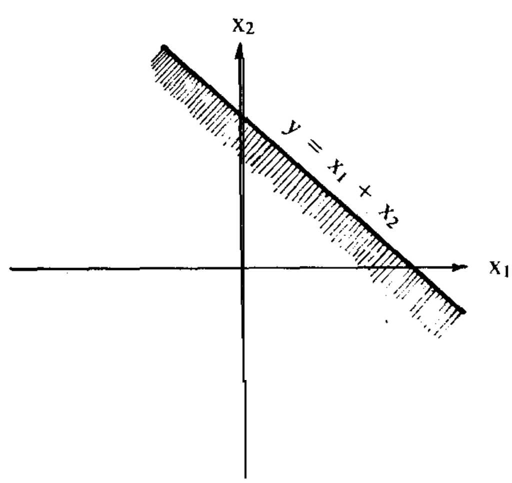
บทที่ 5
การรวมของตัวแปรเชิงสุ่ม

การรวมของตัวแปรเชิงสุ่ม

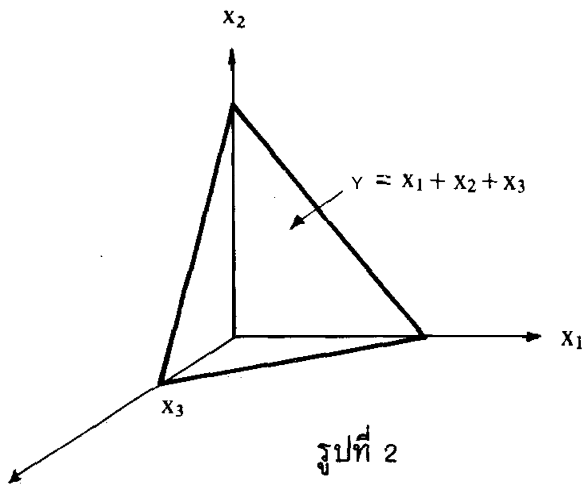
ในบทนี้มีความสัมพันธ์เกี่ยวกับการรวมของตัวแปรเชิงสุ่ม ดังเช่น กำหนดให้กลุ่มหนึ่งของตัวแปรเชิงสุ่ม $X_1, X_2, \ldots$ และ X_n ซึ่งเราต้องการให้มีความเกี่ยวข้องกับตัวแปรเชิงสุ่มของ Y กับ Z เราสามารถทำได้โดยใช้สมการ $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ กับ $Z = \sum_{i=1}^{n} a_iX_i$ ในเมื่อ a เป็นค่าคงที่สำหรับความหมายเมื่อไรเราเขียน $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ กับ $Z = a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n$ จะได้อธิบายรายละเอียดในหัวข้อต่อไปนี้ ในปัญหาของเราในที่นี้ คือต้องการหาการแจกแจงของการรวมของตัวแปรเชิงสุ่มโดยการกำหนดการแจกแจงร่วมของตัวแปรเหล่านั้นกับปัญหาการแสดงบางโมเมนต์ของตัวแปรเชิงสุ่มในเทอมของโมเมนต์กับโมเมนต์ของผลคูณของการแจกแจงร่วมของตัวแปร

วิธีการหา pdf ของผลรวมของสองตัวแปรเชิงสุ่ม ความน่าจะเป็น $F(y)$ ที่ $Y = X_1 + X_2$ จะมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ y สามารถคำนวณหาได้โดยตรงด้วยการ integrating pdf ร่วมของ X_1 กับ X_2 ตลอดพื้นที่แรเงาของรูปที่ 1 แล้ว pdf ของ Y ก็สามารถหาได้ $f(y) = F'(y)$



รูปที่ 1

ในกรณีสามตัวแปรเชิงสุ่ม ความน่าจะเป็น $F(y)$ ที่ $Y = X_1 + X_2 + X_3$ จะมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ y สามารถหาได้โดยตรงจากการ integrating pdf ร่วมของ X_1, X_2 และ X_3 ตลอดสามเขตมิติซึ่งวางต่ำกว่าระนาบดังแสดงรูปที่ 2 pdf ของ Y ก็หาได้โดย differentiation ในกรณี n ตัวแปรเชิงสุ่ม กระบวนการทั่ว ๆ ไปก็เหมือนกัน แต่เขตทั้งหมดซึ่งเราต้อง integrate pdf ร่วมไม่สามารถเขียนรูปได้เมื่อ $n > 3$



รูปที่ 2

สำหรับตัวอย่าง ให้เราพิจารณาตัวแปรเชิงสุ่ม X_1 กับ X_2 มี pdf ร่วมเป็น

$$f(x_1, x_2) = 6e^{-3x_1-2x_2}, \quad x_1 > 0, x_2 > 0$$
$$= 0 \quad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ}$$

ถ้าหากว่าเรา integrate pdf ร่วมตลอดพื้นที่แรเงา ดังรูปที่ 1 เราได้

$$F(y) = P(Y \leqslant y) = P(X_1 + X_2 \leqslant y) = P(X_1 \leqslant y - x_2)$$

$$= \int_0^y \int_0^{y-x_2} 6e^{-3x_1-2x_2}\, dx_1 dx_2 = \int_0^y 2e^{-2x_2} \left(-e^{-3x_1}\Big|_0^{y-x_2}\right) dx_2$$

$$= \int_0^y 2e^{-2x_2} (1 - e^{-3(y-x_2)})\, dx_2 = \int_0^y 2e^{-2x_2} - 2e^{-3y+x_2}\, dx_2$$

$$= -e^{-2x_2} - 2e^{-3y+x_2}\Big|_0^y = (-e^{-2y} - 2e^{-3y+y}) + (e^0 + 2e^{-3y})$$

$$= 1 + 2e^{-3y} - 3e^{-2y}$$

สำหรับ $y > 0$ และ $F(y) = 0$ สำหรับ $y \leqslant 0$ และถ้าหากว่าเรา differentiate เทียบกับ y เราได้

$$\begin{aligned} f(y) &= 2e^{-3y}(-3) - 3e^{-2y}(-2) \\ &= 6(e^{-2y} \quad e^{-3y}), \; y > 0 \\ &= 0 \qquad\qquad y \leqslant 0 \end{aligned}$$

5.2 การแปลงตัวแปรเชิงสุ่ม
กรณีตัวแปรไม่ต่อเนื่อง

ให้เรามาศึกษาปัญหาการคำนวณหา pdf ของตัวแปรเชิงสุ่ม Y โดยกำหนด pdf ของตัวแปรเชิงสุ่ม X และความสัมพันธ์ของรูป $Y = u(X)$ ระหว่างค่า X กับค่าของ Y ในกรณีที่ตัวแปรไม่ต่อเนื่องก็ไม่มีปัญหาเท่าไรนัก เพียงต้องแทนค่าให้ถูกต้องเท่านั้น อย่างเช่น เรามาพิจารณากรณีต่อไปนี้ให้ X เป็นพัวซอง pdf

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots \\ &= 0 \qquad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ} \end{aligned}$$

ให้ A เป็นพิสัย $A = \{x : x = 0, 1, 2, \ldots\}$ ดังนั้น A เป็นกลุ่มที่ $f(x) > 0$ กำหนดให้ตัวแปรเชิงสุ่มใหม่ Y โดยให้ $Y = 4X$ เราต้องการที่จะหา pdf ของ Y โดยการแปลงตัวแปรให้ $y = 4x$ เราเรียก $y = 4x$ ว่าการแปลงจาก x ไป y หมายความว่าเรา map พิสัย A ไปบนพิสัย $B = \{y : y = 0, 4, 8, 12, \ldots\}$ พิสัย B หาได้โดยการแปลงแต่ละจุดใน A ไปตาม $y = 4x$ สังเกตว่าแต่ละจุดใน A สมนัยจุดต่อจุดเท่านั้นใน B ในทางกลับกันแต่ละจุดใน B สมนัยจุดต่อจุดใน A นั่นคือการแปลง $y = 4x$ เป็นการสมนัยจุดต่อจุดของ A กับ B ฟังก์ชันหนึ่งฟังก์ชันใด $y = u(x)$ (ไม่เพียง $y = 4x$ เท่านั้น) ที่ maps พิสัย A ไปบนพิสัย B เช่นนั้น เป็นการสมนัยจุดต่อจุดระหว่างจุดของ A กับ B เรียกว่าการแปลงจุดต่อจุด

ปัญหาของเราคือว่าหา pdf $g(y)$ ของชนิดไม่ต่อเนื่องของตัวแปรเชิงสุ่ม $Y = 4X$, $g(y) = P(Y = y)$ เพราะว่าเป็นการสมนัยจุดต่อจุดระหว่างจุด A กับ B เหตุการณ์ $Y = y$ หรือ $4X = y$ สามารถเกิดขึ้นก็ต่อเมื่อเหตุการณ์ $X = (1/4)y$ เกิดขึ้น นั่นคือสองเหตุการณ์ equivalent กัน และมีความน่าจะเป็นเหมือนกัน ดังนั้น

$$g(y) = P(Y = y) = P(X = \frac{y}{4}) = \frac{\mu^{y/4} e^{-\mu}}{(y/4)!}, \quad y = 0, 4, 8, \ldots$$

$$= 0 \qquad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ}$$

โดยทั่ว ๆ ไปเราให้ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มชนิดไม่ต่อเนื่องมี pdf $f(x)$ ให้ A เป็นกลุ่มของจุดชนิดไม่ต่อเนื่องที่แต่ละจุดซึ่ง $f(x) > 0$ และให้ $y = u(x)$ กำหนดให้เป็นการแปลงจุดต่อจุดที่ maps จาก A ไปบน B ถ้าหากว่าเราทำ $y = u(x)$ สำหรับ x ในเทอมของ y โดยให้เป็น $x = w(y)$ แล้วสำหรับแต่ละ $y \in B$ เรามี $x = w(y) \in A$ เรามาพิจารณาตัวแปรเชิงสุ่ม $Y = u(X)$ ถ้าหากว่า $y \in B$ แล้ว $x = w(y) \in A$ และเหตุการณ์ $Y = y$ (หรือ $u(X) = Y$) และ $X = w(y)$ equivalent กัน ดังนั้น pdf ของ Y เป็น

$$g(y) = P(Y = y) = P(X = w(y)) = f[w(y)] \qquad y \in B$$

$$= 0 \qquad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ}$$

ตัวอย่าง 1

ให้ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มทวินามมี pdf

$$f(x) = \frac{3!}{x!(3-x)!}\left(\frac{2}{3}\right)^x (1/3)^{3-x}, \quad x = 0, 1, 2, 3$$

$$= 0 \qquad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ}$$

เราต้องการ pdf $g(y)$ ของตัวแปรเชิงสุ่ม $Y = X^2$ การแปลง $y = u(x) = x^2$ เรา map $A = \{x; x = 0, 1, 2, 3\}$ ลงบน $B = \{y; y = 0, 1, 4, 9\}$ โดยทั่ว ๆ ไป $y = x^2$ ไม่เป็นการแปลงจุดต่อจุดอย่างไรก็ตาม ไม่มีค่าเป็นลบใน $A = \{x; x = 0, 1, 2, 3\}$ นั่นคือ เรามี $x = w(y) = \sqrt{y}$ (ไม่ใช่ $-\sqrt{y}$)

$$g(y) = f(\sqrt{y}) = \frac{3!}{(\sqrt{y})!\,(3-\sqrt{y})!}\left(\frac{2}{3}\right)^{\sqrt{y}}(1/3)^{3-\sqrt{y}}, \qquad y = 0, 1, 4, 9$$

$$= 0 \qquad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ}$$

ในกรณีสองตัวแปรเชิงสุ่ม ให้ $f(x_1, x_2)$ เป็น pdf ร่วมของสองตัวแปรเชิงสุ่ม X_1, กับ X_2 ชนิดไม่ต่อเนื่องพร้อมด้วย A เป็นกลุ่มของจุดที่ซึ่ง $f(x_1, x_2) > 0$ ให้ $y_1 = u_1(x_1, x_2)$ กับ $y_2 = u_2(x_1, x_2)$ กำหนดให้เป็นการแปลงจุดต่อจุด ซึ่ง maps A ลงบน B pdf ร่วมของสองตัวแปรเชิงสุ่มใหม่ $Y_1 = u_1(X_1, X_2)$ กับ $Y_2 = u_2(X_1, X_2)$ กำหนดได้

$$g(y_1, y_2) = f[w_1(y_1, y_2), w_2(y_1, y_2)] \qquad (y_1, y_2) \in B$$

$$= 0 \qquad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ}$$

ในเมื่อ $x_1 = w_1(y_1, y_2)$ กับ $x_2 = w_2(y_1, y_2)$ เป็นค่าเดี่ยวกลับของ $y_1 = u_1(x_1, x_2)$ กับ $y_2 = u_2(x_1, x_2)$ จาก pdf ร่วม $g(y_1, y_2)$ เราอาจหา marginal pdf ของ Y_1 โดยการรวมบน y_2 หรือ marginal pdf ของ Y_2 โดยการรวมบน y_1

การเน้นเทคนิคของการแปลงตัวแปรเกี่ยวกับตัวแปรใหม่หลาย ๆ ตัวจากตัวแปรเก่า นั่นคือ สมมติ $f(x_1, x_2, x_3)$ เป็น pdf ร่วมของ X_1, X_2 และ X_3 พร้อมด้วยกลุ่ม A ที่ $f(x_1, x_2, x_3) > 0$ ให้เราหา pdf $Y_1 = u_1(X_1, X_2, X_3)$ เราควรจะกำหนด (ถ้าเป็นไปได้) $Y_2 = u_2(X_1, X_2, X_3)$ และ $Y_3 = u_3(X_1, X_2, X_3)$ ดังนั้น $y_1 = u_1(x_1, x_2, x_3), y_2 = u_2(x_1, x_2, x_3), y_3 = u_3(x_1, x_2, x_3)$ กำหนดได้เป็นการแปลงจุดต่อจุดของ A ลงบน B นี้ ทำให้เราสามารถหา pdf ร่วมของ Y_1, Y_2 และ Y_3 ซึ่งเราควรจะได้ marginal pdf ของ Y_1 โดยการรวมบน y_2 กับ y_3

ตัวอย่าง 2

ให้ X_1 กับ X_2 เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีความอิสระกันซึ่งมีการแจกแจงแบบพัวซอง มีมัชฌิม μ_1 กับ μ_2 ตามลำดับ pdf ร่วมของ X_1 กับ X_2 คือ

$$f(x_1, x_2) = \frac{\mu_1^{x_1}\mu_2^{x_2}e^{-\mu_1-\mu_2}}{x_1!\,x_2!}, \; x_1 = 0, 1, 2, 3, \ldots, x_2 = 0, 1, 2, \ldots$$

$$= 0 \qquad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ}$$

ดังนั้น พิสัย A เป็นกลุ่มของจุด (x_1, x_2) ในเมื่อแต่ละ x_1 กับ x_2 เป็นเลขจำนวนเต็มบวก เราต้องการที่จะหา pdf. ของ $Y_1 = X_1 + X_2$ ถ้าเราใช้วิธีการของการแปลงตัวแปร เราต้องกำหนดตัวแปรเชิงสุ่มที่สอง Y_2 เพราะว่า Y_2 ไม่เป็นที่สนใจของเรา ให้เราเลือก Y_2 ตามวิธีการที่เรามีการแปลงจุดต่อจุดธรรมดา ดังเช่น ให้ $Y_2 = X_2$ แล้ว $y_1 = x_1 + x_2$ และ $y_2 = x_2$ ใช้แทนการแปลงจุดต่อจุดที่ map A ลงบน $B = \{(y_1, y_2);\ y_2 = 0, 1, \ldots, y_1$ และ $y_1 = 0, 1, 2, \ldots\}$

สังเกตว่า ถ้าหากว่า $(y_1, y_2) \in B$ แล้ว $0 \leqslant y_2 \leqslant y_1$ การกำหนด inverse functions โดย $x_1 = y_1 - y_2$ และ $x_2 = y_2$ ดังนั้น pdf ร่วมของ Y_1 กับ Y_2 คือ

$$
\begin{aligned}
g(y_1, y_2) &= \frac{\mu_1^{y_1-y_2}\mu_2^{y_2}e^{-\mu_1-\mu_2}}{(y_1 - y_2)!\, y_2!} \qquad (y_1, y_2) \in B \\
&= 0 \qquad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น marginal pdf ของ Y_1 กำหนดได้โดย

$$
\begin{aligned}
g(y_1) &= \sum_{y_2=0}^{y_1} g(y_1, y_2) = \frac{e^{-\mu_1-\mu_2}}{y_1!}\sum_{y_2=0}^{y_1}\frac{y_1!}{(y_1 - y_2)!\, y_2!}\mu_1^{y_1-y_2}\mu_2^{y_2} \\
&= \frac{(\mu_1 + \mu_2)^{y_1}e^{-\mu_1-\mu_2}}{y_1!}, \qquad y_1 = 0, 1, 2, \ldots \\
&= 0 \qquad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ}
\end{aligned}
$$

นั่นคือ $Y_1 = X_1 + X_2$ มีการแจกแจงแบบพัวซองด้วยพารามิเตอร์ $\mu_1 + \mu_2$

แบบฝึกหัด

1. ให้ X มี pdf $f(x) = \frac{1}{3}$, $x = 1, 2, 3$ ศูนย์สำหรับค่าอื่น ๆ จงหา pdf ของ $Y = 2X + 1$

2. ถ้าหากว่า $f(x_1, x_2) = \left(\frac{2}{3}\right)^{x_1+x_2}(1/3)^{2-x_1-x_2}$, $(x_1, x_2) = (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)$ ศูนย์สำหรับค่าอื่น ๆ เป็น pdf ร่วมของ X_1 กับ X_2 จงหา pdf ร่วมของ $Y_1 = X_1 - X_2$ กับ $Y_2 = X_1 + X_2$

3. ให้ X มี pdf $f(x) = (1/2)^x$, $x = 1, 2, 3 \ldots$, ศูนย์สำหรับค่าอื่น ๆ จงหา pdf ของ $Y = X^3$

4. ให้ X_1 กับ X_2 มี pdf ร่วม $f(x_1, x_2) = x_1x_2/36$, $x_1 = 1, 2, 3$ กับ $x_2 = 1, 2, 3$ ศูนย์สำหรับค่าอื่น ๆ จงหา pdf ของ $Y_1 = X_1X_2$ กับ $Y_2 = X_2$ และแล้วหา marginal pdf ของ Y_1

5. ให้ตัวแปรเชิงสุ่ม X_1 กับ X_2 ที่มีความอิสระกันเป็น $b(n_1, p)$ กับ $b(n_2, p)$ ตามลำดับ จงหา pdf ร่วมของ $Y_1 = X_1 + X_2$ กับ $Y_2 = X_2$ และแล้วหา marginal pdf ของ Y_1 ให้ใช้หลัก

$$\sum_{w=0}^{k} \binom{n_1}{w}\binom{n_2}{k-w} = \binom{n_1 + n_2}{k}$$

ในกรณีตัวแปรชนิดต่อเนื่อง

ในกรณี X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มชนิดต่อเนื่องมี pdf $f(x)$ และ $u(X)$ เป็นฟังก์ชันชนิดต่อเนื่อง ดังนั้น $Y = u(X)$ เป็นตัวแปรชนิดต่อเนื่องและเราต้องการหา pdf ของ Y, $g(y)$

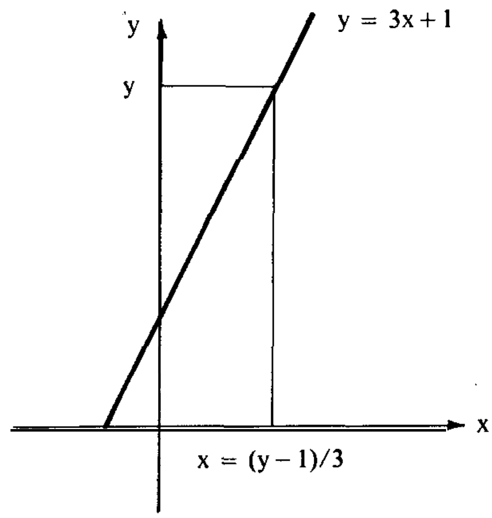
กระบวนการทั่ว ๆ ไปเป็นได้ดังนี้

(ก) หา cdf ของ Y ในเมื่อ $G(y) = P(Y \leqslant y)$ โดยการหาเหตุการณ์ A ในพิสัยของ X ซึ่ง *equivalent* กับเหตุการณ์ $\{Y \leqslant y\}$

(ข) การหาอนุพันธ์ $G(y)$ เทียบกับ y เพื่อหา $g(y)$

(ค) กำหนดค่าเหล่านี้ของ y ในพิสัยของ Y สำหรับ $g(y) > 0$

ตัวอย่าง 3 สมมติว่า X มี pdf, $f(x) = 2x$ ศูนย์สำหรับค่าอื่น ๆ ให้ $Y = 3X + 1$ ดังนั้น เพื่อที่จะหา pdf ของ Y



$$G(y) = P(Y \leqslant y) = P(3X + 1 \leqslant y)$$

$$= P(X \leqslant (y - 1)/3)$$

$$= \int_0^{\frac{(y-1)}{3}} 2x \, dx$$

$$= x^2 \Big|_0^{\frac{(y-1)}{3}} = (y-1)^2/9$$

$$g(y) = G'(y) = \frac{2}{9}(y - 1)$$

เนื่องจากว่า $f(x) > 0$ สำหรับ $0 < x < 1$

ดังนั้น $g(y) > 0$ สำหรับ $1 < y < 4$

เรามีวิธีการอื่น ๆ ที่แตกต่างกันเล็กน้อยในการหาผลลัพธ์อันเดียวกัน

$$G(y) = P(Y \leqslant y) = P\left(X \leqslant \frac{y-1}{3}\right) = F\left(\frac{y-1}{3}\right)$$

ในเมื่อ F เป็น cdf (cumulative density function) ของ X นั่นคือ

$$F(x) = P(X \leqslant x)$$

เพื่อที่จะหาอนุพันธ์ของ G(y) เราใช้ chain rule สำหรับการหาอนุพันธ์ ดังนั้น

$$\frac{d\,G(y)}{dy} = \left(\frac{d\,G(y)}{du}\right)\left(\frac{du}{dy}\right) \text{ ในเมื่อ } u = \frac{y-1}{3}$$

ดังนั้น

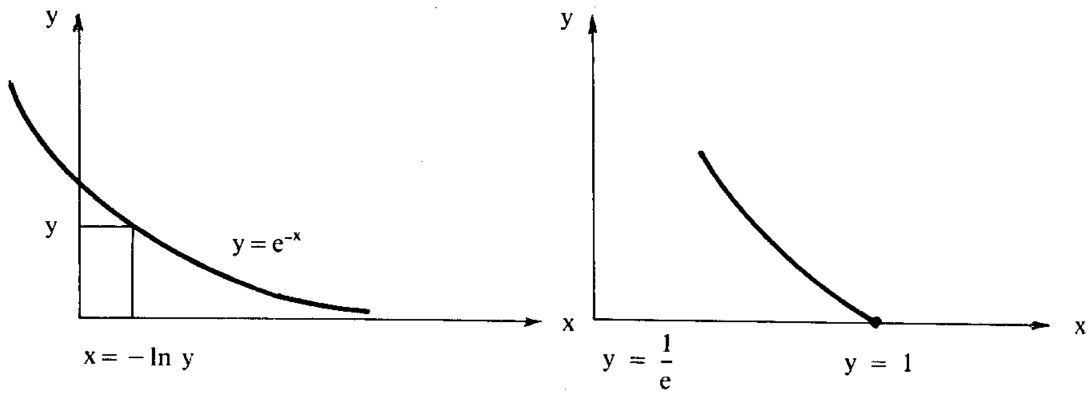
$$G'(y) = F'(u)\cdot\frac{1}{3} = f(u)\cdot\frac{1}{3} = 2\left(\frac{y-1}{3}\right)\cdot\frac{1}{3}$$

เหมือน pdf ของ Y ก่อน ๆ

ตัวอย่าง 4 สมมติว่าตัวแปรเชิงสุ่มชนิดต่อเนื่องมี pdf, $f(x) = 2x, 0 < x < 1$ ศูนย์สำหรับค่าอื่น ๆ ให้ $Y = e^{-X}$ จงหา pdf ของ Y

$$\begin{aligned} G(y) &= P(Y \leqslant y) = P(e^{-X} \leqslant y) \\ &= P(X \geqslant -\ln y) = \int_{-\ln y}^{1} 2x\,dx \\ &= x^2 \Big|_{-\ln y}^{1} = 1 - (-\ln y)^2 \end{aligned}$$

ดังนั้น $g(y) = G'(y) = (-2\ln y)/y$ เนื่องจากว่า $f(x) > 0$ สำหรับ $0 < x < 1$ เราคำนวณได้ว่า $g(y) > 0$ สำหรับ $1/e < y < 1$ (สังเกตว่าเครื่องหมายของ g(y) ถูกต้องเนื่องจากว่า $\ln y < 0$ สำหรับ $1/e < y < 1$)



เราสามารถหาได้อีกแบบหนึ่ง

$$G(y) = P(Y \leqslant y) = P(X \geqslant -\ln y)$$

$$= 1 - P(X < -\ln y) = 1 - F(-\ln y)$$

$$\frac{d\,G(y)}{dy} = \left(\frac{d\,G(y)}{du}\right)\left(\frac{du}{dy}\right) \text{ ในเมื่อ } u = -\ln y$$

$$g(y) = G'(y) = -F'(u)\left(-\frac{1}{y}\right) = -2(-\ln y)\left(-\frac{1}{y}\right)$$

$$\frac{-2\ln y}{y}$$

ตัวอย่าง 5 ให้ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มชนิดต่อเนื่องมี pdf

$$f(x) = 2x \qquad 0 < x < 1$$

$$= 0 \qquad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ}$$

A เป็นพิสัย $\{x; 0 < x < 1\}$ ในเมื่อ $f(x) > 0$ ให้ตัวแปรเชิงสุ่ม $Y = 8X^3$ พิจารณาการแปลง $y = 8x^3$ กลุ่ม A map บนกลุ่ม $B = \{y; 0 < y < 8\}$ การแปลงเป็นจุดต่อจุด สำหรับทุก ๆ $0 < a < b < 8$ เหตุการณ์ $a < y < b$ จะเกิดขึ้นเพราะว่ามีการสมนัยจุดต่อจุดระหว่างจุดของ A กับ B ดังนั้น

$$P(a < Y < b) = P\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{a} < X < \frac{1}{2}\sqrt[3]{b}\right)$$

$$= \int_{\sqrt[3]{a}/2}^{\sqrt[3]{b}/2} 2x\,dx$$

ให้เราเขียน integral นี้เสียใหม่โดยการเปลี่ยนตัวแปรของ integration จาก x เป็น y โดยการเขียน $y = 8x^3$ หรือ $x = \frac{1}{2}\sqrt[3]{y}$, $dx/dy = \frac{1}{6y^{2/3}}$ ดังนั้น เรามี

$$P(a < Y < b) = \int_a^b 2\left(\frac{\sqrt[3]{y}}{2}\right)\left(\frac{1}{6y^{2/3}}\right)dy = \int_a^b \frac{1}{6y^{1/3}}\,dy$$

นี้เป็นจริงสำหรับทุก ๆ $0 < a < b < 8$ pdf $g(y)$ ของ Y เป็น integrand นั่นคือ

$$g(y) = \frac{1}{6y^{1/3}} \qquad 0 < y < 8$$

$$= 0 \qquad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ}$$

การหา $g(y)$ เราต้องการสองสิ่งเท่านั้น

(1) กลุ่ม B ของจุด y ในเมื่อ $g(y) > 0$

(2) integrand ของ integral บน y ที่ซึ่ง $P(a < Y < b)$ เท่านั้น ที่สามารถหาได้โดยกฎธรรมดาสองข้อ

(ก) แปลง $y = 8x^3$ โดยmap $A = \{x; 0 < x < 1\}$ลงบน $B = \{y; 0 < y < 8\}$ และการแปลงเป็นจุดต่อจุด

(ข) หา $g(y)$ บนกลุ่ม B โดยการแทน $\frac{1}{2}\sqrt[3]{y}$ สำหรับ x ใน $f(x)$ และแล้วคูณผลลัพธ์นี้โดย derivative ของ $\frac{1}{2}\sqrt[3]{y}$ นั่นคือ

$$g(y) = f\left(\frac{\sqrt[3]{y}}{2}\right) \frac{d\left[(1/2)\sqrt[3]{y}\right]}{dy} = \frac{1}{6y^{1/3}}, \qquad 0 < y < 8$$

$$= 0 \qquad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ}$$

เรายอมรับทฤษฎีเกี่ยวกับการเปลี่ยนตัวแปรใน integral ที่กำหนดให้ เพื่อทำให้เราสามารถกล่าวผลลัพธ์ทั่ว ๆ ไปได้ ให้ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มชนิดต่อเนื่องมี pdf $f(x)$ ให้ A เป็นพิสัยหนึ่งมิติในเมื่อ $f(x) > 0$ พิจารณาตัวแปรเชิงสุ่ม $Y = u(X)$ ในเมื่อ $y = u(x)$ เป็นการแปลงจุดต่อจุด ซึ่ง map กลุ่ม A ลงบนกลุ่ม B ให้ inverse ของ $y = u(x)$ แสดงได้เป็น $x = w(y)$ และให้ derivative- $dx/dy = w'(y)$ ต่อเนื่องกันและไม่ศูนย์หายไปสำหรับจุด y ทั้งหมดใน B ดังนั้น pdf ของตัวแปรเชิงสุ่ม $Y = u(X)$ กำหนดได้

$$g(y) = f[w(y)]\,|w'(y)| \qquad y \in B$$

$$= 0 \qquad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ}$$

ในเมื่อ $|w'(y)|$ ใช้แทนค่าสมบูรณ์ของ $w'(y)$ ดังตัวอย่างข้างต้น

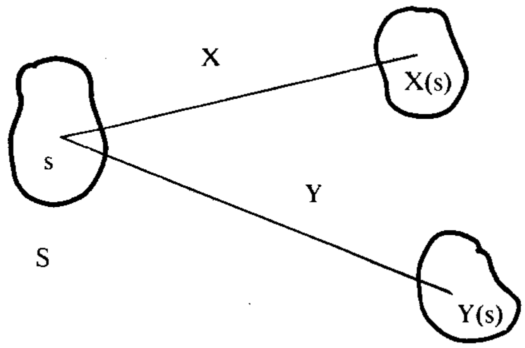
$$\frac{dx}{dy} = w'(y) = \frac{1}{6y^{2/3}}, \qquad 0 < y < 8$$

$$\left| \frac{1}{6y^{2/3}} \right| = \frac{1}{6y^{2/3}} \qquad 0 < y < 8$$

$\frac{dx}{dy} = w'(y)$ เรียกว่า Jacobian แสดงได้ด้วยสัญลักษณ์ J ในทางคณิตศาสตร์ $J = w'(y)$ เป็น Jacobian ของ inverse transformation $x = w(y)$

เรามาพิจารณาขยายฟังก์ชันเป็นสองตัวแปรเชิงสุ่มและฟังก์ชันซึ่งกำหนดให้เป็นการแปลงจุดต่อจุด โดยให้ $y_1 = u_1(x_1, x_2)$ และ $y_2 = u_2(x_1, x_2)$ กำหนดให้เป็นการแปลงจุดต่อจุด ซึ่งกลุ่ม A ในระนาบ x_1x_2 ลงบนกลุ่ม B ในระนาบ y_1y_2 ถ้าหากว่าเราแสดงแต่ละ x_1 กับ x_2 ในเทอมของ y_1 กับ y_2 เราสามารถเขียนได้เป็น $x_1 = w_1(y_1, y_2)$ กับ $x_2 = w_2(y_1, y_2)$ determinant ของ order two เรียกว่า Jacobian ของการแปลง และแสดงด้วยสัญลักษณ์ J และสมมติว่า first-order partial derivatives เหล่านี้ต่อเนื่องกันและ J ไม่เท่ากับศูนย์ใน B

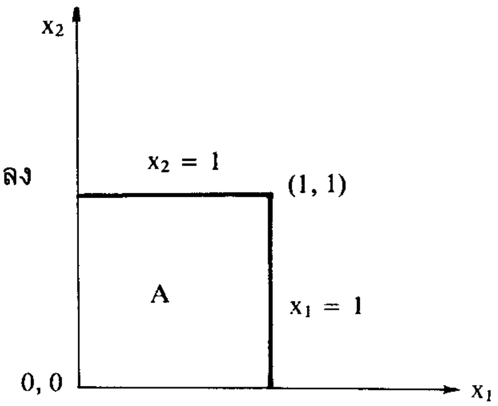
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}$$



ตัวอย่าง 6 ให้ A เป็นกลุ่ม $A = \{(x_1, x_2), 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1\}$ ดังรูปข้างล่าง เราต้องการที่จะคำนวณกลุ่ม B ในระนาบ y_1y_2 ซึ่ง map ภายใต้การแปลงจุดต่อจุด

$$y_1 = u_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

$$y_2 = u_2(x_1, x_2) = x_1 - x_2$$



(ก)

เราต้องการจะคำนวณ Jacobian ของการแปลง

$$x_1 = w_1(y_1, y_2) = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$$

$$x_2 = w_2(y_1\ y_2) = \frac{1}{2}(y_1 - y_2)$$

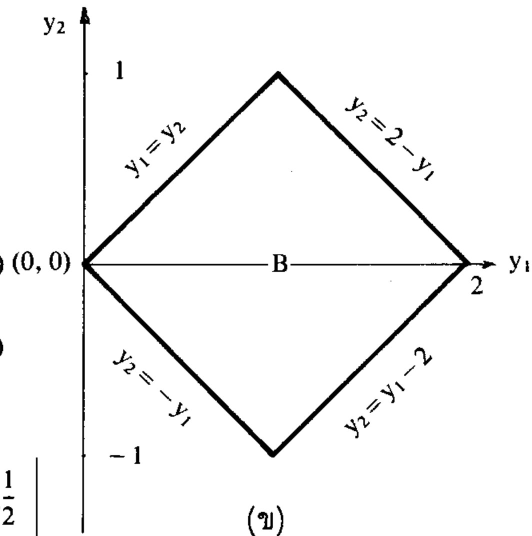
เพื่อที่จะหากลุ่ม B ในระนาบ y_1y_2 ซึ่ง map A มาภายใต้การแปลง สังเกตว่าขอบเขตของ A แปลงเป็นขอบเขตของ B ได้ดังนี้

$$x_1 = 0 \text{ เป็น } 0 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$$

$$x_1 = 1 \text{ เป็น } 1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$$

$$x_2 = 0 \text{ เป็น } 0 = \frac{1}{2}(y_1 - y_2)$$

$$x_2 = 1 \text{ เป็น } 1 = \frac{1}{2}(y_1 - y_2)$$

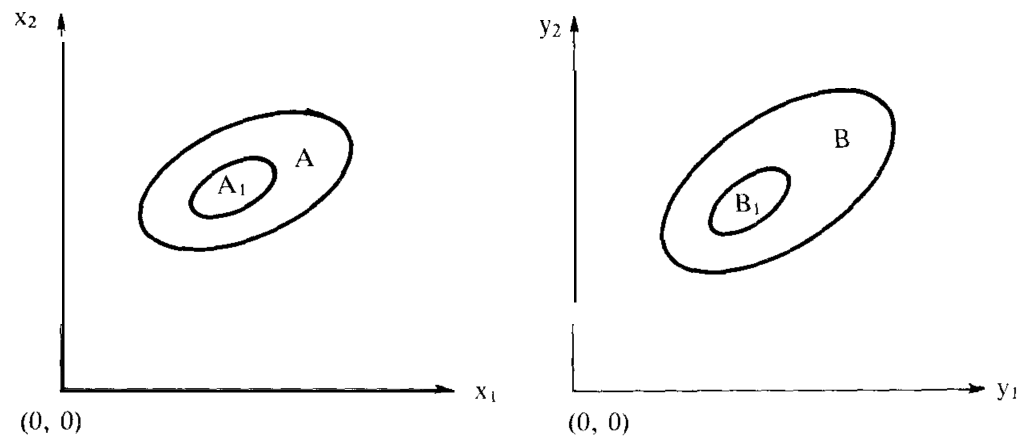


(ข)

ดังนั้น B แสดงได้ดังรูปขวามือ (ข)

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

ขั้นต่อไปเราหา pdf ร่วมของสองฟังก์ชันของสองตัวแปรเชิงสุ่มชนิดต่อเนื่อง ให้ X_1 กับ X_2 เป็นตัวแปรเชิงสุ่มชนิดต่อเนื่องมี pdf ร่วม $f(x_1, x_2)$ ให้ A เป็นกลุ่มสองมิติในระนาบ x_1x_2 เมื่อ $f(x_1, x_2) > 0$ ให้ $Y_1 = u_1(X_1, X_2)$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่ต้องการหา pdf ถ้า $y_1 = u_1(x_1, x_2)$



(ค)

และ $y_2 = u_2(x_1, x_2)$ เป็นการแปลงจุดต่อจุดของ A ลงบนกลุ่ม B ในระนาบ y_1y_2 ให้ A_1 เป็นกลุ่มย่อยของ A และ B_1 เป็นตัว mapping ของ A_1 ภายใต้การแปลงจุดต่อจุด

เหตุการณ์ $(X_1, X_2) \in A_1$ กับ $(Y_1, Y_2) \in B$, equivalent กัน ดังนั้น

$$P[(Y_1, Y_2) \in B_1] = P[(X_1, X_2) \in A_1] = \int_{A_1}\int f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2$$

เราต้องการที่จะเปลี่ยนตัวแปรของ integration โดยการเขียน

$$y_1 = u_1(x_1, x_2),\ y_2 = u_2(x_1, x_2) \text{ หรือ } x_1 = w_1(y_1, y_2),\ x_2 = w_2(y_1, y_2)$$

$$\int_{A_1}\int f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 = \int_{B_1}\int f[w_1(y_1, y_2), w_2(y_1, y_2)]\, |J|\, dy_1 dy_2$$

ดังนั้นสำหรับทุก ๆ กลุ่ม B_1 ใน B

$$P[(Y_1, Y_2) \in B_1] = \int_{B_1}\int f[w_1(y_1, y_2), w_2(y_1, y_2)]\, |J|\, dy_1 dy_2$$

ซึ่งสอดคล้อง pdf ร่วมของ Y_1 กับ Y_2 คือ

$$g(y_1, y_2) = f[w_1(y_1, y_2), w_2(y_1, y_2)]\, |J| \qquad (y_1, y_2) \in B$$

$$= 0 \qquad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ}$$

ด้วยเหตุนี้ marginal pdf $g(y_1)$ ของ Y_1 สามารถหาได้จาก pdf ร่วม $g(y_1, y_2)$ โดยการ integration บน y_2

ตัวอย่าง 7 ให้ตัวแปรเชิงสุ่ม X มี pdf

$$f(x) = 1 \qquad 0 < x < 1$$
$$= 0 \qquad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ}$$

และให้ X_1, X_2 เป็นตัวอย่างสุ่มจากการแจกแจงนี้ pdf ร่วมของ X_1 กับ X_2 คือ

$$f(x_1, x_2) = f(x_1)\, f(x_2) \qquad 0 < x_1 < 1,\ 0 < x_2 < 1$$

ให้สองตัวแปรเชิงสุ่ม $Y_1 = X_1 + X_2$ กับ $Y_2 = X_1 - X_2$ ต้องการหา pdf ร่วมของ Y_1 กับ Y_2 Jacobian ของการแปลง $J = -\frac{1}{2}$ ดังตัวอย่างก่อน ดังนั้น

$$g(y_1, y_2) = f\left[\frac{1}{2}(y_1 + y_2), \frac{1}{2}(y_1 - y_2)\right]|J| = \frac{1}{2}, \qquad (y_1, y_2) \in B$$
$$= 0 \qquad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ}$$

เพราะว่า B ไม่ได้เป็นพิสัยของผลคูณ ตัวแปรสุ่ม Y_1 กับ Y_2 ไม่มีความอิสระกัน marginal pdf ของ Y_1 กำหนดได้โดย

$$g(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y_1, y_2)\, dy_2$$

ให้ดูรูป ข ของตัวอย่างที่ 6 พบว่า

$$g(y_1) = \int_{-y_1}^{y_1} \frac{1}{2}\, dy_2 = y_1 \qquad 0 < y_1 \leqslant 1$$
$$= \int_{y_1-2}^{2-y_1} \frac{1}{2}\, dy_2 = 2 - y_1 \qquad 1 < y_1 < 2$$
$$= 0 \qquad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ}$$

ในทำนองเดียวกัน marginal pdf $g(y_2)$ กำหนดได้

$$g(y_2) = \int_{-y_2}^{y_2+2} \frac{1}{2}\, dy_1 = y_2 + 1 \qquad -1 < y_2 \leqslant 0$$
$$= \int_{y_2}^{2-y_2} \frac{1}{2}\, dy_1 = 1 - y_2 \qquad 0 < y_2 < 1$$
$$= 0 \qquad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ}$$

ตัวอย่าง 8 ให้ X_1, X_2 เป็นตัวอย่างสุ่มขนาด 2 จากการแจกแจงมี pdf

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-x} \qquad 0 < x < \infty \\ &= 0 \qquad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ} \end{aligned}$$

ให้ $Y_1 = X_1 + X_2$ กับ $Y_2 = X_1/(X_1 + X_2)$ ต้องการที่จะแสดงว่า Y_1 กับ Y_2 มีความอิสระกัน

เนื่องจากว่า pdf ร่วมของ X_1 กับ X_2 คือ

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= f(x_1)\, f(x_2) = e^{-x_1-x_2} \quad , \quad 0 < x_1 < \infty, 0 < x_2 < \infty \\ &= 0 \qquad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ} \end{aligned}$$

พิสัย A อยู่ใน quadrant แรกของระนาบ x_1x_2

$$y_1 = u_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \qquad\qquad x_1 = y_1y_2$$

$$y_2 = u_2(x_1, x_2) = \frac{x_1}{x_1 + x_2} \qquad\qquad x_2 = y_1(1 - y_2)$$

$$J = \begin{vmatrix} y_2 & y_1 \\ 1-y_2 & -y_1 \end{vmatrix} = -y_1 \neq 0$$

$$B = \{(y_1, y_2);\ 0 < y_1 < \infty, 0 < y_2 < 1\} \text{ ในระนาบ } y_1y_2$$

pdf ร่วมของ Y_1 กับ Y_2 เป็น

$$\begin{aligned} g(y_1, y_2) &= y_1 e^{-y_1} \qquad .0 < y_1 < \infty,\ 0 < y_2 < 1 \\ &= 0 \qquad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(y_1) &= \int_0^1 y_1\, e^{-y_1}\, dy_2 = y_1\, e^{-y_1} \qquad 0 < y_1 < \infty \\ &= 0 \qquad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ} \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} g(y_2) &= \int_0^\infty y_1\, e^{-y_1}\, dy_1 = \Gamma(2) = 1 \qquad 0 < y_2 < 1 \\ &= 0 \qquad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ} \end{aligned}$$

∴ ตัวแปรเชิงสุ่ม Y_1 กับ Y_2 มีความอิสระกัน นั่นคือ

$$g(y_1, y_2) = g(y_1)\, g(y_2)$$

ตัวอย่าง 9 ให้ $Y_1 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)$ ในเมื่อ X_1 กับ X_2 เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่อิสระกัน แต่ละ X_i เป็น $\chi^2(2)$ pdf ร่วมของ X_1 กับ X_2 คือ

$$\begin{aligned} f(x_1)\, f(x_2) &= \left(\frac{1}{2} e^{\frac{-x_1}{2}}\right)\left(\frac{1}{2} e^{\frac{-x_2}{2}}\right), \ 0 < x_1 < \infty,\ 0 < x_2 < \infty \\ &= 0 \qquad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ} \end{aligned}$$

ให้ $Y_2 = X_2$ ดังนั้น $y_1 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)$, $y_2 = x_2$ หรือ $x_1 = 2y_1 + y_2$, $x_2 = y_2$ เป็นการแปลงจุดต่อจุดจาก $A = \{(x_1, x_2): 0 < x_1 < \infty, 0 < x_2 < \infty\}$ ลงบน $B = \{(y_1, y_2); -2y_1 < y_2$ และ $0 < y_2, -\infty < y_1 < \infty\}$, Jacobian ของการแปลงคือ

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

ดังนั้น pdf ร่วมของ Y_1 กับ Y_2 คือ

$$\begin{aligned} g(y_1, y_2) &= \frac{1}{4} e^{-y_1-y_2} |2| \qquad (y_1, y_2) \in B \\ &= 0 \qquad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ} \end{aligned}$$

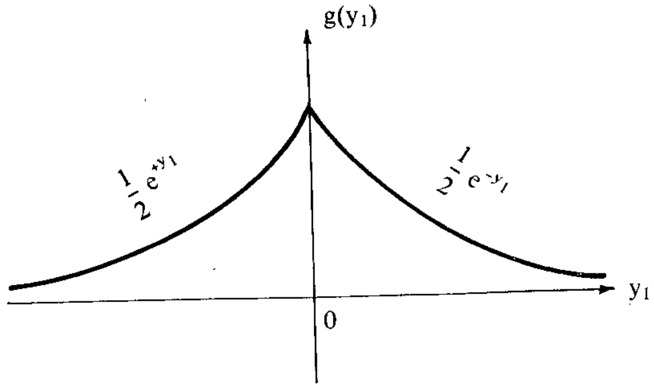
$$\begin{aligned} g(y_1) &= \int_{-2y_1}^{\infty} \frac{1}{2} e^{-y_1-y_2}\, dy_2 = \frac{1}{2} e^{y_1} \qquad -\infty < y_1 < 0 \\ &= \int_{0}^{\infty} \frac{1}{2} e^{-y_1-y_2}\, dy_2 = \frac{1}{2} e^{-y_1} \qquad 0 \leqslant y_1 < \infty \end{aligned}$$

หรือ

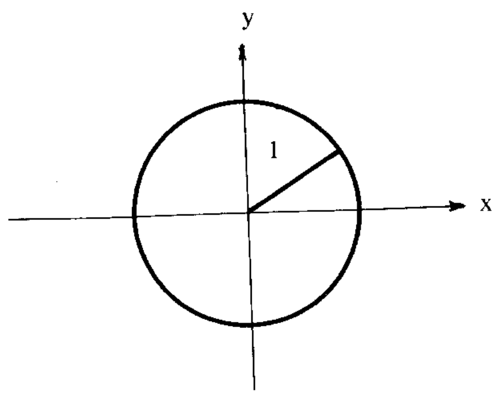
$$g(y_1) = \frac{1}{2} e^{-|y_1|} \qquad -\infty < y_1 < \infty$$

$= 0$ สำหรับค่าอื่น ๆ

เรียกว่า Laplace's first law of probability



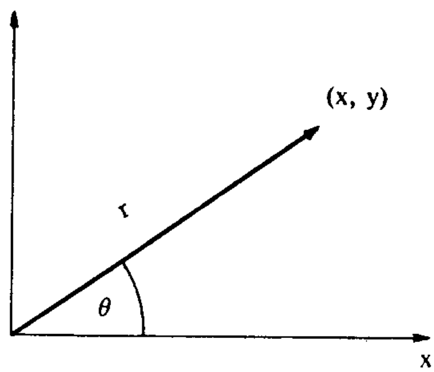
ตัวอย่าง 10 สมมติว่าเรากำลังมุ่งไปสู่ที่เป้าวงกลมหนึ่งมีรัศมีหนึ่งจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดของ rectangular coordinate system สมมติว่า coordinates (X, Y) ของจุด มีการแจกแจงสม่ำเสมอตลอดวงกลม นั่นคือ



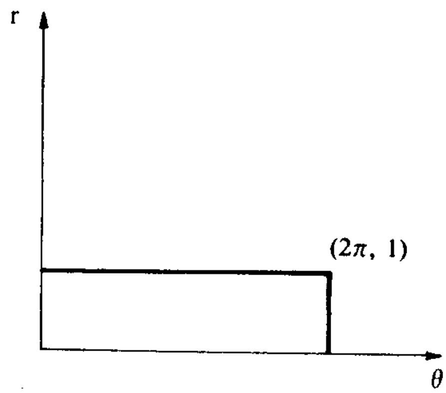
(ก)

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi} \quad \text{ถ้าหากว่า } (x, y) \text{ วางอยู่ภายในวงกลม}$$

$= 0$ สำหรับค่าอื่น ๆ



(ข)



(ค)

เราสนใจตัวแปร R ใช้แทนระยะทางจากจุดกำเนิดนั้น $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ เราต้องการหา pdf ของ R โดยให้ $X = R \operatorname{Cos} \theta$, $Y = R \operatorname{Sin} \theta$

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \operatorname{Cos} \theta & -r \operatorname{Sin} \theta \\ \operatorname{Sin} \theta & r \operatorname{Cos} \theta \end{vmatrix}$$

$$= r \operatorname{Cos}^2 \theta + r \operatorname{Sin}^2 \theta = r$$

$$g(r, \theta) = \frac{r}{\pi} \qquad 0 \leqslant r \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

$$g(r) = \int_0^{2\pi} g(r, \theta)\, d\theta = 2r \qquad 0 \leqslant r \leqslant 1$$

ทฤษฎี ให้ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มชนิดต่อเนื่องมี pdf f(x) และ cdf F(x) แล้วตัวแปรเชิงสุ่ม Z = F(x) จะมีการแจกแจงแบบสม่ำเสมอพร้อมด้วย pdf

$$\begin{aligned} h(z) &= 1 \qquad 0 < z < 1 \\ &= 0 \qquad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ} \end{aligned}$$

พิสูจน์

เราพิสูจน์ทฤษฎีภายใต้สมมติฐานว่า pdf มีค่ามากกว่าศูนย์และต่อเนื่องมี $a < x < b$ และศูนย์สำหรับค่าอื่น ๆ ฟังก์ชันการแจกแจงของ X อาจเขียนได้

$$\begin{aligned} F(x) &= 0 && x \leqslant a \\ &= \int_a^x f(\omega)d\omega && a < x < b \\ &= 1 && x \geqslant b \end{aligned}$$

ให้ $Z = F(x)$ และ map กลุ่ม $\{x; a < x < b\}$ ลงบนกลุ่ม $\{z; 0 < z < 1\}$ เนื่องจากว่า $z = F(x)$ ดังนั้น $x = F^{-1}(z)$

$$\frac{dz}{dx} = F'(x) = f(x) \text{ ดังนั้น } \frac{dx}{dz} = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{f(F^{-1}(z))}$$

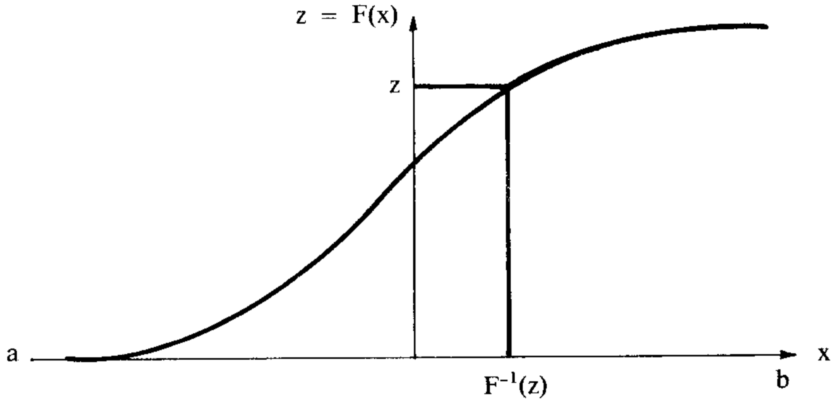
$$\begin{aligned} h(z) &= f(F^{-1}(z)) \left| \frac{dx}{dz} \right| \\ &= f(F^{-1}(z)) \frac{1}{f(F^{-1}(z))} \\ &= 1 \qquad 0 < z < 1 \\ &= 0 \qquad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ} \end{aligned}$$

หรือเราอาจพิสูจน์โดยใช้ cdf ได้

$$
\begin{aligned}
H(z) &= P(Z \leqslant z) = P(F(x) \leqslant z) \\
&= P(X \leqslant F^{-1}(z)) \\
&= F(F^{-1}(z)) = F(x) \\
&= z
\end{aligned}
$$

ดังนั้น pdf ของ Z, $h(z) = H'(z) = 1 \qquad 0 < z < 1$

$= 0$ สำหรับค่าอื่น ๆ



ข้อสังเกต 1. ถ้าหากว่า $F(x) = 0$ สำหรับ $x < a$ กำหนดให้ $F^{-1}(0) = a$ ในทำนองเดียวกัน ถ้าหากว่า $F(x) = 1$ สำหรับ $x > b$ กำหนดให้ $F^{-1}(1) = b$

2. ค่าของตัวแปรเชิงสุ่ม Z สังเกตจริง ๆ ได้อย่างไร เราสังเกตค่าของตัวแปรเชิงสุ่ม X ให้เป็น x แล้วคำนวณค่าของ $Z = F(X)$ ให้ $Z = F(x)$ ที่ F เป็น cdf ของ X

3. ทฤษฎีที่ได้กล่าวข้างต้นและพิสูจน์สำหรับตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่อง แต่สำหรับไม่ต่อเนื่องก็มีผลด้วย ต้องเปลี่ยนเล็กน้อยในการพิสูจน์เนื่องจากว่า cdf ของตัวแปรเชิงสุ่มไม่ต่อเนื่องเป็น step function และไม่มี inverse อันเดียวเท่านั้น

ทฤษฎี ให้ (X, Y) เป็นสองตัวแปรเชิงสุ่มชนิดต่อเนื่องและสมมติว่า X กับ Y มีความอิสระกัน

ดังนั้น pdf f(x, y) อาจเขียนได้เป็น f(x, y) = g(x) h(y) ให้ W = XY แล้ว pdf ของ W กำหนดได้โดย

$$f(w) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)\, h\left(\frac{w}{u}\right) \left|\frac{1}{u}\right| du$$

พิสูจน์

ให้ w = xy และ u = x ดังนั้น x = u และ y = $\frac{w}{u}$ Jacobian คือ

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{w}{u^2} & \frac{1}{u} \end{vmatrix} = \frac{1}{u}$$

ดังนั้น pdf ร่วมของ W = XY กับ U = X คือ

$$f(w, u) = g(u)\, h\left(\frac{w}{u}\right) \left|\frac{1}{u}\right|$$

marginal pdf ของ W หาได้โดยการ integration f(w, u) เทียบกับ u ให้ผลลัพธ์ที่ต้องการ ค่าของ w สำหรับซึ่ง f(w) > 0 ขึ้นอยู่กับค่าของ (x, y) สำหรับซึ่ง f(x, y) > 0

หมายเหตุ ในการหา integral ข้างต้น เราอาจใช้หลักความจริงว่า

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(u)\, h\left(\frac{w}{u}\right) \left|\frac{1}{u}\right| du = \int_{0}^{\infty} g(u)\, h\left(\frac{w}{u}\right) \frac{1}{u}\, du + \int_{-\infty}^{0} g(u)\, h\left(\frac{w}{u}\right) \frac{1}{u}\, du$$

ตัวอย่าง 11 สมมติว่าเรามีวงจรหนึ่งที่ซึ่งกระแส I กับความต้านทาน R แปรไปตามวิธีการสุ่มบางอย่าง โดยเฉพาะสมมติว่า I กับ R เป็นตัวแปรเชิงสุ่มอิสระกันมี pdf

$I : g(i) = 2i \quad 0 \leq i \leq 1$ และ 0 สำหรับค่าอื่น ๆ

$R : h(r) = r^2/9 \quad 0 \leq r \leq 3$ และ 0 สำหรับค่าอื่น ๆ

ตัวแปรเชิงสุ่ม E = IR (แรงดันในวงจร) ให้ f(e) เป็น pdf ของ E โดยทฤษฎี เรามี

$$f(e) = \int_{-\infty}^{\infty} g(i)\, h\left(\frac{e}{i}\right) \left|\frac{1}{i}\right| di$$

ค่า $g(i)$ กับ $h\left(\frac{e}{i}\right)$ ไม่เท่ากับศูนย์และเราพบว่าเงื่อนไขต่อไปนี้ต้องสอดคล้องกับ

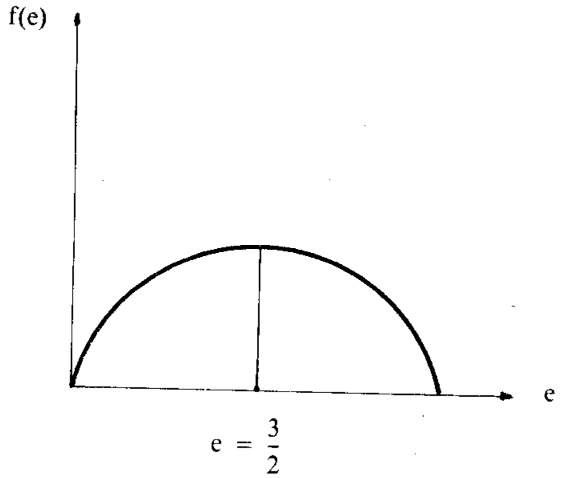
$0 \leqslant i \leqslant 1$ และ $0 \leqslant \frac{e}{i} \leqslant 3$

สอง inequalities นี้ equivalent กันกับ $e/3 \leqslant i \leqslant 1$ ดังนั้น integral ข้างต้นก็กลายเป็น

$$f(e) = \int_{e/3}^{1} (2i)\left(\frac{e^2}{9i^2}\right)\frac{1}{i}\, di$$

$$= -\frac{2}{9}e^2\frac{1}{i}\Big|_{e/3}^{1} = \frac{2}{9}e(3 - e) \qquad 0 \leqslant e \leqslant 3$$

$$= 0 \qquad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ}$$



ทฤษฎี ให้ (X, Y) เป็นสองตัวแปรเชิงสุ่มชนิดต่อเนื่องและสมมติว่า X กับ Y มีความอิสระกัน (pdf ของ (X, Y) อาจเขียนได้เป็น $f(x, y) = g(x)\, h(y)$) ให้ $Z = X/Y$ แล้ว pdf ของ Z กำหนดได้โดย

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} g(vz)\, h(v)\, |v|\, dv$$

พิสูจน์

ให้ $z = x/y$ และให้ $v = y$ ดังนั้น $x = vz$ และ $y = v$, Jacobian คือ

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v & z \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = v$$

ดังนั้น pdf ร่วมของ $Z = X/Y$ กับ $V = Y$ เท่ากับ

$$f(z, v) = g(vz)\, h(v)\, |v|$$

Integrating pdf ร่วมนี้เทียบกับ v ให้ marginal pdf ของ z ที่ต้องการ

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} g(vz)\, h(v)\, |v|\, dv$$

ตัวอย่าง 12 ให้ X กับ Y ใช้แทนอายุของสองหลอดไฟผลิตโดยกระบวนการต่างกัน สมมติว่า X กับ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มอิสระกันมี pdf เป็น

$$g(x) = e^{-x}, \quad x \geqslant 0 \qquad \text{และ 0 สำหรับค่าอื่น ๆ}$$
$$h(y) = 2e^{-2y}, \quad y \geqslant 0 \qquad \text{และ 0 สำหรับค่าอื่น ๆ}$$

ตัวแปรเชิงสุ่ม $Z = X/Y$ ใช้แทนอัตราของอายุ ให้ $f(z)$ เป็น pdf ของ Z

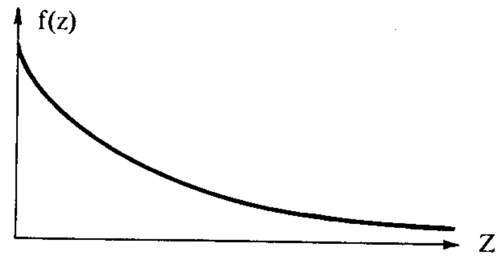
$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} g(vz)\, h(v)\, |v|\, dv$$

ในเมื่อ $f(z, v) = e^{-vz}\, 2e^{-2v}\, v$

$$f(z) = \int_{0}^{\infty} e^{-vz}\, 2e^{-2v}\, v\, dv = 2\int_{0}^{\infty} v e^{-v(2+z)}\, dv$$

ใช้ integration by parts ได้

$$f(z) = \frac{2}{(z+2)^2}, \quad z \geqslant 0$$



ทฤษฎี สมมติว่า X กับ Y เป็นสองตัวแปรเชิงสุ่มที่อิสระกัน มี pdf $g(x)$ กับ $h(y)$ ตามลำดับ ให้ $Z = X + Y$ และ pdf ของ Z แสดงได้เป็น $f(z)$ แล้ว

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} g(w)\, h(z - w)\, dw$$

พิสูจน์

เนื่องจากว่า X กับ Y มีความอิสระกันมี pdf ร่วม

$$f(x, y) = g(x)\, h(y)$$

พิจารณาการแปลง $z = x + y, \ w = x$
ดังนั้น $x = w$ และ $y = z - w$, Jacobian ของการแปลงนี้ คือ

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

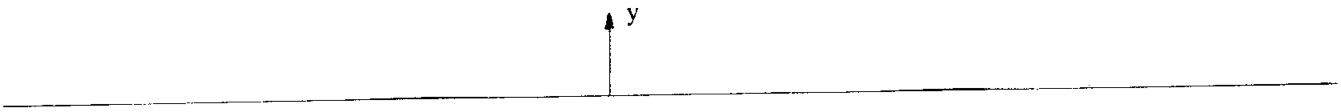
ค่าสมบูรณ์ของ J คือ 1 และ pdf ร่วมของ $Z = X + Y$ กับ $W = X$ คือ

$$f(z, w) = g(w)\, h(z - w)$$

pdf ของ Z หาได้โดยการ integrating $f(z, w)$ จาก $-\infty$ ถึง $+\infty$ เทียบกับ w

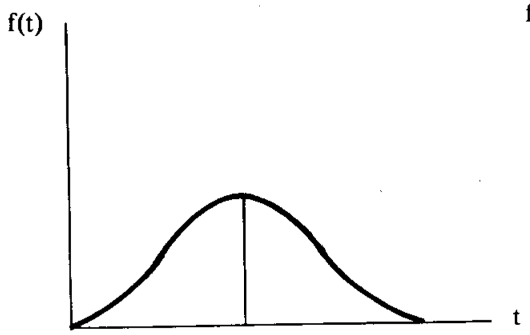
$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} g(w)\, h(z - w)\, dw$$

เราสามารถพิสูจน์ในลักษณะอื่น ๆ ได้ ปราศจากการใช้ Jacobian ให้ S เป็น cdf ของตัวแปรเชิงสุ่ม $Z = X + Y$ แล้ว



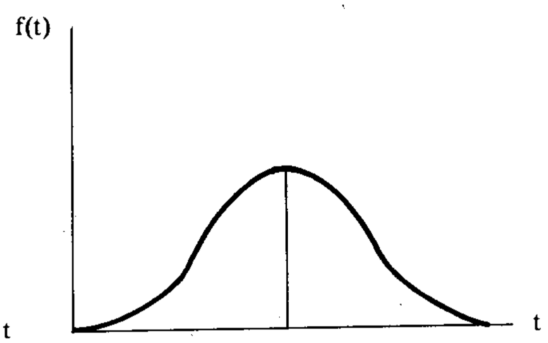
$$= \quad \alpha^2 e^{-\alpha t} \int_0^t dt_1 = \alpha^2 t\, e^{-\alpha t}, \qquad t \geqslant 0$$

นี้เป็นการแจกแจงแบบแกมม่า กราฟของ pdf นี้กำหนดได้ในรูป 2 ค่าสูงสุดเกิดขึ้นสำหรับ $t = 1/\alpha = E(T_1) = E(T_2)$



$t = [\ln(\alpha_1/\alpha_2)]/(\alpha_1/\alpha_2)$

รูปที่ 1



$t = 1/\alpha$

รูปที่ 2

ตัวอย่าง 14 ให้สอง voltages เชิงสุ่ม V_1 กับ V_2 ที่มีความอิสระกัน แต่ละ voltage มีการแจกแจงอย่างสม่ำเสมอบนพิสัย $[0, 10]$ ดังนั้น

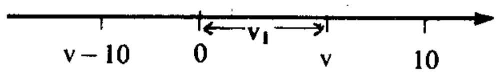
$$g(v_1) = \frac{1}{10}, \quad 0 \leqslant v_1 \leqslant 10, \qquad \text{ศูนย์สำหรับค่าอื่น ๆ}$$

$$h(v_2) = \frac{1}{10}, \quad 0 \leqslant v_2 \leqslant 10, \qquad \text{ศูนย์สำหรับค่าอื่น ๆ}$$

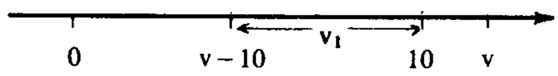
ถ้าหากว่า $V = V_1 + V_2$ เราได้

$$f(v) = \int_{-\infty}^{\infty} g(v_1)\, h(v - v_1)\, dv_1$$

ค่าของ v_1 สอดคล้อง $0 \leqslant v_1 \leqslant 10$ กับ $0 \leqslant v - v_1 \leqslant 10$ เงื่อนไขนี้ equivalent กันกับ $0 \leqslant v_1 \leqslant 10$ กับ $v - 10 \leqslant v_1 \leqslant v$



รูป ก



รูป ข

สองกรณีที่ยกขึ้นมาในรูป ก และรูป ข

(ก) $v - 10 \leqslant 0$ กับ $0 \leqslant v \leqslant 10$ ซึ่งรวมกัน imply $0 \leqslant v \leqslant 10$

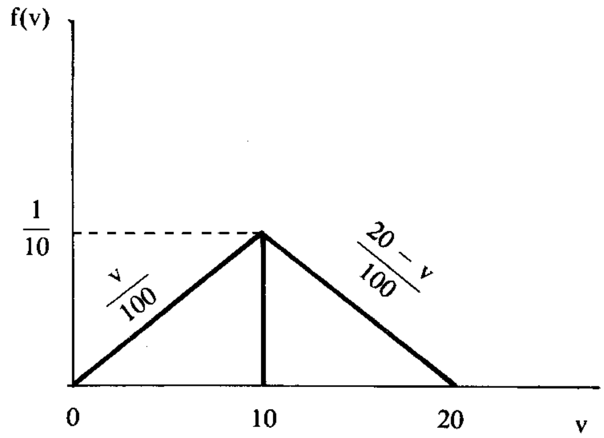
(ข) $0 \leqslant v - 10 \leqslant 10$ กับ $v \geqslant 10$ ซึ่งรวมกัน imply $10 \leqslant v < 20$

ในกรณี (ก) v_1 อาจสมมติค่าระหว่าง 0 กับ v ขณะในกรณี (ข) v_1 อาจสมมติค่าระหว่าง $v - 10$ กับ 10 ดังนั้น เราได้

$$f(v) = \int_0^v \left(\frac{1}{10}\right)\left(\frac{1}{10}\right) dv_1 = \frac{v}{100} \quad , \quad 0 \leqslant v \leqslant 10$$

$$f(v) = \int_{v-10}^{10} \left(\frac{1}{10}\right)\left(\frac{1}{10}\right) dv_1 = \frac{20 - v}{100} \quad , \quad 10 \leqslant v \leqslant 20$$

ดังนั้น pdf ของ V มีกราฟแสดงดังรูป



ตัวอย่าง 15 สมมติว่า $Z = X + Y$ ในเมื่อ X กับ Y เป็นตัวแปรที่อิสระกัน แต่ละตัวมีการแจกแจง n(0, 1) แล้ว

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} \qquad -\infty < x < \infty$$

$$h(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-y^2}{2}} \qquad -\infty < y < \infty$$

ดังนั้น pdf ของ Z กำหนดได้โดย

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, h(z-x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-x^2}{2}} e^{\frac{-(z-x)^2}{2}} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2+z^2-2xz+x^2)} dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-z^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2-zx)} dx$$

ให้ $(x^2 - zx) = [(x - z/2)^2 - z^2/4]$

ดังนั้น

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} e^{\frac{-z^2}{2}} e^{\frac{z^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}[\sqrt{2}(x-z/2)]^2} dx$$

ให้ $\sqrt{2}(x - z/2) = u$ แล้ว $dx = du/\sqrt{2}$ เราได้

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}} e^{-z^2/4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-u^2}{2}} du$$

เนื่องจากว่า $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-u^2}{2}} du = 1$ ดังนั้น

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}} e^{-(1/2)(z/\sqrt{2})^2} \qquad -\infty < z < \infty$$

นี้ใช้แทน pdf ของตัวแปรเชิงสุ่มมีการแจกแจง n(0, 2)

ทฤษฎี สมมติว่า X กับ Y เป็นสองตัวแปรเชิงสุ่มชนิดไม่ต่อเนื่องที่อิสระกัน ให้ $p(k) = P(X = k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ และ $g(r) = P(Y = r), r = 0, 1, 2, \ldots$ ให้ $Z = X + Y$ และให้ $W(i) = P(Z = i)$ แล้ว

$$w(i) = \sum_{k=0}^{i} p(k)\,q(i-k) \qquad i = 0, 1, 2, \ldots$$

พิสูจน์
$$\begin{aligned} w(i) &= P(Z = i) = P[X = 0, Y = i \text{ หรือ } X = 1, Y = i-1 \text{ หรือ } \ldots X = i, Y = 0] \\ &= p(0)\,q(r) + p(i)\,q(i-1) + \ldots + p(i)\,q(0) \\ &= \sum_{k}^{i} p(k)\,q(i-k) \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 16 ให้ X และ Y เป็นจำนวนของการแผ่อนุภาค α จากสองวัตถุที่มีกัมมันตภาพรังสีระหว่างระยะเวลา t สมมติว่า X กับ Y มีการแจกแจงแบบพัวซองมีพารามิเตอร์ $\beta_1 t$ กับ $\beta_2 t$ ตามลำดับ ให้ $Z = X + Y$ เป็นจำนวนทั้งหมดของอนุภาคที่แผ่จากสองวัตถุนั้น

$$\begin{aligned} P(Z = i) &= \sum_{k=0}^{i} p(k)\,q(i-k) \\ &= \sum_{k=0}^{i} \frac{e^{-\beta_1 t}(\beta_1 t)^k}{k!} \frac{e^{-\beta_2 t}(\beta_2 t)^{i-k}}{(i-k)!} \\ &= e^{-(\beta_1+\beta_2)t} \sum_{k=0}^{i} \frac{(\beta_1 t)^k(\beta_2 t)^{i-k}}{k!\,(i-k)!} \\ &= \frac{e^{-(\beta_1+\beta_2)t}}{i!} \sum_{k=0}^{i} \frac{i!}{k!(i-k)!} (\beta_1 t)^k(\beta_2 t)^{i-k} \\ &= \frac{e^{-(\beta_1+\beta_2)t}(\beta_1 t + \beta_2 t)^i}{i!} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 17 ให้ X_1, X_2 เป็นตัวอย่างสุ่มจากการแจกแจงปกติ $n(0, 1)$ จงแสดงว่า marginal pdf ของ $Y_1 = X_1/X_2$ เป็น Cauchy pdf

$$g(y_1) = \frac{1}{\pi(1 + y_1^2)} \qquad -\infty < y_1 < \infty$$

วิธีทำ

ให้ $Y_2 = X_2$ $Y_1 = X_1/X_2$

$$x_2 = w_2(y_1, y_2) = y_2 \; ; \; x_1 = w_1(y_1, y_2) = y_1y_2$$

$$f(x_1, x_2) = f(x_1)\, f(x_2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x_1^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x_2^2}{2}} = \frac{1}{2\pi} e^{\frac{-(x_1^2+x_2^2)}{2}}$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_2 & y_1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = y_2$$

$$g(y_1, y_2) = f(w_1(y_1, y_2), w_2(y_1, y_2))\,|J|$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{\frac{-(y_1^2y_2^2 + y_2^2)}{2}} \,|\, y_2 \,|$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{\frac{-y_2^2}{2}(y_1^2+1)} \,|\, y_2 \,|$$

ในเมื่อ

$|y_2| = y_2$ ถ้าหากว่า $y_2 \geqslant 0$

$= -y_2$ ถ้าหากว่า $y_2 < 0$

หา marginal pdf ของ Y_1

$$g(y_1) = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2\pi} e^{\frac{-y_2^2}{2}(y_1^2 + 1)} (-y_2)\, dy_2$$

$$+ \int_0^\infty y_2 \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{y_2^2}{2}(y_1^2 + 1)} dy_2$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{-\frac{y_2^2}{2}(y_1^2+1)}}{2\pi(y_1^2 + 1)} \, d - \frac{y_2^2}{2} \, (y_1^2 + 1)$$

$$+ \int_{0}^{\infty} - \frac{e^{-\frac{y_2^2}{2}(y_1^2+1)}}{2\pi(y_1^2 + 1)} \, d - \frac{y_2^2}{2} \, (y_1^2 + 1)$$

$$= \frac{e^{\frac{-y_2^2}{2}(y_1^2+1)}}{2\pi(y_1^2 + 1)} \Big|_{-\infty}^{0} - \frac{e^{-\frac{y_2^2}{2}(y_1^2+1)}}{2\pi(y_1^2 + 1)} \Big|_{0}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{2\pi(y_1^2 + 1)} + \frac{1}{2\pi(y_1^2 + 1)}$$

$$= \frac{1}{\pi(y_1^2 + 1)} \qquad -\infty < y_1 < \infty$$

ตัวอย่าง 18 ให้ X_1 กับ X_2 เป็นสองตัวแปรเชิงสุ่มที่มีการแจกแจงแบบแกมม่าที่อิสระกัน มี pdf ร่วม

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta-1} e^{-x_1-x_2} \qquad 0 < x_1 < \infty, 0 < x_2 < \infty$$

$= 0$ สำหรับค่าอื่น ๆ

ในเมื่อ $\alpha > 0, \beta > 0$ จงแสดงว่า marginal pdf ของ $Y_1 = \frac{X_1}{(X_1 + X_2)}$ มีการแจกแจงแบบเบต้า

$$g(y_1) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} y_1^{\alpha-1}(1 - y_1)^{\beta-1} \qquad 0 < y_1 < 1$$

$= 0$ สำหรับค่าอื่น ๆ

รูปการแจกแจงแบบเบต้ามีประโยชน์เมื่อตัวแปรเชิงสุ่มถูกจำกัดช่วงหนึ่งหน่วย โดยเฉพาะเมื่อไรที่ $\alpha = \beta = 1$ เรียกการแจกแจงแบบเบต้าว่าการแจกแจงแบบยูนิฟอร์มตลอดช่วงหน่วย และมีโอกาสเกิดขึ้นระหว่าง 0 กับ 1 เท่ากันหมด

วิธีทำ ให้ $Y_2 = X_1 + X_2$ แล้ว

$x_1 = w_1(y_1, y_2) = y_1y_2$

$x_2 = w_2(y_1, y_2) = y_2(1 - y_1)$

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_2 & y_1 \\ \\ -y_2 & 1 - y_1 \end{vmatrix} = y_2(1 - y_1) + y_1y_2 = y_2$$

pdf ร่วมของ Y_1 กับ Y_2 คือ

$$\begin{aligned}
g(y_1, y_2) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} (y_1y_2)^{\alpha-1} (y_2(1 - y_1))^{\beta-1} y_2 e^{-y_2} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} (y_1y_2)^{\alpha-1} (1 - y_1)^{\beta-1} y_2^{\beta} e^{-y_2} \\
g(y_1) &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} (y_1y_2)^{\alpha-1} (1 - y_1)^{\beta-1} y_2^{\beta} e^{-y_2}\,dy_2 \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} y_1^{\alpha-1} (1 - y_1)^{\beta-1} \int_0^{\infty} y_2^{\alpha-1} y_2^{\beta} e^{-y_2}\,dy_2 \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} y_1^{\alpha-1} (1 - y_1)^{\beta-1} \int_0^{\infty} y_2^{\alpha+\beta-1} \quad e^{-y_2}\,dy_2 \\
&= \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} y_1^{\alpha-1} (1 - y_1)^{\beta-1} \qquad 0 < y_1 < 1 \\
&= 0 \qquad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ}
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 19 จงหามัชฌิมและความแปรปรวนของการแจกแจงแบบเบต้า

วิธีทำ จาก $\int_0^1 y^{\alpha-1} (1 - y)^{\beta-1}\,dy = \dfrac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}$

$$E(Y) = \int_0^1 y \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}\,dy$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 y^{(\alpha+1)-1}(1-y)^{\beta-1}\,dy$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} = \frac{(\alpha+\beta-1)!\,\alpha!}{(\alpha-1)!\,(\alpha+\beta)!} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

$$E(Y^2) = \int_0^1 y^2 \frac{\Gamma(\alpha+\beta)y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\,dy$$

$$= \int_0^1 \frac{\Gamma(\alpha+\beta)\,y^{(\alpha+2)-1}(1-y)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\,dy$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)} = \frac{(\alpha+\beta-1)!\,(\alpha+1)!}{(\alpha-1)!\,(\alpha+\beta+1)!}$$

$$= \frac{(\alpha+1)\alpha}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)}$$

$$V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = \frac{(\alpha+1)\alpha}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)} - \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^2$$

$$= \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

ตัวอย่าง 20 จงคำนวณหาค่าคงที่ C เพื่อว่า f(x) เป็นเบต้า pdf, $f(x) = cx(1-x)^3, 0 < x < 1$ ศูนย์สำหรับค่าอื่น ๆ

วิธีทำ จาก $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 cx(1-x)^3\,dx = 1$

$$= c\int_0^1 x(1-x)^3\,dx = 1$$

$$= c\,\frac{\Gamma(2)\Gamma(4)}{\Gamma(2+4)} = 1$$

$$\frac{c\;1!\;3!}{5!} = 1$$

$$c = 20$$

5.๔ การรวมของตัวแปรเชิงสุ่ม : Moment Generating Functions

วิธีการของหัวข้อนี้ใช้หลักทฤษฎี mgf ของการรวม n ตัวแปรเชิงสุ่มที่อิสระเท่ากับผลคูณของ mgf ของมัน

ทฤษฎี 1 ถ้าหากว่า $X_1, X_2, \ldots$ และ X_n เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่อิสระกันพร้อมกับ moment generation functions $M_{x_1}(t), M_{x_2}(t), \ldots M_{x_n}(t)$ และ $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ แล้ว

$$M_y(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{x_i}(t)$$

พิสูจน์ เมื่อไรตัวแปรเชิงสุ่มมีความอิสระกันแล้วเราจะได้ว่า $f(x_1, x_2, \ldots x_n) = f(x_1)\, f(x_2) \ldots f(x_n)$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
M_y(t) &= E(e^{Yt}) = E\left[e^{(X_1+X_2+\ldots+X_n)t}\right] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} e^{(x_1+x_2+\ldots+x_n)t} f(x_1, x_2, \ldots x_n)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{x_1 t} f(x_1)\, dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{x_2 t} f(x_2)\, dx_2 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} e^{x_n t} f(x_n)\, dx_n \\
&= M_{x_1}(t)\, M_{x_2}(t) \ldots M_{x_n}(t) \\
&= \prod_{i=1}^{n} M_{x_i}(t)
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1 สมมติว่า $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่มอิสระกันมีการแจกแจงแบบเอกซ์โพเน้นเชียล จงหา mgf ของ $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$

วิธีทำ เนื่องจากว่า mgf ของ X_i คือ $M_{x_i}(t) = (1 - \beta t)^{-1}$
ตามทฤษฎี 1

$$M_Y(t) = \sum_{i=1}^{n} (1-\beta t)^{-1} = (1-\beta t)^{-n}$$

ดังนั้น การแจกแจงของการรวม n ตัวแปรเชิงสุ่มที่อิสระกันมีการแจกแจงแบบเอกซ์โพเน้นเชียลพร้อมด้วยพารามิเตอร์ β คือ การแจกแจงแบบแกมม่าพร้อมด้วยพารามิเตอร์ n และ β

ตัวอย่าง 2 สมมติว่า $X_1, X_2, \ldots X_n$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่มอิสระกัน มีการแจกแจงแบบพัวซองพร้อมด้วยพารามิเตอร์ $m_1, m_2, \ldots m_n$ จงหา mgf ของ $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$

วิธีทำ เนื่องจากว่า mgf ของ X_i คือ

$$M_{x_i}(t) = e^{m_i(e^t-1)}$$

ดังนั้น

$$M_Y(t) = \prod_{i=1}^{n} e^{m_i(e^t-1)} = e^{(m_1+m_2+\ldots+m_n)(e^t-1)}$$

ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้ว่าเป็น mgf ของการแจกแจงแบบพัวซองพร้อมด้วยพารามิเตอร์ $m = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$

5.4 การแจกแจงของมัชฌิม ($\overline{X}$) กับ nS^2/σ^2

กำหนดให้กลุ่มของตัวแปรเชิงสุ่ม $X_1, X_2, \ldots$ และ X_n ให้ตัวแปรเชิงสุ่ม $\overline{X}$ ซึ่งค่าคำนวณหาได้จากสมการ

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

เป็นมัชฌิมของ n ตัวแปรเชิงสุ่ม มัชฌิมของกลุ่มตัวแปรเชิงสุ่มมีความสำคัญมากเมื่อไรที่ตัวแปรเชิงสุ่มมีความอิสระกันและมีการแจกแจงเหมือนกัน เราสามารถใช้ค่าของ $\overline{X}$ เป็นตัวประมาณค่าของมัชฌิม μ ของการแจกแจงร่วมของตัวแปร ภายใต้เงื่อนไขเหล่านี้ เราใช้ n ตัวแปรเชิงสุ่มเป็นตัวอย่างสุ่มและเราใช้การแจกแจงร่วมของตัวแปรเป็นประชากรซึ่งเราเลือกตัวอย่าง

เนื่องจากว่าการแจกแจงของ $\overline{X}$ เป็นตัวสำคัญในปัญหาของการอนุมานทางสถิติ ดังเราจะพิสูจน์ทฤษฎีต่อไปนี้

ทฤษฎี ถ้าหากว่า $X_1, X_2, \ldots X_n$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่มอิสระกัน มีการแจกแจงเหมือนกันพร้อมด้วยมัชฌิม μ และความแปรปรวน σ^2 แล้ว

$$E(\overline{X}) = \mu, \quad V(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

เพื่อที่จะพิสูจน์ทฤษฎีนี้ เราต้องแทน $E(X_i) = \mu$, $V(X_i) = \sigma^2$ และ $a_i = \frac{1}{n}$ ในทฤษฎีที่ว่าด้วย $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม $a_1, a_2, \ldots, a_n$ เป็นค่าคงที่และ $Y = a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n$ แล้ว

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i)$$

$$V(Y) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 V(X_i)$$

จะได้ว่า

$$E(\overline{X}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \mu = n\left(\frac{1}{n}\mu\right) = \mu$$

และ

$$V(\overline{X}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2} \sigma^2 = n\left(\frac{1}{n^2}\sigma^2\right) = \frac{\sigma^2}{n}$$

โดยทั่ว ๆ ไปเรานิยมเขียน $E(\overline{X})$ เป็น $\mu_{\bar{x}}$, $V(\overline{X})$ เป็น $\sigma^2_{\bar{x}}$ และเรียก $\sigma_{\bar{x}}$ ว่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของมัชฌิม

สูตร $\sigma_{\bar{x}} = \sigma/\sqrt{n}$ แสดงว่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของการแจกแจง $\overline{X}$ ลดลงเมื่อไร ขนาดตัวอย่าง n เพิ่มขึ้น นี้หมายความว่าเมื่อไร n ใหญ่ขึ้นและเราก็มีข่าวสารมากขึ้น ค่าของ $\overline{X}$ สามารถคาดหวังเข้าใกล้ μ ยิ่งขึ้น ตามทฤษฎีของ Chebyshev ซึ่งจะกล่าวในหัวข้อต่อไป

ในกรณีที่ n มีค่ามาก การแจกแจงตัวอย่างของ $\overline{X}$ สามารถประมาณด้วยการแจกแจงปกติ ดังเช่นตัวอย่างสุ่มที่เลือกมาจากประชากรปกติ การแจกแจงตัวอย่างของ $\overline{X}$ จะมีการแจกแจงปกติโดยไม่มีขนาดตัวอย่างเข้ามาเกี่ยวข้อง เพื่อที่จะพิสูจน์นี้เราแทนค่าลงใน

$$M_{\bar{x}}(t) = \left[M_x\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n$$

เท่านั้น เนื่องจากว่าmgf ของการแจกแจงปกติพร้อมด้วยมัชฌิม μ และความแปรปรวน σ^2 กำหนดได้โดย

$$M_x(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

แทนค่า t ด้วย $\frac{t}{n}$ ข้างต้นเราได้

$$M_{\bar{x}}(t) = \left[e^{\mu \frac{t}{n} + \frac{1}{2}\left(\frac{t}{n}\right)^2 \sigma^2} \right]^n$$

$$= e^{\mu t + \frac{1}{2} t^2 \left(\frac{\sigma^2}{n}\right)}$$

ซึ่งเป็น mgf ของการแจกแจงปกติพร้อมด้วยมัชฌิม μ และความแปรปรวน σ^2/n

ทฤษฎี ถ้าหากว่า $\overline{X}$ เป็นมัชฌิมของตัวอย่างสุ่มขนาด n จากประชากรปกติพร้อมด้วยมัชฌิม μ และความแปรปรวน σ^2 แล้ว การแจกแจงตัวอย่างของ $\overline{X}$ มีการแจกแจงปกติพร้อมด้วยมัชฌิม μ และความแปรปรวน σ^2/n

ตัวอย่าง 1 ให้ $\overline{X}$ เป็นมัชฌิมของตัวอย่างสุ่มขนาด 25 จากการแจกแจง นั่นคือ n(75, 100) ดังนั้น $\overline{X}$ คือ n(75, 4) ดังนั้น

$$\begin{aligned}
P(71 < \overline{X} < 79) &= P\left(\frac{71-75}{2} < \frac{\overline{X}-75}{2} < \frac{79-75}{2}\right) \\
&= N\left(\frac{79-75}{2}\right) - N\left(\frac{71-75}{2}\right) \\
&= N(2) - N(-2) \\
&= 0.954
\end{aligned}$$

เรามาพิจารณาความแปรปรวน S^2 ของตัวอย่างสุ่ม $X_1, X_2, \ldots X_n$ จากการแจกแจง $n(\mu, \sigma^2)$ ตัวแปรเชิงสุ่ม nS^2/σ^2 จะมีการแจกแจงซึ่งหาได้โดยกระบวนการแปลงธรรมดา

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 &= \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X} + \overline{X} - \mu)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left[(X_i - \overline{X})^2 + 2(X_i - \overline{X})(\overline{X} - \mu) + (\overline{X} - \mu)^2\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 + 2(\overline{X} - \mu) \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n} (\overline{X} - \mu)^2
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 + n(\overline{X} - \mu)^2$$

เพราะว่า $2(\overline{X} - \mu) \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}) = 0$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2}{\sigma^2} = \frac{nS^2}{\sigma^2} + \frac{n(\overline{X} - \mu)^2}{\sigma^2}$$

ทฤษฎีกล่าวไว้ว่า $\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2/\sigma^2$ เป็น $\chi^2(n)$ และเราทราบว่า $\overline{X}$ เป็น $n\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ ดังนั้น $\sqrt{n}\,(\overline{X} - \mu)/\sigma$ เป็น $n(0, 1)$ เพราะฉะนั้น $n(\overline{X} - \mu)^2/\sigma^2$ เป็น $\chi^2(1)$ เราทราบแล้วว่า $\overline{X}$ กับ S^2 มีความอิสระกัน ดังนั้น $n(\overline{X} - \mu)^2/\sigma^2$ กับ nS^2/σ^2 มีความอิสระกัน ทำให้เราสามารถเขียน

$$E\left\{\exp\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2}{\sigma^2} t\right]\right\} = E\left\{\exp\left[\frac{nS^2}{\sigma^2} t + \frac{n(\overline{X} - \mu)^2}{\sigma^2} t\right]\right\}$$

$$= E\left\{\exp\left[\frac{nS^2}{\sigma^2} t\right]\right\} E\left\{\exp\left[\frac{n(\overline{X} - \mu)^2}{\sigma^2} t\right]\right\}$$

นั่นคือ

$$(1 - 2t)^{-\frac{n}{2}} = E\left\{\exp\left[\frac{nS^2}{\sigma^2} t\right]\right\} (1 - 2t)^{-\frac{1}{2}}, \qquad t < 1/2$$

ดังนั้น mgf ของ nS^2/σ^2 คือ

$$E\left\{\exp\left[\frac{nS^2}{\sigma^2} t\right]\right\} = (1 - 2t)^{-(n-1)/2} \qquad t < 1/2$$

mgf นี้เป็นของการแจกแจงแบบไคสแควมี df $n - 1$ ดังนั้น nS^2/σ^2 เป็น $\chi^2\,(n - 1)$ สำหรับการกำหนด pdf ของ S^2 จะละไว้เป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎี สมมติว่า $X_1, \ldots X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากตัวแปรเชิงสุ่ม X พร้อมด้วยค่าคาดหวัง μ และความแปรปรวน σ^2 ให้

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2$$

ในเมื่อ $\overline{X}$ เป็นมัชฌิมเลขคณิตตัวอย่างแล้ว $E(S^2) = \sigma^2$

พิสูจน์ ให้

$$\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu - \overline{X} + \mu)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[(X_i - \mu)^2 - 2(X_i - \mu)(\overline{X} - \mu) + (\overline{X} - \mu)^2\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 - 2(\overline{X} - \mu) \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu) + n(\overline{X} - \mu)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 - 2(\overline{X} - \mu) \left[\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu\right] + n(\overline{X} - \mu)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 - 2(\overline{X} - \mu)(n\overline{X} - n\mu) + n(\overline{X} - \mu)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 - 2n(\overline{X} - \mu)^2 + n(\overline{X} - \mu)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 - n(\overline{X} - \mu)^2$$

ดังนั้น

$$E\left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 \right) = \frac{1}{n-1} E\left[\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 - n(\overline{X} - \mu)^2\right]$$

$$= \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^{n} E(X_i - \mu)^2 - nE(\overline{X} - \mu)^2\right]$$

$$\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} \sigma^2 - n\frac{\sigma^2}{n}\right]$$

$$= \frac{1}{n-1}[n\sigma^2 - \sigma^2]$$

$$= \frac{\sigma^2}{n-1}(n-1) = \sigma^2$$

5.5 ผลต่างระหว่างมัชฌิมกับผลต่างระหว่างสัดส่วน

ในหลาย ๆ ปัญหาของสถิติเราต้องตัดสินใจว่าผลต่างระหว่างค่าสังเกตของตัวแปรเชิงสุ่มสามารถเชื่อว่ามีหนทางสำเร็จหรือเป็นการแสดงว่าการแจกแจงของตัวแปรเชิงสุ่มแตกต่างกันในข้อกำหนดบางอย่าง ตัวอย่างเช่น มีตัวอย่างหนึ่งประกอบด้วยหลอดไฟชนิดหนึ่งมีอายุเฉลี่ย 442 ชั่วโมง (ใช้ติดต่อกัน) ขณะที่อีกตัวอย่างหนึ่งประกอบด้วยหลอดไฟอีกชนิดหนึ่งมีอายุเฉลี่ย 435 ชั่วโมง เราต้องการที่จะตัดสินใจว่าผลต่างระหว่าง 442 กับ 435 ชั่วโมงสามารถเชื่อว่ามีคุณภาพต่างกัน หรือสุ่มเลือกแม่บ้านมา 400 คนในกรุงเทพฯ มีอยู่ 284 คน ชอบผงซักฟอก A มากกว่า B ขณะที่สุ่มเลือกแม่บ้านมา 500 คนในจังหวัดสงขลา มีอยู่ 375 คนชอบผงซักฟอก A มากกว่า B เราต้องการที่จะตัดสินใจว่าผลต่างระหว่างสัดส่วนที่สมนัยกัน $\frac{284}{400} = 0.71$ กับ $\frac{375}{500} = 0.75$ สามารถเชื่อว่าแม่บ้านทั้งหมดในเมืองเหล่านี้มีความชอบแตกต่างกัน

เพื่อที่จะพัฒนาทฤษฎีให้ตรงกับการวิเคราะห์ปัญหาชนิดนี้ ให้เราพิจารณา $n_1 + n_2$ ตัวแปรเชิงสุ่ม ในเมื่อ n_1 ใช้แทน $X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{1n_1}$ กับ n_2 ใช้แทน $X_{21}, X_{22}, \ldots, X_{2n_2}$ ถ้าหากว่าตัวแปรเชิงสุ่มเหล่านี้มีความอิสระกันทั้งหมดพร้อมด้วย n_1 มีการแจกแจงเหมือนกันหมดและ n_2 มีการแจกแจงเหมือนกันด้วย เราเรียกการแจกแจงนี้ว่าคู่หนึ่งของตัวอย่างสุ่มที่อิสระกัน การใช้แนวความคิดอันนี้มาพิสูจน์ทฤษฎีต่อไปนี้

ทฤษฎี ถ้าหากว่า $X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{1n_1}, X_{21}, X_{22}, \ldots, X_{2n_2}$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่อิสระกัน n_1 มีการแจกแจงเหมือนกันพร้อมด้วยมัชฌิม μ_1 กับความแปรปรวน σ_1^2 และ n_2 มีการ

แจกแจงเหมือนกันพร้อมด้วยมัชฌิม μ_2 กับความแปรปรวน σ_2^2 แล้ว

$$E(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) = \mu_1 - \mu_2$$

และ

$$V(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

ในเมื่อ

$$\overline{X}_1 = \frac{1}{n_1}(X_{11} + X_{12} + \ldots + X_{1n_1})$$

และ

$$\overline{X}_2 = \frac{1}{n_2}(X_{21} + X_{22} + \ldots + X_{2n_2})$$

เพื่อที่จะพิสูจน์ทฤษฎีนี้ เราต้องแทน $\frac{1}{n_1}$ สำหรับ n_1 ของค่า a กับ $-\frac{1}{n_2}$ สำหรับ n_2 ของค่า a ใน $E(Y) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i)$ กับ $V(Y) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 V(X_i)$ เราได้

$$E(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) = \sum_{i=1}^{n_1} \frac{1}{n_1}\mu_1 + \sum_{i=1}^{n_2}\left(-\frac{1}{n_2}\right)\mu_2$$

$$= \mu_1 - \mu_2$$

กับ

$$V(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) = \sum_{i=1}^{n_1}\left(\frac{1}{n_1}\right)^2\sigma_1^2 + \sum_{i=1}^{n_2}\left(-\frac{1}{n_2}\right)^2\sigma_2^2$$

$$= \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของการแจกแจงของ $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ เรียกว่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของผลต่างระหว่างสองมัชฌิม

ในกรณีที่สำคัญอีกกรณีหนึ่งที่จะยกขึ้นมากล่าว เมื่อไร n_1 ตัวแปรเชิงสุ่มมีการแจกแจงแบบเบอนุลลิพร้อมด้วยพารามิเตอร์ $\theta = \theta_1$ ขณะที่ n_2 ตัวแปรเชิงสุ่มมีการแจกแจงแบบเบอนุลลิพร้อมด้วยพารามิเตอร์ $\theta = \theta_2$ ในกรณีนั้น $\overline{X}_1$ เป็นสัดส่วนของความสำเร็จในการทดลอง n_1 ครั้ง ซึ่งเราจะแสดงด้วย p_1 $\overline{X}_2$ เป็นสัดส่วนของความสำเร็จในการทดลอง n_2 ครั้ง ซึ่งจะแสดงด้วย p_2 และแทน $\mu_1 = \theta_1, \mu_2 = \theta_2, \sigma_1^2 = \theta_1(1 - \theta_1)$ กับ $\sigma_2^2 = \theta_2(1 - \theta_2)$ ในทฤษฎี 1 ของหัวข้อนี้ได้

$$E(p_1 - p_2) = \theta_1 - \theta_2$$

และ

$$V(p_1 - p_2) = \frac{\theta_1(1 - \theta_1)}{n_1} + \frac{\theta_2(1 - \theta_2)}{n_2}$$

ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของการแจกแจงของ $p_1 - p_2$ เป็นเสมือนความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของผลต่างระหว่างสองสัดส่วน

5.6 การแจกแจงของมัชฌิมกรณีประชากรจำนวนจำกัด

ถ้าหากว่าการทดลองประกอบด้วยการเลือกค่าหนึ่งค่าหรือมากกว่าจากกลุ่มของหมายเลขจำนวนจำกัด $\{c_1, c_2, \ldots, c_N\}$ กลุ่มนี้เป็นเสมือนประชากรจำนวนจำกัดขนาด N ถ้าหากว่าการเลือกเป็นแบบหยิบแล้วไม่ใส่คืน ให้ X_1 เป็นหมายเลขที่หนึ่งที่เลือกได้ X_2 เป็นหมายเลขที่สองที่เลือกได้ และ X_n เป็นหมายเลขที่ n ที่เลือกได้ ตัวแปรเหล่านี้เป็นองค์ประกอบของตัวอย่างสุ่มหนึ่ง ขนาด n จากประชากรจำนวนจำกัดโดยให้ฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วมของตัวแปรเป็น

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{N(N - 1) \ldots (N - n + 1)} \qquad \ldots\ldots\ldots.(1)$$

สำหรับแต่ละ order n - tuple ที่เป็นไปได้ของค่าที่ได้เลือกจากกลุ่ม $\{c_1, c_2, \ldots, c_N\}$ ความน่าจะเป็นสำหรับแต่ละ n - tuple ที่เป็นไปได้โดยไม่ได้เกี่ยวข้องกับลำดับคำนวณหาค่าได้เป็น

$$\frac{n!}{N(N-1)\ldots(N-n+1)} = \frac{1}{\binom{N}{n}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

และนี้เป็นข้อกำหนดสำหรับการเลือกตัวอย่างสุ่มหนึ่งขนาด n จากประชากรจำนวนจำกัดขนาด N

จากสมการ (1) พร้อมด้วย $n = 1$ ลำดับของค่า X ก็ไม่มีความสำคัญการแจกแจง marginal ของค่าหนึ่งค่าใดของ n ตัวแปรเชิงสุ่ม $X_1, X_2, \ldots, X_n$ กำหนดได้โดย

$$f(x_r) = \frac{1}{N} \text{ สำหรับ } x_r = c_1, c_2, \ldots, c_N \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

และ

$$E(X_r) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N} c_i = \mu \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

และ

$$V(X_r) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N} (c_i - \mu)^2 = \sigma^2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

เป็นมัชฌิมกับความแปรปรวนของประชากรจำนวนจำกัด

ในทำนองเดียวกัน การแจกแจง marginal ร่วมของสองตัวแปรเชิงสุ่มใด ๆ ของ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ กำหนดได้โดย

$$g(x_r, x_s) = \frac{1}{N(N-1)} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

สำหรับแต่ละ ordered pair ของค่าของประชากรจำนวนจำกัด แล้วจากหลักความจริง เราได้

$$\sum_{i=1}^{N} c_i = N\mu \qquad \sum_{i=1}^{N} c_i^2 = N(\sigma^2 + \mu^2) \qquad \text{..........(7)}$$

ซึ่งจะละไว้ให้นักศึกษาทำเป็นแบบฝึกหัด เราพบว่าความแปรปรวนร่วมของสองตัวแปรเชิงสุ่มสามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_r, X_s) &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{N(N-1)} (c_i - \mu)(c_j - \mu) \\ &= \frac{[\sum_{i=1}^{N} c_i]^2 - \sum_{i=1}^{N} c_i^2}{N(N-1)} - \mu^2 \\ &= -\frac{\sigma^2}{N-1} \end{aligned}$$

ใช้ผลลัพธ์เหล่านี้ทั้งหมด แล้วพิสูจน์ทฤษฎีเหล่านี้

ทฤษฎี ถ้าหากว่า $\overline{X}$ เป็นมัชฌิมของตัวอย่างสุ่มขนาด n เลือกจากประชากรจำนวนจำกัด พร้อมด้วยมัชฌิม μ และความแปรปรวน σ^2 แล้ว

$$E(\overline{X}) = \mu \text{ , } V(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

พิสูจน์ แทนค่า $a_i = \frac{1}{n}$, $V(X_i) = \sigma^2$ และ $\text{Cov}(X_i, X_j) = -\frac{\sigma^2}{N-1}$

ใน $E(Y) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i)$ และ $V(Y) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 V(X_i) + 2 \sum\sum_{i<j} a_i a_j \text{Cov}(X_i, X_j)$

เราได้

$$E(\overline{X}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \mu = \mu$$

และ

$$V(\overline{X}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2} \sigma^2 + 2 \sum_{i<j}\sum \frac{1}{n^2} \left(- \frac{\sigma^2}{N-1} \right)$$

$$= \frac{\sigma^2}{n} + 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{1}{n^2} \left(- \frac{\sigma^2}{N-1} \right)$$

$$= \frac{\sigma^2}{n} \left(\frac{N-n}{N-1} \right)$$

สังเกตว่าสูตรสองสูตรซึ่งเราคำนวณหา $V(\overline{X})$ จากทฤษฎี 1 ของหัวข้อ 5.3 กับทฤษฎี 1 ของหัวข้อ 5.5 แตกต่างกันคือ $\frac{N-n}{N-1}$ เรียกว่า finite population correction factor เมื่อไร ขนาดของประชากร N ใหญ่เมื่อเทียบกับขนาดของตัวอย่าง n ผลต่างระหว่างสองสูตรสำหรับ $V(\overline{X})$ ตัดทิ้งเสียได้ และนิยมใช้สูตร $\sigma_{\overline{x}} = \sigma/\sqrt{n}$ ประมาณค่าเมื่อไรที่เราเลือกตัวอย่างขนาดเล็กมาจากประชากรจำนวนจำกัดที่มีขนาดใหญ่

5.7 การแจกแจงแบบ t กับแบบ F

ให้ W เป็นตัวแปรเชิงสุ่มมีการแจกแจง n(0, 1) และให้ V เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม มีการแจกแจงแบบ $\chi^2(r)$ [illegible] กับ V มีความอิสระกันแล้ว pdf ร่วมของ W กับ V f(w, v) คือผลคูณของ pdf W กับ [illegible] หรือ

$$f(w, v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-w^2}{2}} \frac{1}{\Gamma(r/2)2^{r/2}} v^{\frac{r}{2}-1} e^{\frac{-v}{2}} \quad , -\infty < w < \infty, 0<v<\infty$$

$$= 0 \qquad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ}$$

กำหนดให้ตัวแปรเชิงสุ่ม T เขียนโดย

$$T = \frac{W}{\sqrt{V/r}}$$

วิธีการเปลี่ยนตัวแปรเพื่อหา pdf g(t) ของ T ได้ โดยให้

$$t = \frac{w}{\sqrt{v/r}} \text{ และ } u = v$$

เป็นการแปลงจุดต่อจุดซึ่ง maps $A = \{(w, v); -\infty < w < \infty, 0 < v < \infty\}$ ลงบน $B = \{(t, u); -\infty < t < \infty, 0 < u < \infty\}$ เนื่องจากว่า $w = t\sqrt{u}/\sqrt{r}$, $v = u$ ค่าสมบูรณ์ของ Jacobian ของการแปลงคือ $|J| = \sqrt{u}/\sqrt{r}$ ดังนั้น pdf ร่วม T และ U = V กำหนดได้

$$g(t, u) = f\left(\frac{t\sqrt{u}}{\sqrt{r}}, u\right)|J|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\Gamma(r/2)2^{\frac{r}{2}}} u^{\frac{r}{2}-1} \exp\left[-\frac{u}{2}\left(1 + \frac{t^2}{r}\right)\right] \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{r}}$$

$$-\infty < t < \infty, 0 < u < \infty$$

$= 0$ สำหรับค่าอื่น ๆ

marginal pdf ของ T คือ

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t, u)\,du$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi r}\,\Gamma(r/2)2^{\frac{r}{2}}} u^{\frac{(r+1)}{2}-1} \exp\left[-\frac{u}{2}\left(1 + \frac{t^2}{r}\right)\right] du$$

ใน integral นี้ ให้ $z = u\,[1 + (t^2/r)]/2$

$$g(t) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi r}\,\Gamma(r/2)2^{r/2}} \left(\frac{2z}{1 + t^2/r} \right)^{\frac{r+1}{2}-1} e^{-z} \left(\frac{2}{1 + t^2/r} \right) dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi r}\,\Gamma(r/2)} \int_0^\infty \frac{1}{2^{\frac{(r+1)}{2}}} \frac{2^{(r+1)/2-1}}{(1 + t^2/r)^{(r+1)/2-1}} \left(\frac{2}{1 + t^2/r} \right) z^{\frac{(r+1)}{2}-1} e^{-z}\, dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi r}\,\Gamma(r/2)} \int_0^\infty \frac{1}{(1 + t^2/r)^{\frac{(r+1)}{2}}} z^{\frac{(r+1)}{2}-1} e^{-z}\, dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi r}\,\Gamma(r/2)} \frac{1}{(1 + t^2/r)^{\frac{(r+1)}{2}}} \int_0^\infty z^{\frac{(r+1)}{2}-1} e^{-z}\, dz$$

$$= \frac{\Gamma[(r + 1)/2]}{\sqrt{\pi r}\,\Gamma(r/2)} \frac{1}{(1 + t^2/r)^{\frac{(r+1)}{2}}}, \quad -\infty < t < \infty$$

$= 0$ สำหรับค่าอื่น ๆ

ดังนั้น ถ้าหากว่า W เป็น n(0, 1), V เป็น $\chi^2(r)$ และถ้าหากว่า W กับ V มีความอิสระกัน แล้ว

$$T = \frac{W}{\sqrt{V/r}}$$

มี pdf g(t) เรียกว่าการแจกแจงแบบ t พารามิเตอร์ r คือจำนวนองศาแห่งความอิสระ

ของตัวแปรเชิงสุ่ม ค่าประมาณบางค่าของ

$$P(T \leqslant t) = \int_{-\infty}^{t} g(w)\, dw$$

สำหรับการเลือกค่า r กับ t สามารถหาได้ในตารางภาคผนวก

ค่าคาดหวังและความแปรปรวน

กำหนดให้ W เป็น n(0, 1), V เป็น $\chi^2(r)$ ในเมื่อ $r \geqslant 2$ และให้ W กับ V มีความอิสระกัน มัชฌิมของตัวแปรเชิงสุ่ม $T = W\sqrt{r/V}$ หาค่าได้และมีค่าเท่ากับศูนย์ เพราะว่ากราฟของ pdf ของ T เป็นรูปสมมาตรรอบแกนตั้งตลอด $t = 0$ ความแปรปรวนของ t เมื่อหาค่าได้และสามารถคำนวณได้โดยการ integrating ผลคูณของ t^2 กับ pdf ของ T แต่ดูเหมือนว่าคำนวณง่ายกว่า

$$\sigma_T^2 = E(T^2) = E\left[W^2 \frac{r}{V}\right] = E(W^2)\, E\left(\frac{r}{V}\right)$$

W^2 เป็น $\chi^2(1)$ ดังนั้น $E(W^2) = 1$ นอกจากนั้น

$$E\left(\frac{r}{V}\right) = \int_0^{\infty} \frac{r}{V} \frac{1}{2^{r/2}\,\Gamma(r/2)} V^{\frac{r}{2}-1} e^{-\frac{v}{2}} dv$$

หาค่าได้ ถ้า $r > 2$ และกำหนดได้

$$\frac{r\,\Gamma[(r-2)/2]}{2\,\Gamma(r/2)} = \frac{r\,\Gamma[(r-2)/2]}{2\,[(r-2)/2]\,\Gamma(r-2)/2]} = \frac{r}{r-2}$$

ดังนั้น

$$\sigma_T^2 = r/(r-2), \quad r > 2$$

หมายเหตุ $\Gamma(r/2) = \left(\frac{r}{2} - 1\right)!$

$$= \left(\frac{r}{2} - 1\right)\left(\frac{r}{2} - 2\right)!$$

$$= \left(\frac{r}{2} - 1\right)\Gamma\left(\frac{r}{2} - 1\right)$$

เรามาพิจารณาสองตัวแปรเชิงสุ่มอิสระกันของไคสแคว U กับ V ที่มี df r_1 กับ r_2 ตามลำดับ pdf ร่วม f(u, v) ของ U กับ V คือ

$$f(u, v) = \frac{1}{\Gamma(r_1/2)\,\Gamma(r_2/2)2^{\frac{(r_1+r_2)}{2}}}\, u^{r_1/2-1}\, v^{r_2/2-1}\, e^{\frac{-(u+v)}{2}} \quad 0 < u < \infty, 0 < v < \infty$$

$$= 0 \qquad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ}$$

เรากำหนดตัวแปรเชิงสุ่มใหม่ได้

$$F = \frac{U/r_1}{V/r_2}$$

เราประสงค์ที่จะหา pdf g(f) ของ F โดยให้

$$f = \frac{u/r_1}{v/r_2}, \quad z = v$$

เป็นการแปลงจุดต่อจุดซึ่ง maps เซท $A = \{(u, v); 0 < u < \infty, 0 < v < \infty\}$ ลงบนเซท $B = \{(f, z); 0 < f < \infty, 0 < z < \infty\}$ เนื่องจากว่า $u = (r_1/r_2)fz$, $v = z$ ค่าสัมบูรณ์ของ Jacobian ของการแปลงคือ $|J| = (r_1/r_2)z$, pdf ร่วม g(f, z) ของตัวแปรเชิงสุ่ม F กับ Z = V คือ

$$g(f, z) = \frac{1}{\Gamma(r_1/2)\Gamma(r_2/2)2^{\frac{(r_1+r_2)}{2}}} \left(\frac{r_1 z f}{r_2}\right)^{\frac{r_1}{2}-1} z^{\frac{r_2}{2}-1} \exp\left[-\frac{z}{2}\left(\frac{r_1 f}{r_2} + 1\right)\right] \frac{r_1 z}{r_2}$$

ให้ $(f, z) \in B$ และศูนย์สำหรับค่าอื่น ๆ marginal pdf g(f) ของ F คือ

$$g(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(f, z)\, dz$$

$$= \int_{0}^{\infty} \frac{(r_1/r_2)^{r_1/2} (f)^{r_1/2-1}}{\Gamma(r_1/2)\Gamma(r_2/2)2^{\frac{(r_1+r_2)}{2}}} z^{\frac{(r_1+r_2)}{2}-1} \exp\left[-\frac{z}{2}\left(\frac{r_1 f}{r_2}+1\right)\right] dz$$

ถ้าเราเปลี่ยนตัวแปรของ integration โดยเขียนได้

$$y = \frac{z}{2}\left(\frac{r_1 f}{r_2}+1\right)$$

จะเห็นได้ว่า

$$g(f) = \int_{0}^{\infty} \frac{(r_1/r_2)^{r_1/2} (f)^{r_1/2-1}}{\Gamma(r_1/2)\Gamma(r_2/2)2^{\frac{(r_1+r_2)}{2}}} \left(\frac{2y}{r_1 f/r_2 + 1}\right)^{\frac{(r_1+r_2)}{2}-1} e^{-y} \left(\frac{2}{r_1 f/r_2 + 1}\right) dy$$

$$= \frac{\Gamma[(r_1 + r_2)/2]\,(r_1/r_2)^{r_1/2}}{\Gamma(r_1/2)\Gamma(r_2/2)} \frac{(f)^{\frac{r_1}{2}-1}}{(1 + r_1 f/r_2)^{\frac{(r_1+r_2)}{2}}} \qquad 0 < f < \infty$$

$= 0$ สำหรับค่าอื่น ๆ

ดังนั้น ถ้าหากว่า U กับ V เป็นตัวแปรไคสแควที่อิสระกันมีองศาแห่งความอิสระ r_1 กับ r_2 ตามลำดับแล้ว

$$F = \frac{U/r_1}{V/r_2}$$

มี pdf g(f) การแจกแจงของตัวแปรเชิงสุ่มนี้เรียกว่าการแจกแจงแบบ F สังเกตว่าการแจกแจงแบบ F กำหนดได้ด้วยสองพารามิเตอร์ r_1 กับ r_2 ในตารางภาคผนวกค่าโดยประมาณบางค่าของ

$$P(F \leqslant f) = \int_0^f g(w)\, dw$$

สำหรับค่าที่ได้เลือกของ r_1, r_2 และ f

แบบฝึกหัด

1. ให้ $\overline{X}$ เป็นมัชฌิมของตัวอย่างสุ่มขนาด 5 จากการแจกแจงปกติพร้อมด้วย $\mu = 0$ และ $\sigma^2 = 125$ จงคำนวณหาค่า C เพื่อว่า $P(\overline{X} < C) = .90$

2. ถ้าหากว่า $\overline{X}$ เป็นมัชฌิมของตัวอย่างสุ่มขนาด n จากการแจกแจงปกติพร้อมด้วยมัชฌิม μ และความแปรปรวน 100, จงคำนวณหาค่า n เพื่อว่า $P(\mu - 5 < \overline{X} < \mu + 5) = 0.954$

3. ให้ $X_1, X_2, \ldots, X_{25}$ กับ $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{25}$ เป็นสองตัวอย่างสุ่มจากสองการแจกแจงปกติที่อิสระกัน $n(0, 16)$ กับ $n(1, 9)$ ตามลำดับ ให้ $\overline{X}$ กับ $\overline{Y}$ เป็นมัชฌิมของตัวอย่างที่สมนัยกัน จงคำนวณ $P(\overline{X} > \overline{Y})$

4. จงหามัชฌิมกับความแปรปรวนของ $S^2 = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2/n$ ในเมื่อ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจาก $n(\mu, \sigma^2)$ ข้อเสนอแนะให้หามัชฌิมและความแปรปรวนของ nS^2/σ^2

5. ให้ S^2 เป็นความแปรปรวนของตัวอย่างสุ่มขนาด 6 จากการแจกแจงปกติ $n(\mu, 12)$ จงคำนวณหา $P(2.30 < S^2 < 22.2)$

6. จงหา pdf ของความแปรปรวนตัวอย่าง S^2 โดยมีข้อกำหนดการแจกแจงจาก $n(\mu, \sigma^2)$

7. ให้ $\overline{X}$ กับ S^2 เป็นมัชฌิมกับความแปรปรวนของตัวอย่างสุ่มขนาด 25 จากการแจกแจงซึ่งเป็น $n(3, 100)$ จงคำนวณหา $P(0 < \overline{X} < 6, 55.2 < S^2 < 145.6)$

8. ให้ X กับ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มอิสระกันพร้อมด้วยมัชฌิม μ_1, μ_2 กับความแปรปรวน σ_1^2, σ_2^2 จงคำนวณหาสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ของ X กับ $Z = X - Y$ ในรูปของ $\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$

9. ให้ X กับ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มพร้อมด้วยมัชฌิม μ_1, μ_2 ความแปรปรวน σ_1^2, σ_2^2 และสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ ρ จงแสดงว่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ของ $W = aX + b, a > 0$ กับ $Z = cY + d, c > 0$ คือ ρ

10. ให้ $X_1, X_2, ..., X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มขนาด n จากการแจกแจงพร้อมด้วยมัชฌิม μ กับความแปรปรวน σ^2 จงแสดงว่า $E(S^2) = (n-1)\sigma^2/n$ ในเมื่อ S^2 เป็นความแปรปรวนของตัวอย่างสุ่ม

11. ให้ U กับ V เป็นสองตัวแปรแบบไคสแควที่อิสระกันพร้อมด้วยองศาแห่งความอิสระ r_1 กับ r_2 ตามลำดับ จงหามัชฌิมและความแปรปรวนของ $F = (r_2U)/(r_1V)$ อะไรคือข้อกำหนดที่ต้องการเกี่ยวกับตัวพารามิเตอร์ r_1 กับ r_2 เพื่อทำให้เชื่อแน่ว่าทั้งมัชฌิมกับความแปรปรวนของ F หาค่าได้

12. ให้ F มีการแจกแจงแบบ F พร้อมด้วยพารามิเตอร์ r_1 กับ r_2 จงพิสูจน์ว่า 1/F มีการแจกแจงแบบ F พร้อมด้วยพารามิเตอร์ r_2 กับ r_1

13. ถ้าหากว่า F มีการแจกแจงแบบ F พร้อมด้วยพารามิเตอร์ $r_1 = 5$ กับ $r_2 = 10$ จงหาค่า a กับ b เพื่อว่า $P(F \leqslant a) = 0.05$ กับ $P(F \leqslant b) = .95$ และ $P(a < F < b) = .90$ (ข้อเสนอแนะทำ $P(F \leqslant a) = P(1/F \geqslant 1/a) = 1 - P(1/F \leqslant 1/a)$ และใช้ผลลัพธ์ของแบบฝึกหัดข้อ 12 และตารางในภาคผนวก)

14. ให้ $T = W/\sqrt{V/r}$ ในเมื่อตัวแปร W กับ V อิสระกันมีการแจกแจงปกติ n(0, 1) กับ $\chi^2(r)$ ตามลำดับ จงแสดงว่า T^2 มีการแจกแจงแบบ F พร้อมด้วย $r_1 = 1$ กับ $r_2 = r$ (ข้อเสนอแนะ T^2 มีการแจกแจงแบบอะไร)

15. จงแสดงว่า

$$Y = \frac{1}{1 + (r_1/r_2)F}$$

ในเมื่อ F มีการแจกแจงแบบ F พร้อมด้วยพารามิเตอร์ r_1 กับ r_2 มีการแจกแจงแบบเบต้า

5.8 สถิติจัดอันดับ (Order Statistics)

มีตัวสถิติอยู่หลายตัวที่พบอยู่บ่อย ๆ ซึ่งในที่นี้เราจะกล่าวเพียงบางตัวและคุณสมบัติของตัวสถิติ

นิยาม ให้ $(X_1, \ldots, X_n)$ เป็นตัวอย่างสุ่มหนึ่งจากตัวแปรเชิงสุ่ม X ตัวสถิติต่อไปนี้ที่สนใจ

(ก) $Y_1 = \min(X_1, \ldots, X_n)$ เรียกว่าตัวอย่างที่เล็กที่สุด (Y_1 ใช้แทนค่าสังเกตที่มีค่าน้อยที่สุด)

(ข) $Y_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ เรียกว่าตัวอย่างที่ใหญ่ที่สุด (Y_n ใช้แทนค่าสังเกตที่มีค่ามากที่สุด)

(ค) $R = Y_n - Y_1$ เรียกว่าพิสัยของตัวอย่าง

ตัวแปรเชิงสุ่ม $Y_i, i = 1, 2, \ldots, n$ เรียกว่าสถิติจัดอันดับที่สมนัยกับตัวอย่างสุ่ม $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ถ้าหากว่า X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่อง เราอาจเขียนได้ว่า $Y_1 < Y_2 < \ldots < Y_n$

ทฤษฎี ให้ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มชนิดต่อเนื่องพร้อมด้วย pdf $f(x)$ กับ cdf $F(x)$ ให้ $X_1, \ldots, X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มของ X และให้ Y_1 กับ Y_n เป็นตัวอย่างที่เล็กที่สุดและใหญ่ที่สุดตามลำดับ แล้ว

(ก) pdf ของ Y_n กำหนดได้โดย $g(y_n) = n\,[F(y_n)]^{n-1} f(y_n)$

(ข) pdf ของ Y_1 กำหนดได้โดย $g(y_1) = n\,[1 - F(y_1)]^{n-1} f(y_1)$

พิสูจน์ โดยใช้ cdf

(ก) ให้ $G(y_n) = P(Y_n \leqslant y_n)$ เป็น cdf ของ $Y_n \{Y_n \leqslant y_n\}$ equivalent กันกับเหตุการณ์ $\{X_i \leqslant y_n, \text{all } i\}$ ดังนั้นเนื่องจากว่าค่า X_i มีความอิสระกัน เราหา

$$\begin{aligned} G(y_n) &= P[X_1 \leqslant y_n \text{ และ } X_2 \leqslant y_n, \ldots \text{ และ } X_n \leqslant y_n] \\ &= P(X_1 \leqslant y_n)\,P(X_2 \leqslant y_n) \ldots P(X_n \leqslant y_n) \end{aligned}$$

$$= F(y_n)\,F(y_n)\,\ldots\,F(y_n)$$
$$= [F(y_n)]^n$$

ดังนั้น $g(y_n) = G'(y_n) = n[F(y_n)]^{n-1} f(y_n)$

(ข) ให้ $G(y_1)$ เป็น cdf ของ Y_1 แล้ว

$$\begin{aligned} G(y_1) &= P(Y_1 \leqslant y_1) = 1 - P(Y_1 > y_1) \\ &= 1 - P[\text{อย่างน้อยหนึ่ง } X_i > y_1] \\ &= 1 - P[X_1 > y_1 \text{ และ } X_2 > y_1 \ldots \text{ และ } X_n > y_1] \\ &= 1 - P(X_1 > y_1)\,P(X_2 > y_1)\ldots P(X_n > y_1) \\ &= 1 - [1 - F(y_1)]\,[1 - F(y_1)]\ldots[1 - F(y_1)] \\ &= 1 - [1 - F(y_1)]^n \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$g(y_1) = G'(y_1) = n\,[1 - F(y_1)]^{n-1} f(y_1)$$

พิสูจน์ โดยวิธีการอื่น ๆ

ให้ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากการแจกแจงชนิดต่อเนื่องมี pdf $f(x)$ มากกว่าศูนย์ $a < X < b$, ศูนย์สำหรับค่าอื่น ๆ ให้ Y_1 เป็นค่าที่เล็กที่สุดของ X_i เหล่านี้ Y_2 เป็นค่าที่เล็กแต่โตกว่า Y_1 ของ $X_i \ldots$ และ Y_n เป็นค่าที่โตที่สุดของ X_i นั่นคือ $Y_1 < Y_2 < \ldots < Y_n$ ใช้แทน $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เมื่อตัวอักษรเรียงกันตามลำดับขนาด เพราะฉะนั้น $Y_i, i = 1, 2, \ldots, n$ เรียกว่า order statistics ที่ i ของตัวอย่างสุ่ม $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ดังนั้น pdf ร่วมของ $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ แสดงได้โดย

$$\begin{aligned} g(y_1, y_2, \ldots, y_n) &= (n!)\,f(y_1)\,f(y_2)\ldots f(y_n), \qquad a < y_1 < y_2 < \ldots < y_n < b \\ &= 0 \qquad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ} \end{aligned}$$

ในที่นี้เราจะพิสูจน์กรณี $n = 3$ แต่ก็สามารถนำไปใช้เป็นแบบทั่ว ๆ ไปได้ ในกรณี

$n = 3$ pdf ร่วมของ X_1, X_2, X_3, เป็น $f(x_1)\,f(x_2)\,f(x_3)$ ดังนั้นเซตของ A ในเมื่อ $f(x_1)\,f(x_2)\,f(x_3) > 0$ คือ ผลรวม (union) ของหกเซตที่ไม่ร่วมกัน

$$A_1 = \{(x_1, x_2, x_3)\,;\, a < x_1 < x_2 < x_3 < b\}$$
$$A_2 = \{(x_1, x_2, x_3)\,;\, a < x_2 < x_1 < x_3 < b\}$$
$$A_3 = \{(x_1, x_2, x_3)\,;\, a < x_1 < x_3 < x_2 < b\}$$
$$A_4 = \{(x_1, x_2, x_3)\,;\, a < x_2 < x_3 < x_1 < b\}$$
$$A_5 = \{(x_1, x_2, x_3)\,;\, a < x_3 < x_1 < x_2 < b\}$$
$$A_6 = \{(x_1, x_2, x_3)\,;\, a < x_3 < x_2 < x_1 < b\}$$

มีทั้งหมดหกเซต เพราะว่าเราสามารถจัดเรียง x_1, x_2, x_3 ได้ $3! = 6$ วิธีการด้วยกัน พิจารณาฟังก์ชัน $y_1 = \min(x_1, x_2, x_3)$, $y_2 =$ ขนาดตัวกลางของ x_1, x_2, x_3 และ $y_3 = \max(x_1, x_2, x_3)$ ฟังก์ชันเหล่านี้นิยามได้เป็นการแปลงจุดต่อจุดซึ่ง map แต่ละเซตของ $A_1, A_2, \ldots, A_6$ ลงบนเซตเดียวกัน $B = \{(y_1, y_2, y_3)\,;\, a < y_1 < y_2 < y_3 < b\}$ inverse functions สำหรับจุดใน A_1 เป็น $x_1 = y_1, x_2 = y_2, x_3 = y_3$ สำหรับจุดใน A_2 $x_1 = y_2, x_2 = y_1, x_3 = y_3$ และต่อ ๆ ไป สำหรับแต่ละเซตที่เหลือของสี่เซต ดังนั้นเราได้

$$J_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad J_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

ค่าสัมบูรณ์ของแต่ละค่าของ $3! = 6$ Jacobians เป็น $+1$ ดังนั้น pdf ร่วมของสาม order statistics $Y_1 = \min(X_1, X_2, X_3)$, $Y_2 =$ ขนาดตัวกลางของ X_1, X_2, X_3; $Y_3 = \max(X_1, X_2, X_3)$ เป็น

$$g(y_1, y_2, y_3) = |J_1|\, f(y_1)\, f(y_2)\, f(y_3) + |J_2|\, f(y_1)\, f(y_2)\, f(y_3) + \ldots + |J_6|\, f(y_1)\, f(y_2)\, f(y_3)$$

$$= (3!)\, f(y_1)\, f(y_2)\, f(y_3) \qquad a < y_1 < y_2 < y_3 < b$$

$$= 0 \qquad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ}$$

ตัวอย่าง ให้ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มชนิดต่อเนื่องมี pdf $f(x) > 0$ และต่อเนื่องใน $a < x < b$ และเป็นศูนย์สำหรับค่าอื่น ๆ ฟังก์ชันการแจกแจง $F(x)$ ของ X กำหนดได้โดย

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leqslant a \\ \int_a^x f(w)\, dw & a < x < b \\ 1 & x \geqslant b \end{cases}$$

ด้วยเหตุนี้จึงมีค่ามัธยฐานค่าเดียวเท่านั้นของการแจกแจง $F(m) = 1/2$ ให้ X_1, X_2, X_3 เป็นตัวอย่างสุ่มจากการแจกแจงนี้และให้ $Y_1 < Y_2 < Y_3$ เป็น order statistics ของตัวอย่าง เราจะคำนวณความน่าจะเป็นที่ $Y_2 \leqslant m$ (m คือ มัธยฐาน) pdf ร่วมของสาม order statistics คือ

$$g(y_1, y_2, y_3) = 6\, f(y_1)\, f(y_2)\, f(y_3) \qquad a < y_1 < y_2 < y_3 < b$$

$$= 0 \qquad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ}$$

pdf ของ Y_2 คือ

$$g(y_2) = 6\, f(y_2) \int_{y_2}^{b} \int_a^{y_2} f(y_1)\, f(y_3)\, dy_1\, dy_3$$

$$= 6\, f(y_2) \int_{y_2}^{b} f(y_3) \left[\int_a^{y_2} f(y_1)\, dy_1 \right] dy_3$$

$$= 6\, f(y_2) \int_{y_2}^{b} f(y_3) \left[F(y_2) - F(a) \right] dy_3$$

$$= 6\, f(y_2)\, F(y_2) \int_{y_2}^{b} f(y_3)\, dy_3$$

$$= 6\, f(y_2)\, F(y_2) \left[F(y_3) \Big|_{y_2}^{b} \right]$$

$$= 6\, f(y_2)\, F(y_2) \left[F(b) - F(y_2) \right]$$

$$= 6\, f(y_2)\, F(y_2) \left[1 - F(y_2) \right] \qquad a < y_2 < b$$

$$= 0 \qquad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ}$$

ดังนั้น

$$P(Y_2 \leqslant m) = 6\int_a^m \{F(y_2)\,f(y_2) - [F(y_2)]^2 f(y_2)\}\,dy_2$$

$$= 6\left\{\frac{[F(y_2)]^2}{2} - \frac{[F(y_2)]^3}{3}\right\}\Big|_a^m = 1/2$$

ให้ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มขนาด n จากการแจกแจงนี้และให้ $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ เป็น order statistics ของตัวอย่างสุ่มนี้ ดังนั้น pdf ร่วมของ $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ เป็น

$$g(y_1, y_2, \ldots, y_n) = n!\,f(y_1)\,f(y_2)\ldots f(y_n) \qquad a < y_1 < y_2 < \ldots < y_n < b$$

$$= 0 \qquad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ}$$

marginal pdf ของ Y_n อาจแสดงในเทอมของฟังก์ชันการแจกแจง F(x) กับ pdf f(x) ได้อย่างไรของตัวแปรเชิงสุ่ม X ถ้า $a < y_n < b$ marginal pdf ของ Y_n กำหนดได้โดย

$$g(y_n) = \int_a^{y_n}\ldots\int_a^{y_4}\int_a^{y_3}\int_a^{y_2} n!\,f(y_1)\,f(y_2)\ldots f(y_n)\,dy_1\,dy_2\ldots dy_{n-1}$$

$$= \int_a^{y_n}\ldots\int_a^{y_4}\int_a^{y_3} n!\left(\int_a^{y_2} f(y_1)\,dy_1\right) f(y_2)\ldots f(y_n)\,dy_2\ldots dy_{n-1}$$

$$= \int_a^{y_n}\ldots\int_a^{y_4}\int_a^{y_3} n!\left[F(y_1)\Big|_a^{y_2}\right] f(y_2)\ldots f(y_n)\,dy_2\ldots dy_{n-1}$$

$$= \int_a^{y_n}\ldots\int_a^{y_4}\int_a^{y_3} n!\,[F(y_2) - F(a)]\,f(y_2)\ldots f(y_n)\,dy_2\ldots dy_{n-1}$$

$$= \int_a^{y_n}\ldots\int_a^{y_4} n!\left[\int_a^{y_3} F(y_2)\,f(y_2)\,dy_2\right] f(y_3)\ldots f(y_n)\,dy_3\ldots dy_{n-1}$$

$$= \int_a^{y_n}\ldots\int_a^{y_4} n!\left[\int_a^{y_3} F(y_2)\,d\,F(y_2)\right] f(y_3)\ldots f(y_n)\,dy_3\ldots dy_{n-1}$$

$$= \int_a^{y_n}\ldots\int_a^{y_4} n!\left\{\frac{[F(y_2)]^2}{2}\Big|_a^{y_3}\right\} f(y_3)\ldots f(y_n)\,dy_3\ldots dy_{n-1}$$

$$= \int_a^{y_n}\ldots\int_a^{y_5} n!\left\{\int_a^{y_4}\frac{[F(y_3)]^2}{2}\,f(y_3)dy_3\right\} f(y_4)\,f(y_n)dy_4\ldots dy_{n-1}$$

$$= \int_a^{y_n} \cdots \int_a^{y_5} n! \frac{[F(y_3)]^3}{3 \cdot 2} \Big|_a^{y_4} f(y_4) \ldots f(y_n) dy_4 \ldots dy_{n-1}$$

$$= \int_a^{y_n} \cdots \int_a^{y_5} n! \frac{[F(y_4)]^3}{3!} f(y_4) \ldots f(y_n) dy_4 \ldots dy_{n-1}$$

ดังนั้น ถ้าเรา integrations ตามลำดับบน $y_4 \ldots y_{n-1}$ จนสำเร็จจะได้

$$g(y_n) = n! \frac{[F(y_n)]^{n-1}}{(n-1)!} f(y_n)$$

$$= n[F(y_n)]^{n-1} f(y_n) \qquad a < y_n < b$$

$$= 0 \qquad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ}$$

ต่อไปเป็นการแสดงถึงการหา marginal pdf ของ Y_1 ในเทอม่ของ $F(x)$ และ $f(x)$ เรามี $a < y_1 < b$

$$g(y_1) = \int_{y_1}^{b} \cdots \int_{y_{n-2}}^{b} \int_{y_{n-1}}^{b} n!\, f(y_1) f(y_2) \ldots f(y_n) dy_n dy_{n-1} \ldots dy_2$$

$$= \int_{y_1}^{b} \cdots \int_{y_{n-3}}^{b} \int_{y_{n-2}}^{b} n!\, f(y_1) f(y_2) \ldots f(y_{n-1}) \left[\int_{y_{n-1}}^{b} f(y_n)\, dy_n \right] dy_{n-1} \ldots dy_2$$

$$= \int_{y_1}^{b} \cdots \int_{y_{n-3}}^{b} \int_{y_{n-2}}^{b} n!\, f(y_1) f(y_2) \ldots f(y_{n-1}) \left[F(y_n) \Big|_{y_{n-1}}^{b} \right] dy_{n-1} \ldots dy_2$$

$$= \int_{y_1}^{b} \cdots \int_{y_{n-3}}^{b} \int_{y_{n-2}}^{b} n!\, f(y_1) f(y_2) \ldots f(y_{n-1}) [1 - F(y_{n-1})]\, dy_{n-1} \ldots dy_2$$

$$= \int_{y_1}^{b} \cdots \int_{y_{n-3}}^{b} n!\, f(y_1) f(y_2) \ldots f(y_{n-2}) \int_{y_{n-2}}^{b} [1 - F(y_{n-1})]\, f(y_{n-1}) dy_{n-1}]$$
$$dy_{n-2} \ldots dy_2$$

$$= \int_{y_1}^{b} \cdots \int_{y_{n-3}}^{b} n!\, f(y_1) f(y_2) \ldots f(y_{n-2}) \left[\frac{-\{1 - F(y_{n-1})\}^2}{2} \Big|_{y_{n-2}}^{b} \right]$$
$$dy_{n-2} \ldots dy_2$$

$$= \int_{y_1}^{b} \cdots \int_{y_{n-3}}^{b} n!\, f(y_1) \ldots f(y_{n-2}) \frac{[1 - F(y_{n-2})]^2}{2} dy_{n-2} \ldots dy_2$$

ภายหลังสำเร็จการ integration เราได้

$$g(y_1) = n[1 - F(y_1)]^{n-1} f(y_1) \qquad a < y_1 < b$$
$$= 0 \qquad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ}$$

ข้อสังเกต

$$\int_a^x [F(w)]^{\alpha-1} f(w)\,dw = \frac{[F(x)]^{\alpha}}{\alpha}, \ \alpha > 0$$

และ

$$\int_y^b [1 - F(w)]^{\beta-1} f(w)\,dw = \frac{[1 - F(y)]^{\beta}}{\beta}, \ \beta > 0$$

การแสดงหา marginal pdf ของสถิติจัดอันดับใด ๆ สมมติให้เป็น Y_k ในเทอมของ $F(x)$ และ $f(x)$ นี้ทำได้โดยการ integral

$$g(y_k) = \int_a^{y_k} \cdots \int_a^{y_2} \int_{y_k}^{b} \cdots \int_{y_{n-1}}^{b} n!\, f(v_1) f(y_2) \ldots f(y_n) dy_n \ldots dy_{k+1} dy_1 \ldots dy_{k-1}$$

ผลลัพธ์คือ

$$g(y_k) = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} [F(y_k)]^{k-1} [1 - F(y_k)]^{n-k} f(y_k), \qquad a < y_k < b$$
$$= 0 \qquad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ}$$

pdf ร่วมของสอง สถิติจัดอันดับ โดยให้ $Y_i < Y_j$ แสดงอยู่ในเทอมของ $F(x)$ และ $f(x)$ เราจะได้ว่า

$$g(y_i, y_j) = \int_a^{y_i} \cdots \int_a^{y_2} \int_{y_i}^{y_j} \cdots \int_{y_{j-1}}^{y_j} \int_{y_j}^{b} \cdots \int_{y_{n-1}}^{b} n!\, f(y_1) \ldots f(y_n) dy_n \ldots dy_{j+1}$$
$$dy_{j-1} \ldots dy_{i+1} dy_1 \ldots dy_{i-1}$$

เนื่องจากว่า $\alpha > 0$

$$\int_x^y [F(y) - F(w)]^{\alpha - 1} f(w)\, dw = \left. \frac{-[F(y) - F(w)]^{\alpha}}{\alpha} \right|_x^y$$

$$= \frac{[F(y) - F(x)]^{\alpha}}{\alpha}$$

ดังนั้นเราคำนวณหาได้

$$g(y_i, y_j) = \frac{n!}{(i-1)!\,(j-i-1)!\,(n-j)!} [F(y_i)]^{i-1} [F(y_j) - F(y_i)]^{j-i-1}$$

$$[1 - F(y_j)]^{n-j} \; f(y_i)\, f(y_j) \qquad a < y_i < y_j < b,$$

$$= 0 \qquad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ}$$

ตัวอย่าง 1 ให้ $Y_1 < Y_2 < Y_3 < Y_4$ เป็นสถิติจัดอันดับของตัวอย่างสุ่มขนาด 4 จากการแจกแจงมี pdf

$$f(x) = 2x \qquad 0 < x < 1$$

$$= 0 \qquad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ}$$

เราต้องการหา pdf ของ Y_3 ในเทอมของ $f(x)$ กับ $F(x)$ และแล้วคำนวณ $P(Y_3 > 1/2)$ ในที่นี้ $F(x) = x^2, 0 < x < 1$ ดังนั้น

$$g(y_3) = \frac{4!}{2!\ 1!} \quad (y_3^2)^2(1 - y_3^2)(2y_3) \qquad 0 < y_3 < 1$$

$$= 0 \qquad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ}$$

ดังนั้น

$$P(Y_3 > 1/2) = \int_{1/2}^{\infty} g(y_3)\, dy_3$$

$$= \int_{1/2}^{1} 24(y_3^5 - y_3^7)\, dy_3$$

$$= \frac{243}{256}$$

ตัวอย่าง 2 ให้ $Y_1 < Y_2 < \ldots < Y_5$ เป็นสถิติจัดอันดับของตัวอย่างสุ่มขนาด 5 จากการแจกแจงมี pdf

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-x} && 0 < x < \infty \\ &= 0 && \text{สำหรับค่าอื่น ๆ} \end{aligned}$$

จงแสดงว่าตัวสถิติ $Z_1 = Y_2$ กับ $Z_2 = Y_4 - Y_2$ มีความอิสระกันเนื่องจากว่า $F(x) = 1 - e^{-x}$, $0 < x < \infty$ pdf ร่วมของ Y_2 กับ Y_4 คือ

$$\begin{aligned} g(y_2, y_4) &= \frac{5!}{1!\ 1!\ 1!}(1 - e^{-y_2})(e^{-y_2} - e^{-y_4})(e^{-y_4})e^{-y_2-y_4} && 0 < y_2 < y_4 < \infty \\ &= 0 && \text{สำหรับค่าอื่น ๆ} \end{aligned}$$

การแปลง $z_1 = y_2$, $z_2 = y_4 - y_2$ map เซต $\{(y_2, y_4);\ 0 < y_2 < y_4 < \infty\}$ ลงบนเซต $\{(z_1, z_2); 0 < z_1 < \infty, 0 < z_2 < \infty\}$ และ Jacobian ของการแปลงมีค่าเป็น 1 ดังนั้น pdf ร่วมของ Z_1 กับ Z_2 คือ

$$\begin{aligned} h(z_1, z_2) &= 120e^{-4z_1}(1 - e^{-z_1})e^{-2z_2}(1 - e^{-z_2}), && 0 < z_1 < \infty, 0 < z_2 < \infty \\ &= 0 && \text{สำหรับค่าอื่น ๆ} \end{aligned}$$

(เพราะฉะนั้น Z_1 กับ Z_2 มีความอิสระกัน)

หา marginal pdf ของ Z_1 กับ Z_2 ได้

$$\begin{aligned} h(z_1) &= \int_0^\infty 120e^{-4z_1}(1 - e^{-z_1})e^{-2z_2}(1 - e^{-z_2})dz_2 \\ &= 120e^{-4z_1}(1 - e^{-z_1}) \int_0^\infty e^{-2z_2}(1 - e^{-z_2})dz_2 \end{aligned}$$

$$= 120e^{-4z_1}(1-e^{-z_1})\int_0^{\infty}(e^{-2z_2}-e^{-3z_2})\,dz_2$$

$$= 120e^{-4z_1}(1-e^{-z_1})\left\{\left|-\frac{e^{-2z_2}}{2}+\frac{e^{-3z_2}}{3}\right|_0^{\infty}\right\}$$

$$= 120e^{-4z_1}(1-e^{-z_1})(3e^{-0}-2e^{-0})/6 = 20e^{-4z_1}(1-e^{-z_1})$$

$$h(z_2) = \int_0^{\infty}120e^{-4z_1}(1-e^{-z_1})e^{-2z_2}(1-e^{-z_2})\,dz_1$$

$$= 120e^{-2z_2}(1-e^{-z_2})\int_0^{\infty}e^{-4z_1}(1-e^{-z_1})\,dz_1$$

$$= 120e^{-2z_2}(1-e^{-z_2})\int_0^{\infty}(e^{-4z_1}-e^{-5z_1})\,dz_1$$

$$= 120e^{-2z_2}(1-e^{-z_2})\left\{\left|-\frac{e^{-4z_1}}{4}+\frac{e^{-5z_1}}{5}\right|_0^{\infty}\right\}$$

$$= \frac{120}{20}e^{-2z_2}(1-e^{-z_2})(5-4) = 6e^{-2z_2}(1-e^{-z_2})$$

$$h(z_1, z_2) = h(z_1)\,h(z_2)$$

$$= 20e^{-4z_1}(1-e^{-z_1})\,6e^{-2z_2}(1-e^{-z_2})$$

$$= 120e^{-4z_1}(1-e^{-z_1})\,e^{-2z_2}(1-e^{-z_2})$$

ตัวอย่าง 3 ให้ Y_1, Y_2, Y_3 เป็นสถิติจัดอันดับของตัวอย่างสุ่มขนาด 3 จากการแจกแจงมี pdf

$$f(x) = 1 \qquad 0 < x < 1$$

$$= 0 \qquad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ}$$

ต้องการหา pdf **ของพิสัยของตัวอย่าง** $Z_1 = Y_3 - Y_1$ **เนื่องจากว่า** $F(x) = x, 0 < x < 1$ pdf **ร่วมของ** Y_1 **กับ** Y_3 **คือ**

$$g(y_1, y_3) = 6(y_3 - y_1) \qquad 0 < y_1 < y_3 < 1$$

$= 0$ สำหรับค่าอื่น ๆ

$Z_1 = Y_3 - Y_1$ ให้ $Z_2 = Y_3$ เราพิจารณาฟังก์ชัน $z_1 = y_3 - y_1, z_2 = y_3$ และ inverses ของมัน $y_1 = z_2 - z_1, y_3 = z_2$ ดังนั้น Jacobian ที่สมนัยกันของการแปลงจุดต่อจุดคือ

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial z_1} & \frac{\partial y_1}{\partial z_2} \\ \frac{\partial y_3}{\partial z_1} & \frac{\partial y_3}{\partial z_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

ดังนั้น pdf ร่วมของ Z_1 กับ Z_2 คือ

$$h(z_1, z_2) = |-1|\, 6z_1 = 6z_1 \qquad 0 < z_1 < z_2 < 1$$

$$= 0 \qquad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ}$$

เพราะฉะนั้น pdf ของ $Z_1 = Y_3 - Y_1$ ของตัวอย่างสุ่มขนาด 3 คือ

$$h(z_1) = \int_{z_1}^{1} 6z_1\, dz_2 = 6z_1(1 - z_1) \qquad 0 < z_1 < 1$$

$$= 0 \qquad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ}$$

ตัวอย่าง 4 (กรณีตัวแปรเชิงสุ่มไม่ต่อเนื่อง)

ให้ $f(x) = 1/6, x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ศูนย์สำหรับค่าอื่น ๆ เป็น pdf ของการแจกแจงชนิดไม่ต่อเนื่อง จงแสดงว่า pdf ของรายการที่มีค่าน้อยที่สุดของตัวอย่างสุ่มขนาด 5 จากการแจกแจงนี้ คือ

$$g(y_1) = \left(\frac{7 - y_1}{6}\right)^5 - \left(\frac{6 - y_1}{6}\right)^5, \; y_1 = 1, 2, \ldots, 6$$

$$= 0 \qquad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ}$$

เนื่องจากว่า

$$f(x) = 1/6 \qquad x = 1, 2, 3, \ldots, 6$$

และ cdf ของ X คือ

$$F(x) = \frac{x}{6}, \; x = 1, 2, 3, \ldots, 6$$

ดังนั้น cdf ของ Y_1

$$G(y_1) = 1 - [1 - F(y_1)]^n = 1 - \left[1 - \frac{y_1}{6}\right]^n$$

และ

$$g(y_1) = \{1 - [1 - F(y_1)]^n\} - \{1 - [1 - F(y_1 -)]^n\}$$

$$= \left\{1 - \left[1 - \frac{y_1}{6}\right]^5\right\} - \left\{1 - \left[1 - \frac{y_1 - 1}{6}\right]^5\right\}$$

$$= \left[1 - \frac{y_1 - 1}{6}\right]^5 - \left[1 - \frac{y_1}{6}\right]^5$$

$$= \left(\frac{7 - y_1}{6}\right)^5 - \left(\frac{6 - y_1}{6}\right)^5, \; y_1 = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

$= 0$ สำหรับค่าอื่น ๆ

ตัวอย่าง 5 สมมติว่า X มีการแจกแจงแบบเรขาคณิตพร้อมด้วยพารามิเตอร์ P ให้ $X_1, \ldots X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจาก X และให้ Y_n เป็นตัวอย่างที่ใหญ่ที่สุด Y_1 เป็นตัวอย่างที่เล็กที่สุด จงหาการแจกแจงความน่าจะเป็นของ Y_n กับ Y_1

$$f(x) = pq^{x-1} \qquad x = 1, 2, \ldots$$

$= 0$ สำหรับค่าอื่น ๆ

$$F(x) = \sum_{\omega = 1}^{x} pq^{\omega - 1}$$

$$= p\left[1 + q + q^2 + \dots + q^x\right]$$

$$= p\left[\frac{1(q^x - 1)}{q - 1}\right]$$

$$= -(q^x - 1) = 1 - q^x$$

cdf ของ Y_n

$$G(y_n) = [F(y_n)]^n$$

$$= (1 - q^{y_n})^n$$

และ pdf ของ Y_n

$$g(y_n) = [F(y_n)]^n - [F(y_n - 1)]^n$$

$$= (1 - q^{y_n})^n - (1 - q^{y_n - 1})^n$$

cdf ของ Y_1

$$G(y_1) = 1 - [1 - F(y_1)]^n$$

$$= 1 - [1 - (1 - q^{y_1})]^n$$

และ pdf ของ Y_1

$$g(y_1) = \{1 - [1 - F(y_1)]^n\} - \{1 - [1 - F(y_1 - 1)]^n\}$$

$$= 1 - [1 - (1 - q^{y_1})]^n - 1 + [1 - (1 - q^{y_1 - 1})]^n$$

$$= [1 - (1 - q^{y_1 - 1})]^n - [1 - (1 - q^{y_1})]^n$$

$$= (q^{y_1 - 1})^n - (q^{y_1})^n$$

$$= q^{ny_1 - n} - q^{ny_1}$$

$$= q^{ny_1 - n}(1 - q^n)$$

แบบฝึกหัด

1. ให้ $Y_1 < Y_2 < Y_3 < Y_4$ เป็นสถิติจัดอันดับของตัวอย่างสุ่มขนาด 4 จากการแจกแจงมี pdf $f(x) = e^{-x}, 0 < x < \infty$ ศูนย์สำหรับค่าอื่น ๆ จงหา $P(3 \leqslant Y_4)$

2. ให้ X_1, X_2, X_3 เป็นตัวอย่างสุ่มจากการแจกแจงของชนิดต่อเนื่องมี pdf $f(x) = 2x, 0 < x < 1$ ศูนย์สำหรับค่าอื่น ๆ จงคำนวณหาความน่าจะเป็นที่ค่าเล็กที่สุดของ X_i เหล่านี้มากกว่ามัธยฐานของการแจกแจง

3. ให้ $Y_1 < Y_2 < \ldots < Y_5$ เป็นสถิติจัดอันดับของตัวอย่างสุ่มขนาด 5 จากการแจกแจงมี pdf $f(x) = 3x^2, 0 < x < 1$, ศูนย์สำหรับค่าอื่น ๆ จงแสดงว่า $Z_1 = Y_2/Y_4$ กับ $Z_2 = Y_4$ มีความอิสระกัน

4. จงหาความน่าจะเป็นที่พิสัยของตัวอย่างสุ่มขนาด 4 จากการแจกแจงแบบสม่ำเสมอ (uniform) มี pdf $f(x) = 1, 0 < x < 1$ ศูนย์สำหรับค่าอื่น ๆ ว่าน้อยกว่า 1/2

5. ถ้าหากว่าตัวอย่างสุ่มขนาด 2 ได้มาจากการแจกแจงมี pdf $f(x) = 2(1 - x), 0 < x < 1$ ศูนย์สำหรับค่าอื่น ๆ จงคำนวณความน่าจะเป็นที่ตัวอย่างหนึ่ง โตเป็นอย่างน้อยสองเท่าของอีกตัวอย่างหนึ่ง

6. ให้ $Y_1 < Y_2$ เป็นสถิติจัดอันดับของตัวอย่างสุ่มขนาด 2 จาก $n(0, \sigma^2)$ จงแสดงว่า $E(Y_1) = -\sigma/\sqrt{\pi}$

5.9 The Law of Large Numbers

กำหนดให้จำนวนของการทดลองซ้ำ ๆ กันเพิ่มขึ้นแล้ว f_A เป็นความถี่สัมพัทธ์ของเหตุการณ์ A ก็จะ Converges เข้าสู่ความน่าจะเป็น P(A) ดังตัวอย่าง ถ้าหากว่าผลิตสินค้าใหม่ชนิดหนึ่ง ซึ่งเราไม่ทราบว่าจะเสียเท่าไร เราสามารถดำเนินการได้โดยการตรวจสอบสินค้าเหล่านี้ จำนวนมาก ๆ (N) นับจำนวนสินค้าที่เสียเหล่านี้ (n) แล้วเราใช้ n/N ประมาณความน่าจะเป็น ของสินค้าเสีย จำนวน n/N คือตัวแปรเชิงสุ่มและค่าตัวแปรขึ้นอยู่กับของสองสิ่งหนึ่ง ค่าของ n/N ขึ้นอยู่กับความน่าจะเป็น p ที่สินค้าเสีย สอง n/N ขึ้นอยู่กับ N เฉพาะที่เราตรวจสอบ สิ่งที่เราต้องแสดงก็คือว่าวิธีการเลือกสิ่งของ N สิ่งโดยสุ่มแล้วค่าผลลัพธ์ n/N ก็จะเข้าใกล้ p (การเลือกค่า N โดยสุ่มนี้สำคัญมาก ถ้าหากว่าเราต้องเลือกสิ่งของเหล่านั้น ซึ่งแสดงถึง ข้อบกพร่องบางอย่าง อย่างเช่น เราอาจมีอคติเกี่ยวกับการคำนวณตัวเลขของเราอย่างมาก)

การใช้ Chebyshev's inequality ทำให้เราสามารถพิสูจน์ผลลัพธ์ข้างต้นได้ เรามาพิจารณา ตัวอย่างหนึ่ง สมมติว่าความน่าจะเป็นของการทำงานได้ดีของจรวดนำวิถีในระยะเวลาดำเนินงาน เป็น .95 ถ้าหากว่าเราต้องการแก้ N จรวดนำวิถีซึ่งมีความเชื่อถือได้ตามที่กล่าวข้างต้นและถ้า X เป็นจำนวนจรวดที่ทำงานไม่ได้ดี เราได้ว่า $E(X) = 0.05$ N เนื่องจากว่าเราอาจสมมติให้ X เป็นการแจกแจงทวินาม นั่นคือ เราคาดหวังว่าจรวด 20 เครื่อง จะทำงานไม่ได้ดี 1 เครื่อง ขณะที่ N เป็นจำนวนของจรวดที่ต้องใช้มีจำนวนเพิ่มขึ้น จำนวนที่ทำงานไม่ได้ดี X ทั้งหมด หารด้วย N ควรจะ Converge เข้าสู่ 0.05 ผลลัพธ์นี้สามารถกล่าวให้แน่ชัดยิ่งขึ้น ได้จาก Law of Large Numbers ดังตัวอย่าง ให้ ε เป็นการทดลองหนึ่งและให้ A เป็นเหตุการณ์หนึ่งที่สัมพันธ์ กับ ε พิจารณาการกระทำซ้ำ ๆ กัน n ครั้งที่มีความอิสระกันของการทดลอง ε ให้ x เป็น จำนวนครั้งของ A เกิดขึ้นระหว่างการกระทำ n ครั้ง ให้ $f_A = x/n$ และ $P(A) = p$ ซึ่งมีค่าเหมือน กันหมดสำหรับการกระทำทั้งหมดแล้ว สำหรับทุก ๆ หมายเลข c ที่มีค่ามากกว่าศูนย์เราได้

$$P[|f_A - p| \geqslant c] \leqslant \frac{p(1-p)}{nc^2}$$

หรือ

$$P[|f_A - p| < c] \geqslant 1 - \frac{p(1-p)}{nc^2} \qquad \text{..........(1)}$$

พิสูจน์

ให้ X เป็นจำนวนครั้งของเหตุการณ์ A เกิดขึ้น นี้เป็นตัวแปรเชิงสุ่มทวินาม ดังนั้น $E(X) = np, V(X) = np(1 - p)$ สำหรับ $f_A = x/n, E(f_A) = p, V(f_A) = p(1 - p)/n$ ใช้ Chebyshev's inequality กับตัวแปรเชิงสุ่ม f_A เราได้

$$P\left[|f_A - p| < k\sqrt{\frac{p(1 - p)}{n}}\right] \geqslant 1 - \frac{1}{k^2}$$

ให้ $c = k\sqrt{p(1 - p)/n}$ แล้ว $k^2 = (nc^2)/[p(1 - p)$ ดังนั้น

$$P[|f_A - p| < c] \geqslant 1 - \frac{p(1 - p)}{nc^2}$$

ข้อสังเกต

ก. จากผลลัพธ์ข้างต้นอาจจะกล่าวได้อีกรูปหนึ่งที่เหมือนกันดังเช่น
$\lim_{n\to\infty} P[|f_A - p| < c] = 1$ สำหรับ c ทั้งหมดมากกว่าศูนย์นี้หมายความว่า
ความถี่สัมพัทธ์ f_A Converges เข้าสู่ P(A)

ข. ข้อสังเกตที่สำคัญก็คือว่าความแตกต่างระหว่าง Convergence ที่ได้กล่าวมาข้างต้น (เรียกว่า Convergence ในรูปของความน่าจะเป็น) กับชนิด Convergence ที่ได้อ้างอิงในแคลลูลัสบ่อย เมื่อไรเราพูดว่า 2^{-n} Converge เข้าสู่ศูนย์ขณะที่ $n\to\infty$ เราหมายความว่า n ใหญ่พอ 2^{-n} จะเข้าใกล้ศูนย์เมื่อไรเรากล่าวว่า $f_A = x/n$ Converges เข้าสู่ P(A) เราหมายความว่าความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ $\{|\frac{x}{n} - P(A)| < c\}$ สามารถทำให้เข้าใกล้หนึ่งโดยที่ n ใหญ่พอ

ค. การคำนวณหารูปอื่น ๆ ของ Law of Large Numbers เมื่อไรเราต้องการ อย่างเช่น จำนวนครั้งของการทดลอง ε ที่เราดำเนินการทดลองเพื่อให้มีความน่าจะเป็นอย่างน้อย 0.95 เป็นเท่าไร ความถี่สัมพัทธ์แตกต่างไปจาก p = P(A) น้อยกว่า 0.01 เป็นเท่าไร นั่นคือสำหรับ c = 0.01 เราต้องการเลือก n เพื่อว่า $1 - p(1 - p)/[n(.01)^2]$

$= .95$ เราได้ $n = p(1-p)/(0.01)^2(.05)$ แทนค่าของ .05 กับ .01 ด้วย δ กับ c ตามลำดับ เราได้

$$P[|f_A - p| < c] \geqslant 1 - \delta \text{ เมื่อไรก็ตาม } n \geqslant \frac{p(1-p)}{c^2\delta}$$

ขอย้ำว่า $n \geqslant p(1-p)/c^2\delta$ ไม่ได้ประกันอะไรเลยเกี่ยวกับ $|f_A - p|$ เพียงแต่ $|f_A - p|$ น่าจะมีค่าน้อย

ตัวอย่าง 1 เราจะต้องทอดลูกเต๋าที่สมดุลลูกหนึ่งกี่ครั้งเพื่อที่จะทำให้เชื่อแน่ว่า 95% ที่ความถี่สัมพัทธ์ของการปรากฏหน้าหกอยู่ภายใน 0.01 ของความน่าจะเป็นตามทฤษฎีเป็น 1/6

ในที่นี้ $p = 1/6$, $1-p = 5/6$, $c = 0.01$ และ $\delta = 0.05$ ดังนั้น จากความสัมพัทธ์นี้เราพบว่า $n \geqslant (1/6)(5/6)/(0.01)^2(.05) = 27{,}778$

ข้อสังเกต

ก. f_A เป็นตัวแปรเชิงสุ่มและไม่เพียงแต่เป็นค่าสังเกต ถ้าหากว่าเราทอดลูกเต๋าจริง ๆ 27,778 ครั้งและแล้วคำนวณความถี่สัมพัทธ์ของการปรากฏหน้าหก หมายเลขนี้อยู่ภายในหรือไม่อยู่ภายใน 0.01 ของ 1/6 อย่างใดอย่างหนึ่ง จุดของตัวอย่างข้างต้นคือว่าเราทอดลูกเต๋าหนึ่งลูก 27,778 ครั้งในแต่ละ 100 โอกาสมีอยู่ 95 โอกาสที่ความถี่สัมพัทธ์ควรจะอยู่ภายใน 0.01 ของ 1/6

ข. มีอยู่หลาย ๆ ปัญหาที่เราไม่ทราบค่า $p = P(A)$ ดังนั้นจึงไม่สามารถใช้ขอบเขตข้างต้นเกี่ยวกับ n ในกรณีเช่นนั้น เราสามารถใช้หลักความจริงที่ว่า $p(1-p)$ สมมติให้เป็นค่าที่มีค่ามากที่สุดเมื่อ $p = 1/2$ และค่ามากที่สุดนี้เท่ากับ 1/4 ดังนั้น หากเราต้องการด้านความปลอดภัยแน่ ๆ เราควรให้ $n \geqslant 1/4c^2\delta$ เราจะได้

$$P[|f_A - p| < \varepsilon] \geqslant 1 - \delta$$

ตัวอย่าง 2 ผลิตสินค้าต้องการให้ความน่าจะเป็นของสินค้าเสียเป็น p (สมมติว่าไม่ทราบ) แยกประเภทสินค้าจำนวนมาก n เป็นดีกับเสีย n จะมีขนาดใหญ่เท่าไร เพื่อว่าเราอาจเชื่อได้ 99 เปอร์เซ็นต์ที่ความถี่สัมพัทธ์ของสินค้าเสียแตกต่างไปจาก p น้อยกว่า .05

เนื่องจากว่าเราไม่ทราบค่าของ p เราต้องใช้รูปแบบล่าสุดของ Law of Large Numbers พร้อมด้วย $c = 0.05$, $\delta = 0.01$ เราพบว่า หาก $n \geqslant 1/4\,(0.05)^2\,(.01) = 10{,}000$ ซึ่งเป็นเงื่อนไขที่น่าพอใจ

ในตัวอย่างสำหรับ Chebyshev's inequality เราจะพบความรู้เพิ่มเติมนั้นเกี่ยวกับการแจกแจงความน่าจะเป็นที่จะให้ข้อความที่ได้รับการปรับปรุง อย่างเช่น เราอาจเลือกทำการทดลองจำนวนครั้งน้อยลงแต่ยังใช้ข้อความอย่างเดิมในการประมาณ p ด้วย f_A

ข้อสังเกต

รูปแบบอื่น ๆ ของ Law of Large Numbers อาจหาได้ดังนี้ สมมติว่า $X_1, X_2, \ldots X_n$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่มอิสระกันมีการแจกแจงเหมือนกันพร้อมด้วยมัชฌิม $E(X_i) = \mu$ กับความแปรปรวน $V(X_i) = \sigma^2$ กำหนดให้ $\bar{X} = (1/n)(X_1 + \ldots + X_n)$, $\bar{X}$ เป็นฟังก์ชันของ $X_1, \ldots, X_n$ และเป็นตัวแปรเชิงสุ่ม จากคุณสมบัติของค่าคาดหวังและความแปรปรวน $E(\bar{X}) = \mu$ กับ $V(\bar{X}) = \sigma^2/n$ ตามลำดับให้เราใช้ Chebyshev's inequality กับตัวแปรเชิงสุ่ม $\bar{X}$

$$P\left[|\bar{X} - \mu| < \frac{k\sigma}{\sqrt{n}}\right] \geqslant 1 - \frac{1}{k^2}$$

ให้ $k\sigma/\sqrt{n} = c$ แล้ว $k = \sqrt{n}\,c/\sigma$ และเราอาจเขียน

$$P\left[|\bar{X} - \mu| < c\right] \geqslant 1 - \frac{\sigma^2}{nc^2} \qquad \ldots\ldots\ldots(2)$$

ขณะ $n \to \infty$ ด้านขวามือของ inequality ข้างต้นเข้าใกล้หนึ่ง ในความหมายแสดงว่ามัชฌิมเลขคณิต $\bar{X}$ "Converge" เข้าสู่ E(X)

ตัวอย่าง 3 ทดสอบหลอด electronic จำนวนมาก ให้ T_i เป็นเวลาของหลอด electronic ที่ i เสียไป สมมติว่าหลอด electronic ทั้งหมดได้มาจากคลังเก็บสินค้าและหลอด electronic ทุกหลอดสมมติว่ามีการแจกแจงแบบเอกซ์โพเน้นเชียลพร้อมด้วยพารามิเตอร์ α ที่เหมือนกัน

ดังนั้น $E(T_i) = \alpha^{-1}$ ให้ $\bar{T} = (T_1 + \ldots + T_n)/n$ รูปแบบข้างต้นของ Law of Large Numbers กล่าวไว้ว่า หาก n ใหญ่พอค่าที่คำนวณได้สำหรับมัชฌิมเลขคณิต $\bar{X}$ ของเวลาหลอด electronic เสียไป จำนวนมากควรจะเข้าใกล้ α^{-1}

ตัวอย่าง 4 สมมติว่าคะแนนจากการทดสอบเป็น −8, −1, −1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 8, จงพิสูจน์ว่าคะแนนจากการทดสอบจะอยู่ที่หรือภายใน 2 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของ $\bar{X}$ มากกว่า 3/4 และผลจากการทดสอบจะอยู่ที่หรือภายใน 3 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของ $\bar{X}$ มากกว่า 8/9

วิธีทำ

$$\mu = \frac{\Sigma X}{N} = \frac{-8-1-1+0+0+0+0+1+1+8}{10}$$

$$= 0$$

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma(x-\mu)^2}{10} = \frac{(-8)^2 + (-1)^2 + \ldots + (1)^2 + (8)^2}{10}$$

$$= \frac{132}{10} = 13.2$$

$$\sigma = 3.6$$

ช่วงที่จะบรรจุคะแนนจากการทดสอบทั้งหมดจะอยู่ที่หรือภายใน 2 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานจากมัชฌิมขยายจาก −7.2 ถึง +7.2 มีคะแนนทดสอบ 80% (มากกว่า 3/4 ของคะแนนทั้งหมด) ช่วงขยาย 3 ส่วน เบี่ยงเบนมาตรฐานจากมัชฌิมออกไปทั้งสองทิศทางจาก −10.8 ถึง +10.8 จะมีคะแนนทดสอบ 100% (ดังนั้นมากกว่า 8/9)

ตัวอย่าง 5 ประชากรประกอบด้วย 10,000 ครอบครัว มีรายได้รายปี 5,000 บาท ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 750 บาท ตามกฎ Chebyshev's inequality ความกว้างของช่วงจะเป็นเท่าไร ขณะที่มัชฌิมตัวอย่าง $\bar{X}$ ตกอยู่ด้วยความน่าจะเป็นอย่างน้อย 8/9 ถ้าตัวอย่างสุ่มขนาด 100 เลือกจากประชากรแบบหยิบแล้วไม่ใส่คืน

วิธีทำ

$$N = 10{,}000, \mu = 5{,}000, \sigma = 750$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{750}{10}\sqrt{\frac{10000-100}{10000-1}} = 74.63$$

จาก Chebyshev's inequality

$$P\left[|\bar{X} - \mu| \leqslant k\,\sigma_{\bar{x}}\right] \geqslant 1 - \frac{1}{k^2} = \frac{8}{9}$$

$$k = 3$$

$$P\left[-k\sigma_{\bar{x}} \leqslant \bar{X} - \mu \leqslant k\sigma_{\bar{x}}\right] \geqslant \frac{8}{9}$$

$$P\left[(-3)(74.63) \leqslant \bar{X} - 5000 \leqslant (3)(74.63)\right] \geqslant 8/9$$

$$P\left[5000 - 223.89 \leqslant \bar{X} \leqslant 5000 + 223.89\right] \geqslant 8/9$$

$$P\left[4776.11 \leqslant \bar{X} \leqslant 5223.89\right] \geqslant 8/9$$

ตัวอย่าง 6 ให้ค่าของ X สมนัยกับแต่ละบุคคลในประชากรหนึ่ง โดยเฉพาะในที่ซึ่งมีรายได้ประจำปีมีหน่วยหมื่นบาท สมมติว่า $\mu = 6.5, \sigma = 2.1$ เลือกตัวอย่างสุ่มหนึ่งขนาด n คน แบบหยิบแล้วใส่คืนจากประชากรนี้และค่าของ $\bar{X}$ เป็นมัชฌิมของรายได้ n บุคคล เราต้องการความน่าจะเป็นที่มากกว่า 0.9 ที่ค่า $\bar{X}$ นี้แตกต่างไปจาก μ อย่างมาก 0.5 ตัวอย่างต้องมีขนาดเท่าใด

วิธีทำ จาก Chebyshev's inequality

$$P[|\bar{X} - \mu| \leq k\sigma_{\bar{x}}] \geq 1 - \frac{1}{k^2} = .90$$

$$\therefore \frac{1}{k^2} = 0.10, k^2 = 10, \sigma = 2.1$$

และ $k\sigma_{\bar{x}} = 0.5 \quad , k^2\sigma^2_{\bar{x}} = 0.25$

$$k^2 \frac{\sigma^2}{n} = 0.25$$

$$n = \frac{k^2\sigma^2}{0.25} = \frac{(10)(2.1)^2}{0.25}$$

$$= 176.4 = 176$$

5.10 การประมาณการแจกแจงทวินามด้วยการแจกแจงปกติ

Law of Large Numbers ตามที่ได้กล่าวข้างต้นมีความเกี่ยวข้องกับตัวแปรเชิงสุ่มทวินาม X สำหรับ X กำหนดให้เป็นจำนวนของความสำเร็จในการทดลองซ้ำ ๆ ที่อิสระกัน n ครั้ง เราต้องการยอมรับความสัมพันธ์ของความสำเร็จที่เกิดขึ้นของเหตุการณ์ A ดังนั้นผลลัพธ์ข้างต้น อาจกล่าวได้ว่าขณะที่จำนวนของการทดลองซ้ำ ๆ กันเพิ่มขึ้น ความถี่สัมพัทธ์ของความสำเร็จ x/n จะ converge เป็นความน่าจะเป็นของความสำเร็จ p อย่างไรก็ตาม เป็นที่ทราบกันว่า x/n จะเข้าใกล้ p สำหรับ n มีค่ามากหรือใหญ่แต่ไม่ได้บอกเราว่าความใกล้ชิดจะมีความสำเร็จแค่ไหน เพื่อที่จะตรวจสอบคำถามเราต้องศึกษาการแจกแจงความน่าจะเป็นของ X เมื่อไร n มีค่ามากหรือใหญ่

สำหรับตัวอย่าง สมมติว่ากระบวนการผลิตเครื่องซักผ้ามีอยู่ประมาณ 5 เปอร์เซ็นต์ที่เสีย ถ้าหากว่าตรวจสอบเครื่องซักผ้า 100 เครื่อง จงหาความน่าจะเป็นที่เครื่องซักผ้าเสียน้อยกว่า 4 เครื่อง

ให้ X เป็นจำนวนเครื่องซักผ้าเสีย จาก Law of Large Numbers กล่าวไว้ว่า X/100 เข้า

ใกล้ 0.05 แต่อย่างไรก็ตามกฎก็ยังไม่ได้บอกเราถึงวิธีการประเมินความน่าจะเป็นที่ต้องการได้อย่างไร ค่าที่แน่ ๆ ของความน่าจะเป็นนี้กำหนดได้โดย

$$P(X < 4) \quad = \quad \sum_{k=0}^{3} \binom{100}{k} (0.05)^k (.95)^{100-k}$$

ความน่าจะเป็นนี้คำนวณค่อนข้างยาก เราจึงจำเป็นต้องศึกษาวิธีการหนึ่งของการประมาณความน่าจะเป็นทวินามซึ่งเดิมเราเคยใช้แบบพัวซอง แต่นี้เรามาพิจารณาการประมาณความน่าจะเป็นที่สำคัญซึ่งใช้กับกรณีที่ n มีค่ามากหรือใหญ่พอ

พิจารณา $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$ ความน่าจะเป็นนี้ขึ้นอยู่กับ n ในวิธีการที่ค่อนข้างยุ่งยากและจะมีอะไรเกิดขึ้นอย่างเห็นได้ชัดต่อการแสดงข้างต้นก็หามิได้ เพื่อที่จะตรวจสอบความน่าจะเป็นนี้ เราต้องใช้สูตรของ Stirling ซึ่งใช้เป็นการประมาณกับ n! ได้ดี สูตรนี้ใช้สำหรับ n มีค่ามาก

$$n! \sim \sqrt{2\pi}\, e^{-n}\, n^{n+\frac{1}{2}}$$

ในความหมายที่ว่า $\lim_{n \to \infty} (n!)/(\sqrt{2\pi}\, e^{-n}\, n^{n+\frac{1}{2}}) = 1$ จากตารางอาจให้แนวความคิดเกี่ยวกับความแม่นยำของการประมาณนี้

ตาราง

n	$n!$	$\sqrt{2\pi}\, e^{-n}\, n^{n+\frac{1}{2}}$	ความแตกต่าง	$\frac{\text{ความแตกต่าง}}{n!}$
1	1	.922	0.078	.08
2	2	1.919	0.081	.04
5	120	118.019	1.981	.02
10	$(3.6288)10^6$	$(3.5986)10^6$	$(0.0302)10^6$	.008
100	$(9.3326)10^{157}$	$(9.3249)10^{157}$	$(0.0077)10^{157}$	.0008

ข้อสังเกต

ถึงแม้ว่าความแตกต่างระหว่าง $n!$ กับการประมาณของ n จะมีค่ามากขึ้นขณะที่ $n \to \infty$ สิ่งสำคัญที่สังเกตในตารางคือว่าความคลาดเคลื่อนเป็นเปอร์เซ็นต์ (คอลัมน์สุดท้าย) มีค่าน้อยกว่า

การใช้สูตรของ Stirling สำหรับ factorial ต่าง ๆ ที่ปรากฏใน $P(X = k)$ อาจแสดงได้สำหรับ n มีค่ามาก

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

$$\simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi\, np(1 - p)}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{k - np}{\sqrt{np(1 - p)}}\right]^2\right)$$

เราสามารถแสดงว่า

$$P(X \leqslant k) = P\left[\frac{X - np}{\sqrt{np(1 - p)}} \leqslant \frac{k - np}{\sqrt{np(1 - p)}}\right]$$

$$\simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{(k - np)/\sqrt{np(1 - p)}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

ดังนั้น เรามีผลลัพธ์ที่สำคัญดังต่อไปนี้ (เป็นการประมาณค่าการแจกแจงทวินาม **ของ** DeMoivre - Laplace)

การประมาณค่าการแจกแจงทวินามด้วยการแจกแจงปกติ ถ้าหากว่า X มีการแจกแจง**ทวินามพร้อมด้วยพารามิเตอร์** n กับ p ถ้าหากว่า

$$Y = \frac{X - np}{[np(1 - p)]^{1/2}}$$

แล้วสำหรับ n มีค่ามาก Y จะมีการแจกแจงปกติมาตรฐาน n(0,1) โดยประมาณ ในความ**หมายที่ว่า** $\lim_{n \to \infty} P(Y \leqslant y) = N(y)$ การประมาณนี้จะถูกต้องสำหรับ $n > 10$ โดยให้ p เข้าใกล้ 1/2 **ถ้าหากว่า** p เข้าใกล้ 0 หรือ 1 n ควรจะมีค่ามากขึ้นเพื่อทำให้แน่ว่าเป็นการประมาณที่ดี

ตาราง

k	n = 8, p = .2		n = 8, p = 0.5		n = 25, p = 0.2	
	ค่าประมาณ	ค่าจริง	ค่าประมาณ	ค่าจริง	ค่าประมาณ	ค่าจริง
0	0.130	.168	.005	.004	.009	.004
1	.306	.336	.030	.031	.027	.024
2	.331	.294	.104	.109	.065	.071
3	.164	.147	.220	.219	.121	.136
4	.037	.046	.282	.273	.176	.187
5	.004	.009	.220	.219	.199	.196
6	0 +	.001	.104	.109	.176	.163
7	0 +	0 +	.030	.031	.121	.111
8	0 +	0 +	.005	.004	.065	.062
9	0 +	0 +	0 +	0 +	.027	.029
10	0 +	0 +	0 +	0 +	.009	.012
11	0 +	0	0 +	0 +	.002	.004

ตารางข้างต้นแสดงความแม่นยำของการประมาณด้วยค่าต่าง ๆ ของ n, k และ p เรากลับไปยังตัวอย่างข้างต้น เราได้

$$E(X) = np = 100(0.05) = 5 : V(X) = np(1-p) = 4.75$$

ดังนั้นเราอาจเขียนได้

$$\begin{aligned} P(X \leqslant 3) &= P\left(\frac{0-5}{\sqrt{4.75}} \leqslant \frac{X-5}{\sqrt{4.75}} \leqslant \frac{3-5}{\sqrt{4.75}}\right) \\ &= N(-.92) - N(-2.3) \\ &= 1 - N(.92) - (1 - N(2.3)) \\ &= .9893 - .8212 = .1681 \end{aligned}$$

การแก้ความต่อเนื่องเพื่อปรับปรุงการประมาณค่าข้างต้นให้ถูกต้องยิ่งขึ้นมีดังนี้

(ก) $P(X = k) \simeq P(k - \frac{1}{2} \leqslant X \leqslant k + 1/2)$

(ข) $P(a \leqslant X \leqslant b) \simeq P(a - \frac{1}{2} \leqslant X \leqslant b + 1/2)$

ใช้การแก้จากกฎเหล่านี้สำหรับประเมิน $P(X \leqslant 3)$ เราได้

$$P(X \leqslant 3) = P(0 \leqslant X \leqslant 3) = P\left(-\frac{1}{2} \leqslant X \leqslant 3\frac{1}{2}\right)$$

$$\simeq N(-.69) - N(-2.53) = 0.239$$

ตัวอย่าง สมมติว่าระบบหนึ่งประกอบด้วยส่วนประกอบย่อย 100 ส่วน แต่ละส่วนมีความเชื่อมั่นเท่ากับ .95 (reliability) (นั่นคือความน่าจะเป็นที่ส่วนประกอบทำหน้าที่ได้อย่างเหมาะสมระหว่างระยะเวลาที่กำหนดเป็น 0.95) ถ้าหากว่าส่วนประกอบเหล่านี้ทำหน้าที่อิสระกัน และถ้าหากว่าการทำงานทั้งระบบจะทำได้ดีก็ต่อเมื่อส่วนประกอบอย่างน้อย 80 ส่วนทำงานได้ จงหาความเชื่อมั่นของระบบ

ให้ X เป็นจำนวนของส่วนประกอบที่ทำงานได้ เราต้องการหา

$$P(80 \leqslant X \leqslant 100)$$

เรามี $E(X) = 100(.95) = 95$, $V(X) = 100(.95)(.05) = 4.75$

ใช้การแก้ความต่อเนื่อง เราได้

$$P(80 \leqslant X \leqslant 100) \simeq P(79.5 \leqslant X \leqslant 100.5)$$

$$= P\left(\frac{79.5 - 95}{2.18} \leqslant \frac{X - 95}{2.18} \leqslant \frac{100.5 - 95}{2.18}\right)$$

$$\simeq N(2.52) - N(-7.1)$$

$$= 0.994$$

5.11 ทฤษฎีขีดจำกัดส่วนกลาง

การประมาณข้างต้นใช้แทนกรณีพิเศษของผลลัพธ์ทั่ว ๆ ไป เพื่อที่จะให้เข้าใจสิ่งเหล่านี้ ให้เรากลับไปกล่าวถึงตัวแปรเชิงสุ่มทวินาม X ซึ่งอาจแทนได้เหมือนผลรวมของตัวแปรเชิงสุ่มต่อไปนี้

$$\begin{aligned} X_i &= 1 \text{ ถ้าหากว่าความสำเร็จเกิดขึ้นซ้ำ ๆ กันครั้งที่ } i \\ &= 0 \text{ ถ้าหากว่าความไม่สำเร็จเกิดขึ้นซ้ำ ๆ กันครั้งที่ } i \end{aligned}$$

ดังนั้น $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ สำหรับตัวแปรเชิงสุ่มนี้เราสามารถแสดงได้ว่า $E(X) = np$, $V(X) = np(1-p)$ นอกจากนั้น ถ้าหากว่า n มีค่ามาก $(X - np)/\sqrt{np(1-p)}$ มีการแจกแจงปกติมาตรฐาน n(0, 1) โดยประมาณ ถ้าหากว่าตัวแปรเชิงสุ่ม X ใช้แทนผลรวมของตัวแปรเชิงสุ่ม n ตัวที่อิสระกันแล้ว ผลรวมนี้ (ถ้าหากว่า n มีค่ามากพอ) ก็จะมีการแจกแจงปกติโดยประมาณ ผลลัพธ์นี้เป็นเสมือนทฤษฎีขีดจำกัดส่วนกลาง ดังทฤษฎีต่อไปนี้

ทฤษฎีขีดจำกัดส่วนกลาง ให้ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่อิสระกันพร้อมด้วย $E(X_i) = \mu_i$ และ $V(X_i) = \sigma_i^2$, $i = 1, 2, \ldots$ ให้ $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ แล้วภายใต้เงื่อนไขทั่ว ๆ ไป

$$Z_n = \frac{X - \sum_{i=1}^{n} \mu_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}}$$

มีการแจกแจงปกติมาตรฐาน n(0, 1) โดยประมาณ นั่นคือ ถ้าหากว่า $G_n(z)$ เป็น cdf ของตัวแปรเชิงสุ่ม Z_n เราได้ $\lim_{n \to \infty} G_n(z) = N(z)$

ทฤษฎี ให้ $X_1, \ldots, X_n$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่อิสระกันและมีการแจกแจงเหมือนกัน ให้ $\mu = E(X_i)$ และ $\sigma^2 = V(X_i)$ เป็นค่าคาดหวังและความแปรปรวนเหมือนกัน ให้ $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$

แล้ว $E(S) = n\mu$ และ $V(S) = n\sigma^2$ ถ้าหากว่า n มีค่ามาก เราได้ $T_n = (S - n\mu)/\sqrt{n}\,\sigma$ มีการแจกแจงปกติมาตรฐาน $n(0, 1)$ นี้มีความหมายว่า $\lim\limits_{n \to \infty} P(T_n \leqslant t) = N(t)$

พิสูจน์

ให้ M เป็น mgf ของค่า X_i เนื่องจากว่าค่าของ X_i มีความอิสระกัน M_s เป็น mgf ของ S กำหนดได้เป็น $M_s(t) = [M(t)]^n$ และเนื่องจากว่า T_n เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นของ S, mgf ของ T_n กำหนดได้โดย

$$M_{T_n}(t) = e^{-(\sqrt{n}\mu/\sigma)t}\left[M\left(\frac{t}{\sqrt{n}\,\sigma}\right)\right]^n$$

ดังนั้น

$$\ln M_{T_n}(t) = -\frac{\sqrt{n}\,\mu}{\sigma}\,t + n\ln M\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right)$$

ให้เรากระจาย M(t) ในอนุกรม Maclaurin

$$M(t) = 1 + M'(0)\,t + \frac{M''(0)t^2}{2!} + R$$

ในเมื่อ R เป็นเทอมที่เหลือ $M'(0) = \mu$ และ $M''(0) = \mu^2 + \sigma^2$ เราได้

$$M(t) = 1 + \mu t + \frac{(\mu^2 + \sigma^2)t^2}{2!} + R$$

ดังนั้น

$$\ln M_{T_n}(t) = -\frac{\sqrt{n}\,\mu t}{\sigma} + n\ln\left[1 + \frac{\mu t}{\sqrt{n}\,\sigma} + \frac{(\mu^2 + \sigma^2)t^2}{2n\,\sigma^2} + R\right]$$

เราใช้การกระจาย Maclaurin สำหรับ $\ln(1 + x)$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots$$

(การกระจายนี้ถูกต้องสำหรับ $|x| < 1$ ในกรณีของเรา

$$x = \frac{\mu t}{\sqrt{n}\,\sigma} + \frac{(\mu^2 + \sigma^2)t^2}{2n\sigma^2} + R$$

สำหรับ n มีค่าใหญ่พอค่าสัมบูรณ์ของการแสดงนี้จะน้อยกว่าหนึ่ง) ดังนั้น เราได้

$$\begin{aligned}
\ln M_{T_n}(t) &= \frac{-\sqrt{n}\,\mu t}{\sigma} + n\Big[\Big(\frac{\mu t}{\sqrt{n}\sigma} + (\mu^2 + \sigma^2)\frac{t^2}{2n\sigma^2} + R\Big) \\
&\quad - \frac{1}{2}\Big(\frac{\mu t}{\sqrt{n}\sigma} + (\mu^2 + \sigma^2)\frac{t^2}{2n\sigma^2} + R\Big)^2 + \dots\Big] \\
&= \frac{-\sqrt{n}\,\mu t}{\sigma} + \frac{\sqrt{n}\,\mu t}{\sigma} + (\mu^2 + \sigma^2)\frac{t^2}{2\sigma^2} + nR \\
&\quad - \frac{1}{2}\Big(\frac{\mu t}{\sigma} + (\mu^2 + \sigma^2)\frac{t^2}{2\sqrt{n}\sigma^2} + nR\Big)^2 + \dots \\
&= (\mu^2 + \sigma^2)\frac{t^2}{2\sigma^2} + nR - \frac{1}{2}\Big(\frac{\mu t}{\sigma} + (\mu^2 + \sigma^2)\frac{t^2}{2n\sigma^2} + nR\Big)^2 + \dots
\end{aligned}$$

เนื่องจากว่าเทอมใดที่มีค่า n ในตัวหาร ขณะที่ $n \to \infty$ เทอมเหล่านั้นจะเข้าใกล้ศูนย์และทุกเทอมที่เกี่ยวกับ R ก็เข้าใกล้ศูนย์ ดังนั้นเราจึงพบว่า

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \ln M_{T_n}(t) &= (\mu^2 + \sigma^2)\frac{t^2}{2\sigma^2} - \frac{1}{2}\frac{\mu^2 t^2}{\sigma^2} \\
&= \frac{\mu^2 t^2}{2\sigma^2} + \frac{t^2}{2} - \frac{\mu^2 t^2}{2\sigma^2} = \frac{t^2}{2}
\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} M_{T_n}(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$$

นี้เป็น mgf ของตัวแปรสุ่มพร้อมด้วยการแจกแจง n(0, 1)

ตัวอย่าง เครื่อง electronic เครื่องหนึ่งมีความยาวอายุ T ซึ่งมีการแจกแจงแบบเอกซ์โพเนนเชียล พร้อมด้วยพารามิเตอร์ α = .001 นั่นคือ มี pdf เป็น $f(t) = 0.001e^{-0.001t}$ สมมติว่าทดสอบเครื่อง electronic 100 เครื่อง ให้ค่าสังเกต $T_1, T_2, \ldots, T_{100}$

(ก) จงหาความน่าจะเป็นที่ $950 < \bar{T} < 1100$ เป็นเท่าไร เนื่องจากว่าขนาดตัวอย่างค่อนข้างใหญ่ เราควรใช้ทฤษฎีขีดจำกัดส่วนกลางดำเนินการ

(ข) จงหาความน่าจะเป็นที่ค่าสังเกตที่มีค่ามากที่สุดมีค่ามากกว่า 7,200 ชั่วโมง

(ค) จงหาความน่าจะเป็นที่ค่าสังเกตที่มีค่าน้อยที่สุดมีค่าน้อยกว่า 10 ชั่วโมง

(ก) $E(\bar{T}) = \frac{1}{.001} = 1000,\ V(\bar{T}) = \frac{1}{100}(.001)^{-2} = 10{,}000$

เนื่องจากว่า $(\bar{T} - 1000)/100$ มีการแจกแจง n(0, 1) โดยประมาณ ดังนั้น

$$\begin{aligned} P(950 < \bar{T} < 1100) &= P\left(-.5 < \frac{\bar{T} - 100}{100} < 1\right) \\ &= N(1) - N(-.5) \\ &= 0.532 \end{aligned}$$

(ข) เราต้องการ $P(Y_n > 7200) = 1 - P(Y_n \leqslant 7200)$ ค่าสูงสุดจะน้อยกว่า 7200 ถ้าทุก ๆ ค่าของตัวอย่างน้อยกว่า 7200 ดังนั้น

$$P(Y_n > 7200) = 1 - [F(7200)]^{100}$$

เพื่อที่จะหาค่า F(7200)

$$\begin{aligned} F(t) &= 1 - e^{-0.001t} \\ F(7200) &= 1 - e^{-0.001(7200)} \\ &= 1 - e^{-7.2} = 0.99925 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้นความน่าจะเป็นที่ต้องการคือ $1 - (.99925)^{100} = 0.071$

(ค) เราต้องการ $P(Y_1 < 10) = 1 - P(Y_1 \geqslant 10)$

ค่าน้อยที่สุดของตัวอย่างมากกว่าหรือเท่ากับ 10 ถ้าหากว่าทุก ๆ ค่าของตัวอย่างมากกว่าหรือเท่ากับ 10 ดังนั้น

$$P[Y_1 < 10] = 1 - [1 - F(10)]^{100}$$

$$1 - F(10) = e^{-0.001(10)} = e^{-0.01} = .99005$$

เพราะฉะนั้น

$$P(Y_1 < 10) = 1 - (.99005)^{100} = .63$$

แบบฝึกหัด

1. ให้ $\overline{X}$ เป็นมัชฌิมของตัวอย่างสุ่มขนาด n จากการแจกแจงที่มีมัชฌิม μ ความแปรปรวน $\sigma^2 = 10$ จงคำนวณหา n เพื่อว่าความน่าจะเป็นโดยประมาณเป็น 0.954 ที่ช่วงสุ่ม $(\overline{X} - 1/2, \overline{X} + 1/2)$ ครอบคลุม μ

2. ให้ Y เป็น b(400, 1/5) จงคำนวณค่าโดยประมาณของ $P(.25 < Y/n)$

3. ให้ Y เป็น b(n, 0.55) จงหาค่าเล็กที่สุดของ n เพื่อว่า $P(Y/n > 1/2) \geqslant .95$ โดยประมาณ

4. ให้ $f(x) = 1/x^2, 1 < x < \infty$, ศูนย์สำหรับค่าอื่น ๆ เป็น pdf ของตัวแปรเชิงสุ่ม X พิจารณาตัวอย่างสุ่มขนาด n = 72 จากการแจกแจงที่มี pdf นี้ คำนวณความน่าจะเป็นโดยประมาณที่จำนวนสิ่งของมากกว่า 50 ของตัวอย่างสุ่มน้อยกว่า 3