บทที่ 12
การทดสอบอำนาจพยากรณ์ของสมการประมาณค่า

12.1 เหตุผลและความจำเป็น

การนำสมการประมาณค่า $Y = \hat{\beta}_1 + \sum_{j=2}^{k} \hat{\beta}_j X_{jt}$ หรือ Lagged Model ไปใช้ประโยชน์ในการประมาณค่า Y ในอนาคต (นอก Sample Period) นั้นมีข้อที่พึงสังวรหลายประการดังนี้

1. การพยากรณ์ค่าของ Y เป็นสิ่งที่กระทำได้เฉพาะภายใต้ข้อตกลงที่เหมาะสมเกี่ยวกับสภาพแวดล้อมเท่านั้น (เป็น Conditional Forecast) เช่น "ถ้าค่าของ X's มีโครงสร้างและขนาดไม่ต่างจากที่เป็นอยู่เดิม" "ถ้าโครงสร้างของพารามิเตอร์ไม่เปลี่ยนแปลงไปจากเดิม" "ถ้าสถานการณ์ทั่วไปคงที่ไม่ต่างจากที่เป็นอยู่เดิม" ดังนี้เป็นต้น ซึ่งจะเห็นได้ว่าค่าพยากรณ์ของ Y เป็นค่าที่อิงสถานการณ์ที่อาจผันแปรไปได้มิใช่สิ่งที่พึงเป็นจริงหากเป็นไปได้ภายใต้เงื่อนไข หากเงื่อนไขไม่เป็นจริง ค่าพยากรณ์ย่อมคลาดเคลื่อนไป

2. การพยากรณ์ค่า Y ในอนาคตโดยอาศัยสมการ $Y = \hat{\beta}_1 + \sum_{j=2}^{k} \hat{\beta}_j X_{jt}$ เป็นเรื่องที่อาศัย *Point Estimator ของ* β_j *และถือว่า* $U = 0$ *(คือถือว่า* $u = 0 = E(u)$*)*[1] เรื่องนี้นับว่าเสี่ยงต่อความผิดพลาดได้ง่ายเพราะ โดยข้อเท็จจริงในขณะพยากรณ์นั้น u อาจมีค่าอื่นที่มิใช่ 0 ก็ได้ ขณะเดียวกันการพยากรณ์เราอาศัยค่าประมาณของ β_j มิใช่ β_j จริง ๆ การใช้ $\hat{\beta}_j$ จึงยังมี Sampling

---

[1] การพยากรณ์ค่า Y นั้นโดยปกติหมายถึงการพยากรณ์ E(Y) ขอให้สังเกตว่า $E(Y) = X\hat{\beta}$ แต่ในขณะเดียวกันการพยากรณ์ค่าเดี่ยวของ Y เราก็ยังคงใช้สมการ $Y = X\hat{\beta}$ การถือว่า $E(u) = 0$ ในกรณีนี้จึงอาจเป็นการเสี่ยงที่จะต้องเผชิญปัญหา $E(u) \neq 0$

อนึ่งสำหรับงานพยากรณ์โดยอาศัยเทคนิคการวิเคราะห์สมการถดถอยนั้นเราสามารถกระทำได้เป็น 2 วิธี

1. Pure Autoregression หรือ Box - Jenkins Method ซึ่งวิเคราะห์สมการถดถอย $Y_t = f(Y_{t-1}, Y_{t-2}, \ldots)$ จะไม่กล่าวถึงในที่นี้ นักศึกษาที่สนใจสามารถติดตามศึกษาได้จาก Box, G.E.P. and Jenkins, G.M., Time Series Analysis : Forecasting and Control, Holden - Day Inc., San Francisco, 1976.

2. Regression Analysis ซึ่งวิเคราะห์สมการถดถอย Y = f(X's)

Error ($V(\hat{\beta}_j)$) ในกรณีทั้งสองนี้เป็นเครื่องชี้ให้เห็นว่าสมการประมาณค่า

$$Y = \hat{\beta}_1 + \sum_{j=2}^{k} \hat{\beta}_j X_{jt}$$

อาจนำไปสู่ปัญหาการพยากรณ์ได้

3. โดยปกติการที่เราจะพยากรณ์ค่าของ Y โดยอาศัยสมการ $Y = \hat{\beta}_1 + \sum_{j=2}^{k} \hat{\beta}_j X_{jt}$ ได้ก็ต่อเมื่อนักวิจัยต้องทราบค่าในอนาคตของ X's ขอให้สำนึกไว้ด้วยว่า X's และ Y ก็คือตัวแปรที่เราล้วนไม่ทราบค่าในอนาคตได้ การจะทราบค่าของ X's ได้จึงต้องอาศัยการพยากรณ์หรือคาดการณ์ หรือควบคุมสถานการณ์แวดล้อมให้คงที่ (Ceteris Paribus) ด้วยเหตุนี้ค่าพยากรณ์ของ Y จะถูกต้องแม่นยำเพียงใดจึงขึ้นอยู่กับความถูกต้องแม่นยำของการกำหนดค่า X's ในอนาคต หากค่า X's ในอนาคตไม่ถูกต้องค่าพยากรณ์ของ Y ย่อมคลาดเคลื่อนจากความจริง

4. ถ้าโครงสร้างของสมการถดถอยเปลี่ยนแปลงไป หรือโครงสร้างของสัมประสิทธิ์ความถดถอยเปลี่ยนแปลงไป ค่าพยากรณ์ของ Y จะคลาดเคลื่อนจากความเป็นจริง

5. หากปัจจัยและสถานการณ์แวดล้อมมิได้คงที่หรือมีลักษณะเหมือนใน Sample Period ค่าพยากรณ์ของ Y จะคลาดเคลื่อนจากความเป็นจริง

จะเห็นได้ว่าโอกาสที่ค่าพยากรณ์ของ Y จะคลาดเคลื่อนไปจากค่าจริงของ Y มีได้มากเพราะมีช่องทางให้เกิดความคลาดเคลื่อนได้หลายช่องทางดังกล่าวมาแล้วข้างต้น ด้วยเหตุนี้ก่อนที่จะนำสมการประมาณค่าไปใช้ในการพยากรณ์ นักวิจัยสมควรตรวจสอบดูว่าสมการประมาณค่าของตนมีอำนาจพยากรณ์สูงเพียงใด หากพบว่ามีอำนาจพยากรณ์ต่ำให้นักวิจัยหาทางปรับปรุงเสียก่อนซึ่งสามารถกระทำได้หลายวิธีเช่น การเปลี่ยนโครงสร้างความสัมพันธ์ Y = f(X's) การเพิ่ม-ลดตัวแปรอิสระ การเพิ่มขนาดตัวอย่าง การตรวจสอบข้อตกลงและแก้ไขให้ถูกต้อง การเปลี่ยนวิธีประมาณค่า การนำ Priori Information มาร่วมประมาณค่าพารามิเตอร์และอื่น ๆ

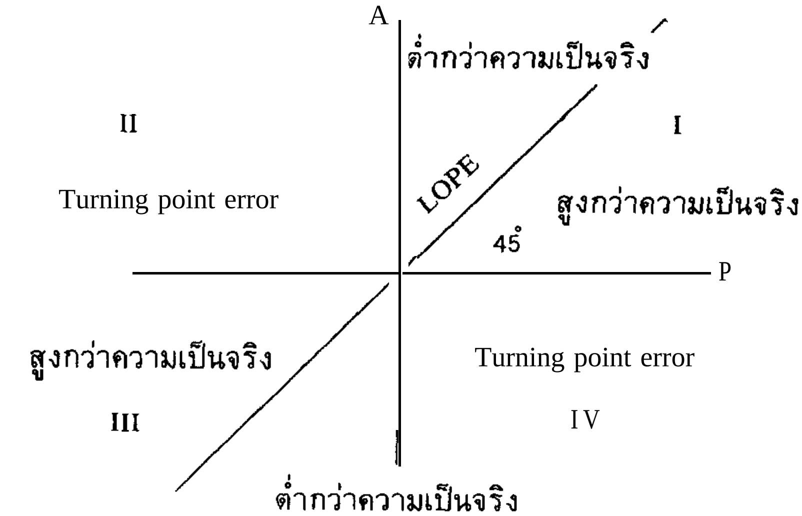
12.2 การทดสอบอำนาจพยากรณ์

การทดสอบว่าสมการประมาณค่า $Y = X\hat{\beta}$ มีอำนาจพยากรณ์สูง-ต่ำเพียงใดนั้นเรามีหนทางกระทำได้หลายวิธีดังนี้

สำหรับสัญญลักษณ์ที่ใช้ เราใช้สัญญลักษณ์ร่วมกันในทุกวิธีดังนี้คือ P_t = ค่าพยากรณ์ (Predicted) ของ Y ณ วาระที่ t และ A_t = ค่าจริง (Actual) ของ Y ณ วาระที่ t

12.2.1 Prediction Realisation Diagram (PR - Diagram)

PR - Diagram คือไดอะแกรมที่ใช้สำหรับพล็อตคู่ลำดับ (P_t, A_t) โดยใช้แกนตั้งแทนค่าจริงของ Y และแกนนอนแทนค่าพยากรณ์ของ Y ดังภาพ โดยแบ่งระนาบออกเป็น 4 ส่วนหรือ 4 Quadrant



และถือว่าคู่ลำดับ (P_t, A_t) ตกอยู่ใน Quadrant 1 และ 3 แสดงว่าสมการประมาณค่าสามารถระบุทิศทางการผันผวนในค่าของ Y ได้ถูกต้อง หมายความว่าถ้า A มีค่าเพิ่มขึ้นสมการประมาณค่าจะให้ค่า P เพิ่มขึ้น ถ้า A มีค่าลดลง สมการประมาณค่าจะให้ค่า P ลดลงถ้าคู่ลำดับ (P_t, A_t) ตกอยู่ใน Quadrant 2 และ 4 แสดงว่าสมการประมาณค่าระบุทิศทางการผันผวนในค่าของ Y ไม่ถูกต้องกล่าวคือ ถ้า A มีค่าเพิ่มขึ้น (ลดลง) สมการประมาณค่ากลับระบุค่า P ว่ามีค่าลดลง (เพิ่มขึ้น) หรือนัยหนึ่งถ้า (P_t, A_t) ตกอยู่ใน Quadrant 2 และ 4 แสดงว่าสมการ $Y = X\hat{\beta}$ มีอำนาจพยากรณ์ต่ำ

และเพื่อให้สามารถวัดความถูกต้องแม่นยำ และบ่งบอกอำนาจพยากรณ์ของสมการ $Y = X\hat{\beta}$ ได้ถูกต้องขึ้น เราสามารถสร้างเส้นตรงคือ Line of Perfect Forecast (LOPF) ขึ้นเส้นหนึ่ง เส้นดังกล่าวคือเส้นที่ลากผ่านไปบนจุดอันเป็นที่ตั้งของคู่ลำดับ (P_t, A_t) ที่ $P_t = A_t$ โดยมีระดับความชันเท่ากับ 45° ถ้าหากคู่ลำดับ (P_t, A_t) ; $t = 1, 2, \ldots, n$ ตกอยู่บนเส้นนี้ทุกจุดแสดงว่าสมการ $Y = X\hat{\beta}$ สามารถพยากรณ์ค่าจริงของ Y ได้อย่างสมบูรณ์ หากคู่ลำดับ (P_t, A_t) ; $t = 1, 2, \ldots, n$ เบี่ยงเบนไปจาก LOPF มากเพียงใด สมการ $Y = X\hat{\beta}$ ก็จะมีอำนาจพยากรณ์ต่ำเพียงนั้น นอกจากนี้ LOPF ยังแบ่งพื้นที่ใน Quadrant 1 และ 3 ออกเป็น 2 ส่วนเท่า ๆ

กันคือ ส่วนที่แสดงให้เห็นว่า P_t มีค่าสูงกว่าความเป็นจริง (Overestimation) และต่ำกว่าความเป็นจริง กล่าวคือ ใน Quadrant ที่ 1 ถ้า (P_t, A_t) ตกอยู่ใต้ LOPF แสดงว่า P_t มีค่าสูงกว่าความเป็นจริง หรือ สมการ $Y = X\hat{\beta}$ ให้ค่าพยากรณ์ของ Y สูงกว่าความเป็นจริง ถ้า (P_t, A_t) ตกอยู่เหนือ LOPF แสดงว่า P_t มีค่าต่ำกว่าความเป็นจริง หรือสมการ $Y = X\hat{\beta}$ ให้ค่าพยากรณ์ของ Y ต่ำกว่าความเป็นจริง สำหรับใน Quadrant ที่ 3 ให้อภิปรายกลับกันกับ Quadrant ที่ 1

12.2.2 Mean Square Error (MSE)

ให้ $p_t = \dfrac{P_t - A_{t-1}}{A_{t-1}}$ คือ Predicted Relative Change หรืออัตราการเปลี่ยนแปลงค่าของ Y ที่พยากรณ์ขึ้นใช้สำหรับวาระที่ t เมื่อเทียบต่อค่าจริงของ Y ในวาระก่อน

ให้ $a_t = \dfrac{A_t - A_{t-1}}{A_{t-1}}$ คือ Actual Relative Change หรืออัตราการเปลี่ยนแปลงค่าของ Y ที่ปรากฏขึ้นสำหรับวาระที่ t เมื่อเทียบต่อค่าจริงของ Y ในวาระก่อน

ให้ $p_t - a_t$ คืออัตราความคลาดเคลื่อน (Error) ระหว่างอัตราการเปลี่ยนแปลงคาดหมาย (พยากรณ์) กับอัตราการเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นจริงของตัวแปร Y

จากนิยามดังกล่าว เราสามารถนิยาม MSE ขึ้นใช้เพื่อวัดอำนาจพยากรณ์ของสมการ $Y = X\hat{\beta}$ ได้ดังนี้ ขอให้สังเกตว่า MSE = 0 เมื่อมี Perfect Forecast คือ $p_t = a_t$

$$\text{MSE} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(p_t - a_t)^2 \qquad .....(1)$$

หรือสามารถจัดรูป MSE ในสมการ (1) สู่รูปที่เป็น Absolute Change ได้ดังนี้

$$\text{MSE} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left[\frac{P_t - A_{t-1}}{A_{t-1}} - \frac{A_t - A_{t-1}}{A_{t-1}}\right]^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left[\frac{P_t - A_t}{A_{t-1}}\right]^2 \qquad ...(2)$$

หรือจำแนก MSE ออกเป็นส่วน ๆ ได้ดังนี้

$$\text{MSE} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} (p_t - a_t)^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} (p_t - \bar{p} + \bar{p} - a_t - \bar{a} + \bar{a})^2 \quad \text{เมื่อ } \bar{p} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} p_t, \ \bar{a} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} a_t$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} \{(p_t - \bar{p}) - (a_t - \bar{a}) + (\bar{p} - \bar{a})\}^2$$

$$= \frac{1}{n}\{\sum_{t=1}^{n} (p_t - \bar{p})^2 + \sum_{t=1}^{n} (a_t - \bar{a})^2 + n(\bar{p} - \bar{a})^2 - 2\sum_{t=1}^{n} (p_t - \bar{p})(a_t - \bar{a})\}^1$$

$$\text{MSE} = S_p^2 + S_a^2 + (\bar{p} - \bar{a})^2 - \frac{2}{n}\sum_{t=1}^{n} (p_t - \bar{p})(a_t - \bar{a}) \qquad \ldots\ldots (3)$$

บวกเข้าและลบออกด้วย $2S_pS_a$ และนำ $\frac{S_pS_a}{S_pS_a}$ คูณเทอมสุดท้ายของสมการ (3)

$$\text{MSE} = (S_p^2 - 2S_pS_a + S_a^2) + (\bar{p} - \bar{a})^2 + 2S_pS_a - \frac{2S_pS_a}{nS_pS_a}\sum_{t=1}^{n} (p_t - \bar{p})(a_t - \bar{a})$$

$$= (S_p - S_a)^2 + (\bar{p} - \bar{a})^2 + 2S_pS_a - 2S_pS_ar_{pa}$$

$$= (\bar{p} - \bar{a})^2 + (S_p - S_a)^2 + 2(1 - r_{pa})S_pS_a \qquad \ldots\ldots (4)$$

= Bias Component + Variance Component + Covariance Component

เมื่อหารตลอดด้วย MSE จะพบว่า

$$\frac{(\bar{p} - \bar{a})^2}{\text{MSE}} + \frac{(S_p - S_a)^2}{\text{MSE}} + \frac{2(1 - r_a)S\,S_a}{\text{MSE}} = 1$$

หรือ Bias Praportion + Variance Proportion + Covariance Proportion = 1

---

[1] เทอมไขว้อื่น ๆ มีค่าเท่ากับ 0 คือ $2(\bar{p} - \bar{a})\sum_{t=1}^{n} (p_t - \bar{p}) = 0$ และ $2(\bar{p} - \bar{a})\sum_{t=1}^{n} (a_t - \bar{a}) = 0$

หรือ $U^M + U^S + U^C = 1$

หรือ จากสมการ (3) ถ้านำ $r^2_{pa}S^2_a$ บวกเข้าและลบออก และนำ $\frac{S_pS_a}{S_pS_a}$ คูณเทอมสุดท้าย

$$MSE = S^2_p+S^2_a+r^2_{pa}S^2_a-r^2_{pa}S^2_a+(\bar{p}-\bar{a})^2-\frac{2}{n}\frac{S_pS_a}{S_pS_a}\sum_{t=1}^{n}(p_t-\bar{p})(a_t-\bar{a})$$

$$= S^2_p+S^2_a+r^2_{pa}S^2_a-r^2_{pa}S^2_a+(\bar{p}-\bar{a})^2-2S_pS_ar_{pa}$$

$$= (S^2_p+r^2_{pa}S^2_a-2S_pS_ar_{pa}) + (S^2_a-r^2_{pa}S^2_a) + (\bar{p}-\bar{a})^2$$

$$= (\bar{p}-\bar{a})^2+(S_p-r_{pa}S_a)^2+(1-r^2_{pa})\ S^2_a \qquad .....(6)$$

= Bias Component + Regression Component + Disturbance Component[1]

เมื่อหารตลอดด้วย MSE จะพบว่า

$$\frac{(\bar{p}-\bar{a})^2}{MSE}+\frac{(S_p-r_{pa}S_a)^2}{MSE}+\frac{(1-r^2_{pa})S^2_a}{MSE} = 1$$

หรือ Bias Proportion + Regression Proportion + Disturbance Proportion = 1

หรือ $U^M + U^R + U^D = 1$ ......(7)

นักวิจัยสามารถใช้สมการ (5) หรือ (7) สมการใดสมการหนึ่งในการประเมินอำนาจพยากรณ์ของสมการประมาณค่า $Y = X\hat{\beta}$ ขอให้สังเกตว่า $U^M + U^S + U^C = 1$ และ $U^M + U^R + U^D = 1$ แสดงว่าแหล่งความผันแปรทุกแหล่งรวมกันต้องเท่ากับ 1 เสมอ ถ้าความผันแปรส่วนใดมีค่าสูงก็แสดงว่า สมการ $Y = X\hat{\beta}$ มีคุณภาพในแง่ของการพยากรณ์ต่ำเพราะสาเหตุนั้น สำหรับการตีความให้พิจารณาดังนี้

U^M = Bias Propertion ถ้า U^M มีค่าสูงแสดงว่า $\bar{p}$ คลาดเคลื่อนจาก $\bar{a}$ มาก หรือสมการ $Y = X\hat{\beta}$ พยากรณ์ค่า Y ผิดพลาดมาก

---

[1] เมื่อพิจารณาเปรียบเทียบกับสมการ $y_t = \beta x_t+(u_t-\bar{u})$ จะพบว่า Disturbance Component คือ

$$\Sigma e^2_t = \Sigma(y_t-\hat{y}_t)^2 = \Sigma y^2_t-\hat{\beta}\Sigma x^2_t = \Sigma\ y^2_t(1-\hat{\beta}^2\frac{\Sigma x^2_t}{\Sigma y^2_t}) = (1-r^2)\Sigma\ y^2_t$$

สำหรับในที่นี้พิจารณาจากสมการ $A_t = \alpha + \beta P_t$

U^S = Variance Proportion ใช้แสดงให้เห็นว่า MSE มีค่าสูงเพราะความผันแปรของ p_t และ a_t คลาดเคลื่อนจากกัน ถ้า U^S มีค่าสูงแสดงว่า MSE มีค่าสูงเพราะความผันแปร (Variation) ของ P_t และ a_t คลาดเคลื่อนกันมาก

อย่างไรก็ตาม เราเชื่อว่าเมื่อกาลเวลาผ่านไป U^M และ U^S ควรมีค่าต่ำลงแม้ว่าเราไม่อาจแน่ใจได้ว่า $\bar{p}$ จะเท่ากับ $\bar{a}$ ได้ และไม่อาจแน่ใจได้ว่า S_p จะเท่ากับ S_a ได้ก็ตาม เพียงแต่เชื่อว่ากาลเวลาที่เนิ่นนานขึ้น จะมีผลให้ $\bar{p}$ กับ $\bar{a}$ และ S_p กับ S_a จะมีค่าใกล้เคียงกันขึ้นมากกว่าเดิม

U^C = Covariance Proportion ใช้แสดงให้เห็นว่า MSE มีค่าสูงเพราะ ถ้า P_t และ a_t มีสหสัมพันธ์ต่ำจะมีผลให้ U^C มีค่าสูง ถ้า P_t และ a_t มีสหสัมพันธ์สูง U^C จะมีค่าต่ำ อย่างไรก็ตาม เราไม่อาจแก้ไขได้เลยถ้าพบว่า U^C มีค่าสูง เพราะไม่อาจทำให้ P_t และ a_t มีสหสัมพันธ์สูงขึ้นได้ แม้ว่าเวลาจะผ่านไปนานสักเพียงใด ถ้า U^C มีค่าสูง ก็ยังคงสูงอยู่เช่นนั้น ไม่อาจลดลงได้ เพราะ U^C มีค่าสูงสืบเนื่องมาจากโครงสร้างของ P_t และ a_t มีสหสัมพันธ์ต่อกันในอัตราค่อนข้างต่ำ จึงนับว่า U^C เป็นจุดอันตรายสูงสุดของสมการ $Y = X\hat{\beta}$ และเราก็เพียงแต่หวังว่า U^C คงจะไม่มีค่าสูงเกินไป

U^R = Regression Proportion ใช้แสดงให้เห็นว่า MSE มีค่าสูงเพราะ $\hat{\beta}$ จากสมการ

$$A_t = \alpha + \beta P_t$$

มีค่าสูงกว่า 1 หรือต่ำกว่า 1 กล่าวคือ จากสมการ $A_t = \alpha + \beta P_t$ เราทราบว่า

$$\beta = \frac{\Sigma p_t a_t}{\Sigma p_t^2} = r_{pa} \frac{S_a}{S_p}$$

ถ้า $\hat{\beta} = 1$ จะพบว่า

$$r_{pa} S_a = S_p \quad \text{หรือ} \quad S_p - r_{pa} S_a = 0$$

แสดงว่า U^R จะมีค่าต่ำสุดเมื่อ $\hat{\beta} = 1$ ถ้า $\hat{\beta} > 1$ หรือ $\hat{\beta} < 1$ จะมีผลให้ U^R มีค่าสูงขึ้น และโดยปกติเราต้องการให้ U^R มีค่าใกล้ 0 เพราะว่า $\hat{\beta} = 1$ จะมีผลให้ $A_t = \hat{\alpha} + P_t$ และถ้า $\hat{\alpha} = 0$ ด้วยแล้วยิ่งเป็นสิ่งที่ต้องการเพราะถ้า $\hat{\alpha} = 0$, $\hat{\beta} = 1$ ซึ่งเป็นสถานการณ์ที่สมการ $A_t = P_t$ มีอำนาจพยากรณ์สูงสุด

พิจารณาสมการถดถอย $A_t = \alpha + \beta P_t + u_t$ จะพบว่า

$$\hat{\alpha} = \bar{A} - \hat{\beta}\bar{P}$$

ถ้า $\hat{\alpha} = 0$ และ $\hat{\beta} = 1$ จะมีผลให้ $\bar{A} - \bar{P} = 0$ หรือ U^M จะมีค่าต่ำสุดเมื่อ $\hat{\alpha} = 0$, $\hat{\beta} = 1$ ซึ่งแสดงว่า สิ่งที่เราต้องการคือ $U^M \to 0$ และ $U^R \to 0$ นั่นเอง ถ้า U^R มีค่าสูงแสดงว่า MSE ได้รับผลกระทบมาจากสาเหตุที่สมการ $Y = X\hat{\beta}$ พยากรณ์ค่า Y คลาดเคลื่อนไปมาก

U^D = Disturbance Proportion ใช้แสดงให้เห็นว่า MSE มีค่าสูงเพราะอิทธิพลของ Residual Sum Square ขอให้สังเกตว่า

$$U^D = \frac{(1-r_{pa}^2)\ s_a^2}{MSE}$$

ถ้า r_{pa} มีค่าสูงหรือ p_t และ a_t มีสหสัมพันธ์สูง ($r_{pa} = 1$ เมื่อ $p_t = ca_t$ เมื่อ c เป็นตัวคงที่ใด ๆ) จะมีผลให้ U^D มีค่าต่ำ ขณะเดียวกัน ถ้า r_{pa} มีค่าต่ำ U^D จะมีค่าสูง จึงเห็นได้ว่าสิ่งที่เราต้องการก็คือ $U^D \to 0$ เพราะในกรณีที่ $U^D \to 0$ แสดงว่า $p_t \to a_t$ หรือ $p_t \to ca_t$

ตัวอย่าง 12.1 ข้อมูลจากตารางต่อไปนี้แสดงค่า p_t และ a_t จากสมการถดถอย Y = f(X's) เมื่อ Y = ปริมาณการนำเข้าของสินค้าต่างประเทศ และ X's คือ ปัจจัยอื่น ๆ ที่ควบคุมความเคลื่อนไหวของ Y ข้อมูลได้รับการบันทึกไว้ตั้งแต่ปี 1960 ถึง 1969 รวม 10 ปี ผลการบันทึกค่า p_t และ a_t และอื่น ๆ ปรากฏดังตาราง

จงวิเคราะห์ว่าสมการ Y = f(X's) มีอำนาจพยากรณ์สูงต่ำเพียงใด เพราะเหตุใด ๆ

ปี ค.ศ.	p_t	a_t	a_t^2	$(p_t-a_t)^2$	$(p_t-\bar{p})^2$	$(a_t-\bar{a})^2$
1960	+5	+10	100	25	13.69	73.96
1961	+2	+ 2	4	0	0.49	0.36
1962	−4	− 7	49	9	28.09	70.56
1963	0	+ 4	16	16	1.69	6.76
1964	+1	− 3	9	16	0.09	19.36
1965	+4	+ 6	36	4	7.29	21.16
1966	+7	+ 4	16	9	32.49	6.76
1967	−2	− 4	16	4	10.89	29.16
1968	−2	− 1	1	1	10.89	5.76
1969	+2	+ 3	9	1	0.49	2.56
รวม	$\Sigma p_t=13$ $\bar{p}=1.3$	$\Sigma a_t=14$ $\bar{a}=1.4$	$\Sigma a_t=256$	$\Sigma(p_t-a_t)^2 =85$	$\Sigma(p_t-\bar{p})^2 =106.1$	$\Sigma(a_t-\bar{a})^2 =236.4$

วิธีทำ 1. $MSE = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(p_t - a_t)^2$

ดังนั้น $MSE = \frac{85}{10} = 8.5$

2. $U^M + U^S + U^C = 1$ จะพบว่า

ก. $U^M = \frac{(\bar{p}-\bar{a})^2}{MSE} = \frac{(1.3-1.4)^2}{8.5} = 0.001$

ข. $U^S = \frac{(S_p - S_a)^2}{MSE} = \frac{(\sqrt{106.1/10} - \sqrt{236.4/10})^2}{8.5} = 0.301$

ค. $U^C = \frac{2(1-r_{pa})S_pS_a}{MSE} = \frac{2(1-0.813)(3.26)(4.86)}{8.5} = 0.708$

จะเห็นว่า $U^M + U^S + U^C = 0.001 + 0.301 + 0.708 = 1.000$

แสดงว่า สมการ Y = f(X's) ใช้พยากรณ์ค่า Y ได้ในเกณฑ์ที่ดีเพราะมี MSE ค่อนข้างต่ำ (MSE = 8.5) แต่สมการนี้มิได้มีอำนาจพยากรณ์สูงสุดก็เพราะ p_t และ a_t มีสหสัมพันธ์เพียง 0.813

เมื่อพิจารณาในรูป $U^M + U^R + U^D = 1$ จะพบว่า

$$U^R = \frac{(S_p - r_{pa}S_a)^2}{MSE} = \frac{\{3.26-(0.813)(4.86)\}^2}{8.5} = 0.056$$

$$U^D = \frac{(1-r_{pa}^2)S_a^2}{MSE} = \frac{(1-0.813^2)23.64}{8.5} = 0.943$$

จะเห็นได้ว่า $U^M + U^R + U^D = 0.001 + 0.056 + 0.943 = 1$ แสดงว่า สมการ Y = f(X's) จะใช้พยากรณ์ได้ไม่ได้ดีมีสาเหตุมาจาก r_{pa} มีค่าไม่สูงพอเป็นสำคัญ

12.2.3 การใช้สัมประสิทธิ์ความถดถอยและสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์

วิธีนี้เสนอโดยมินเซอร์ และ ซาร์โนวิทซ์ (Mincer, J. and Zarnowitz, V. 1969)[1] โดยมินเซอร์และซาร์โนวิทซ์ แนะนำให้นำค่าจริงของ Y เป็นตัวแปรตามสำหรับสมการถดถอยเชิงเส้นที่มีค่าพยากรณ์ของ Y เป็นตัวแปรอิสระคือ

$$A_t = \alpha + \beta P_t + u_t \; ; \quad t = 1,2,\ldots,n$$

---

[1] Maddala, G.S., Ibid, p.345

โดยการวิเคราะห์ให้กระทำโดยวิธี OLS และทดสอบสมมุติฐานต่อไปนี้คือ

$$H_0 : \alpha = 0 \quad \text{VS} \quad H_1 : \alpha \neq 0$$

$$\text{และ} \quad H_0 : \beta = 1 \quad \text{VS} \quad H_1 : \beta \neq 1$$

ถ้ายอมรับว่า $\alpha = 0$ และ $\beta = 1$ ให้ถือว่า P_t เป็น Efficient Predictor ของ Y_t

ขอให้สังเกตว่า ถ้า $\alpha = 0$ และ $\beta = 1$ สมการ $A_t = \alpha + \beta P_t$ จะกลายเป็น $A_t = P_t$ ซึ่งเป็นสถานการณ์ของ Perfect Forcast

อย่างไรก็ตาม วิธีนี้แม้จะเป็นวิธีที่ง่าย และช่วยให้มองเห็นภาพได้ชัดเจนว่าสมการ $Y = X\hat{\beta}$ มีอำนาจพยากรณ์สูงต่ำหรือไม่ แต่ก็ไม่อาจตอบคำถามได้ว่า $Y = X\hat{\beta}$ มีอำนาจพยากรณ์สูงต่ำเพียงใด และเพราะเหตุใดจึงมีอำนาจพยากรณ์ต่ำ ทั้งยังไม่สามารถชี้ให้เห็นถึงปริมาณ Bias ได้เช่นวิธี MSE นอกจากนี้ คำว่า "Efficient Predictor" ในที่นี้ก็เป็นเพียงคำที่นำมาใช้พูดโดยเลื่อนลอย โดยมิได้คำนึงถึงความหมายที่แท้จริงของคำว่า Efficient Predictor เลย[1]

12.2.4 Theil's U Statistics

ธีล (Theil, H., 1966)[2] เสนอตัวสถิติเพื่อใช้วัดอำนาจพยากรณ์ของสมการประมาณค่า $Y = X\hat{\beta}$ ดังนี้

$$U^2 = \frac{MSE}{\Sigma a_t^2 / n} \qquad \text{หรือ} \qquad U = +\frac{\sqrt{MSE}}{\sqrt{\Sigma a_t^2 / n}}$$

$$\text{เมื่อ} \quad MSE = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(p_t - a_t)^2$$

พิจารณา U จะพบว่า

1. เมื่อ $p_t = a_t$ จะพบว่า $U = 0$ แสดงว่าถ้า $U = 0$ สมการ $Y = X\hat{\beta}$ จะมี Perfect Forcast หรือมีอำนาจพยากรณ์สูงที่สุด

---

[1] $\hat{\theta}$ จะเป็น Efficient Estimator ของ θ ก็ต่อเมื่อ (1) $\hat{\theta}$ เป็น Unbiased Estimator ของ θ และ (2) $V(\hat{\theta})$ มีค่าต่ำสุดเมื่อเทียบต่อ Unbiased Estimator ด้วยกัน หรือนัยหนึ่ง Efficient Extimator ก็คือ Best Unbiased Estimator (BUE) นั่นเอง

[2] Koutsoyiannis, A., **Op. Cit.**, p.482

2. ถ้า $p_t = 0$ จะพบว่า U = 1 เมื่อพิจารณาสมการ $p_t = 0$ จะพบว่า

$$\frac{P_t - A_{t-1}}{A_{t-1}} = 0 \quad \text{หรือ} \quad P_t = A_{t-1} \text{ หรือ } P_{t+1} = A_t$$

แต่ P_{t+1} ก็คือค่าพยากรณ์ของ Y ณ วาระที่ t+1 และ A_t คือค่าจริงของ Y ณ วาระที่ t

ดังนั้น ถ้า U = 1 แสดงว่าสมการ $Y = X\hat{\beta}$ พยากรณ์ค่า Y ณ วาระที่ t+1 (คือ Y_{t+1}) ด้วย Y_t หรือนัยหนึ่ง ถ้า U = 1 แสดงว่าสมการ $Y = X\beta$ พยากรณ์ค่า Y ในวาระที่ t+1 ว่ามีค่าไม่ต่างไปจากเดิมในวาระที่ t

3. ถ้า p_t และ a_t มีค่าต่างไปจากข้อ 1 และ 2 ค่าของ U จะสูงขึ้น หรือ $U \to \infty$

จากความรู้ข้างต้นเราสามารถสรุปได้ว่า $0 \leq U < \infty$ โดย U = 0 สมการ $Y = X\hat{\beta}$ จะมีอำนาจพยากรณ์สูงที่สุด ถ้า $0 < U < 1$ สมการ $Y = X\hat{\beta}$ จะมีอำนาจพยากรณ์อยู่ในเกณฑ์ดี ถ้า U = 1 สมการ $Y = X\hat{\beta}$ จะพยากรณ์ค่า Y_{t+1} ไม่ต่างไปจาก Y_t ถ้า $U > 1$ สมการจะมีอำนาจพยากรณ์ต่ำโดย U ยิ่งมีค่าสูงกว่า 1 มากเพียงใด สมการ $Y = X\hat{\beta}$ ก็จะมีอำนาจพยากรณ์ต่ำเพียงนั้น

จากตัวอย่าง 2.1 เราสามารถคำนวณหาค่า U ได้ดังนี้

$$U^2 = \frac{MSE}{\Sigma a_t^2 / n} = \frac{8.5}{25.6} = 0.4$$

$$U = \sqrt{0.4} = 0.666$$

จะเห็นได้ว่า $U < 1$ เราจึงสรุปว่าสมการ $Y = X\hat{\beta}$ มีอำนาจพยากรณ์อยู่ในเกณฑ์ดี

12.2.5 Janus Quotient

Janus Quotient วิเคราะห์หาค่าตัวสถิติโดยเปรียบเทียบผลต่างกำลัง 2 ระหว่าง p_t และ a_t ใน Future Prediction Period กับใน Sample Period ดังไดอะแกรม

$$t = 1,2,\ldots,n \qquad\qquad t = n+1,n+2,\ldots,m$$

← Sample Period → ← Future Prediction Period →

และนิยาม Janus Quotient ดังนี้

$$J^2 = \frac{\sum_{t=n+1}^{m} (p_t - a_t)^2/m}{\sum_{t=1}^{m} (p_t - a_t)^2 \;/n}$$

และเนื่องจากJ^2เป็นอัตราส่วนเปรียบเทียบระหว่าง Sum of Square Ditterence ดังนั้น J จึงมีค่าเป็นบวกเสมอคือ

$$0 \leqslant J < \infty$$

พิจารณาช่วงของ J จะพบว่า

1. ถ้า $p_t = a_t$ แล้ว J จะมีค่าเท่ากับ 0

2. ถ้าโครงสร้างสมการ Y = f(X's) ไม่เปลี่ยนแปลงเศษและส่วนของ J จะมีค่าใกล้เคียงกันมีผลให้ $J \cong 1$ แต่ถ้าโครงสร้างความสัมพันธ์ Y = f(X's) เปลี่ยนแปลงไป J จะมีค่าสูงกว่า 1

จากความรู้ข้างต้นจึงเห็นได้ว่าเราสามารถอภิปรายผลเกี่ยวกับ J ได้เช่นเดียวกับ U ทุกประการ กล่าวคือ ถ้า J = 0 แสดงว่าสมการ $Y = X\hat{\beta}$ มีอำนาจพยากรณ์สูงที่สุด ถ้า $0 < J < 1$ แสดงว่า $Y = X\hat{\beta}$ มีอำนาจพยากรณ์อยู่ในเกณฑ์ดี ถ้า J = 1 แสดงว่าโครงสร้างความสัมพันธ์ Y = f(X's) มิได้เปลี่ยนไปจากเดิม ถ้า $J > 1$ แสดงว่าสมการ $Y = X\hat{\beta}$ มีอำนาจพยากรณ์ต่ำและโครงสร้างความสัมพันธ์ Y = f(X's) เปลี่ยนแปลงไปจากเดิม