บทที่ 1

การแจกแจงแบบปกติ
(Normal Distribution)

หน้า

บทที่ 1
การแจกแจงแบบปกติ
(Normal Distribution)

1.1 การแจกแจงแบบปกติ

1.1.1 ฟังก์ชันหนาแน่นของการแจกแจงแบบปกติ (Normal Probability density function):

ถ้า X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มซึ่งมีการแจกแจงแบบปกติ ที่มีค่าเฉลี่ย $E(X) = \mu$ และความแปรปรวน $Var(X) = \sigma^2$ เราเขียนแทนในรูป $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

แล้วฟังก์ชันหนาแน่นของการแจกแจงแบบปกติของ X คือ

$$f_x(x) = [1/\sigma\sqrt{2\pi}]\ \exp[-(x-\mu)^2/2\sigma^2], \quad -\infty < x < \infty$$

กราฟของ $N(\mu, \sigma^2)$ มีลักษณะดังนี้

1) สมมาตรที่ $x = \mu$
2) ค่าสูงสุดของฟังก์ชันคือ $[1/\sigma\sqrt{2\pi}]$ ที่ $x = \mu$
3) แกน x เป็น horizontal asymptote
4) points of inflection อยู่ที่ $x = \mu \pm \sigma$

จาก Empirical rule: $\Pr[\mu - \sigma < X < \mu + \sigma] = 0.683$

$\Pr[\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma] = 0.954$

$\Pr[\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma] = 0.997$

ทฤษฎีบทที่ 1.1 ถ้าตัวแปรเชิงสุ่ม X มีการแจกแจงแบบปกติ หรือ $N(\mu, \sigma^2)$ โดยที่ $\sigma^2 > 0$ แล้วตัวแปรเชิงสุ่ม $Z = (X - \mu)/\sigma$ จะมีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน (Standard Normal Distribution) หรือ $N(0, 1)$

1.1.2 ฟังก์ชันหนาแน่นของการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน

ถ้า $Z \sim N(0, 1)$ นั่นคือ $E(Z) = 0$ และ $Var(Z) = 1$
แล้วฟังก์ชันหนาแน่นของการแจกแจงแบบปกติมาตรฐานคือ

$$f_z(z) = [1/\sqrt{2\pi}] \exp[-z^2/2], \qquad -\infty < z < \infty$$

ถ้า $Z \sim N(0, 1)$ แล้ว $X = \mu + \sigma Z \sim N(\mu, \sigma^2)$

จากทฤษฎีบทที่ 1.1
ถ้า $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ แล้ว $Z = (X - \mu)/\sigma \sim N(0, 1)$

$$\begin{aligned} Pr[X <= b] &= Pr[(X - \mu)/\sigma <= (b - \mu)/\sigma] \\ &= Pr[Z < (b - \mu)/\sigma] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Pr[a <= X <= b] &= Pr[(a - \mu)/\sigma <= (X - \mu)/\sigma <= (b - \mu)/\sigma] \\ &= Pr[(a - \mu)/\sigma < Z < (b - \mu)/\sigma] \end{aligned}$$

1.1.3 คุณสมบัติอื่น ๆ

1) ถ้า $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ แล้ว $Y = a + bX \sim N(a + b\mu, b^2\sigma^2)$

2) ผลบวกของตัวแปรเชิงสุ่มแบบปกติ 2 ตัวที่เป็นอิสระต่อกัน มีการแจกแจงแบบปกติ นั่นคือ ถ้า $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ และ $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ แล้วสำหรับ X และ Y ที่เป็นอิสระต่อกัน

$$X + Y \sim N(\mu, \sigma^2)$$

โดยที่

$$\mu = \mu_1 + \mu_2$$
$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$$
$$\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

3) $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน แล้วผลบวกเชิงเส้น

$$\sum_{i=1}^{n} a_i Y_i = a_1 Y_1 + a_2 Y_2 + \ldots + a_n Y_n$$ มีการแจกแจงแบบปกติด้วย

โดยมี ค่าเฉลี่ย $= \sum_{i=1}^{n} a_i E(Y_i)$

และ ความแปรปรวน $= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \, Var(Y_i)$

4) Y_i, $i = 1, \ldots, n$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน

และ $Y_i \sim N(\mu_i, \sigma^2)$, $i = 1, \ldots, n$

ให้ $Y' = [Y_1 \ \ Y_2 \ \ldots \ Y_n]$

$\mu' = [\mu_1 \ \ \mu_2 \ \ldots \ \mu_n]$

$a' = [a_1 \ \ a_2 \ \ldots \ a_n]$

$$a'Y = \sum_{i=1}^{n} a_i Y_i \sim N(a'\mu, \sigma^2 a'a)$$

1.1.4 การแจกแจงอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องกับการแจกแจงแบบปกติ

1.1.4.1 การแจกแจงแบบไคกำลังสอง (Chi-square Distribution)

ถ้า $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระต่อกันและมีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน แล้ว

$$U = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2$$

จะมีการแจกแจงแบบไคกำลังสอง ที่มีองศาความเป็นอิสระ (degree of freedom) เท่ากับ n และเขียนแทนด้วย χ_n^2

ฟังก์ชันหนาแน่นของตัวแปรเชิงสุ่มไคกำลังสองคือ

$$f_U(u) = \frac{u^{(n-2)/2}\exp(-u/2)}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}, \quad 0 < u < \infty$$

ถ้า $X_1 \sim \chi_n^2$ และ $X_2 \sim \chi_m^2$ เป็นอิสระต่อกัน แล้ว $X_1 + X_2 \sim \chi^2_{n+m}$

หมายเหตุ $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t}\, dt$, $\alpha > 0$, $\Gamma(n+1) = n! = n\Gamma(n)$,

$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$

1.1.4.2 การแจกแจงแบบที (Student's t Distribution)

ถ้า $Z \sim N(0, 1)$ และ $Y \sim \chi_n^2$ Z และ Y เป็นอิสระต่อกัน แล้ว

$$U = [Z/\sqrt{Y/n}]$$

มีการแจกแจงแบบที ที่มีองศาความเป็นอิสระเท่ากับ n และเขียนแทนด้วย t_n

ฟังก์ชันหนาแน่นของการแจกแจงแบบทีคือ

$$f_U(u) = \frac{\Gamma[(n+1)/2]}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma(n/2)[1 + (u^2/n)]^{(n+1)/2}}, \quad -\infty < u < \infty$$

1.1.4.3 การแจกแจงแบบเอฟ (F Distribution)

ถ้า $X \sim \chi_n^2$ และ $Y \sim \chi_m^2$ X และ Y เป็นอิสระต่อกัน

แล้ว $$U = \frac{Y/m}{X/n} = \frac{nY}{mX}$$

มีการแจกแจงแบบเอฟ ที่มีองศาความเป็นอิสระเท่ากับ (m, n)

และเขียนแทนด้วย $F_{(m,n)}$

ฟังก์ชันหนาแน่นของการแจกแจงแบบเอฟคือ

$$f_U(u) = \frac{\Gamma[(m+n)/2](m/n)^{m/2}\, u^{[(m-2)/2]}}{\Gamma(m/2)\,\Gamma(n/2)\,(1 + mu/n)^{(m+n)/2}}, \quad 0 < u < \infty$$

1.1.4.4 <u>ความสัมพันธ์อื่น ๆ ที่ควรทราบ</u>

ถ้า $T \sim t_r$ แล้ว $T^2 \sim F_{(1,\ r)}$

ถ้า $F \sim f_{(m,\ n)}$ แล้ว $1/F \sim F_{(n,\ m)}$

ถ้า $Z \sim N(0,\ 1)$ แล้ว $Z^2 \sim \chi_1^2$

1.1.5 <u>การแจกแจงของค่าเฉลี่ยของตัวอย่าง (Sample mean) และของความแปรปรวนของตัวอย่าง (Sample variance)</u>

ถ้า $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีการแจกแจงแบบปกติ ซึ่งมีค่าเฉลี่ย μ และความแปรปรวน σ^2 และเป็นอิสระต่อกัน แล้ว นั่นคือ $Y_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $i = 1, \ldots, n$

1) $\bar{Y} = (\sum_{i=1}^{n} y_i)/n \sim N(\mu, \sigma^2/n)$

2) $[(n-1)S^2]/\sigma^2 = [\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2]/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-1}$

3) $\bar{Y}$ และ S^2 เป็นอิสระต่อกัน

1.2 การแจกแจงร่วมแบบปกติของตัวแปรเชิงสุ่ม 2 ตัว (Bivariate Normal Distribution)

1.2.1 ฟังก์ชันการแจกแจงร่วมแบบปกติของตัวแปรเชิงสุ่ม 2 ตัว X และ Y

$$f(x,y) = \{1/[2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}]\}\ \exp(-q/2),$$

$$-\infty < x < \infty,\ -\infty < y < \infty$$

โดยที่ ($\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$ และ $-1 < \rho < 1$)

$$q=[1/(1-\rho^2)]\{[(x-\mu_1)/\sigma_1]^2-2\rho[(x-\mu_1)/\sigma_1][(y-\mu_2)/\sigma_2]+[(y-\mu_2)/\sigma_2]^2\}$$

1.2.2 คุณสมบัติของ f(x,y)

a) f(x,y) เป็นฟังก์ชันหนาแน่นร่วมของ X และ Y

นั่นคือ $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\ dx\ dy = 1$

b) ฟังก์ชันหนาแน่นของ X: $X \sim N(\mu_1,\ \sigma_1^2)$

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = [1/\sigma_1\sqrt{2\pi}]\ \exp[-(x-\mu_1)^2/2\sigma_1^2],$$

$$-\infty < x < \infty$$

และ ฟังก์ชันหนาแน่นของ Y: $Y \sim N(\mu_2,\ \sigma_2^2)$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = [1/\sigma_2\sqrt{2\pi}]\ \exp[-(y-\mu_2)^2/2\sigma_2^2],$$

$$-\infty < y < \infty$$

c) ρ คือสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ (correlation coefficient) ของ X และ Y

1.2.3 การแจกแจงเงื่อนไข (Conditional Distribution)

$$f(y|x) = f(x,y)/f(x)$$
$$Y|x \sim N[\mu_2 + \rho(\sigma_2/\sigma_1)(x - \mu_1),\ \sigma_2^2(1 - \rho^2)]$$

$$f(x|y) = f(x,y)/f(y)$$
$$X|y \sim N[\mu_1 + \rho(\sigma_1/\sigma_2)(y - \mu_2),\ \sigma_1^2(1 - \rho^2)]$$

ทฤษฎีบทที่ 1.2 ให้ X และ Y มีการแจกแจงร่วมแบบปกติ ที่มีค่าเฉลี่ย μ_1 และ μ_2 และความแปรปรวน σ_1^2 และ σ_2^2 และสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ ρ แล้ว X และ Y เป็นอิสระต่อกันก็ต่อเมื่อ $\rho = 0$

1.3 การแจกแจงแบบปกติของตัวแปรพหุ (Multivariate Normal Distribution)

1.3.1 ฟังก์ชันการแจกแจงแบบปกติของตัวแปรพหุ

ถ้า $Y_1, Y_2, \ldots, Y_p$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม p ตัว และถ้า

$Y = [Y_1 \ \ Y_2 \ \ldots \ Y_p]'$ เป็นเวคเตอร์ของตัวแปรเชิงสุ่มเหล่านี้และมีขนาด (p x 1)

มี $E(Y) = \mu = [\mu_1 \ \ \mu_2 \ \ldots \ \mu_p]'$
ซึ่งคือเวคเตอร์ของค่าเฉลี่ย (vector of means)

และ $\quad Var(Y) = V = E[(Y - \mu)(Y - \mu)']$
ซึ่งคือเมตริกซ์ความแปรปรวน-ความแปรปรวนร่วม (Variance-Covariance matrix) ของเวคเตอร์ Y

$$\mathrm{Var}(Y) = V = E[(Y - \mu)(Y - \mu)']$$

$$= E\left\{\begin{bmatrix} Y_1 - \mu_1 \\ Y_2 - \mu_2 \\ \cdots \\ Y_p - \mu_p \end{bmatrix} [Y_1 - \mu_1 \quad Y_2 - \mu_2 \ \ldots \ Y_p - \mu_p]\right\}$$

$$= E\begin{bmatrix} (Y_1-\mu_1)^2 & (Y_1-\mu_1)(Y_2-\mu_2) & \ldots & (Y_1-\mu_1)(Y_p-\mu_p) \\ (Y_1-\mu_1)(Y_2-\mu_2) & (Y_2-\mu_2)^2 & \ldots & (Y_2-\mu_2)(Y_p-\mu_p) \\ & & \ldots & \\ (Y_1-\mu_1)(Y_p-\mu_p) & (Y_2-\mu_2)(Y_p-\mu_p) & \ldots & (Y_p-\mu_p)^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} E(Y_1-\mu_1)^2 & E(Y_1-\mu_1)(Y_2-\mu_2) & \ldots & E(Y_1-\mu_1)(Y_p-\mu_p) \\ E(Y_1-\mu_1)(Y_2-\mu_2) & E(Y_2-\mu_2)^2 & \ldots & E(Y_2-\mu_2)(Y_p-\mu_p) \\ & & \ldots & \\ E(Y_1-\mu_1)(Y_p-\mu_p) & E(Y_2-\mu_2)(Y_p-\mu_p) & \ldots & E(Y_p-\mu_p)^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathrm{Var}(Y_1) & \mathrm{Cov}(Y_1,Y_2) & \ldots & \mathrm{Cov}(Y_1,Y_p) \\ \mathrm{Cov}(Y_1,Y_2) & \mathrm{Var}(Y_2) & \ldots & \mathrm{Cov}(Y_2,Y_p) \\ & & \ldots & \\ \mathrm{Cov}(Y_1,Y_p) & \mathrm{Cov}(Y_2,Y_p) & \ldots & \mathrm{Var}(Y_p) \end{bmatrix}$$

ฟังก์ชันของการแจกแจงแบบปกติของตัวแปรพหุคือ

$Y \sim N_p(\mu, V)$ หรือ $Y \sim MVN(\mu, V)$

(MVN ย่อมาจาก Multivariate Normal)

$$f(y) = f(y_1, y_2, \ldots, y_p)$$

$$= [1/(2\pi)^{p/2}|V|^{1/2}] \exp[(-1/2)(y - \mu)'V^{-1}(y - \mu)] ,$$

$$-\infty < y < \infty$$

1.3.2 ฟังก์ชันของผลบวกเชิงเส้นของตัวแปรเชิงสุ่มซึ่งมีการแจกแจงแบบปกติของตัวแปรพหุ

ถ้าเวคเตอร์ Y มีขนาด (p x 1) และมีสมาชิก Y_i มีการแจกแจงแบบปกติของตัวแปรพหุ ซึ่งมีเวคเตอร์ค่าเฉลี่ย μ และเมตริกซ์ความแปรปรวน-ความแปรปรวนร่วม V

แล้วผลบวกเชิงเส้นของ Y_i นั่นคือ $\sum_{i=1}^{p} a_iY_i$ (โดยที่ a_i เป็นค่าคงที่)

มีการแจกแจงแบบปกติของตัวแปรเดี่ยว (univariate normal)

ที่มีค่าเฉลี่ย $\sum_{i=1}^{p} a_i\mu_i$ และความแปรปรวน $\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} a_ia_jv_{ij}$

โดยที่ v_{ij} คือสมาชิกในแถวที่ i และคอลัมน์ที่ j ของเมตริกซ์ V

ถ้าให้ $a = [a_1 \ \ a_2 \ \ldots \ a_p]'$

$$Z = \sum_{i=1}^{p} a_iY_i = Y'a = a'Y$$

$$Z \sim N(a'\mu, a'Va)$$

1.3.3 **ความเป็นอิสระ (Independence) ของตัวแปรเชิงพหุ**

ทฤษฎีบทที่ 1.3 ถ้าเวคเตอร์ Y มีขนาด (p x 1) และมีสมาชิก Y_i มีการแจกแจงแบบปกติของตัวแปรพหุ ซึ่งมีเวคเตอร์ค่าเฉลี่ย μ และเมตริกซ์ความแปรปรวน-ความแปรปรวนร่วม V แล้ว Y_i จะเป็นอิสระซึ่งกันและกัน ก็ต่อเมื่อความแปรปรวนร่วมของ Y_i และ Y_j (สำหรับทุก $i \neq j$) มีค่าเป็นศูนย์ หรือ นั่นคือ ก็ต่อเมื่อ เมตริกซ์ความแปรปรวน-ความแปรปรวนร่วม V เป็นเมตริกซ์ทแยงมุม (diagonal matrix)

1.3.3.1 **การแจกแจงแบบปกติของตัวแปรพหุที่เป็นอิสระต่อกัน**

ถ้า $Y_i \sim NID(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1,\ldots, p$

(NID ย่อมาจาก Normally Independently Distributed)

ให้ $Y = [Y_1 \quad Y_2 \ldots Y_p]'$

$\mathbf{y} = [y_1 \quad y_2 \ldots y_p]'$

$\mu = [\mu_1 \quad \mu_2 \ldots \mu_p]'$

และ
$$V = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \sigma_p^2 \end{bmatrix}$$

ฟังก์ชันหนาแน่นร่วมของการแจกแจงแบบปกติของตัวแปรพหุที่เป็นอิสระต่อกัน:

$$\mathbf{Y} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{V})$$

$$f(\mathbf{y}) = \{1/[(2\pi)^{p/2}|V|^{1/2}]\} \exp[(-1/2)(\mathbf{y} - \mu)'V^{-1}(\mathbf{y} - \mu)],$$
$$-\infty < y_i < \infty , i = 1,\ldots, p$$

หรือ

$$f(y_1,y_2,\ldots,y_p)=[(1/2\pi)^{p/2}\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_p]\exp\{(-1/2)\sum_{i=1}^{p}[(y_i-\mu_i)/\sigma_i]^2\}$$

$$-\infty < y_i < \infty \text{ , } i = 1,\ldots, p$$

1.3.3.2 การแจกแจงเงื่อนไข

คำจำกัดความ ถ้าเวคเตอร์ Y ซึ่งมีขนาด (p x 1) ประกอบด้วยเวคเตอร์ย่อย $Y_1, Y_2,\ldots, Y_q$ $(q <= p)$

โดยที่ $Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_q \end{bmatrix}$

มีการแจกแจงของตัวแปรพหุ เราจะกล่าวว่าเวคเตอร์ย่อยเหล่านั้นเป็นอิสระต่อกัน ถ้าเราสามารถแยกการแจกแจงร่วมของ Y ออกเป็นผลคูณของการแจกแจงแบบ marginal ของแต่ละ Y_i, $i = 1,\ldots, q$ นั่นคือถ้า

$$f(y) = f_1(y_1)\ f_2(y_2)\ \ldots\ f_q(y_q)$$

โดยที่ $f_1(y_1), f_2(y_2),\ldots, f_q(y_q)$ เป็นการแจกแจงแบบ marginal ของ $Y_1, Y_2,\ldots, Y_q$ ตามลำดับ

ทฤษฎีบทที่ 1.4 ถ้าเวคเตอร์ Y มีขนาด (p x 1) มีการแจกแจงแบบปกติของตัวแปรพหุ ซึ่งมีเวคเตอร์ค่าเฉลี่ย μ และเมตริกซ์ความแปรปรวน-ความแปรปรวนร่วม V และถ้า $Y_1, Y_2,\ldots, Y_q$ เป็นเวคเตอร์ย่อยของ Y ซึ่งทำให้

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_q \end{bmatrix}$$

เงื่อนไขที่สำคัญและเพียงพอที่จะทำให้เวคเตอร์ย่อยเป็นอิสระต่อกันคือ ถ้าเมตริกซ์ย่อย V_{ij} $(i \neq j)$ เป็นเมตริกซ์ศูนย์ (Zero matrix)

ทฤษฎีบทที่ 1.5 ถ้าเวคเตอร์ Y มีขนาด (p x 1) มีการแจกแจงแบบปกติของตัวแปรพหุ ซึ่งมีเวคเตอร์ค่าเฉลี่ย μ และเมตริกซ์ความแปรปรวน-ความแปรปรวนร่วม V และถ้า Y_1, Y_2 เป็นเวคเตอร์ย่อยของ Y ซึ่งทำให้

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}$$

และ ถ้า $Y^* = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2^* \end{bmatrix}$,

$$\mu = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \text{ และ } V = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix}$$

เป็นส่วนที่สอดคล้องกันของ Y^*, μ และ V แล้วการแจกแจงเงื่อนไขของเวคเตอร์ Y_1 ซึ่งมีขนาด (q x 1) กำหนดเวคเตอร์ $Y_2 = Y_2^*$ ให้เป็นการแจกแจงแบบปกติของตัวแปรพหุ ซึ่งมีเวคเตอร์ค่าเฉลี่ย

$$U_1 + V_{12}V_{22}^{-1}(Y_2^* - U_2)$$

และเมตริกซ์ความแปรปรวน-ความแปรปรวนร่วม

$$(V_{11} - V_{12}V_{22}^{-1}V_{21})$$

ทฤษฎีบทที่ 1.6 $E(Y_1 | Y_2^*) = U_1 + V_{12}V_{22}^{-1}(Y_2^* - U_2)$ โดยที่ $E(Y_1 | Y_2^*)$ คือค่าคาดหมายของตัวแปรเชิงสุ่มในการแจกแจงแบบเงื่อนไขของ Y_1 โดยกำหนดให้ $Y_2 = Y_2^*$

ทฤษฎีบทที่ 1.7 เมตริกซ์ความแปรปรวน-ความแปรปรวนร่วมในการแจกแจงแบบเงื่อนไขของ Y_1 โดยกำหนดให้ $Y_2 = Y_2^*$ นั้นไม่ขึ้นกับ Y_2^*

ในการแจกแจงแบบเงื่อนไขของ Y_1 โดยกำหนด Y_2 ให้ เราจะกำหนดสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบ partial $\rho_{ij.rst...p}$ ให้เป็นสหสัมพันธ์ระหว่าง Y_i และ Y_j (ซึ่งอยู่ใน Y_1) ในการแจกแจงแบบเงื่อนไขของ Y_1 โดยกำหนด Y_2 ให้ โดยที่ $Y_r, Y_s, \ldots, Y_p$ อยู่ใน Y_2

ตัวอย่าง เช่น $\rho_{13.567}$ คือสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ระหว่าง Y_1 และ Y_3 ในการแจกแจงแบบเงื่อนไขของ Y_1, Y_2, Y_3 และ Y_4 กำหนด Y_5, Y_6, Y_7

$$\rho_{ij.rst...p} = \frac{\sigma_{ij.rst...p}}{\sigma_{ii.rst...p}\,\sigma_{jj.rst...p}}$$

สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบ partial $\rho_{ij.rst...p}$ แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง Y_i และ Y_j เมื่อให้ตัวแปร Y_r, Y_s, $Y_t, \ldots, Y_p$ เป็นค่าคงที่

ทฤษฎีบทที่ 1.8 $\sigma_{11.23...p} <= \sigma_{11}$

คำจำกัดความ สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบ multiple ρ_1 คือความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรเชิงสุ่ม 2 ตัว Y_1 และ Z โดยที่

$$Z = V_{12}V_{22}^{-1}(Y_2 - U_2)$$

ทฤษฎีบทที่ 1.9 สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบ multiple ρ_1 สอดคล้องกับอสมการ

$0 <= \rho_1^2 <= 1$

ทฤษฎีบทที่ 1.10 ถ้า $\sigma_{12} = \sigma_{13} = \ldots = \sigma_{1p} = 0$ แล้ว $\sigma_{11} = \sigma_{11.23...p}$

ทฤษฎีบทที่ 1.11 ถ้า $\sigma_{12} = \sigma_{13} = \ldots = \sigma_{1p} = 0$ แล้ว กำลังสองของสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบ multiple มีค่าเท่ากับศูนย์ นั่นคือ $\rho_1^2 = 0$

ทฤษฎีบทที่ 1.12 ถ้า $\sigma_{13} = \sigma_{14} = \ldots = \sigma_{1p} = \sigma_{23} = \sigma_{24} = \ldots = \sigma_{2p} = 0$ แล้วสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบ partial ของ Y_1 และ Y_2 โดยกำหนด $Y_3, Y_4, \ldots, Y_p$ จะเท่ากับสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ของ Y_1 และ Y_2 นั่นคือ $\rho_{12.34\ldots p} = \rho_{12}$

1.3.3.3 การแจกแจงแบบปกติมาตรฐานของตัวแปรพหุ (Multivariate Standard Normal Distribution)

ถ้า $U_1, U_2, \ldots, U_p$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบปกติมาตรฐาน p ตัวซึ่งเป็นอิสระต่อกัน นั่นคือ $U_i \sim NID(0, 1)$, $i = 1, \ldots, p$

ให้ $U = [U_1 \;\; U_2 \; \ldots \; U_p]'$ และ $u = [u_1 \;\; u_2 \; \ldots \; u_p]'$

ฟังก์ชันหนาแน่นร่วมของการแจกแจงแบบปกติมาตรฐานของตัวแปรพหุ p ตัวซึ่งเป็นอิสระต่อกัน:

$U \sim N_p(0, I_p)$ นั่นคือ $E(U) = 0$ และ $Var(U) = E(UU') = I_p$

$$f(u) = f(u_1, u_2, \ldots, u_p)$$
$$= [1/2\pi]^{p/2} \exp[(-1/2)(u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_p^2)]$$
$$= [1/2\pi]^{p/2} \exp[(-1/2)(u'u)] , \qquad -\infty < u_i < \infty ,$$
$$i = 1, \ldots, p$$

หมายเหตุ

$$u'u = \sum_{i=1}^{p} u_i^2$$

$$Var(U) = E(UU') = E\begin{bmatrix} U_1^2 & U_1U_2 & \ldots & U_1U_p \\ U_2U_1 & U_2^2 & \ldots & U_2U_p \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ U_pU_1 & U_pU_2 & \ldots & U_p^2 \end{bmatrix}_{p \times p}$$

$$
Var(U) = \begin{bmatrix} E(U_1^2) & E(U_1U_2) & \dots & E(U_1U_p) \\ E(U_2U_1) & E(U_2^2) & \dots & E(U_2U_p) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ E(U_pU_1) & E(U_pU_2) & \dots & E(U_p^2) \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} Var(U_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Var(U_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & Var(U_p) \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = I_p
$$

ถ้า $U \sim N_p(0,\ I_p)$ และ $X = [X_1\ \ X_2\ \dots\ X_p]'$
แล้วถ้า $X = \mu + AU$

$X \sim N_p(\mu,\ \Sigma)$ โดยที่ A เป็นเมตริกซ์ขนาด (p x p)

และ $\Sigma = AA'$