บทที่ 5

แบบจำลองโพลิโนเมียลหรือแบบจำลองเส้นโค้ง (Polynomial or Curvilinear Models)

บทที่ 5

แบบจำลองโพลิโนเมียลหรือแบบจำลองเส้นโค้ง (Polynomial or Curvilinear Models)

แบบจำลองโพลิโนเมียลหรือแบบจำลองเส้นโค้งเป็นกรณีพิเศษของแบบจำลองที่ 1 ซึ่งอยู่ในรูป

$$y_j = \beta_0 + \beta_1 x_j + \beta_2 x_j^2 + \ldots + \beta_p x_j^p + e_j$$

สถานการณ์ 2 ชนิดที่อาจใช้แบบจำลองโพลิโนเมียลคือ

1) เมื่อทราบโดยทางทฤษฎีหรือด้วยวิธีอื่นว่าข้อมูลที่มีอยู่ fit กับโพลิโนเมียล degree p หรือน้อยกว่า และต้องการหา maximum likelihood หรือ least-squares estimate ของ β_i หาช่วงความเชื่อมั่น (confidence interval) ของ β_i และทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับ β_i

2) เมื่อไม่ทราบว่าฟังก์ชันใดที่ fit กับข้อมูล ดังนั้นจึงต้องการที่จะหาว่าโพลิโนเมียล degree ต่ำสุดเท่าใดที่พอที่จะอธิบายลักษณะของข้อมูลได้ (adequately describes the data)

5.1 การประมาณค่าและการทดสอบสมมติฐานในแบบจำลองโพลิโนเมียล

พิจารณาแบบจำลอง

$$y_j = \beta_0 + \beta_1 x_{j1} + \beta_2 x_{j2} + \beta_3 x_{j3} + e_j, \; j = 1,\ldots,n$$

ถ้าให้ $x_{j1} = x_j$, $x_{j2} = x_j^2$, $x_{j3} = x_j^3$ เราจะได้แบบจำลองซึ่งเรียกว่าแบบจำลองโพลิโนเมียล degree 3 นั่นคือ

$$y_j = \beta_0 + \beta_1 x_j + \beta_2 x_j^2 + \beta_3 x_j^3 + e_j$$

ซึ่งที่จริงแล้วคือแบบจำลองที่ 1 นั่นเอง ดังนั้นทฤษฎีในบทที่ 3 จึงใช้กับบทนี้ได้ด้วย

แบบจำลองในรูปเมตริกซ์คือ $Y = X\beta + e$

โดยที่

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \\ y_n \end{bmatrix}, \quad e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \\ e_n \end{bmatrix}$$

ดังนั้น

$$X'X = \begin{bmatrix} n & \Sigma x_j & \Sigma x_j^2 & \Sigma x_j^3 \\ \Sigma x_j & \Sigma x_j^2 & \Sigma x_j^3 & \Sigma x_j^4 \\ \Sigma x_j^2 & \Sigma x_j^3 & \Sigma x_j^4 & \Sigma x_j^5 \\ \Sigma x_j^3 & \Sigma x_j^4 & \Sigma x_j^5 & \Sigma x_j^6 \end{bmatrix}, \quad X'Y = \begin{bmatrix} \Sigma y_j \\ \Sigma x_j y_j \\ \Sigma x_j^2 y_j \\ \Sigma x_j^3 y_j \end{bmatrix}$$

5.2 **การหา Degree ของโพลิโนเมียลซึ่ง Fit กับข้อมูลที่กำหนดให้**

เท่าที่ผ่านมา จากรูปความสัมพันธ์ $y = f(x)$ นั้น เราทราบรูปแบบของ $f(x)$ ซึ่งประกอบด้วยตัวพารามิเตอร์ที่เราไม่ทราบค่า วิธีการที่เราทำคือรวบรวมข้อมูล (ค่าต่าง ๆ ของ y และ x) แล้วประมาณค่าหรือทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับพารามิเตอร์ใน $f(x)$

ในที่นี้เราจะพิจารณาปัญหาที่ต่างออกไปจากเดิม นั่นคือ "การหารูปแบบฟังก์ชันของ $f(x)$ โดยการใช้ข้อมูลที่มีอยู่เป็นจำนวนน้อย" โดยทั่ว ๆ ไปแล้วปัญหานี้ซับซ้อนมากในหลาย ๆ กรณีคำตอบที่ต้องการอาจไม่มี

มีวิธีหรือหนทางมากมายที่นักวิทยาศาสตร์จะกำหนดรูปแบบของ $f(x)$ ซึ่งอาจกำหนดจากความรู้ซึ่งเกินความจริงพื้นฐาน เช่นการใช้สมการอนุพันธ์ อาจกำหนดโดยให้เหตุผลและโดยอาศัยกฎพื้นฐานที่ทราบอยู่แล้ว อาจจะรวบรวมข้อมูลจำนวนมาก ๆ ซึ่งมากพอที่จะบอกแนวโน้มที่แท้จริงได้ (certain trends) หรืออาจจะกำหนดฟังก์ชันตามความรู้สึกหรือตามความคิดของเขาเอง

เราจะได้พิจารณาปัญหาที่เมื่อนักวิทยาศาสตร์มีข้อมูลจำนวนไม่มากและไม่มีรูปฟังก์ชันที่ต้องการ และต้องการวิธีที่จะกำหนดฟังก์ชันที่ fit กับข้อมูลที่มีอยู่ และพยายามที่จะหาฟังก์ชันที่ fit กับข้อมูลเป็นอย่างดี (fit the data well)

สมมุติว่าเราสามารถกระจาย f(x) ให้อยู่ในรูปอนุกรมของเทย์เลอร์ (Taylor's Series) นั่นคือ

$$y = f(x) = \theta_0 \; t \; \theta_1 x \; t \; \theta_2 x^2 + \ldots + 0_k x^k \; t \ldots$$

เราอาจเขียน $y = \alpha_0 + \alpha_1 x + e_1$ (linear equation)

โดยที่ e_1 คือ remainder ในอนุกรมของเทย์เลอร์ ซึ่งเราเรียกว่า random error ถ้า linear equation ไม่เป็นที่พอใจ เราจะสมมุติแบบจำลองใหม่ คือ $y=\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + e_2$ (quadratic equation) โดยที่ e_2 คือ remainder หลังจาก fit quadratic แล้ว เราอาจ fit โพลิโนเมียล degree สูงขึ้น ๆ ตามที่ต้องการ เราจะเห็นได้ชัดว่า ถ้ารูปความสัมพันธ์ที่แท้จริงคือ y = f(x) และ f(x) ไม่อยู่ในรูปโพลิโนเมียล วิธีที่อธิบายมาข้างต้นก็จะไม่สามารถกำหนดรูปแบบที่แท้จริงของ f(x) ได้ แต่เพียงจะช่วยนักทดลองในการหาโพลิโนเมียล ซึ่งมี degree ต่ำ ๆ ที่จะช่วยอธิบายข้อมูลที่มีอยู่ ดังที่ได้กล่าวไว้แล้วว่า แบบจำลองชนิดนี้เป็นไปตามคำจำกัดความ 3.1 (ซึ่งเราสมมุติว่า x's ถูกกำหนดค่าไว้ก่อน และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม)

วิธีการเริ่มต้นด้วยการใช้

linear polynomial : $y = \alpha_0 + \alpha_1 x + e_1$

แล้วใช้ quadratic polynomial : $y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + e_2$

แล้วใช้ cubic polynomial : $y = \gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \gamma_3 x^3 + e_3$

เรื่อย ๆ ไป จนกว่าจะได้โพลิโนเมียลที่ fit กับข้อมูลที่ดีที่สุด (best fit) (โปรดสังเกตว่า สัมประสิทธิ์ของ x ในแต่ละแบบจำลองนั้นแตกต่างกัน และทำนองเดียวกับของ x^2, x^3,...) เราทราบว่าโพลิโนเมียล degree (n-1) จะผ่านจุดทั้ง n จุด นั่นคือ fit กับข้อมูลอย่างสมบูรณ์ แต่อย่างไรก็ดีเราไม่ต้องการเช่นนั้น เราต้องการ **"โพลิโนเมียลที่มี degree ต่ำ"** ที่จะ **"แทน (represents)"** ข้อมูลของเรา

เริ่มวิธีการโดยการ fit 1-st degree polynomial(linear polynomial)

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 x + e_1$$

แล้วทดสอบ H_0: $\alpha_1 = 0$

Normal equations คือ $\begin{bmatrix} n & \Sigma x_i \\ \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_0 \\ \hat{\alpha}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma y_i \\ \Sigma x_i y_i \end{bmatrix}$

หรือ $$X'X\hat{\alpha} = X'Y$$

และ $R(\alpha_0, \alpha_1) = \hat{\alpha}_0 \Sigma y_i + \hat{\alpha}_1 \Sigma x_i y_i = \hat{\alpha}'X'Y$

เทอม $R(\alpha_0) = \hat{\alpha}_0 \Sigma y_i$ โดยที่ $\hat{\alpha}_0$ คือผลเฉลยของ $n\hat{\alpha}_0 = \Sigma y_i$

นั่นคือ $\hat{\alpha}_0 = \bar{y}$

ตารางที่ 5.1 ANOVA สำหรับ Linear Polynomial

SV	df	SS	MS	f_c
Due to α_0, α_1	2	$R(\alpha_0, \alpha_1)$		
Due to α_0	1	$R(\alpha_0)$		
Due to α_1 (adj.)	1	$R(\alpha_1 \mid \alpha_0)$	A_1	A_1/E_1
Error	n-2	$Y'Y - R(\alpha_0, \alpha_1)$	E_1	
Total	n	$Y'Y$		

จากการทดสอบ H_0: $\alpha_1 = 0$ ถ้าเรายอมรับว่า $\alpha_1 = 0$ เราสรุปว่าสมการ $y = \alpha_0 + e_1$ fit กับข้อมูลพอดี ในทางตรงกันข้าม ถ้าเราไม่ยอมรับสมมติฐาน คือ $\alpha_1 \neq 0$ เราจะ fit 2nd-degree polynomial(quadratic polynomial)

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + e_2$$

Normal equations คือ
$$\begin{bmatrix} n & \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 \\ \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i^3 \\ \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i^3 & \Sigma x_i^4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma y_i \\ \Sigma x_i y_i \\ \Sigma x_i^2 y_i \end{bmatrix}$$

หรือ
$$X'X\hat{\beta} = X'Y$$

$$R(\beta_0, \beta_1, \beta_2) = \hat{\beta}_0\Sigma y_i + \hat{\beta}_1\Sigma x_i y_i + \hat{\beta}_2\Sigma x_i^2 y_i = \hat{\beta}'X'Y$$

$$R(\beta_0, \beta_1) = \hat{\beta}_0\Sigma y_i + \hat{\beta}_1\Sigma x_i y_i$$

โดยที่ $\hat{\beta}_0$ และ $\hat{\beta}_1$ เป็นผลเฉลยของ Normal equations

$$\begin{bmatrix} n & \Sigma x_i \\ \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma y_i \\ \Sigma x_i y_i \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $R(\beta_0, \beta_1) = R(\alpha_0, \alpha_1)$ นั่นเอง

$$R(\beta_2 | \beta_0, \beta_1) = R(\beta_0, \beta_1, \beta_2) - R(\alpha_0, \alpha_1)$$

ตารางที่ 5.2 ANOVA สำหรับ Quadratic Polynomial

SV	df	SS	MS	f_c
Due to $\beta_0, \beta_1, \beta_2$	3	$R(\beta_0, \beta_1, \beta_2)$		
Due to β_0, β_1(unadj.)	2	$R(\beta_0, \beta_1)$		
Due to β_2(adj.)	1	$R(\beta_2 \| \beta_0, \beta_1)$	B_2	B_2/E_2
Error	n-3	$Y'Y - R(\beta_0, \beta_1, \beta_2)$	E_2	
Tatal	n	Y'Y		

ทำการทดสอบ $H_0: \beta_2 = 0$

ถ้าจากตารางที่ 5.1 เราสรุปว่า $\alpha_1 \neq 0$ และจากตารางที่ 5.2 เราสรุปว่า $\beta_2 = 0$ แล้ว เราจะสรุปว่าแบบจำลอง $y = \alpha_0 + \alpha_1 x + e_1$ fit กับข้อมูล แต่ถ้าจากตารางที่ 5.2 เราสรุปว่า $\beta_2 \neq 0$ เราจะ fit **3rd-degree polynomial (cubic polynomial)** ต่อไป นั่นคือ fit

$$y = \gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \gamma_3 x^3 + e_3$$

Normal equations คือ

$$\begin{bmatrix} n & \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i^3 \\ \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i^3 & \Sigma x_i^4 \\ \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i^3 & \Sigma x_i^4 & \Sigma x_i^5 \\ \Sigma x_i^3 & \Sigma x_i^4 & \Sigma x_i^5 & \Sigma x_i^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\gamma}_0 \\ \hat{\gamma}_1 \\ \hat{\gamma}_2 \\ \hat{\gamma}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma y_i \\ \Sigma x_i y_i \\ \Sigma x_i^2 y_i \\ \Sigma x_i^3 y_i \end{bmatrix}$$

หรือ

$$X'X\hat{\gamma} = X'Y$$

$$R(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \hat{\gamma}_0 \Sigma y_i + \hat{\gamma}_1 \Sigma x_i y_i + \hat{\gamma}_2 \Sigma x_i^2 y_i + \hat{\gamma}_3 \Sigma x_i^3 y_i$$
$$= \hat{\gamma}' X'Y$$

$$R(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2) = \hat{\gamma}_0 \Sigma y_i + \hat{\gamma}_1 \Sigma x_i y_i + \hat{\gamma}_2 \Sigma x_i^2 y_i$$
$= R(\beta_0, \beta_1, \beta_2)$ นั่นเอง

$$R(\gamma_3 | \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2) = R(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) - R(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$$

ตารางที่ 5.3 ANOVA สำหรับ Cubic Polynomial

SV	df	SS	MS	f_c
Due to $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$	4	$R(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$		
Due to $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$(unadj.)	3	$R(\gamma_0,\gamma_1,\gamma_2)=R(\beta_0,\beta_1,\beta_2)$		
Due to γ_3 (adj.)	1	$R(\gamma_3 \| \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$	C_3	C_3/E_3
Error	n-4	$Y'Y-R(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$	E_3	
Total	n	$Y'Y$		

ในการทดสอบ H_o: $\gamma_3 = 0$ การสรุปผลทำในลักษณะเดียวกับที่กล่าวมาข้างต้น ถ้า $\gamma_3 = 0$ เราก็หยุด แล้วสรุปว่าโพลิโนเมียล degree 2 fit กับข้อมูล ถ้า $\gamma_3 \neq 0$ เราก็ทำต่อ นั่นคือถ้าทำต่อไปจนถึงโพลิโนเมียล degree k แล้วได้ผลสรุปการทดสอบสมมติฐานว่าสัมประสิทธิ์ของ x^k มีค่าเท่ากับศูนย์ เราจะสรุปว่าโพลิโนเมียล degree (k-1) fit กับข้อมูล จากนั้นเราก็ประมาณค่าสัมประสิทธิ์ และกำหนดเส้นโค้งกำลังสองต่ำสุด (least square curve)

สิ่ง 2 สิ่งที่ควรพิจารณาเพิ่มเติมในวิธีการข้างต้นคือ

1. การที่เราสรุปผลการทดสอบว่าสัมประสิทธิ์ของ x^k มีค่าเท่ากับศูนย์อย่างมีนัยสำคัญนั้น ไม่ได้หมายความว่าข้อมูล fit กับโพลิโนเมียล degree (k-1) จริง ๆ แต่เป็นเพียงเงื่อนไขของวิธีการเพื่อจะบอกว่า โพลิโนเมียล degree เท่าใดจึงจะพอเพียง (adequate) กับข้อมูล

สมมุติว่าเราสรุปว่า quadratic model $y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + e_2$ นั้นพอที่จะใช้กับข้อมูล เมื่อเราสำรวจ linear model $y = \alpha_0 + \alpha_1 x + e_1$ เทอม e_1 ซึ่งเราถือเป็นตัวแปรเชิงสุ่มนั้นรวมเทอม x^2 ไว้ด้วย ดังนั้นจึงทำให้เกิดความเอียงเฉในผลบวกกำลังสองของความคลาดเคลื่อน (error sum of squares) สำหรับ linear model สิ่งเดียวกันเกิดเมื่อเราตัดสินใจว่าโพลิโนเมียล degree p fit กับข้อมูล ผลบวกกำลังสองของความคลาดเคลื่อนของแบบจำลองที่มี degree ต่ำกว่าจะมีความเอียงเฉ วิธีการประมาณค่าความแปรปรวนของตัวแปรเชิงสุ่ม e จะถูกกล่าวในหัวข้อหลัง ซึ่งจะเป็นวิธีที่ดีกว่า

นักสถิติบางท่านแนะนำว่า ถ้ายอมรับสมมติฐานติดต่อกันสองครั้ง จึงจะตัดสินใจว่าควรจะใช้โพลิโนเมียล degree เท่าใด เช่นถ้าเรายอมรับ $H_o:\beta_2=0$ และ $H_o:\gamma_3=0$ เราจึงจะสรุปว่า linear polynomial fit กับข้อมูล

2. การคำนวณในโพลิโนเมียล degree ต่ำ ๆ มักไม่มีปัญหา แต่เมื่อ fit กับโพลิโนเมียล degree >= 3 อาจเกิดปัญหาได้มาก

ถ้าค่าของ x's อยู่ในอนุกรมก้าวหน้าเลขคณิต (arithmetic progression) เราสามารถลดการคำนวณลงได้มาก โดยการใช้ออร์ธอโกนัลโพลิโนเมียล ซึ่งจะได้กล่าวในหัวข้อ 5.3

ตัวอย่างที่ 5.1 จากข้อมูลที่กำหนดให้ เราต้องการหา degree ของโพลิโนเมียลที่จะ fit กับข้อมูลชุดนี้ได้อย่างเพียงพอ

y	24.0	20.0	10.0	13.0	12.0	6.0	5.0	1.0	1.0	0.0
x	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6

เริ่มต้นด้วยการ fit linear model: $y = \alpha_0 + \alpha_1 x + e_1$

$$X'X = \begin{bmatrix} 10.0 & 17.0 \\ 17.0 & 32.2 \end{bmatrix}, \quad X'Y = \begin{bmatrix} 92.0 \\ 114.0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\alpha} = \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_0 \\ \hat{\alpha}_1 \end{bmatrix} = (X'X)^{-1}X'Y = \begin{bmatrix} 31.0424 \\ -12.8480 \end{bmatrix}, \quad Y'Y = 1452.0$$

$$R(\alpha_0, \alpha_1) = \hat{\alpha}'X'Y = 1391.16$$

$$R(\alpha_0) = n\bar{y}^2 = 10(92.0/10)^2 = 846.0$$

$$R(\alpha_1|\alpha_0) = R(\alpha_0, \alpha_1) - R(\alpha_0) = 544.76$$

ตารางที่ 5.4 ANOVA สำหรับ Linear Polynomial Model

SV	df	SS	MS	f_c	Pr
Due to α_0, α_1	2	1391.16			
Due to α_0	1	846.40			
Due to α_1 (adj.)	1	544.76	544.76	71.58	< 5%
Error	8	60.84	7.61		
Total	10	1452.0			

หมายเหตุ $Pr = Pr[F \geq f_c]$

เราไม่ยอมรับ $H_o: \alpha_1 = 0$ ที่ $\alpha = .05$ นั่นคือ $\alpha_1 \neq 0$

ต่อไปเรา fit quadratic model: $y = \beta_o + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + e_2$

$$X'X = \begin{bmatrix} 10.00 & 17.00 & 32.20 \\ 17.00 & 32.20 & 65.96 \\ 32.20 & 65.96 & 142.68 \end{bmatrix}, \quad X'Y = \begin{bmatrix} 92.0 \\ 114.0 \\ 156.0 \end{bmatrix}$$

$\hat{\beta}' = [\ 42.96 \quad -28.68 \quad 4.66\ ]$

$R(\beta_o, \beta_1, \beta_2) = \hat{\beta}'X'Y = 1409.35$

$R(\beta_o, \beta_1) = R(\alpha_o, \alpha_1) = 1391.16$

ดังนั้น $R(\beta_2 | \beta_o, \beta_1) = 18.19$

ตารางที่ 5.5 ANOVA สำหรับ Quadratic Polynomial Model

SV	df	SS	MS	f_c	Pr
Due to β_o, β_1, β_2	3	1409.35			
Due to β_o, β_1(unadj.)	2	1391.16			
Due to β_2(adj.)	1	18.19	18.19	2.99	> 5%
Error	7	42.65	6.09		
Tatal	10	1452.0			

เรายอมรับ $H_o: \beta_2 = 0$ ที่ $\alpha = .05$ นั่นคือ $\beta_2 = 0$ และ linear polynomial fit กับข้อมูลพอเพียง

เราอาจย่อตารางที่ 5.4 และตารางที่ 5.5 เป็นตารางเดียวดังแสดงในตารางที่ 5.6

ตารางที่ 5.6 ANOVA สำหรับ Linear และ Quadratic Models

SV	df	SS	MS	f_c	Pr
Total(corrected)	10	1452.00			
Mean	1	846.40			
Linear term	1	544.76	544.76	71.58	< 5%
Error for linear	8	60.84	7.61		
Quadratic term	1	18.19	18.19	2.99	> 5%
Error for quadratic	7	42.65	6.09		

5.3 ออร์ธอโกนัลโพลิโนเมียล (Orthogonal Polynomials)

5.3.1 บทนำ

เหตุผลของการใช้ออร์ธอโกนัลโพลิโนเมียลในแบบจำลองเส้นโค้งนั้นคือ เพื่อช่วยให้การคำนวณง่ายขึ้นกว่าเดิม โดยทำการแปลงค่า x เพื่อทำให้ X'X กลายเป็น diagonal เมตริกซ์ เมื่อ X'X เป็น diagonal ทำให้พารามิเตอร์ออร์ธอโกนัลกันด้วย (ตามหัวข้อ 3.3.4)

เราอาจใช้ออร์ธอโกนัลโพลิโนเมียลได้ไม่ว่าค่าของ x จะอยู่ห่างเท่า ๆ กัน (equally spaced) หรือห่างไม่เท่ากัน (unequally spaced) ก็ได้

5.3.2 ออร์ธอโกนัลโพลิโนเมียลสำหรับแบบจำลองชนิดเส้นตรง

ในที่นี้จะกล่าวถึงกรณีที่ใช้กับ linear model ก่อน แล้วจึงจะกล่าวถึงกรณีทั่ว ๆ ไป

สมมุติว่า ค่าของ x เพิ่มขึ้นหรือลดลงครั้งละเท่า ๆ กัน ดังนี้

$x_1 = a + h,\ x_2 = a + 2h ,\ldots,\ x_i = a + ih,\ldots,\ x_n = a + nh$

เช่น x_i: 4.3, 4.5, 4.7, 4.9, 5.1 นั่นคือ a = 4.1, h = 0.2, n = 5

เราต้องการ fit แบบจำลอง: $y_i = \beta_o + \beta_1 X_i + e_i$

เราอาจเขียน แบบจำลอง: $y = \alpha_o + \alpha_1 P_1(i - \bar{i}) + e_i$

โดยที่ $P_1(i - \bar{i})$ คือ 1st-degree polynomial ใน $(i - \bar{i})$ โดยที่ i เป็นค่าเฉลี่ยของค่า i's นั่นคือถ้า i = 1, 2,..., n แล้ว $\bar{i} = (\Sigma i)/n = (n+1)/2$

ดังนั้น $P_1(i - \bar{i}) = P_1(i - (n+1)/2)$

$$= c_o + c_1(i - (n+1)/2)$$

ซึ่งคือ 1st-degree polynomial ใน $(i - \bar{i})$ โดยที่ c_o และ c_1 เป็นค่าคงที่ ถ้าเราให้โพลิโนเมียลใน x_i เท่ากับโพลิโนเมียลใน $(i - \bar{i})$ เราได้

$$\beta_o + \beta_1 X_i = \alpha_o + \alpha_1[c_o + c_1(i - (n+1)/2]$$

$$= \alpha_o + [\alpha_1 c_o - \alpha_1 c_1(n+1)/2] + \alpha_1 c_1 i \qquad ...(1)$$

เพราะว่า $x_i = a + ih$

ดังนั้น $\beta_o + \beta_1 X_i = \beta_o + \beta_1(a + ih)$

$$= (\beta_o + \beta_1 a) + \beta_1 hi \qquad ...(2)$$

เทียบสัมประสิทธิ์ใน (1) และ (2)

สัมประสิทธิ์ของ i^o : $\alpha_o + [c_o - c_1(n+1)/2]\alpha_1 = \beta_o + \beta_1 a$ ...(3)

สัมประสิทธิ์ของ i : $c_1\alpha_1 = h\beta_1$ ...(4)

ถ้า $h \neq 0$ ไม่ว่า c_o, c_1 จะมีค่าเท่าใด เราสามารถหา β_i's จาก (3) และ (4) ถ้าทราบค่า α_i's

ดังนั้นเราอาจใช้แบบจำลอง: $y_i = \alpha_o + \alpha_1[c_o + c_1(i - (n+1)/2)]+e_i$

$$i = 1, 2,..., n$$

ซึ่งเราจะเขียนในรูปเมตริกซ์: $Y = X\alpha + e$

แล้วเราจะประมาณค่า α_o และ α_1 แล้วจึงเขียนแทนใน (3) และ (4) เพื่อหาค่าประมาณของ β_o และ β_1

พิจารณาเมตริกซ์ X และ X'X

$$X = \begin{bmatrix} 1 & c_o + [(1-n)/2]c_1 \\ 1 & c_o + [(3-n)/2]c_1 \\ : & : \\ 1 & c_o + [(n-1)/2]c_1 \end{bmatrix}_{n\times 2}, X'X = \begin{bmatrix} n & nc_o \\ nc_o & \Sigma c_o^2 + c_1^2 \Sigma i[i-(n+1)/2] \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

เราอาจใช้ c_o และ c_1 (ซึ่งเป็นค่าคงที่) ซึ่งมีค่าเท่าใดก็ได้เพื่อทำให้ X'X เป็น diagonal เมตริกซ์ นั่นคือให้ $c_o = 0$ และเลือก c_1 เพื่อทำให้สมาชิกของ X'X ไม่เป็นเศษส่วน นั่นคือ ถ้า n เป็นเลขคู่ ให้ $c_1 = 2$ และถ้า n เป็นเลขคี่ ให้ $c_1 = 1$

แบบจำลองกลายเป็น

$$\begin{aligned} y_i &= \alpha_o + \alpha_1 P_1(i - (n+1)/2) + e_i \\ &= \alpha_o + \alpha_1 c_1 (2i-n-1)/2 + e_i \end{aligned}$$

โดยที่ $P_1(i - (n+1)/2) = (2i-n-1)/2$ ถ้า n เป็นเลขจำนวนเต็มคี่

$P_1(i - (n+1)/2) = 2i-n-1$ ถ้า n เป็นเลขจำนวนเต็มคู่

$$X'X = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & c_1^2[n(n+1)(n-1)/12] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & \Sigma[P_1(i - (n+1)/2]^2 \end{bmatrix}$$

$$X'Y = \begin{bmatrix} \Sigma y_i \\ \Sigma y_i P_1(i - (n+1)/2) \end{bmatrix}, \hat{\alpha} = \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_o \\ \hat{\alpha}_1 \end{bmatrix}$$

Normal equations: $X'X\hat{\alpha} = X'Y$

ดังนั้น

$$\hat{\alpha} = \begin{bmatrix} (\Sigma y_i)/n \\ \\ \dfrac{\Sigma y_i P_1(i - (n+1)/2)}{\Sigma [P_1(i - (n+1)/2)]^2} \end{bmatrix}$$

แทนค่า $\hat{\alpha}_o$, $\hat{\alpha}_1$ ลงใน (3) และ (4) จะได้ $\hat{\beta}_o$ และ $\hat{\beta}_1$

ถ้าเราต้องการทดสอบ H_o: $\alpha_1 = 0$ เราต้องหาค่า $R(\alpha_1 | \alpha_o)$ และ $R(\alpha_o, \alpha_1)$ เพราะว่า α_o และ α_1 ออร์ธอโกนัลกัน เราได้

$$R(\alpha_1 | \alpha_o) = R(\alpha_1) = \hat{\alpha}_1' X_1' Y = \frac{\{\Sigma y_i P_1 [i-(n+1)/2]\}^2}{\Sigma \{P_1 [i - (n+1)/2]\}^2}$$

และ
$$\begin{aligned} R(\alpha_o, \alpha_1) = R(\alpha_o) + R(\alpha_1) &= \hat{\alpha}_o' X_o' Y + \hat{\alpha}_1' X_1' Y \\ &= (\Sigma y_i)^2/n + R(\alpha_1) \end{aligned}$$

จะเห็นได้ว่าการวิเคราะห์ทำได้ง่ายขึ้นถ้าเรามีค่า $P_1(i-(n+1)/2) = c_1(2i-n-1)/2$ อยู่ ในตารางที่ 5.7 แสดงค่า $P_1(i - (n+1)/2)$ สำหรับบางค่าของ n โดยใช้สูตร

$P_1(i - (n+1)/2) = (2i-n-1)/2$ เมื่อ n เป็นเลขจำนวนเต็มคี่
$P_1(i - (n+1)/2) = 2i-n-1$ เมื่อ n เป็นเลขจำนวนเต็มคู่

ตารางที่ 5.7 ค่าของ $P_i(i - (n+1)/2)$, $i = 1,\ldots, n$

n \ i	P_i 1	2	3	4	5	6	ΣP_i^2
3	-1	0	1				2
4	-3	-1	1	3			20
5	-2	-1	0	1	2		10
6	-5	-3	-1	1	3	5	70

__ตัวอย่างที่ 5.2__ กำหนดข้อมูลดังนี้

y_i	1.0	2.0	4.0	3.0	5.0
x_i	5.1	5.4	5.7	6.0	6.3

x_i's อยู่ห่างเท่า ๆ กัน: $a = 4.8$, $h = 0.3$, $n = 5$

จากตารางที่ 5.7 เมื่อ n = 5 เราได้

y_i	1.0	2.0	4.0	3.0	5.0
$P_i(i-(n+1)/2)$	-2	-1	0	1	2

$\Sigma y_i = 15$, $\Sigma y_i^2 = 55$

$\Sigma y_i P_i(i - (n+1)/2)) = 9$, $\Sigma P_i^2 = 10$

ดังนั้น

$$\hat{\alpha} = \begin{bmatrix} 15/5 \\ 9/10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ .9 \end{bmatrix}, \quad X'X = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad X'Y = \begin{bmatrix} 15 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$c_0 = 0,\ c_1 = 1$ (n เป็นเลขคี่)

จาก (3); $\hat{\alpha}_0 - 3\hat{\alpha}_1 = \hat{\beta}_0 + 4.8\hat{\beta}_1$ ...(5)

จาก (4); $\hat{\alpha}_1 = 0.3\hat{\beta}_1$ ...(6)

จาก (5) และ (6); $\hat{\beta}_1 = 3.33\hat{\alpha}_1 = 3.33(0.9) = 2.997$

$\hat{\beta}_0 = \hat{\alpha}_0 - 19\hat{\alpha}_1 = 3 - 19(0.9) = -14.1$

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} -14.1 \\ 3.0 \end{bmatrix},\ Y'Y = 55.0\ ,\ R(\alpha_0) = (\Sigma y_i)^2/n = 45.0$$

$$R(\alpha_0,\ \alpha_1) = \hat{\alpha}'X'Y$$

$$= [3 \quad 0.9]\begin{bmatrix} 15 \\ 9 \end{bmatrix} = 53.1$$

$$R(\alpha_1|\alpha_0) = R(\alpha_0,\ \alpha_1) - R(\alpha_0)$$

$$= 53.1 - 45.0 = 8.1 = R(\alpha_1)$$

ตารางที่ 5.8 ANOVA สำหรับ Linear Polynomial

SV	df	SS	MS	f_c	Pr
Due to $\alpha_0,\ \alpha_1$	2	53.10			
Due to α_0	1	45.00			
Due to α_1 (adj.)	1	8.10	8.10	13.50	< 5%
Error	3	1.90	0.6		
Total	5	55.00			

ข้อสังเกตในการใช้ออร์ธอโกนัลโพลิโนเมียลเพื่อ fit 1st-degree polynomial เมื่อ x_i's อยู่ห่างเท่า ๆ กันคือ

1) จาก (4) จะเห็นว่า $\beta_1 = 0 \longleftrightarrow \alpha_1 = 0$ ดังนั้นเมื่อเราต้องการทดสอบ H_o: $\beta_1 = 0$ เราจึงทดสอบ H_o: $\alpha_1 = 0$ แทนได้

2) เราหาค่าประมาณแบบจุดและแบบช่วงของ β_o และ β_1 ได้ จาก (3) และ (4)

3) ANOVA สำหรับ α_i คำนวณได้ง่ายมาก เพราะ **X'X, X'Y** และ $\hat{\alpha}$ หาได้ง่าย

ถ้า x_i's อยู่ห่างเท่า ๆ กัน เราจะ fit โพลิโนเมียล degree สูงขึ้น ๆ โดยวิธีการของออร์ธอโกนัลโพลิโนเมียล ในการ fit โพลิโนเมียล degree สูงขึ้น ๆ จะแสดงให้เห็นว่าออร์ธอโกนัลโพลิโนเมียลนั้นมีประโยชน์มาก

5.3.3 การ Fit แบบจำลองกำลังสองโดยออร์ธอโกนัลโพลิโนเมียล

แบบจำลอง: $y_i = \gamma_o + \gamma_1 x_i + \gamma_2 x_i^2 + e_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$

หรือ: $y_i = \delta_o + \delta_1 P_1(i-(n+1)/2) + \delta_2 P_2(i-(n+1)/2) + e_i$

, $i = 1, 2, \ldots, n$

โดยที่ $P_1(i-(n+1)/2) = d_o + d_1(i-(n+1)/2)$, $d_1 \neq 0$

และ $P_2(i-(n+1)/2) = f_o + f_1(i-(n+1)/2) + f_2(i-(n+1)/2)^2$, $f_2 \neq 0$

d_o, d_1, f_o, f_1, และ f_2 เป็นค่าคงที่ที่เรากำหนดได้เองตามความต้องการ

จาก $x_i = a + ih$

$$y_i = \gamma_o + \gamma_1(a + ih) + \gamma_2(a + ih)^2 + e_i \qquad \ldots(1)$$

$$y_i = \delta_o + \delta_1[d_o + d_1(i-(n+1)/2)] + \delta_2[f_o + f_1(i-(n+1)/2) + f_2(i-(n+1)/2)^2] + e_i \qquad \ldots(2)$$

ใน (1) และ (2)

จากการเทียบสัมประสิทธิ์ของ i^p ($p = 0, 1, 2$) เราได้

สัมประสิทธิ์ของ i^o:

$$\delta_o + [d_o - d_1(n+1)/2]\delta_1 + [f_o - f_1(n+1)/2 + f_2((n+1)/2)^2]\delta_2 = \gamma_o + a\gamma_1 + a^2\gamma_2 \qquad \ldots(3)$$

สัมประสิทธิ์ของ i^1: $$d_1\delta_1 + [f_1-(n+1)f_2]\delta_2 = \gamma_1 h + 2ah\gamma_2 \quad ...(4)$$

สัมประสิทธิ์ของ i^2: $$f_2\delta_2 = \gamma_2 h^2 \quad ...(5)$$

ถ้าเราหา $\hat{\delta}$ ได้ เราสามารถใช้สมการ (3)-(5) หา $\hat{\gamma}$ ได้ ปริมาณ d_o, d_1, f_o, f_1 และ f_2 นั้นเราสามารถกำหนดเอาเพื่อทำให้ X'X เป็น diagonal เมตริกซ์

จากแบบจำลอง: $y_i = \delta_o + \delta_1 P_1(i-(n+1)/2) + \delta_2 P_2(i-(n+1)/2) + e_i$ $, i = 1, 2, ..., n$

แบบจำลองในรูปเมตริกซ์คือ $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\delta} + \mathbf{e}$

โดยที่

$$X = \begin{bmatrix} 1 & P_1(1-(n+1)/2) & P_2(1-(n+1)/2) \\ 1 & P_1(2-(n+1)/2) & P_2(2-(n+1)/2) \\ : & : & : \\ 1 & P_1(n-(n+1)/2) & P_2(n-(n+1)/2) \end{bmatrix}_{n \times 3}$$

และ X'X =

$$\begin{bmatrix} n & \sum_i P_1(i-(n+1)/2) & \sum_i P_2(i-(n+1)/2) \\ \sum_i P_1(i-(n+1)/2) & \sum_i P_1(i-(n+1)/2)^2 & \sum_i P_1(i-(n+1)/2)P_2(i-(n+1)/2) \\ \sum_i P_2(i-(n+1)/2) & \sum_i P_1(i-(n+1)/2)P_2(i-(n+1)/2) & \sum_i P_2(i-(n+1)/2)^2 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

ถ้าต้องการให้ X'X เป็น diagonal เมตริกซ์ เราต้องทำให้

$\Sigma P_1 = \Sigma P_2 = \Sigma P_1 P_2 = 0$ นั่นคือเราจะได้ $d_o = 0$;

$f_o = -f_2(n+1)(n-1)/12$ และ $f_1 = 0$ ทั้งนี้เพราะ $d_1 \neq 0$

ดังนั้น $P_1(i-(n+1)/2) = d_1(i-(n+1)/2)$ ...(6)

$$P_2(i-(n+1)/2) = f_2[-(n-1)(n+1)/12 + (i-(n+1)/2)^2] \quad ...(7)$$

เราจะเลือก d_1 และ f_2 เพื่อทำให้แต่ละโพลิโนเมียล (P_1, P_2) เป็นเลขจำนวนเต็ม เราเขียน (2) ได้ใหม่เป็น

$$y_i=\delta_0+\delta_1 d_1(i-(n+1)/2)+\delta_2 f_2[-(n-1)(n+1)/12+(i-(n+1)/2)^2]+e_i$$

ดังนั้น

$$X'Y = \begin{bmatrix} \Sigma y_i \\ \Sigma y_i P_1(i-(n+1)/2) \\ \Sigma y_i P_2(i-(n+1)/2) \end{bmatrix}$$

$$X'X = \begin{bmatrix} n & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma[P_1(i-(n+1)/2)]^2 & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma[P_2(i-(n+1)/2)]^2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\delta} = (X'X)^{-1}X'Y = \begin{bmatrix} (\Sigma y_i)/n \\ \dfrac{\Sigma y_i P_1(i-(n+1)/2)}{\Sigma[P_1(i-(n+1)/2)]^2} \\ \dfrac{\Sigma y_i P_2(i-(n+1)/2)}{\Sigma[P_2(i-(n+1)/2)]^2} \end{bmatrix}$$

สิ่งสำคัญที่ควรสังเกตในที่นี้คือสัมประสิทธิ์ $\hat{\delta}_0$ และ $\hat{\delta}_1$ นั้นคือตัวเดียวกับเมื่อทำการ fit กับ linear polynomial นั่นคือ $\hat{\delta}_0 = \hat{\alpha}_0$ และ $\hat{\delta}_1 = \hat{\alpha}_1$ (ในหัวข้อ 5.3.2) นั่นคือสรุปว่า ในการ fit quadratic polynomial นั้นมีสัมประสิทธิ์เพียงหนึ่งตัวเท่านั้นที่เราต้องคำนวณ คือ $\hat{\delta}_2$ ส่วนตัวอื่น ๆ มีค่าเท่าเดิม และ

$$R(\delta_2\ \delta_0,\ \delta_1) = R(\delta_2) = \frac{[\Sigma y_i P_2(i-(n+1)/2]^2}{\Sigma[P_2(i-(n+1)/2)]^2}$$

ตารางที่ 5.9 แสดงค่าของ P_1 และ P_2 สำหรับบางค่าของ n (คำนวณจาก (6) และ (7))

ตารางที่ 5.9 ค่าของ $P_1(i-(n+1)/2)$ และ $P_2(i-(n+1)/2)$, $i=1, 2, \dots, n$

	P_1					P_2					
n	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	ΣP_2^2
3	-1	0	1			1	-2	1			6
4	-3	-1	1	3		1	-1	-1	1		4
5	-2	-1	0	1	2	2	-1	-2	-1	2	14

__หมายเหตุ__ ค่าของ P_1 นั้นเหมือนกับในตารางที่ 5.7

ตัวอย่างที่ 5.3 ต้องการ fit quadratic polynomial กับข้อมูลในตัวอย่างที่ 5.2

y_i	1	2	4	3	5
P_1	-2	-1	0	1	2
P_2	2	-1	-2	-1	2

$\Sigma y_i = 15,\quad \Sigma y_i^2 = 55 = Y'Y$

$\Sigma P_1^2 = 10,\quad \Sigma P_1 y_i = 9$

$\Sigma P_2^2 = 14,\quad \Sigma P_2 y_i = -1$

$$X'X = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{bmatrix},\quad X'Y = \begin{bmatrix} 15 \\ 9 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\delta}_0 = \hat{\alpha}_0 = 3,\quad \hat{\delta}_1 = \hat{\alpha}_1 = 0.9,\quad \hat{\delta}_2 = -1/14 = -0.07$$

$$R(\delta_0, \delta_1, \delta_2) = \hat{\delta}'X'Y = [3 \quad 0.9 \quad -0.07]\begin{bmatrix} 15 \\ 9 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= 3(15) + 0.9(9) + (-0.07)(-1)$$

$$= 45 + 8.1 + 0.07 = 53.17$$

$$R(\delta_2 | \delta_0, \delta_1) = R(\delta_2) = (-1)^2/14 = 0.07$$

$$R(\delta_0 | \delta_1, \delta_2) = R(\delta_0) = 45 = R(\alpha_0)$$

$$R(\delta_1 | \delta_0, \delta_2) = R(\delta_1) = 8.1 = R(\alpha_1)$$

$$SSE = Y'Y - R(\delta_0, \delta_1, \delta_2) = 55 - 53.17 = 1.83$$

ตารางที่ 5.10 ANOVA สำหรับ Quadratic Orthogonal Polynomial

SV	df	SS	MS	f_c	Pr
Mean	1	$R(\delta_0) = 45.0$			
Linear	1	$R(\delta_1) = 8.1$	8.1		
Quadratic	1	$R(\delta_2) = 0.07$	0.07	< 1	> 5%
Error	2	SSE = 1.83	0.92		
Total	5	SST = 55.00			

ถ้าเราต้องการหา $\hat{\gamma}_0$, $\hat{\gamma}_1$ และ $\hat{\gamma}_2$ เราแทนค่า $\hat{\delta}_0$, $\hat{\delta}_1$ และ $\hat{\delta}_2$ ใน (3)-(5) แล้วแก้สมการหา $\hat{\gamma}_0$, $\hat{\gamma}_1$ และ $\hat{\gamma}_2$

$$\hat{\gamma}_2 = \hat{\delta}_2/0.09 = -0.07/0.09 = -0.78$$

$$\hat{\gamma}_1 = 11.888\ ,\ \hat{\gamma}_0 = -39.2812$$

$$\hat{\gamma}' = [-39.2812 \quad 11.888 \quad -0.78]$$

__หมายเหตุ__ การหาค่า $\hat{\gamma}$ นั้นให้ทำเป็นแบบฝึกหัดข้อ 5.2

(โดยใช้ $d_0 = 0$, $d_1 = 1$, $f_0 = -2$, $f_1 = 0$, $f_2 = 1$)

5.3.4 __รูปทั่ว ๆ ไปของออร์ธอโกนัลโพลิโนเมียล__

pth-degree polynomial:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + \ldots + \beta_p x_i^p + e_i \qquad \ldots(1)$$

$$i = 1, 2, \ldots, n$$

โดยที่ x_i's อยู่ห่างกันเท่า ๆ กัน

เราอาจเขียนแบบจำลองได้ใหม่ดังนี้

$$y_i = \alpha_0 + \alpha_1 P_1(i - \bar{i}) + \alpha_2 P_2(i - \bar{i}) + \ldots + \alpha_p P_p(i - \bar{i}) + e_i$$

$$i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\ldots(2)$$

$P_t(i - \bar{i})$ แทน t th-degree polynomial ใน $(i - \bar{i})$
โดยที่ $\bar{i} = (n+1)/2$

$$P_t = P_t(i - \bar{i}) = P_t(i-(n+1)/2)$$
$$= a_o + a_{1t}(i-(n+1)/2) + a_{2t}(i-(n+1)/2)^2 + \ldots + a_{tt}(i-(n+1)/2)^t \qquad \ldots(3)$$

โดยที่ a_{ot}, a_{1t}, a_{2t}, ..., a_{tt} เป็นค่าคงที่ ซึ่งเรากำหนดเอาเองเพื่อทำให้ X'X เป็น diagonal เมตริกซ์ และทำให้ P_t เป็นเลขจำนวนเต็ม

ถ้าเราแทน $x_i = a + ih$ ใน (1) แล้วเปรียบเทียบสัมประสิทธิ์ของ i^t ใน (1) และ (2) เราจะได้ชุดของสมการซึ่งเราจะได้สูตรสำหรับหา α_i ในเทอมของ β_i สมการที่ได้คือ

สัมประสิทธิ์ของ i^o:

$$A_{oo}\alpha_o + A_{o1}\alpha_1 + \ldots + A_{op}\alpha_p = B_{oo}\beta_o + B_{o1}\beta_1 + \ldots + B_{op}\beta_p$$

สัมประสิทธิ์ของ i^1: $A_{11}\alpha_1 + \ldots + A_{1p}\alpha_p = B_{11}\beta_1 + \ldots + B_{1p}\beta_p$

...

สัมประสิทธิ์ของ i^p: $A_{pp}\alpha_p = B_{pp}\beta_p$ ...(4)

จากสมการสุดท้ายของ (4) เราจะได้ว่า $[\alpha_p = 0 \longleftrightarrow \beta_p = 0]$
โดยที่ A_{st} คือสัมประสิทธิ์ของ i^s ในโพลิโนเมียล $P_t(i-(n+1)/2)$
และ B_{st} คือสัมประสิทธิ์ของ i^s ใน $(a + ih)^t$

เราอาจเขียน (4) ในรูปเมตริกซ์

$$A\alpha = B\beta$$

โดยที่ $\alpha' = [\alpha_1 \ \ \alpha_2 \ \ldots \ \alpha_p]$, $\beta' = [\beta_1 \ \ \beta_2 \ \ldots \ \beta_p]$ และ A และ B คือ เมตริกซ์ขนาด (p+1) x (p+1) ซึ่งมี A_{ij} และ B_{ij} เป็นสมาชิกตัวที่ ij เพราะว่า $A_{ii} \neq 0$ (i = 0, 1,..., p) และ $B_{ii} \neq 0$ (i = 0, 1,..., p)และเพราะ A และ B เป็นเมตริกซ์สามเหลี่ยม ดังนั้นหา A^{-1} และ B^{-1} ได้

จาก $B\beta = A\alpha$

ดังนั้น $\beta = B^{-1}A\alpha = C\alpha$

จากทฤษฎีบทที่ 3: $\hat{\beta} = C\hat{\alpha}$

นอกจากนั้นเรายังทราบว่าเราสามารถทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับสมาชิกของ β หรือหาช่วงความเชื่อมั่นของสมาชิกของ β โดยการใช้ความจริงที่ว่า β_i คือผลบวกเชิงเส้น (linear combination) ของ α_i ในการใช้ออร์ธอโกนัลโพลิโนเมียล เราจะประมาณค่าและทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับ α_i เท่านั้น และถ้าต้องการ β_i เราก็ใช้(4)ได้

สิ่งที่สำคัญมากสิ่งหนึ่งที่ควรสนใจคือ $\alpha_p = 0 \longleftrightarrow \beta_p = 0$ โดยที่ p คือ degree ของแบบจำลองชนิดโพลิโนเมียลที่ fit ถ้าเรา fit สมการ linear ใน x สัมประสิทธิ์ของเทอม linear ใน x จะเป็น 0 ถ้า $\alpha_1 = 0$ ถ้าเรา fit สมการ quadratic สัมประสิทธิ์ของเทอม quadratic เป็น 0 ถ้า $\alpha_2 = 0$ และเรื่อย ๆ ไป เราต้องจำว่าแต่ละครั้งที่เปลี่ยน degree ของสมการใน x เราเปลี่ยนสัมประสิทธิ์ทุกตัว แต่สิ่งนี้ไม่จริงสำหรับ α_i สัมประสิทธิ์ของ 1st-degree ออร์ธอโกนัลโพลิโนเมียล คือ α_1 ไม่ว่าเราจะเพิ่มเทอมเข้าในแบบจำลองอีกกี่เทอมก็ตาม และสำหรับสัมประสิทธิ์ของ degree ใด ๆ ของออร์ธอโกนัลโพลิโนเมียลก็เป็นไปเช่นเดียวกัน

ดังนั้นการที่เราใช้ออร์ธอโกนัลโพลิโนเมียลนั้นเพียงเพื่อทำให้การเพิ่มเทอมที่มี degree สูงขึ้นนั้นเป็นไปได้ง่าย จนกระทั่งเราพบว่าโพลิโนเมียล degree เท่าใดจึงจะเพียงพอกับการแทนข้อมูล และถ้าเราต้องการเพียงหาว่า degree ของโพลิโนเมียลเป็นเท่าใด เราก็หยุดทำได้

เราอาจเขียนแบบจำลองใน (2) ในรูปเมตริกซ์: $Y = X\alpha + e$

โดยที่

$$X = \begin{bmatrix} 1 & P_1(1-(n+1)/2) & \cdots & P_p(1-(n+1)/2) \\ 1 & P_1(2-(n+1)/2) & \cdots & P_p(2-(n+1)/2) \\ \vdots & & \cdots & \vdots \\ 1 & P_1(n-(n+1)/2) & \cdots & P_p(n-(n+1)/2) \end{bmatrix}_{n \times (p+1)}$$

ถ้าเราใช้สัญลักษณ์ $\Sigma P_r P_s$ แทน $\Sigma P_r(i-(n+1)/2)P_s(i-(n+1)/2)$ เราจะได้

$$X'X = \begin{bmatrix} n & \Sigma P_1 & \Sigma P_2 & \ldots & \Sigma P_p \\ \Sigma P_1 & \Sigma P_1^2 & \Sigma P_1P_2 & \ldots & \Sigma P_1P_p \\ & & \ldots & & \\ \Sigma P_p & \Sigma P_pP_1 & \Sigma P_pP_2 & \ldots & \Sigma P_p^2 \end{bmatrix}_{(p+1)\times(p+1)}$$

ดังนั้นเราต้องเลือกสัมประสิทธิ์ a_{ii} ใน (3) เพื่อทำให้ X'X เป็น diagonal เมตริกซ์ สัมประสิทธิ์เหล่านี้มีผู้คำนวณไว้สำหรับ n ที่มีค่าสูงถึง 104(*) ถ้าเราใช้ค่าจากตารางดังกล่าว การคำนวณของเราก็จะง่ายมาก เนื่องจาก

$$X'Y = \begin{bmatrix} \Sigma y_i \\ \Sigma y_iP_1 \\ \vdots \\ \Sigma y_iP_p \end{bmatrix}$$

จาก $X'X\hat{\alpha} = X'Y$

ดังนั้น $$\hat{\alpha} = (X'X)^{-1}X'Y = \begin{bmatrix} (\Sigma y_i)/n \\ \Sigma y_iP_1/\Sigma P_1^2 \\ \Sigma y_iP_2/\Sigma P_2^2 \\ \vdots \\ \Sigma y_iP_p/\Sigma P_p^2 \end{bmatrix}$$

(*) Anderson, R.L. and E.E. Houseman: Table of Orthogonal Polynomials Values Extened to N = 104 , Iowa State Coll. Agri., Exp. Sta. Bul. No. 297, April, 1942.

$R(\alpha_q | \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{q-1}, \alpha_{q+1}, \ldots, \alpha_p) = R(\alpha_q) = (\Sigma y_i P_q)^2 / \Sigma P_q^2$

$Var(\alpha_q) = \sigma^2 / \Sigma P_q^2$

ค่า ΣP_q^2 จะให้ไว้ในตารางที่ให้ค่า P_i ด้วยใน (*)

ปริมาณต่างๆ ที่เราต้องคำนวณคือ Σy_i, Σy_i^2 และ $\Sigma y_i P_q$ $(q = 1, 2, \ldots, p)$

ตัวอย่างที่ 5.4 จากข้อมูลเกี่ยวกับปริมาณน้ำฝนในปีต่าง ๆ ที่ระบุไว้ สมมุติว่าเราต้องการหาโพลิโนเมียลที่ fit กับข้อมูลดังกล่าวคือ

Year	1944	1945	1946	1947	1948	1949
Rainfall	30.2	32.2	35.1	34.2	39.1	41.3

Year	1950	1951	1952	1953	1954	1955
Rainfall	36.1	30.1	30.5	26.1	24.8	28.2

จาก Table of Orthogonal Polynomial Values (*) เราได้ Linear, Quadratic, Cubic และ Quartic polynomial สำหรับ n = 12 การทดสอบในตัวอย่างนี้ใช้ $\alpha = .02$

ตารางที่ 5.11 Polynomial สำหรับ Rainfall Data

year coded	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
y: Rainfall	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	y_{11}	y_{12}	ΣP^2
P_1	-11	-9	-7	-5	-3	-1	1	3	5	7	9	11	572
P_2	55	25	1	-17	-29	-35	-35	-29	-17	1	25	55	12012
P_3	-33	3	21	25	19	7	-7	-19	-25	-21	-3	33	5148
P_4	33	-27	-33	-13	12	28	28	12	-13	-33	-27	33	8008

$\bar{y} = 32.325$, $\Sigma P_1 y_i = -202.30$, $\Sigma P_2 y_i = -1117.5$, $\Sigma P_3 y_i = 445.1$

$\Sigma y_i = 387.9$, $\Sigma y_i^2 = 12815.99$, $\Sigma P_4 y_i = 525.1$

เริ่มต้น fit linear equation: $Y = X\alpha + e$, $p = 2$

$$\hat{\alpha} = (X'X)^{-1}X'Y$$

$$= \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 572 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 387.9 \\ -202.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32.325 \\ -0.3537 \end{bmatrix}$$

$$R(\alpha) = \hat{\alpha}'X'Y$$

$$= [32.325 \quad -0.3537] \begin{bmatrix} 387.9 \\ -202.3 \end{bmatrix}$$

$$= 12538.867 + 71.5535 = 12610.42$$

$$SSE(\text{linear}) = Y'Y - R(\alpha) = 12815.99 - 12610.99 = 205.57$$

$$df = 12 - 2 = 10$$

$$R(\alpha_0) = (\Sigma y_i)^2/n = (387.9)^2/12 = 12538.867$$

$$R(\alpha_1 | \alpha_0) = R(\alpha_1) = 71.5535$$

ต่อไป fit quadratic equation: $Y = X\delta + e$, $p = 3$

$$X'X = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 572 & 0 \\ 0 & 0 & 12012 \end{bmatrix}, \quad X'Y = \begin{bmatrix} 387.9 \\ -202.3 \\ -1117.5 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\delta}_0 = \hat{\alpha}_0 = 32.325$$

$$\hat{\delta}_1 = \hat{\alpha}_1 = -0.3537$$

$$\hat{\delta}_2 = -1117.5/12012 = -0.0930319$$

$$\hat{\delta} = \begin{bmatrix} 32.325 \\ -0.354 \\ -0.093 \end{bmatrix}$$

$$R(\delta_2 | \delta_0, \delta_1) = R(\delta_2) = (-0.0930319)(-1117.5) = 103.963$$
$$= (-1117.5)^2/12012$$

$$R(\delta) = \hat{\delta}'X'Y$$
$$= (32.325)(387.9)+(-0.3537)(-202.30)+(-0.0930319)(-1117.5)$$
$$= 12714.383$$

$SSE(quadratic) = Y'Y - R(\delta) = 101.607$, $df = 12 - 3 = 9$

ต่อไป fit cubic equation แล้ว fit quartic equation (ให้ทำเป็นแบบฝึกหัดในข้อ 5.1) ได้ผลสรุปในตารางที่ 5.12

ตารางที่ 5.12 ANOVA สำหรับ Rainfall Data

SV	df	SS	MS	f_c	Pr
Total	12	12815.99			
Reduction for Mean	1	12538.867			
Linear	1	71.554	71.554	3.48	> 2%
Error for linear	10	205.57	20.557	(n.s.)	
Quadratic	1	103.963	103.963	9.21*	< 2%
Error for quadratic	9	101.607	11.290		
Cubic	1	38.484	38.484	4.88	> 2%
Error for cubic	8	63.123	7.890	(n.s.)	
Quartic	1	34.432	34.432	8.40	> 2%
Error for quartic	7	28.691	4.099	(n.s.)	

SST(corrected) = 12815.99 - 12538.867 = 277.123

ถ้าทดสอบที่ α = 0.02 ตารางที่ 5.12 บอกเราว่า quadratic polynomial: $y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + e$ นั้น fit กับข้อมูลเบื้องต้น และอาจหา $\hat{\beta}$ และ s.e. ของ $\hat{\beta}_i$ ได้ ตามวิธีที่ได้กล่าวมาแล้ว

5.3.5 <u>สรุป</u>

ถ้า x's อยู่ห่างเท่า ๆ กัน และเราต้องการจะหา degree ของโพลิโนเมียลซึ่ง fit กับข้อมูลที่มีอยู่ เราจะกำหนดระดับนัยสำคัญ และใช้วิธีของออร์ธอโกนัลโพลิโนเมียลที่อธิบายในหัวข้อ 5.3 นี้ ทั้งนี้มีข้อแนะนำว่าควรจะมีการไม่ปฏิเสธสมมติฐานติดต่อกันสองครั้ง แล้วเราจึงจะตัดสินว่า degree ควรเป็นเท่าใด ทั้งนี้เพราะถ้า cubic fit กับข้อมูล เทอม linear ก็มักจะมีนัยสำคัญ แต่เทอม quadratic อาจไม่มีนัยสำคัญเลยจริง ๆ แล้ว ถ้าโพลิโนเมียล degree คู่ fit กับข้อมูลแล้ว degree คี่มักจะไม่มีความสำคัญเลย ดังนั้นถ้าเราหยุดเมื่อมีการยอมรับสมมติฐานครั้งแรก เราก็จะพลาดผลที่สำคัญไป

5.4 <u>การทดสอบ Lack of Fit</u>

สมมุติว่า ตัวแปรเชิงสุ่ม y มีลักษณะดังนี้

$$y_{ij} = f(x_i) + e_{ij}\ ,\ i = 1,\ldots,k;\ j = 1,\ldots,m\ ;\ m > 1$$

ต้องการหาแบบจำลองชนิดโพลิโนเมียลที่ fit กับข้อมูล

ถ้าแต่ละค่าของ x_i เราสังเกตค่า y_{ij} มา m ค่า (m > 1) เราจะได้ค่าประมาณแบบไม่เอียงเฉของ σ^2 โดยการใช้

$$\text{MS(pure error)} = \hat{\sigma}^2 = [\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}(y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2]/[k(m-1)]$$

$$= \text{SS(pure error)}/[k(m-1)]$$

$$= [\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}(e_{ij} - \bar{e}_{i.})^2]/[k(m-1)]$$

หมายเหตุ SS(pure error) มีค่าคงที่ตลอดไม่ว่าจะ fit แบบจำลองใด ๆ ส่วน SSE จะเปลี่ยนไปตามแบบจำลองที่ fit

$\{[k(m-1)]\hat{\sigma}^2\}/\sigma^2 \sim \chi^2_{k(m-1)}$ ไม่ว่า f(x) จะเป็นรูปใด

จาก $SSE = Y'Y - \hat{\beta}'X'Y$

$= SS(\text{pure error}) + SS(\text{lack of fit})$

$= SS(p.e.) + SS(lof)$

$= k(m-1)\hat{\sigma}^2 + SS(lof)$

$SS(lof) = SSE - SS(p.e.)$, $\quad df = (n-p)-k(m-1)$

หมายเหตุ การหา SS(p.e.) ในกรณีที่ $i = 1, \ldots, k$

$j = 1, \ldots, n_i$; n_i บางตัวต้อง > 1

$$SS(p.e.) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} (y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2 \text{ , } df = \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1)$$

$$= n - k$$

โดยที่ $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$

ในการ fit linear model
ถ้าแบบจำลองจริง ๆ เป็น linear MS(lof) เป็นค่าประมาณแบบไม่เอียงเฉของ σ^2
ถ้าแบบจำลองไม่เป็น linear MS(lof) จะประมาณ σ^2 เกินจริง (over estimate)
และถ้าแบบจำลองเป็น linear จริง ๆ

$MS(lof)/\hat{\sigma}^2 = MS(lof)/MS(p.e.) \sim F$ distribution

ถ้าเราปฏิเสธสมมติฐาน เราจะใช้ MS(lof) ของ quadratic หารด้วย $\hat{\sigma}^2$ เป็นค่า f_c ในการทดสอบว่าแบบจำลองเป็น quadratic หรือไม่ ทำเช่นนี้ไปจนกว่าจะได้แบบจำลองที่เหมาะสม

ตัวอย่างที่ 5.5 การทดสอบ Lack of fit ของแบบจำลองโพลิโนเมียล

	x	y		x	y
1	6	0.029	10	12	0.425
2	6	0.032	11	12	0.384
3	6	0.027	12	12	0.472
4	8	0.079	13	14	1.130
5	8	0.072	14	14	1.020
6	8	0.088	15	14	1.249
7	10	0.181	16	16	2.812
8	10	0.165	17	16	2.465
9	10	0.201	18	16	3.099

$m = 3,\ k = 6$

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} y_{ij} = 13.93,\quad \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} y_{ij}^2 = 28.137686 = \text{SST(uncorrected)}$$

$$SS(\alpha_0) = n\bar{y}^2 = 10.780272$$

$$SS(p.e.) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{6}\left[\sum_{j=1}^{3} y_{ij}^2 - \left(\sum_{j=1}^{3} y_{ij}\right)^2/3\right]$$

$$i=1;\ \sum_{j=1}^{3} y_{ij}^2 - \left(\sum_{j=1}^{3} y_{ij}\right)^2/3 = (.029^2+.032^2+.027^2)-(.029+.032+.027)^2/3$$

$$= .002594 - .0025813 = .0000127$$ เป็นต้น

$SS(p.e.) = 0.23248,\ df = k(m-1) = 6(3-1) = 12$	ค่านี้คงที่ตลอด ไม่ว่าจะ fit แบบจำลองใด

เริ่ม fit แบบจำลองชนิด linear: $y_i = \alpha_0 + \alpha_1 x_i + e_i$,

$i = 1, \ldots, 18$

$\hat{\alpha}' = [-1.9318 \quad 0.24597]$

ตารางที่ 5.13 ANOVA $H_0: \alpha_1 = 0$ และ H_0: แบบจำลองเป็นแบบ linear

SV	df	SS	MS	f_c
Due to $\alpha_1 \mid \alpha_0$	1	12.705	12.705	$f_1 = 12.705/.29075$
Error	16	4.652	.29075	$= 43.70^{**}$
Lack of fit	4	4.41952	1.10489	$f_2 = 1.10489/.0193733$
Pure error	12	$\boxed{.23248}$	.0193733	$= 57.03^{**}$
Total(corrected)	17	17.357		

$f_{(1,16),.01} = 8.53$ และ $f_{(4,12),.01} = 5.41$

$f_2 > f_{(4,12),.01}$ เราปฏิเสธสมมติฐาน สรุปว่าแบบจำลองไม่เป็น linear

ต่อไป fit แบบจำลองชนิด quadratic: $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + e_i$,

$i = 1, \ldots, 18$

$\hat{\beta}' = [3.1721 \quad -0.78102 \quad 0.046682]$

ตารางที่ 5.14 ANOVA H_o: $\beta_E = 0$ และ H_o: แบบจำลองเป็น quadratic

SV	df	SS	MS	f_c
Due to $\beta_E \mid \beta_o, \beta_1$	1	3.9051	3.9051	$f_1 = 78.43^{**}$
Error	15	.7469	.049793	
Lack of fit	3	.51446	.17149	$f_E = 8.85^{**}$
Pure error	12	$\boxed{.23248}$	.0193733	
Total(corrected)	17	17.357		

$f_{(1,15),.01} = 8.68$ และ $f_{(3,12),.01} = 5.95$

$f_E > f_{(3,12),.01}$ เราปฏิเสธสมมติฐาน สรุปว่าแบบจำลองไม่เป็น quadratic

จากตัวอย่างนี้แบบจำลองที่ fit กับข้อมูลจะไม่เป็นแบบจำลองชนิดโพลิโนเมียล ถ้าทำการตรวจสอบความแปรปรวนของ k (= 6) กลุ่มของค่า y จะไม่เท่ากันหมด ซึ่งทำให้ข้อสมมุติเรื่องความแปรปรวนของทุกกลุ่มต้องไม่แตกต่างกัน (variance homogeneity) ไม่จริง วิธีแก้ทำโดยการหา ln y_i แล้ว fit แบบจำลองเชิงเส้นตรงของ ln y บน x และเมื่อทำการทดสอบ lack of fit ผลปรากฏว่า แบบจำลองเชิงเส้นตรงของ ln y บน x ใช้ได้ การวิเคราะห์ได้แสดงไว้ต่อไปนี้

แบบจำลอง: $\ln y = \beta_o + \beta_1 x + e$

__หมายเหตุ__ $\ln y_i$, i = 1,..., 18 คือ

-3.540,-3.442,-3.612,-2.538,-2.631,-2.430,-1.709,-1.802,-1.604, -0.856,-0.957,-0.751, 0.122, 0.020, 0.222, 1.034, 0.902, 1.131

$$\hat{\beta}_o = -6.2096\ ,\ \hat{\beta}_1 = 0.45117$$

ดังนั้น $\widehat{\ln y} = -6.2096 + 0.45117\ x$

ตารางที่ 5.15 ANOVA

SV	df	SS	MS	f_c
Due to $\beta_1 \mid \beta_0$	1	42.7460	42.7460	f_1 = 4559.57**
Error	16	.1500	.009375	
Lack of fit	4	.02753	.0068825	f_2 = 0.6744 (n.s.)
Pure error	12	.12247	.010206	
Total(corrected)	17	42.896		

SPSS/PC Commands สำหรับตัวอย่างที่ 5.5

```
DATA LIST FREE/X Y.
BEGIN DATA.
6 .029 6 .032 6 .027 8 .079 8 .072 8 .088
10 .181 10 .165 10 .201 12 .425 12 .384 12 .472
14 1.13 14 1.02 14 1.249 16 2.812 16 2.465 16 3.099
END DATA.
COMPUTE X2=X*X.
COMPUTE X3=X2*X.
COMPUTE X4=X2*X2.
COMPUTE LNY=LN(Y).
PLOT PLOT=Y LNY WITH X.
REGRESSION VARIABLES=X X2 X3 X4 Y
          /DEPENDENT=Y
          /METHOD=ENTER X
          /METHOD=ENTER X2
          /METHOD=ENTER X3
          /METHOD=ENTER X4.
REGRESSION VARIABLES=X LNY
          /DEPENDENT=LNY
          /METHOD=ENTER.
```

Output สำหรับตัวอย่างที่ 5.5

```
    18 cases are written to the uncompressed active file.

This procedure was completed at 16:53:07
The raw data or transformation pass is proceeding
    18 cases are written to the uncompressed active file.
PLOT requires 3976 BYTES of workspace for execution.
-------------------------------------------------------------------------------
Page   2                        SPSS/PC+                              1/30/81

* * * * * * * * * * * * * * * * *  P  L  O  T  * * * * * * * * * * * * * * * * *

Data   Information

       18 unweighted cases accepted.

-------------------------------------------------------------------------------
Page   3                        SPSS/PC+                              1/30/81

                     PLOT OF Y WITH X
        +--+----+----+----+----+----+----+----++
    3.75+                                       +
        I                                       I
        I                                       I
        I                                       I
        I                                  1    I
        I                                  1    I
     2.5+                                  1    +
        I                                       I
 Y      I                                       I
        I                                       I
        I                                       I
        I                                       I
    1.25+                            2          +
        I                            1          I
        I                                       I
        I                                       I
        I                       3               I
        I                 3                     I
       0+  3      3                             +
        +--+----+----+----+----+----+----+----++
              7.5      10.5      13.5      16.5
           6        9        12        15

                           X

-------------------------------------------------------------------------------
Page   4                        SPSS/PC+                              1/30/81
18 cases plotted.
```

```
-------------------------------------------------------------------------------
Page    5                        SPSS/PC+                              1/30/81

                         PLOT OF LNY WITH X
          +--+----+----+----+----+----+----+----++
          |                                      |
          |                                      |
          |                                   3  |
          |                                      |
          |                                      |
          |                             1        |
        0+                             2         +
          |                                      |
 L        |                                      |
 N        |                      2               |
 Y        |                      1               |
          |                                      |
  -1.75+                  3                      +
          |                                      |
          |                                      |
          |          2                           |
          |          1                           |
          |                                      |
   -3.5+  3                                      +
          |                                      |
          +--+----+----+----+----+----+----+----++
                7.5       10.5      13.5      16.5
             6         9        12        15

                             X

-------------------------------------------------------------------------------
Page    6                        SPSS/PC+                              1/30/81
18 cases plotted.
-------------------------------------------------------------------------------
Page    7                        SPSS/PC+                              1/30/81

This procedure was completed at 16:53:20
-------------------------------------------------------------------------------
```

Page 8 SPSS/PC+ 1/30/81

**** M U L T I P L E   R E G R E S S I O N ****

Listwise Deletion of Missing Data

Equation Number 1   Dependent Variable.. Y

Beginning Block Number 1. Method: Enter   X

Page 9 SPSS/PC+ 1/30/81

**** M U L T I P L E   R E G R E S S I O N ****

Equation Number 1   Dependent Variable.. Y

Variable(s) Entered on Step Number
1..   X

Multiple R	.85556
R Square	.73199
Adjusted R Square	.71524
Standard Error	.53921

Analysis of Variance

	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regression	1	12.70541	12.70541
Residual	16	4.65201	.29075

F =   43.69869   Signif F = .0000

Page 10 SPSS/PC+ 1/30/81

**** M U L T I P L E   R E G R E S S I O N ****

Equation Number 1   Dependent Variable.. Y

------------------ Variables in the Equation ------------------

Variable	B	SE B	Beta	T	Sig T
X	.24597	.03721	.85556	6.610	.0000
(Constant)	-1.93180	.42858		-4.507	.0004

------------- Variables not in the Equation -------------

Variable	Beta In	Partial	Min Toler	T	Sig T
X2	3.60355	.91621	.01733	8.856	.0000
X3	1.98733	.93932	.05987	10.605	.0000
X4	1.46686	.95572	.11377	12.579	.0000

End Block Number 1 All requested variables entered.

Page 11 SPSS/PC+ 1/30/81

**** M U L T I P L E R E G R E S S I O N ****

Equation Number 1 Dependent Variable.. Y

Beginning Block Number 2. Method: Enter X2

Variable(s) Entered on Step Number
2.. X2

Multiple R	.97825
R Square	.95697
Adjusted R Square	.95123
Standard Error	.22315

Analysis of Variance

	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regression	2	16.61048	8.30524
Residual	15	.74694	.04980

F = 166.78556 Signif F = 0.0

Page 12 SPSS/PC+ 1/30/81

**** M U L T I P L E R E G R E S S I O N ****

Equation Number 1 Dependent Variable.. Y

------------------ Variables in the Equation ------------------

Variable	B	SE B	Beta	T	Sig T
X	-.78102	.11699	-2.71663	-6.676	.0000
X2	.04668	5.27142E-03	3.60355	8.856	.0000
(Constant)	3.17205	.60302		5.260	.0001

```
------------- Variables not in the Equation -------------

Variable      Beta In  Partial  Min Toler        T  Sig T

X3            8.68930   .81579 1.0976E-04    5.278  .0001
X4            3.32054   .82251 4.0208E-04    5.411  .0001


End Block Number   2   All requested variables entered.
-----------------------------------------------------------------------------
Page  13                        SPSS/PC+                              1/30/81

        * * * *   M U L T I P L E   R E G R E S S I O N   * * * *

Equation Number 1    Dependent Variable..   Y

Beginning Block Number  3.  Method:  Enter      X3


End Block Number   3   Tolerance =     .010 Limits reached.
No variables entered for this block.
-----------------------------------------------------------------------------
Page  14                        SPSS/PC+                              1/30/81

        * * * *   M U L T I P L E   R E G R E S S I O N   * * * *

Equation Number 1    Dependent Variable..   Y

Beginning Block Number  4.  Method:  Enter      X4


End Block Number   4   Tolerance =     .010 Limits reached.
No variables entered for this block.
-----------------------------------------------------------------------------
Page  15                        SPSS/PC+                              1/30/81

This procedure was completed at 16:53:40
-----------------------------------------------------------------------------
```

Page 16 SPSS/PC+ 1/30/81

**** M U L T I P L E   R E G R E S S I O N ****

Listwise Deletion of Missing Data

Equation Number 1   Dependent Variable.. LNY

Beginning Block Number 1. Method: Enter

Page 17 SPSS/PC+ 1/30/81

**** M U L T I P L E   R E G R E S S I O N ****

Equation Number 1   Dependent Variable.. LNY

Variable(s) Entered on Step Number
1.. X

Multiple R	.99825
R Square	.99650
Adjusted R Square	.99628
Standard Error	.09687

Analysis of Variance

	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regression	1	42.75239	42.75239
Residual	16	.15014	.00938

F = 4555.99341   Signif F = 0.0

Page 18 SPSS/PC+ 1/30/81

**** M U L T I P L E   R E G R E S S I O N ****

Equation Number 1   Dependent Variable.. LNY

------------------ Variables in the Equation ------------------

Variable	B	SE B	Beta	T	Sig T
X	.45120	6.68466E-03	.99825	67.498	0.0
(Constant)	-6.20998	.07699		-80.655	0.0

End Block Number 1 All requested variables entered.

แบบฝึกหัดบทที่ 5

5.1 จากตัวอย่างที่ 5.4 จง fit cubic และ quartic model กับ Rainfall data เพื่อหาค่าที่แสดงไว้ในตารางที่ 5.12 ซึ่งยังไม่ได้แสดงการหาไว้

5.2 จงแสดงการหาค่า $\hat{\beta}$ ในตัวอย่างที่ 5.3

5.3 เราทราบว่า cubic model นั้น fit กับข้อมูลต่อไปนี้
จงหา 95 % ช่วงความเชื่อมั่นของสัมประสิทธิ์แต่ละตัว คือ β_0, β_1, β_2 และ β_3

y	0.5	3.0	1.6	1.3	0.2	0.5	-.1	1.2
x	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5

5.4 ในการทดลองเกี่ยวกับการสึกกร่อนของโลหะ ได้ข้อมูลดังต่อไปนี้ (กำหนด α =.05)

ความดันไฟฟ้าที่ใช้	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
เปอร์เซนต์การสึกกร่อน	1.10	1.43	2.11	3.12	2.50	2.21	2.50	5.90

(a) จงหา degree ของโพลิโนเมียลที่เหมาะสมกับข้อมูล

(b) จงประมาณค่าของสัมประสิทธิ์ของโพลิโนเมียลในข้อ (a) โดยการใช้วิธีดูลิตเติลอย่างย่อ (วิธีที่อธิบายในบทที่ 4)

หมายเหตุ สำหรับแบบฝึกหัดข้อ 5.3 และ 5.4 ถ้าต้องการใช้วิธีออร์ธอโกนัลโพลิโนเมียล ได้กำหนดตารางแสดงค่าของ P_1-P_5 สำหรับ n = 8 และอีกตารางหนึ่งคือค่า P_1-P_5 สำหรับ n = 10 n=8

i	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	-7	7	-7	7	-7
2	-5	1	5	-13	23
3	-3	-3	7	-3	-17
4	-1	-5	3	9	-15
5	1	-5	-3	9	15
6	3	-3	-7	-3	17
7	5	1	-5	-13	-23
8	7	7	7	7	7
ΣP^2	168	168	264	616	2184

n=10

i	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	1	-4	-12	18	6
2	3	-3	-31	3	11
3	5	-1	-35	-17	1
4	7	2	-14	-22	-14
5	9	6	42	18	6
6	-9	6	-42	18	-6
7	-7	2	14	-22	14
8	-5	-1	35	-17	-1
9	-3	-3	31	3	-11
10	-1	-4	12	18	-6
ΣP^2	330	132	8580	2860	780