เฉลยแบบฝึกหัดบทที่ 3

3.1 นักทดลองมีเหตุผลทางทฤษฎีที่จะเชื่อได้ว่า ในการเก็บไอสกรีมที่อุณหภูมิต่ำ น้ำหนักเฉลี่ยที่สูญหายไปคือ $E(y) = L$ ของไอสกรีม (ในที่บรรจุขนาด 1 ไพท์) มีความสัมพันธ์เป็นแบบเชิงเส้นกับเวลาที่ใช้เก็บ ดังนั้นเขาจึงใช้แบบจำลองเชิงเส้น

$$L = E(y) = \beta_1 t$$

ในการแสดงความสัมพันธ์ของน้ำหนักเฉลี่ยที่สูญหายไปกับเวลาที่ใช้เก็บ เขาทราบว่ามีปัจจัยอื่น ๆ อีกนอกจากเวลาที่จะมีอิทธิพลต่อน้ำหนักเฉลี่ยที่สูญหายไป เราสมมุติว่าปัจจัยดังกล่าวเป็นความคลาดเคลื่อนสุ่ม ดังนั้นเราอาจเขียนแบบจำลองดังนี้

$$y = \beta_1 t + e$$

เพื่อประมาณค่า β_1 เขาได้ทำการทดลองโดย หาน้ำหนักที่สูญหายไปของไอสกรีมในระยะเวลา ต่างๆ ผลแสดงในตารางต่อไปนี้

t_i (สัปดาห์)	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i (กรัม)	0.15	0.21	0.30	0.41	0.49	0.59	0.72	0.83

จงประมาณค่า β_1 และ σ^2

แบบจำลอง: $y = \beta_1 t + e$

แบบจำลองในรูปเมตริกซ์: $Y = X\beta + e$

โดยที่

$$Y = \begin{bmatrix} 0.15 \\ 0.21 \\ \vdots \\ 0.83 \end{bmatrix}, \; X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 8 \end{bmatrix}, \; \beta = \beta_1, \; e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_8 \end{bmatrix}$$

$$X'X = \sum_{i=1}^{8} t_i^2 = 204, \quad (X'X)^{-1} = 1/204$$

$$X'Y = \sum_{i=1}^{8} t_i y_i = 20.78$$

ดังนั้น $\hat{\beta} = \hat{\beta}_1 = (X'X)^{-1}X'Y = (1/204)20.78 = 0.1019$

$$\hat{\sigma}^2 = [1/(n-p)](Y'Y - \hat{\beta}'X'Y)$$

$$Y'Y = \sum_{i=1}^{8} y_i^2 = 2.1202$$

$$\hat{\beta}'X'Y = (0.1019)(20.78) = 2.1175$$

ดังนั้น $\hat{\sigma}^2 = (1/7)(2.1175) = 0.3025$

3.2 จงหา $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, $\hat{\beta}_3$, $\hat{\sigma}^2$ และ $\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 + 2\hat{\beta}_3$ สำหรับข้อมูลข้างล่าง สมมุติว่าแบบจำลองเชิงเส้น $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{1i} + \beta_3 x_{2i} + e_i$ เป็นไปตามค่าจำกัดความที่ 3.1

y	1	5	0	4	4	-1
x_1	1	2	1	3	3	3
x_2	1	1	2	1	2	3

แบบจำลอง: $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{1i} + \beta_3 x_{2i} + e_i$, $i = 1,\ldots, 6$

แบบจำลองในรูปเมตริกซ์: $Y = X\beta + e$

โดยที่

$$Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix}_{6\text{x}1}, \quad X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ : & : & : \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}_{6\text{x}3}, \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}_{3\text{x}1}, \quad e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ : \\ e_6 \end{bmatrix}_{6\text{x}1}$$

$$X'X = \begin{bmatrix} 6 & 13 & 10 \\ 13 & 33 & 23 \\ 10 & 23 & 20 \end{bmatrix}, \quad (X'X)^{-1} = (1/86)\begin{bmatrix} 131 & -30 & -31 \\ -30 & 20 & -8 \\ -31 & -8 & 29 \end{bmatrix}$$

$$X'Y = \begin{bmatrix} 13 \\ 32 \\ 15 \end{bmatrix}, \quad \hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y = \begin{bmatrix} 3.32 \\ 1.51 \\ -2.60 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $\hat{\beta}_1 = 3.32,\ \hat{\beta}_2 = 1.51,\ \hat{\beta}_3 = -2.60$

$\hat{\sigma}^2 = [1/(n-p)](Y'Y - \hat{\beta}'X'Y)$

$Y'Y = 59,\ \hat{\beta}'X'Y = 51.31$

ดังนั้น $\hat{\sigma}^2 = [1/(6-3)](59 - 51.31) = 2.56$

และ $\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 + 2\hat{\beta}_3 = r'\hat{\beta} = [1 \quad -1 \quad 2]\begin{bmatrix} 3.23 \\ 1.51 \\ -2.60 \end{bmatrix} = -3.48$

3.3 ถ้า $X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

จงหา $X'X$, $(X'X)^{-1}$, $X(X'X)^{-1}$, $X(X'X)^{-1}X'$, และ $I - X(X'X)^{-1}X'$

$$X'X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 12 \\ 12 & 12 \end{bmatrix}$$

$$(X'X)^{-1} = \{1/[14(12)-12(12)]\}\begin{bmatrix} 12 & -12 \\ -12 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 7/12 \end{bmatrix}$$

$$X(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 7/12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.667 \\ 0 & 0.167 \\ 0.5 & -0.333 \end{bmatrix}$$

$$X(X'X)^{-1}X' = \begin{bmatrix} 1 & 0.667 \\ 0 & 0.167 \\ 0.5 & -0.333 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2.334 & 3.334 & 4.334 \\ 0.334 & 0.334 & 0.334 \\ -0.166 & 0.334 & 0.834 \end{bmatrix}$$

$$I - X(X'X)^{-1}X' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2.334 & 3.334 & 4.334 \\ 0.334 & 0.334 & 0.334 \\ -0.166 & 0.334 & 0.834 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1.334 & -3.334 & -4.334 \\ -0.334 & 0.666 & -0.334 \\ 0.166 & -0.334 & 0.166 \end{bmatrix}$$

3.4 ในแบบจำลอง $Y = X\beta + e$ โดยที่ $n = 10$ และ $p = 3$
ถ้า $Y'Y = 58$ และ กำหนด Normal equations ให้ดังนี้

$$3\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 - 2\hat{\beta}_3 = 1$$
$$\hat{\beta}_1 + 2\hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3 = 7$$
$$-2\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 + 4\hat{\beta}_3 = 9$$

a) จงหา $\hat{\beta}$

b) จงหา $R(\beta) = \hat{\beta}'X'Y$

c) จงหาช่วงความเชื่อมั่นของ σ^2, β_1, β_2, β_3 และ $\beta_1 - \beta_2$

d) จงหา $R(\gamma_1)$ โดยที่ $\gamma_1 = \beta_1$

e) จงหา $R(\gamma_2 | \gamma_1)$ โดยที่ $\gamma_2' = [\beta_2 \quad \beta_3]$

$$\left.\begin{aligned} 3\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 - 2\hat{\beta}_3 &= 1 \\ \hat{\beta}_1 + 2\hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3 &= 7 \\ -2\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 + 4\hat{\beta}_3 &= 9 \end{aligned}\right\} \text{---->} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\text{---->}\ X'X\hat{\beta} = X'Y$$

$$X'X = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix},\ C = (X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 7/5 & -6/5 & 1 \\ -6/5 & 8/5 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $c_{11} = 7/5,\ c_{22} = 8/5,\ c_{33} = 1$

(a) $$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y = \begin{bmatrix} 7/5 & -6/5 & 1 \\ -6/5 & 8/5 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(b) $$R(\beta) = \hat{\beta}'X'Y = [2 \quad 1 \quad 3] \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix} = 36$$

(c) $\hat{\sigma}^2 = (58 - 36)/(10 - 3) = 22/7 = 3.1429$

Confidence limits ของ σ^2 คือ

$$\hat{\sigma}^2(n-p)/\chi^2_{n-p,\alpha/2}\ ,\ \hat{\sigma}^2(n-p)/\chi^2_{n-p,1-\alpha/2}$$

$$= 22/\chi^2_{n-p,\alpha/2}\ ,\ 22/\chi^2_{n-p,1-\alpha/2}$$

Confidence limits ของ β_1 คือ $\hat{\beta}_1 \pm t_{n-p,\alpha/2}\,(c_{11}\hat{\sigma}^2)^{(1/2)}$

$$= 2 \pm t_{7,\alpha/2}\,[(7/5)(22/7)]^{(1/2)}$$

$$= 2 \pm t_{7,\alpha/2}\,(2.9076)$$

Confidence limits ของ β_2 คือ $\hat{\beta}_2 \pm t_{n-p,\alpha/2}\,(c_{22}\hat{\sigma}^2)^{(1/2)}$

$$= 1 \pm t_{7,\alpha/2}\,[(8/5)(22/7)]^{(1/2)}$$

$$= 1 \pm t_{7,\alpha/2}\,(2.2424)$$

Confidence limits ของ β_3 คือ $\hat{\beta}_3 \pm t_{n-p,\alpha/2}\,(c_{33}\hat{\sigma}^2)^{(1/2)}$

$$= 3 \pm t_{7,\alpha/2}\,[1(22/7)]^{(1/2)}$$

$$= 3 \pm t_{7,\alpha/2}\,(1.7728)$$

Confidence limits ของ $\beta_1 - \beta_2 = [1 \quad -1 \quad 0]\beta = r'\beta$ คือ

$$r'\hat{\beta} \pm t_{n-p,\alpha/2}\,(r'(X'X)^{-1}r\,\hat{\sigma}^2)^{(1/2)}$$

$$r'\hat{\beta} = [1 \quad -1 \quad 0]\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = 1$$

$$r'(X'X)^{-1}r = [1 \quad -1 \quad 0]\begin{bmatrix} 7/5 & -6/5 & 1 \\ -6/5 & 8/5 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 5.4$$

$r'(X'X)^{-1}r\,\hat{\sigma}^2 = 5.4(22/7) = 16.9714$

$(r'(X'X)^{-1}r\,\hat{\sigma}^2)^{(1/2)} = 4.1196$

ดังนั้น Confidence limits ของ $\beta_1 - \beta_2$ คือ $1 \pm t_{7,\alpha/2}(4.1196)$

(d) จากแบบจำลอง $Y = X_1\gamma_1 + X_2\gamma_2 + e$

หา $R(\gamma_1)$ เมื่อ $\gamma_1 = \beta_1$

$$X'X = \begin{bmatrix} X_1' \\ X_2' \end{bmatrix}[X_1 \quad X_2] = \left[\begin{array}{c|c} X_1'X_1 & X_1'X_2 \\ \hline X_2'X_1 & X_2'X_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & -2 \\ \hline 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

$$X'Y = \begin{bmatrix} X_1'Y \\ X_2'Y \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline 7 \\ 9 \end{array}\right]$$

$$\tilde{\gamma}_1 = (X_1'X_1)^{-1}X_1'Y = (1/3)1 = 1/3$$

$$R(\gamma_1) = \tilde{\gamma}_1'X_1'Y = (1/3)1 = 1/3$$

(e) หา $R(\gamma_2 | \gamma_1)$ เมื่อ $\gamma_2' = [\beta_2 \quad \beta_3]$

$$R(\gamma_2 | \gamma_1) = R(\beta) - R(\gamma_1)$$

$$= 36 - (1/3) = 107/3 = 35.6667$$

[$R(\beta)$ จากข้อ (b) และ $R(\gamma_1)$ จากข้อ (d)]

3.5 ในแบบจำลอง $y_j = \beta_0 + \beta_1 x_j + e_j$, $j = 1,\ldots,20$

กำหนด $\Sigma\, y_j^2 = 90$ และ Normal equations

$$20\hat{\beta}_0 + 10\hat{\beta}_1 = 40$$

$$10\hat{\beta}_0 + 6\hat{\beta}_1 = 22$$

จงหา 95% ช่วงความเชื่อมั่นของ E(Y) เมื่อ x = 3

$$Y'Y = \Sigma\, y_j^2 = 90$$

$$\left.\begin{array}{l} 20\hat{\beta}_0 + 10\hat{\beta}_1 = 40 \\ 10\hat{\beta}_0 + 6\hat{\beta}_1 = 22 \end{array}\right\} \text{--->}\ X'X\,\hat{\beta} = X'Y$$

$$\begin{bmatrix} 20 & 10 \\ 10 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 22 \end{bmatrix}$$

$$X'X = \begin{bmatrix} 20 & 10 \\ 10 & 6 \end{bmatrix},\ (X'X)^{-1} = (1/20)\begin{bmatrix} 6 & -10 \\ -10 & 20 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3/10 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $\hat{\beta}' = [1 \quad 2]$

$$\hat{\beta}'X'Y = [1 \quad 2]\begin{bmatrix} 40 \\ 22 \end{bmatrix} = 84$$

$$\hat{\sigma}^2 = (90 - 84)/(20 - 2) = 1/3$$

$x' = [1 \quad 3]$

$$x'\hat{\beta} = [1 \quad 3]\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 7$$

$$x'(X'X)^{-1}x = [1 \quad 3]\begin{bmatrix} 3/10 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = 6.3$$

$$(x'(X'X)^{-1}x\,\hat{\sigma}^2)^{(1/2)} = (6.3/3)^{(1/2)} = 1.4491$$

$$t_{18,.025} = 2.101$$

ดังนั้น 95% ช่วงความเชื่อมั่นของ E(Y) เมื่อ x = 3 คือ $7 \pm 2.101(1.4491$

$= 7 \pm 3.0446$

$= (3.9554, 10.0446)$

3.6 ในแบบจำลอง $Y = X\beta + e$ โดยที่ n = 8 กำหนดค่าต่าง ๆ ในตารางต่อไปนี้

y	X_0	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7
4	1	1	1	1	1	1	1	1
5	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1
3	1	1	1	-1	1	-1	-1	-1
2	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
6	1	-1	1	1	1	-1	1	-1
3	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	1
4	1	-1	1	-1	1	1	-1	1
8	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1

a) จงหา $X'X$

b) จงหา $R(\beta)$, $R(\beta_1 | \beta_0, \beta_2, \ldots, \beta_7)$, $R(\beta_3)$

c) จงแสดงว่า $R(\beta_2, \beta_3 | \beta_0, \beta_1, \beta_4, \ldots, \beta_7) = R(\beta_2) + R(\beta_3)$

d) จงหา reduction due to H_o (adj.)

โดยที่สมมติฐานคือ $H_o: \beta_1 = \beta_2 = \beta_3$

e) จงแสดงว่าไม่สามารถหาค่าประมาณแบบไม่เอียงเฉของ σ^2 ได้

(a)

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}_{8x8}$$

$$X'X = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \ldots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}_{8x8} \text{----> กรณีออร์ธอโกนอล}$$

(b) $Y' = [4 \quad 5 \quad 3 \ \ldots \ 4 \quad 8]$

$(X'Y)' = [35 \quad -7 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad 7 \quad 5 \quad -9]$

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y = \begin{bmatrix} 1/8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \ldots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 35 \\ -7 \\ 1 \\ \vdots \\ -9 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta} = (1/8)\begin{bmatrix} 35 \\ -7 \\ 1 \\ \vdots \\ -9 \end{bmatrix}$$

$R(\beta) = \hat{\beta}'X'Y = 179$

ในแบบจำลอง: $Y = X_1\gamma_1 + X_2\gamma_2 + e$

โดยที่ $\gamma_1 = \beta_1$ และ $\gamma_2' = [\beta_0 \;\; \beta_2 \; \ldots \; \beta_7]$

$R(\beta_1 | \beta_0, \beta_2, \ldots, \beta_7) = R(\beta_1 | \gamma_2) = R(\beta) - R(\gamma_2)$

ต่อไปหา $R(\gamma_2) = \tilde{\gamma}_2'X_2'Y$

จาก Restricted model: $Y = \gamma_2 X_2 + e$ (เมื่อให้ $\gamma_1 = \beta_1 = 0$

$$\tilde{\gamma}_2 = (X_2'X_2)^{-1}X_2'Y$$

โดยที่ X_2 คือเมตริกซ์ X ที่ตัดคอลัมน์ที่ 2 (คอลัมน์ X_1) ออกแล้ว

$$X_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} X_0 & X_2 & X_3 & X_4 & X_5 & X_6 & X_7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}_{8\text{x}7} \end{array}$$

$$X_2'X_2 = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \cdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}_{7\text{x}7}$$

$$(X_2'X_2)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \cdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/8 \end{bmatrix}$$

$$X_2'Y = \begin{bmatrix} 35 \\ 1 \\ 1 \\ : \\ -9 \end{bmatrix}, \qquad \tilde{\gamma}_2 = (1/8)\begin{bmatrix} 35 \\ 1 \\ 1 \\ : \\ -9 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $R(\gamma_2) = \tilde{\gamma}_2'X_2'Y = (1/8)[35 \quad 1 \quad 1 \ \ldots \ -9]\begin{bmatrix} 35 \\ 1 \\ 1 \\ : \\ -9 \end{bmatrix}$

$$= 1383/8 = 172.875$$

ดังนั้น $R(\beta_1 \mid \beta_0, \beta_2, \ldots, \beta_7) = R(\beta_1 \mid \gamma_2) = R(\beta) - R(\gamma_2)$

$$= 179 - 172.875 = 6.125$$

หา $R(\beta_3)$ โดยแทนค่า $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_4, \ldots, \beta_7$ ให้เท่ากับ 0 ใน Normal equations

$\tilde{\beta}_3 = (X_3'X_3)^{-1}X_3'Y = (1/8)(1) = 1/8$

X_3 คือคอลัมน์ที่ 4 (คอลัมน์ X_3) ของเมตริกซ์ X

ดังนั้น $R(\beta_3) = \tilde{\beta}_3'X_3'Y = (1/8)(1) = 1/8 = 0.125$

(c) แสดงว่า $R(\beta_2, \beta_3 \mid \beta_0, \beta_1, \beta_4, \ldots, \beta_7) = R(\beta_2) + R(\beta_3)$

$\gamma_1' = [\beta_2 \quad \beta_3]$, $\gamma_2' = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \beta_4 \ \ldots \ \beta_7]$

หา $R(\gamma_2) = \tilde{\gamma}_2'X_2'Y$

ในที่นี้ X_2 คือเมตริกซ์ X ที่ตัดคอลัมน์ที่ 3 (คอลัมน์ X_2) และคอลัมน์ที่ 4 (คอลัมน์ X_3) ออกแล้ว

$$X_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} X_0 & X_1 & X_4 & X_5 & X_6 & X_7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}_{8\text{x}6} \end{array}$$

$$X_2'X_2 = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}_{6\text{x}6}$$

$$(X_2'X_2)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/8 \end{bmatrix}$$

$$X_2'Y = \begin{bmatrix} 35 \\ -7 \\ -1 \\ 7 \\ 5 \\ -9 \end{bmatrix}_{6\text{x}1} , \quad \tilde{\gamma}_2 = (1/8)\begin{bmatrix} 35 \\ -7 \\ -1 \\ 7 \\ 5 \\ -9 \end{bmatrix}$$

$$R(\gamma_2) = \tilde{\gamma}_2'X_2'Y = (1/8)[35\ -7\ -1\ \ldots\ -9]\begin{bmatrix} 35 \\ -7 \\ -1 \\ \vdots \\ -9 \end{bmatrix}$$

$$= 1430/8 = 178.75$$

ดังนั้น $R(\beta_2, \beta_3 | \gamma_2) = R(\beta) - R(\gamma_2) = 179 - 178.75 = 0.25$ ...(1)

ต่อไปหา $R(\beta_2)$

ให้ X_2 คือคอลัมน์ที่ 3 (คอลัมน์ X_4) ของ X

$$\tilde{\beta}_2 = (X_2'X_2)^{-1}X_2'Y = 1/8 = 1/8$$

$$R(\beta_2) = \tilde{\beta}_2'X_2'Y = (1/8)(1) = 1/8 = 0.125$$

$R(\beta_2) + R(\beta_3) = (1/8) + (1/8) = 2/8 = 0.25$ ...(2)

[$R(\beta_3)$ จากข้อ (b)]

(1) = (2)

แสดงว่า $R(\beta_2, \beta_3 | \beta_0, \beta_1, \beta_4, \ldots, \beta_7) = R(\beta_2) + R(\beta_3)$

(d) $H_0: \beta_1 = \beta_2 = \beta_3$ หรือ $H_0: \beta_1 = \beta_2$ และ $\beta_2 = \beta_3$

หรือ $H_0: \beta_1 - \beta_2 = \beta_2 - \beta_3 = 0$

$r = 2$, $\lambda_1' = [0\ \ 1\ \ -1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0]$, $\lambda_1'\beta = \beta_1 - \beta_2$

$\lambda_2' = [0\ \ 0\ \ 1\ \ -1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0]$, $\lambda_2'\beta = \beta_2 - \beta_3$

ถ้า $H_0: \beta_1 = \beta_2 = \beta_3$ จริง เราได้

Restricted model: $y = \beta_0 + \beta_3(x_1 + x_2 + x_3) + \beta_4x_4 + \beta_5x_5 + \beta_6x_6 + \beta_7x_7 + e$

หรือ $y = \beta_0 + \beta_3T + \beta_4x_4 + \ldots + \beta_7x_7 + e$

โดยที่ $T = x_1 + x_2 + x_3$

หรือ $Y = Z_2\alpha_2 + e$

โดยที่ $\alpha_2' = [\beta_0 \quad \beta_3 \quad \ldots \quad \beta_7]$

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccc} X_1 & T & X_4 & X_5 & X_6 & X_7 \end{array} \\
Z_2 = & \begin{bmatrix}
1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\
1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\
1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\
1 & -3 & 1 & 1 & -1 & 1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1
\end{bmatrix}_{8x6}
\end{array}
$$

$$
Z_2'Z_2 = \begin{bmatrix}
8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\
 & & \cdots & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8
\end{bmatrix}_{6x6}
$$

$$
(Z_2'Z_2)^{-1} = \begin{bmatrix}
1/8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1/24 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1/8 & 0 & 0 & 0 \\
 & & \cdots & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/8
\end{bmatrix}
$$

$$(Z_2'Y)' = [35 \quad -5 \quad -1 \quad 7 \quad 5 \quad -9]$$

$$\tilde{\alpha}_2 = (Z_2'Z_2)^{-1}Z_2'Y$$

$$= \begin{bmatrix} 1/8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/24 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 & 0 & 0 & 0 \\ & & \cdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 35 \\ -5 \\ -1 \\ \vdots \\ -9 \end{bmatrix}$$

$$= (1/8) \begin{bmatrix} 35 \\ -5/3 \\ -1 \\ \vdots \\ -9 \end{bmatrix}$$

$$R(\alpha_2) = \tilde{\alpha}_2'Z_2'Y = 173.6667$$

$$R(\alpha_1 | \alpha_2) = R(\beta) - R(\alpha_2) = 179 - 173.6667 = 5.3333$$

(e) จากสูตร $\hat{\sigma}^2 = [1/(n-p)](Y'Y - \hat{\beta}'X'Y)$

แต่ n-p = 8-8 = 0 นั่นแสดงว่าไม่สามารถหาค่าประมาณแบบไม่เอียงเลของ σ^2 ได้