{s1} \\ 1 & Z_{22} & Z_{32} & \cdots & Z_{s2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & Z_{2n} & Z_{3n} & & Z_{sn} \end{bmatrix}} \underset{s\times 1}{\begin{bmatrix} c\alpha_1 \\ c\alpha_2 \\ \vdots \\ c\alpha_s \end{bmatrix}} + \underset{n\times 1}{\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}}$$

$$\Rightarrow \quad |e| = Z(c\alpha) + V$$

3. จากระบบสมการ $|e| = Z(c\alpha)+V$ ให้ประมาณค่า $c\alpha$ โดยวิธี OLS กล่าวคือ

$$\widehat{c\alpha} + (Z'Z)^{-1} Z'|e|$$

เวคเตอร์ $\widehat{c\alpha}$ ที่ได้นี้ก็คือค่าประมาณที่ต้องการ การใช้ประโยชน์ให้นำเฉพาะ $\hat{\alpha}$ ไปใช้ไม่ต้องนำ c ไปด้วย ค่า $\hat{\alpha}$ ที่ได้นี้แม้จะไม่ดีนัก[1] แต่ก็เป็น Consistent Estimator ของ α

เมื่อได้ค่าของ $\hat{\alpha}$ แล้วให้นำค่า $\hat{\alpha}$ ไปแทนที่ α ในแมตริกซ์ W จะได้ W ตามต้องการ จากนั้นเราก็สามารถประมาณค่าเวคเตอร์ β ได้โดยวิธี EGLS ตามปกติต่อไป

นอกเหนือจากรูปแบบของ Heteroscedasticity ดังที่ยกมาแสดงให้เห็นเป็นแนวทางแล้ว ยังมีรูปแบบอื่น ๆ อีกหลายรูปแบบเช่น

---

[1] อ่าน Judge. G.G. et. al. **Op. Cit.**, p. 134-6

ก. $V(u_i)$ เป็น Linear Function ของตัวแปรอิสระ กล่าวคือ

$$\sigma_i^2 = \alpha_1+\alpha_2 Z_{2i}+\alpha_3 Z_{3i}+\ldots+\alpha_s Z_{si} \quad \text{หรือ} \quad \alpha_i^2 = Z_i'\alpha$$

ข. $V(u_i)$ เป็นสัดส่วนกับ $[E(Y)]^2$ กล่าวคือ $\sigma_i^2 = \sigma^2(\beta_1+\beta_2 X_{2i}+\ldots+\beta_k X_{ki})^2$ หรือ $\sigma_i^2 = \sigma^2(X_i'\beta)^2$ เมื่อ $X_i'=(1,X_{2i},X_{3i},\ldots,X_{ki})$ หรือ X_i' คือแถวที่ i ของแมตริกซ์ X

ค. $V(u_i)$ เป็นสัดส่วนกับ $[E(Y)]^P$ เมื่อ P คือค่าคงที่ใด ๆ ที่เราจะต้องประมาณค่า

ง. $\log V(u_i)$ เป็น Linear Function ของตัวแปรอิสระ กล่าวคือ $\log \sigma_i^2 = Z_i'\alpha$ หรือ $\sigma_i^2 = \exp\,[Z_i'\alpha]$

ปัญหาของนักวิจัยในขั้นต้นก็คือ "จากกลุ่มข้อมูลที่มีอยู่ในมือนั้นจะทราบได้อย่างไรว่า Heteroscedasticity มีรูปแบบใด?" เรื่องนี้เป็นเรื่องของนักวิจัยเองว่ามีความรู้เดิมเกี่ยวกับเรื่องนี้เพียงไร ซึ่งในแง่ของนักวิจัยประยุกต์แล้วนับว่าเป็นเรื่องยากที่จะตอบคำถามนี้ได้ ทางออกสำหรับปัญหานี้ก็คือการทดสอบรูปแบบ ซึ่งจะได้กล่าวถึงในตอน 6.3 ต่อไปนี้

6.3 การตรวจสอบนัยสำคัญ และการทดสอบปัญหา Heteroscedasticity

6.3.1 Glejser's Test

เกลจเซอร์ (Glejser, H., 1969)[1] เสนอให้ทดสอบว่าจะเกิดปัญหา Heteroscedasticity หรือไม่ โดยเพียงแต่วิเคราะห์สมการถดถอย

$$|e_i| = m_0+m_1 X_{ji}^h \quad ; \quad i=1,2,\ldots,n \;:\; h=-1,-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},1$$

นั่นก็คือแทนที่จะวิเคราะห์และตรวจสอบว่าปัญหาจากสมการ

$$|e_i| = \alpha_1+\alpha_2 Z_{2i}+\alpha_3 Z_{3i}+\ldots+\alpha_s Z_{si}+v_i \quad ; \quad i=1,2,\ldots,n$$

เกลจเซอร์กลับแนะนำให้วิเคราะห์จากสมการ $|e_i| = m_0+m_1 Z_{ji}^h+v_i$ ซึ่งเป็นกรณีเฉพาะของรูปแบบ $\sigma_i^2 = (Z_i'\alpha)^2$ โดยที่ Z_i หมายถึงตัวแปรอิสระหรือฟังก์ชั่นของตัวแปรอิสระตัวใดตัวหนึ่งเพียงตัวเดียวเท่านั้น

---

[1] Glejser, H., "A New Test for Heteroscedasticity", (Jour. of Am. Stat. Assoc., 64, 1969), p. 316-323

ขั้นตอนการทดสอบตามวิธีของเกลจ์เซอร์ปรากฏดังนี้

(1) วิเคราะห์สมการถดถอย $Y = X\beta+U$ ด้วยวิธี OLS ได้ $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$ และ Residual Vector คือ $e = Y-X\hat{\beta}$

(2) นำเฉพาะขนาดของ Residual ในขั้นที่ (1) มาใช้โดยวิเคราะห์สมการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย กับตัวแปรอิสระตัวใดตัวหนึ่งคือ

$$|e_i| = m_0+m_1X_{ji}^h+v_i \quad ; h= -1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1 \; : i=1,2,\ldots,n; \; j=2,3,\ldots,k$$

ซึ่งสามารถจัดเป็นรูปแมตริกซ์ ได้ดังนี้คือ

$$|e| = X\beta+U \text{ โดยที่ } |e| = (|e_1|,|e_2|,\ldots,|e_n|)' \quad , \beta = (m_0,m_1)'$$

และ

$$X = \begin{bmatrix} 1 & X_{j1}^h \\ 1 & X_{j2}^h \\ 1 & X_{j3}^h \\ \vdots & \vdots \\ 1 & X_{jn}^h \end{bmatrix} \quad ; h= -1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1$$

(3) ทดสอบนัยสำคัญของ m_0 และ m_1 ตามสมมุติฐานต่อไปนี้ โดยอาศัย t-test

$$H_0 : m_0 = 0 \quad VS \quad H_1 : m_0 \neq 0$$

$$H_0 : m_1 = 0 \quad VS \quad H_1 : m_1 \neq 0$$

ถ้าพบว่า m_0 และ m_1 มีนัยสำคัญทางสถิติ (ปฏิเสธสมมุติฐานหลัก) ก็แสดงว่าได้เกิดปัญหา Heteroscedasticity ขึ้นแล้วคือ $V(u_i)$ ผันแปรไปตามฟังก์ชั่นของ X_j โดยนัยกลับกัน ถ้า m_0 และ m_1 ไม่มีนัยสำคัญ (ยอมรับว่า $m_0=0$, $m_1=0$) แสดงว่า u_i เป็น Homoscedastic Error และถ้ามีเฉพาะ m_1 เท่านั้นที่มีนัยสำคัญทางสถิติก็แสดงว่าเกิด Heteroscedasticity เรียกว่า Classical Heteroscedasticity กรณีที่ทั้ง m_0 และ m_1 มีนัยสำคัญทางสถิติเรียกว่า Generalized Mixed Heteroscedasticity

(4) เมื่อเกิดปัญหา Heteroscedasticity ขึ้นแล้ว ซึ่งแสดงว่า $\sigma_u^2 = \sigma_v^2[P_g(X_j)]^2$ ก็ให้หาทางแก้ปัญหาต่อไป ซึ่งก็คือ EGLS นั่นเอง[1]

จากการทดลองเปลี่ยนตัวแปร X_j และเปลี่ยนดีกรีของโพลิโนเมียลคือ h จาก -1, -½, ½, 1 เราย่อมทราบแบบแผนของ Heteroscedasticity ได้ และทราบค่า $\hat{m}_0, \hat{m}_1$ การแก้ปัญหาจึงกระทำได้โดยง่ายดังนี้

$$V(U) = \sigma_v^2 V = \sigma_v^2 \begin{matrix} (\hat{m}_0+\hat{m}_1 X_{j1}^h)^2 & & & \\ & (\hat{m}_0+\hat{m}_1 X_{j2}^h)^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & (\hat{m}_0+\hat{m}_1 X_{jn}^h)^2 \end{matrix}$$

ดังนั้น $\hat{\beta} = (X'\hat{V}^{-1}X)^{-1}X'\hat{V}^{-1}Y$, $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-k}(Y'\hat{V}^{-1}Y - \hat{\beta}'X'\hat{V}^{-1}Y)$

และ $\hat{V}(\hat{\beta}) = \hat{\sigma}^2(X'\hat{V}^{-1}X)^{-1}$

ข้อสังเกต ขอให้สังเกตว่า Glijser's test นั้นนอกจากสามารถตรวจว่าเกิดปัญหา Heteroscedasticity หรือไม่แล้วยังสามารถใช้ทดสอบรูปแบบของ Heteroscedasticity ได้ในขณะเดียวกัน

ณ ที่นี้ผู้เขียนขอย้อนกล่าวถึงแนวการพัฒนาการทดสอบรูปทั่วไปตามที่เกลจเซอร์เสนอไว้ เพื่อประกอบความเข้าใจดังนี้

1. จากสมการ $Y_i = \beta_1+\beta_2X_{2i}+\beta_3X_{3i}+\ldots+\beta_kX_{ki}+u_i$; $i=1,2,\ldots,n$

สมมุติให้ u_i เป็น Polynomial Function ลำดับที่ g ของฟังก์ชั่นของตัวแปรอิสระตัวใดตัวหนึ่งกล่าวคือ

$$u_i = v_iP_g(Z) = v_i\{m_0+m_1f(Z)+m_2(f(Z))^2+\ldots+m_g(f(Z))^g\}$$

ทั้งนี้ถือเป็นข้อตกลงว่า

(1) $E(v_i) = 0$, $E(v_i^2) = \sigma_v^2$

---

[1] $P_g(X_j)$ อ่านว่า Polynomial of Order g of X_j ในที่นี้เราใช้ $|u_i| = m_0+m_1X_j^h$; $h = -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1$

(2) ฟังก์ชั่น f และลำดับที่ g เป็นสิ่งที่ทราบได้

(3) $m_0, m_1 f(Z), m_2(f(Z))^2, \ldots, m_g(f(Z))^g$ ไม่เป็นปริมาณติดลบ

(4) ในทางปฏิบัติถือว่า f(Z) อาจเป็น $Z^{-1/2}$ หรือ $Z^{1/2}$ ก็ได้ขณะที่ g มีค่าสูงสุดเท่ากับ 2

2. จากสมการ $u_i = v_i P_g(Z) = v_i\{m_0+m_1 f(Z)+m_2(f(Z))^2+\ldots+m_g(f(Z))^g\}$

จะพบว่า $V(u_i) = E(u_i^2) = (P_g(Z))^2 E(v_i^2)$ หรือ $\sigma_u^2 = \sigma_v^2 (P_g(Z))^2$

แสดงว่าความแปรปรวนของ u_i แปรเปลี่ยนไปตามกำลังที่ 2 ของ Pg(Z)

$$E(|u_i|) = E(|v_i|)\ P_g(Z)$$

$$= E(|v_i|)m_0 + E(|v_i|)m_1 f(Z)+\ldots+ E(|v_i|)m_g(f(Z))^g$$

แสดงว่าพารามิเตอร์ที่สนใจคือ $E(|v_i|)m_0,\ E(|v_i|)m_1, \ldots, E(|v_i|)\ m_g$

แต่เนื่องจาก u_i เป็น Unobservable Variable เราจึงใช้วิธีประมาณค่า $E(|v_i|)m_j$; $j=0,1,\ldots,q$ จากสมการ

$$E(|u_i|)+|e_i| = E(|v_i|)m_0+E(|v_i|)m_1 f(Z)+\ldots+E(|v_i|)m_q(f(Z))^q+|e_i|$$

หรือ

$$|e_i| = E(|v_i|)m_0+E(|v_i|)m_1 f(Z)+\ldots+E(|v_i|)m_q(f(Z))^q+\{|e_i|-E(|u_i|)\}$$

$$= E(|v_i|)m_0+E(|v_i|)m_1 f(Z)+\ldots+E(|v_i|)m_q(f(Z))^q+\varepsilon_i$$

ทั้งนี้ถึงแม้ว่า $E(\varepsilon_i)\neq 0$ แต่เกลจเซอร์ก็หวังว่าคงไม่มีผลเสียหายแต่ประการใด (ถ้าสังเกตให้ดีเราจะพบว่า $E(\varepsilon_i) = E(|e_i|)- E(|u_i|) = \hat{\sigma}_u\sqrt{\frac{2}{\pi}} - \sigma_u\sqrt{\frac{2}{\pi}} = (\hat{\sigma}_u-\sigma_u)\sqrt{\frac{2}{\pi}} \neq 0$ การพิสูจน์ว่า $E(|u_i|) = \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ ผู้เขียนได้แสดงไว้แล้วในตอน 6.2.2)

3. ในทางปฏิบัติให้ใช้ Polynomial Function Pg(Z) ในรูปง่ายคือให้ใช้

$$P_g(Z) = P_g(X_j) = m_0+m_1 X_j^h \quad ; h= -1,-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1$$

และให้วิเคราะห์สมการถดถอยเพื่อทดสอบรูปแบบของ Heteroscedasticity จากสมการ

$$|e_i| = m_0+m_1x_{ji}^h \quad ; h= -1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1 \quad : i=1,2,\ldots,n$$

6.3.2 Breusch - Pagan Test

บรุสซ์ และพาแกน (Breusch, T.S. and Pagan, A.R., 1979) ได้เสนอวิธีทดสอบปัญหา Heteroscedasticity ซึ่งสามารถใช้ได้กับรูปแบบต่าง ๆ ถึง 3 รูปแบบคือ $\sigma_i^2 = (Z_i'\alpha)^2$ $\sigma_i^2 = Z_i'\alpha$ และ $\sigma_i^2 = \exp\ (Z_i'\alpha)$ รวมทั้งสามารถใช้ได้กับกรณีที่กลุ่มประชากรถูกจำแนกเป็นชั้นภูมิหลาย ๆ ชั้นภูมิโดยกำหนดให้ Z_i เป็นตัวแปรดัมมี่ได้อีกด้วย

วิธีนี้ถือรูปแบบของ Heteroscedasticity คือ $\sigma_i^2 = h(Z_i'\alpha)$ หรือ σ_i^2 เป็นฟังก์ชั่นของ $Z_i'\alpha$ ทั้งนี้ h จะเป็นฟังก์ชั่นที่ไม่เกี่ยวข้องกับ i แต่ประการใด ซึ่งแสดงว่า $\sigma_i^2 = h(Z_i'\alpha)$ สามารถยืดหยุ่นให้รับกับรูปแบบของ Heteroscedasticity ทั้ง 3 แบบข้างต้นได้ตามความต้องการของนักวิจัย สมมุติฐานที่ต้องการทดสอบก็คือ

$$H_0 : \alpha_2=\alpha_3=\ldots=\alpha_s = 0 \quad \text{VS} \quad H_i : \alpha_j \text{ not all zero}$$

ขั้นตอนดำเนินงานทดสอบของ Breusch - Pagan Test ปรากฏดังนี้

1. จากสมการ $Y = X\beta+U$ ให้ประมาณค่า β โดยวิธี OLS ได้ $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$ และ OLS-Residual $e = Y-X\hat{\beta}$

2. จากเวคเตอร์ $e(e_1,e_2,\ldots,e_n)'$ คำนวณหา $\hat{\sigma}^2$ โดยที่ $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_i^2$

3. วิเคราะห์สมการถดถอย $\frac{e_i^2}{\hat{\sigma}^2} = Z_i'\alpha+v_i \quad ; i=1,2,\ldots,n$ โดยวิธี OLS เมื่อ Z_j คือ X_j หรือฟังก์ชั่นเอง X_j

นั่นคือจากสมการ $\dot{e} = Z\alpha+V$ โดยที่

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} \frac{e_1^2}{\hat{\sigma}^2} \\ \frac{e_2^2}{\hat{\sigma}^2} \\ \vdots \\ \frac{e_n^2}{\hat{\sigma}^2} \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} 1 & Z_{21} & Z_{31} & \cdots & Z_{s1} \\ 1 & Z_{22} & Z_{32} & \cdots & Z_{s2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & Z_{2n} & Z_{3n} & \cdots & Z_{sn} \end{bmatrix} \quad \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_s \end{bmatrix}$$

ประมาณค่าเวคเตอร์ α โดยอาศัย OLS ได้

$$\hat{\alpha} = (Z'Z)^{-1}Z'\dot{e} \quad \text{และ SS(Resgression)} \quad = \hat{\alpha}'Z'\dot{e}$$

4. ปฏิเสธสมมุติฐานหลัก $H_0: \alpha_2=\alpha_3=\ldots=\alpha_k=0$ VS $H_1: \alpha_j$ not all zero ณ ระดับนัยสำคัญ α เมื่อ

$$\frac{1}{2}\hat{\alpha}'Z'\dot{e} > \chi^2_{s-1,1-\alpha}$$

6.3.3 Bartlett Test

Bartlett Test คือตัวทดสอบที่มุ่งทดสอบดูว่าประชากรกลุ่มต่าง ๆ m กลุ่ม มีลักษณะของความแปรปรวนภายในกลุ่มคล้ายคลึงกันหรือไม่ (Homogeneity) สมมุติฐานที่มุ่งทดสอบก็คือ

$$H_0 : \sigma_1^2=\sigma_2^2= \ldots =\sigma^2_m \quad \text{VS} \quad H_1 : \sigma_i^2 \text{ not all equal}$$

จากการพัฒนาเครื่องมือทดสอบโดยอาศัย Maximum Likelihood Ratio Test (MLRT) พบว่าเราจะปฏิเสธสมมุติฐานหลัก ณ ระดับนัยสำคัญ α ถ้า

$$\lambda > \chi^2_{m-1,1-\alpha}$$

โดยที่

$$\lambda = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{s_i^2}{s^2}\right)^{n_i/2} \quad \text{เมื่อ } s_i^2 = \frac{1}{n_i}\sum_j^{n_i}(y_{ij}-\bar{y}_i)^2, \; s^2 = \frac{1}{n}\sum_i^m n_i s_i^2, \; \sum_i^m n_i = n$$

Test นี้ได้รับการปรับปรุงให้เหมาะสมขึ้นโดย Bartlett ในเวลาต่อมาโดยใช้ Unbiased Estimator ของ s_i^2 และ s^2 คือใช้ $s_i^2 = \frac{1}{n_i-1} \sum_j^{n_i} (y_{ij}-\bar{y}_i)^2$ และ $s^2 = \frac{1}{n-m} \sum_i^m (n_i-1)s_i^2$ พร้อมทั้งปรับตัว Test เสียใหม่เป็น

$$M = \frac{(n-m)\log s^2 - \sum_i^m (n_i-1)\log s_i^2}{1+[1/3(m-1)][\sum_i^m 1/(n_i-1)-1/(n-m)]}$$

โดยจะปฏิเสธสมมุติฐานหลักเมื่อ $M > \chi^2_{m-1,1-\alpha}$

การนำ Bartlatt Test มาใช้สำหรับทดสอบสมมุติฐาน

H_0 : Homoscedasticity VS H_1 : Heteroscedasticity มีวิธีปฏิบัติดังนี้

1. จำแนกกลุ่มตัวอย่างค่าสังเกต $Z_i=(Y_i,X_{2i},X_{3i},\ldots,X_{ki})$; $i=1,2,\ldots,n$ ออกเป็น m กลุ่ม ๆ ละ n_i ชุด การจำแนกจะใช้วิธีจำแนกใน Stratified Random Sampling; ใช้ตัวแปรดัมมี่ หรือใช้ตัวแปรจำแนก (Classification Variable) ใด ๆ ก็ได้ ทั้งนี้ n_i ต้องมากกว่า k เสมอ

2. จากแต่ละกลุ่มตัวอย่างย่อยให้วิเคราะห์สมการถดถอยโดยวิธี OLS แล้วคำนวณหา $\hat{\sigma}_i^2$; $i=1,2,\ldots,m$ กล่าวคือ

$$\hat{\beta}_i = (X_i'X_i)^{-1}X_i'Y_i \quad , \quad \hat{\sigma}_i^2 = \frac{1}{n-k}(Y_i'Y_i-\hat{\beta}_i'X_i'Y_i); \; i=1,2,\ldots,m$$

(ในที่นี้ข้อใช้ Subscript "i" เป็นดัชนีแทนกลุ่มตัวอย่างย่อยกลุ่มที่ i ความจริงควรใช้ Subscript อื่นเช่น h, l)

ขณะเดียวกัน จากกลุ่มตัวอย่างเดิมขนาด n ให้วิเคราะห์สมการถดถอยโดยใช้วิธี OLS แล้วคำนวณหา $\hat{\sigma}^2$ ได้ $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-k}(Y'Y - \hat{\beta}'X'Y)$

3. แทนค่า $\hat{\sigma}_i^2$ และ $\hat{\sigma}^2$ ลงในที่ของ s_i^2 และ s^2 ของสูตร M แล้ว คำนวณหาค่าของ M

ปัญหาของ Bartlett Test ก็คือ

1. โดยปกติแล้วเราไม่อาจหากลุ่มตัวอย่าง n ขนาดใหญ่ที่จะใหญ่พอให้จำแนกออกเป็นตัวอย่างย่อยขนาด n_i หน่วยได้หลายกลุ่ม โดยเฉพาะเมื่อมีตัวแปรอิสระหลายตัว (k) แล้วการจำแนกขนาดตัวอย่าง n ออกเป็น m ส่วน ๆ ละ n_i หน่วย โดยที่ $n_i > k$ ยิ่งเป็นสิ่งที่เป็นไปได้ยาก เว้นแต่ในกรณีของงานสำรวจ เกี่ยวกับจำนวนกลุ่ม(m)นั้น Ramsey แนะนำว่าถ้าใช้ $m = 3$ จะเป็นจำนวนที่พอเหมาะ

2. ในทางปฏิบัตินับว่าเป็นเรื่องยากที่จะจัดหมวดหมู่ของค่าสังเกต $Z_i = (Y_i, X_{2i}, X_{3i}, \ldots, X_{ki})$ ออกมาในลักษณะที่มีผลให้ความผันแปรของ u_i ในแต่ละตัวอย่างย่อยคงที่เท่ากัน การจำแนกขนาดตัวอย่าง n หรือการจัดหมวดหมู่ของค่าสังเกตจึงต้องอาศัยความรู้ความสามารถของนักวิจัยเป็นหลัก มิเช่นนั้นเทคนิคการจัดหมวดหมู่จะเป็นเรื่องที่อิงอัตนิยม (Subjective Judgement) ค่อนข้างมาก

6.3.4 Goldfeld - Quandt test

โกลเฟลด์ และควอนดท์(Goldfeld, S.M. and Quandt, R.E., 1965)[1] ได้เสนอวิธีทดสอบซึ่งถ้าพิจารณาให้ดีแล้วก็คือกรณีเฉพาะของ Bartlett Test ดังขั้นตอนดำเนินงานทดสอบดังนี้

1. จากค่าสังเกต $Z_i = (Y_i, X_{2i}, X_{3i}, \ldots, X_{ki})$; $i = 1, 2, \ldots, n$ ให้จัดเรียงลำดับค่าสังเกตเหล่านี้ (จากน้อยไปมากหรือมากไปน้อยก็ได้) ตามค่าของ ซึ่งถือว่าเป็น Deflator[2]

2. จำแนกค่าสังเกต Z_i ที่จัดเรียงลำดับแล้วในขั้นที่ 1 ออกเป็น 2 ส่วนที่เป็นอิสระต่อกัน การจำแนกให้กระทำโดยตัดค่าสังเกตที่อยู่กลาง Sequence ทิ้งไป r ชุด โดยหลักปฏิบัตินิยมตัดทิ้งประมาณ 1 ใน 4 นั่นคือ $r \cong \frac{n}{4}$ ภายหลังเมื่อตัดค่าสังเกตกลาง Sequence (Central Observations) ทิ้งแล้ว จะทำให้เหลือกลุ่มตัวอย่างอิสระ 2 กลุ่ม ๆ ละ $\frac{n-r}{2}$ หน่วยเท่ากัน คือกลุ่มที่สอดคล้องกับ X_m ที่มีค่าน้อย กับกลุ่มที่สอดคล้องกับ X_m ที่มีค่ามาก แต่ทั้งนี้ $\frac{n-r}{2}$ ต้องมากกว่า k

---

[1] Goldfeld, Stephen M. and Quandt, Richard E., "Some Test for Homoscedasticity", (Jour. of the Am. Stat. Assoc., June 1965), p.539-547

[2] โดยปกตินักวิจัยควรทราบว่า $V(u_i)$ ผันแปรไปตามค่าของตัวแปรอิสระตัวใดเสียก่อน ซึ่งสามารถกระทำได้โดยการนำ e_i ไปพล็อตร่วมกับ X's สมมุติพบว่า $V(u_i)$ ผันแปร (ไม่คงที่) ตาม X_m ถ้าหากเรานำ X_m ไปถ่วงน้ำหนักด้วยการนำ X_m หารตลอดสมการ $Y = X\beta + U$ การกระทำเช่นนี้จะมีผลให้ $V(u_i)$ ไม่ผันแปรตามค่าของ X_m อีกต่อไป หรือนัยหนึ่ง u_i จะลด (deflate) ความผันแปรลง ตัวแปรอิสระที่นำมาใช้เพื่อลดความผันแปรของ u_i เรียกว่า Deflator.

3. จากกลุ่มตัวอย่างย่อยทั้งสองในขั้นที่ 2 ให้แยกวิเคราะห์สมการถดถอย โดยวิธี OLS โดยถือเสมือนว่าเป็นแบบจำลองคนละชุด แล้วคำนวณหา SS (Residual) ได้ S_1 และ S_2 เมื่อ S_1 = SS (Residual) ของกลุ่มที่สอดคล้องกับ X_m ค่าน้อย S_2 = SS (Residual) ของกลุ่มที่สอดคล้องกับ X_m ค่ามาก

4. คำนวณหาค่า $R = \frac{S_2}{S_1}$

5. ตัดสินใจปฏิเสธสมมุติฐานหลัก $H_0 : \sigma_1^2=\sigma_2^2$ VS $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ ณ ระดับนัยสำคัญ α เมื่อ $R > F_{\frac{n-r}{2}-k, \frac{n-r}{2}-k, 1-\alpha}$ ซึ่งจะยืนยันว่าภายใต้ความเป็นจริงจากข้อมูลที่เรามีอยู่ เราสามารถเชื่อได้ถึง $(1-\alpha)100\%$ ว่าขณะนี้ได้เกิดปัญหา Heteroscedasticity ขึ้นแล้ว แต่ถ้า $R < F_{\frac{n-r}{2}-k, \frac{n-r}{2}-k, 1-\alpha}$ เราจะไม่อาจปฏิเสธสมมุติฐานหลัก (ยอมรับว่า $V(u_i)$ คงที่)

หมายเหตุ ในกรณีที่ไม่ทราบ หรือไม่อาจแน่ใจได้ว่า ตัวแปรอิสระตัวใดคือ Deflator ให้จัดเรียงลำดับค่าสังเกต Z_i ตาม $\hat{Y}_i$ ซึ่งในกรณีเช่นนี้เราต้องวิเคราะห์สมการถดถอย $Y=X\beta+U$ โดยวิธี OLS เสียก่อน เพื่อหา $\hat{Y}$ ได้ $\hat{Y} = X\hat{\beta}$ แล้วจึงดำเนินการจัดเรียกค่าสังเกต Z_i ตามขนาดของ $\hat{Y}_i$ จากนั้นจึงดำเนินการตามขั้นตอนที่ 2-5 ข้างต้น[1]

6.3.5 Nonparametric "Peak Test"

Peak Test เสนอโดยโกลเฟลด์ และควอนดท์[2] วิธีทดสอบให้ดำเนินการดังนี้

1. วิเคราะห์สมการถดถอย $Y = X\beta+U$ ได้ $\hat{\beta}$ และ $e=Y-X\hat{\beta}$

2. จาก Residual $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ให้เปรียบเทียบขนาดของ Residual ทีละคู่โดยถือว่า ถ้า $|e_{i+1}| > |e_i|$ ให้นับเป็นหนึ่ง Peak โดยทำการเปรียบเทียบเช่นนี้เรื่อย ๆ ไปจนครบขนาดตัวอย่างคือ $i = 1, 2, \ldots, n$ แล้วนับจำนวน Peak ทั้งหมด

3. เปรียบเทียบจำนวน Peak กับค่าในตาราง โดยเราจะปฏิเสธสมมุติฐาน H_0: Homoscedasticity ถ้าจำนวน Peak มากกว่าค่าวิกฤต

---

[1] Maddala, G.S., **Op. Cit.**, p.263

[2] Goldfeld, S.M. and Quandt, R.E., **Op. Cit.**, p.541-3

6.3.6 Spearman Rank Correlation Test

การทดสอบวิธีนี้เสนอโดยกอร์ริง (Gorringe, P.A.)[1] มีวิธีดำเนินการดังนี้

1. วิเคราะห์สมการถดถอย $Y = X\beta + U$ ได้ $\hat{\beta}$ และ $e = Y - X\hat{\beta}$

2. กำหนดลำดับที่ (Rank) ให้แก่ Residual แต่ละตัวโดยถือว่า $|e_i|$ ต่ำที่สุดคือลำดับที่ 1 ในขณะเดียวกันก็ให้กำหนดลำดับที่ให้แก่ค่าของตัวแปรอิสระ X_m เมื่อ X_m คือตัวแปรอิสระที่มีอิทธิพลให้ $V(u_i)$ ไม่คงที่ หรือ X_m ก็คือ Deflator นั่นเอง

3. หาผลต่างระหว่างลำดับที่ของ Residual และ X_m ได้ D_i ; $i=1,2,\ldots,n$

4. คำนวณหาค่าสหสัมพันธ์

$$r'_{ex} = 1 - \frac{6\sum D_i^2}{n(n^2-1)}$$

5. ทดสอบสมมุติฐาน $H_0 : \rho_{ex} = 0$ VS $H_1 : \rho_{ex} \neq 0$ โดยเราจะปฏิเสธสมมุติฐานหลัก[2] ณ ระดับนัยสำคัญ α เมื่อ

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} < r'_{ex}\sqrt{n-1} < Z_{\frac{\alpha}{2}}$$

นอกเหนือจากวิธีทดสอบทั้ง 6 วิธีที่กล่าวมาแล้วนี้ยังมีวิธีอื่น ๆ อีกเช่น BAMSET เสนอโดยแรมเซ (Ramsay, J.B., 1969) โดยให้ใช้ Bartlett's u-Test โดยคำนวณหาค่า s_i^2 และ s^2 จาก BLUS - Residual, Theil's F-Test แนะนำให้ใช้ Goldfeld - Quandt Test โดยใช้ BLUS - Residual ในการคำนวณหา S_1 และ S_2 นอกจากนี้ยังมี Szroeter's Class of Test และ Harvey - Phillips F-Test รายละเอียดเหล่านี้นักศึกษาสามารถติดตามได้จากเอกสารอ้างอิงท้ายเล่ม

6.4 สรุป

ปัญหา Heteroscedasticity คือปัญหาที่เกิดขึ้นจากกรณีที่ข้อมูลที่มีอยู่มีธรรมชาติที่ขัดแย้งกับข้อตกลงว่า $V(u_i)$ คงที่เท่ากับ σ^2 เสมอในทุกค่าของ $i = 1, 2, \ldots, n$ อันมีผลให้ OLS ขาดลักษณะที่พึงปรารถนาของตัวประมาณค่าที่ดี

---

[1] Johnston, J., **Op. Cit.**, p.219

[2] ถ้า $H_0 : \rho = 0$ เป็นจริง r'_{ex} จะมีการแจกแจงแบบปกติโดยประมาณ คือ $r_{ex} \sim N(0, \frac{1}{n-1})$

วิธีในทางปฏิบัตินั้น นอกเหนือจากการประมาณค่าพารามิเตอร์ β แล้ว นักวิจัยพึงตรวจสอบดูว่าเวคเตอร์ e ซึ่งเป็นตัวแทนของเวคเตอร์ U นั้น มีคุณสมบัติสอดคล้องกับข้อตกลงว่า $V(u_i)$ คงที่หรือไม่ ซึ่งเราสามารถกระทำได้หลายวิธีดังรายละเอียดปรากฏในตอน 6.3 เมื่อตรวจพบว่าเกิดปัญหา Heteroscedasticity ขึ้นแล้วนักวิจัยต้องเร่งแก้ไข จะละเลยไว้มิได้ วิธีแก้ไขก็คือใช้ GLS หรือ EGLS เป็นเครื่องมือในการประมาณค่า β แทน OLS แต่ทั้งนี้นักวิจัยจำเป็นจะต้องทราบแบบแผนของ Heteroscedasticity เสียก่อน เพื่อจะได้ทราบว่า u_i ผันแปรไปเพราะเหตุใด เพื่อจะได้แก้ไขได้ถูกจุดตรงประเด็น รายละเอียดเหล่านี้ได้กล่าวไว้แล้วในตอน 6.2 และ 6.3 แต่ถ้านักวิจัยมีความรู้ความคุ้นเคยกับแบบแผนของ Heteroscedasticity และทราบว่างานที่ตนกำลังเกี่ยวข้องอยู่นั้น มีแบบแผนของ Heteroscedasticity รูปใดการแก้ปัญหาก็นับว่าเป็นเรื่องง่าย