# บทที่ 4
# การแจกแจง

## 4.1 การกระจายทวินาม

ถ้าหากว่า n เป็นเลขจำนวนเต็มบวก การกระจายทวินาม

$$(p+q)^n = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^{n-x} q^x$$

$$= \binom{n}{0} q^n + \binom{n}{1} pq^{n-1} + \binom{n}{2} p^2 q^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n} p^n$$

$$= q^n + \frac{n}{1!} pq^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} p^2 q^{n-2} + \ldots + p^n$$

หรือ $$= p^n + \frac{n}{1!} p^{n-1} q + \frac{n(n-1)}{2!} p^{n-2} q^2 + \ldots + q^n$$

ให้ $p = 1, \; q = 1$ เราจะได้ว่า

$$(1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n}$$

แต่ถ้าให้ $p = 1; \; q = -x$ และ $n = -r$ แล้ว

$$(1-x)^{-r} = 1 + \frac{rx}{1!} + \frac{r(r+1)}{2!} x^2 + \frac{r(r+1)(r+2)}{3!} x^3 + \ldots$$

$$= \sum_{y=r}^{\infty} \binom{y-1}{r-1} x^{y-r}$$

หรือ $$= \sum_{y=0}^{\infty} \binom{y+r-1}{r-1} x^y$$

ถ้าหากว่าให้ $r = 1$

$$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1-x}$$

และ $r = 2$

$$(1-x)^{-2} = 1+2x+3x^2+4x^3+\ldots$$

การกระจายทั้งหมดข้างต้นนี้มีประโยชน์สำหรับตัวแปรเชิงสุ่มที่มีการแจกแจงทวินาม แบบเรขาคณิต แบบทวินามนิเสธ แบบแกมม่า และแบบไคสแควในการคำนวณหาโมเมนท์-เจนเนอเรติงฟังก์ชัน

## 4.2 การแจกแจงทวินาม

ตัวแปรเชิงสุ่มที่มีการแจกแจงทวินามเป็นตัวแปรเชิงสุ่มชนิดไม่ต่อเนื่องดังตัวอย่าง

**ตัวอย่าง** ผลการผลิตแยกประเภทออกได้เป็นเสีย "ส" กับดี "ด" ถ้าหากว่าเลือกผลิตภัณฑ์มา 3 ชิ้น โดยสุ่มจากการผลิตวันหนึ่งและแยกประเภทดังนี้

S = {สสส, สสด, สดส, ดสส, ดดส, ดสด, สดด, ดดด}

S = $S_1$x $S_2$x $S_3$ x เป็น cartesian product ของ $S_1$, $S_2$, $S_3$ ในเมื่อ

$S_i$ = {ส, ด}

สมมติว่าความน่าจะเป็นของผลิตภัณฑ์ที่เสีย 0.2 ดี 0.8 และการแยกประเภทของผลิตภัณฑ์เป็นอิสระกัน ความน่าจะเป็นที่สมนัยกับผลลัพธ์ต่าง ๆ ของ S เขียนได้ $(0.2)^3$, $(0.8)(0.2)^2$, $(0.8)(0.2)^2$, $(0.8)(0.2)^2$, $(0.2)(0.8)^2$, $(0.2)(0.8)^2$, $(0.2)(0.8)^2$, $(0.8)^3$

เราสนใจเฉพาะผลลัพธ์ของ S นั่นคือ เราประสงค์ที่จะพิจารณาตัวแปร X ซึ่งกำหนดให้แต่ละผลลัพธ์ $s \in S$ จำนวนที่เสียพบใน s ดังนั้นเซทของค่าที่เป็นไปได้ของ X คือ {(0, 1, 2, 3)}

เราสามารถหาการแจกแจงความน่าจะเป็นสำหรับ X , $p(x_i) = P(X = x_i)$ ดังนี้

X = 0 ก็ต่อเมื่อ ดดด เกิดขึ้น

X = 1 ก็ต่อเมื่อ สดด, ดสด, หรือ ดดส เกิดขึ้น

X = 2 ก็ต่อเมื่อ สสด, สดส, หรือ ดสส เกิดขึ้น

X = 3 ก็ต่อเมื่อ สสส เกิดขึ้น

$p(0) = P(X=0) = (0.8)^3$, $p(1) = P(X=1) = 3(0.2)(0.8)^2$

$p(2) = P(X=2) = 3(0.2)^2(0.8)$, $p(3) = P(X=3) = (0.2)^3$

ผลรวมของความน่าจะเป็นเหล่านี้เท่ากับ 1 สำหรับผลลัพธ์อาจเขียนได้เป็น $(0.8 + 0.2)^3$

$$\text{พิสัย } R_x = \{0, 1, 2, 3\} \qquad x \in R_x$$

**นิยาม** พิจารณาการทดลองหนึ่ง $\varepsilon$ และให้ A เป็นบางเหตุการณ์ที่สัมพันธ์กับ $\varepsilon$ สมมติว่า $P(A) = p$ และ $P(\bar{A}) = 1-p$ การทดลองเป็นจำนวนซ้ำ ๆ กัน n ครั้งที่อิสระกันของ $\varepsilon$ ดังนั้น sample space ประกอบด้วยลำดับที่อาจเป็นไปได้ทั้งหมด $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ ในเมื่อแต่ละ $a_i$ เป็น A หรือ $\bar{A}$ โดยขึ้นอยู่กับว่า A หรือ $\bar{A}$ เกิดขึ้นของการทดลองซ้ำ ๆ กันครั้งที่ i ของ $\varepsilon$ (มี $2^n$ ลำดับ) นอกจากนั้น สมมติว่า $P(A) = p$ ยังคงมีค่าเหมือนเดิมสำหรับการทดลองซ้ำ ๆ กันทั้งหมด ให้ตัวแปรเชิงสุ่ม X นิยามได้ดังต่อไปนี้

X = จำนวนครั้งของเหตุการณ์ A เกิดขึ้น เราเรียก X ว่าเป็นตัวแปรเชิงสุ่มทวินามพร้อมด้วยพารามิเตอร์ n กับ p ค่าของ X ที่อาจเป็นไปได้คือ 0, 1, 2, ..., n แต่ละครั้งของการทดลองซ้ำ ๆ กันเรียกว่า การทดลองเบอนูลลิ

**ทฤษฎี** ให้ X เป็นตัวแปรทวินามของการทดลองซ้ำ ๆ กัน n ครั้ง แล้ว

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \; k = 0, 1, \ldots, n \tag{1}$$

**พิสูจน์** สมาชิกเฉพาะของ s ของการทดลอง $\varepsilon$ สอดคล้องกับเงื่อนไข X = k ของผลลัพธ์นั้นเกิดขึ้น ถ้าหากว่าการทดลองซ้ำ ๆ กัน k ครั้งแรกมีผลในการเกิดของ A ขณะการทดลองซ้ำ ๆ กัน n − k ครั้งมีผลในการเกิดของ $\bar{A}$ นั่นคือ

$$\underbrace{AAA\ldots A}_{k}\underbrace{\bar{A}\bar{A}\bar{A}\ldots\bar{A}}_{n-k}$$

เนื่องจากว่าการทดลองซ้ำ ๆ กันทั้งหมดมีความอิสระกัน ความน่าจะเป็นของลำดับเฉพาะนี้ควรเป็น $p^k(1-p)^{n-k}$ แต่ความน่าจะเป็นชนิดเดียวกันนี้ ควรจะสมนัยกับผลลัพธ์อื่น ๆ สำหรับ X = k จำนวนผลลัพธ์ทั้งหมดนั้นเท่ากับ $\binom{n}{k}$ สำหรับเราต้องเลือก k ตำแหน่งจาก n สำหรับค่าของ A ให้ผลดังข้างต้น เนื่องจากว่า $\binom{n}{k}$ ผลลัพธ์เหล่านี้เป็น mutually exclusive

$$\begin{aligned} f(k) &= \binom{n}{k} p^k q^{n-k} & q &= 1-p \\ &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & k &= 0, 1, 2, \ldots, n \\ &= 0 & &\text{สำหรับค่าอื่น ๆ} \end{aligned}$$

ในเมื่อ n เป็นเลขจำนวนเต็มและ $0 < p < 1$ ภายใต้เงื่อนไขนี้ $f(k) \geqslant 0$ และ

$$\sum_k f(k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \left[(1-p) + p\right]^n = 1$$

f(k) เป็นไปตามเงื่อนไขของ pdf ของตัวแปรเชิงสุ่ม X ของชนิดไม่ต่อเนื่องและแสดงได้เป็น b(n, p) โดยมี parameters n, p ของการแจกแจงอย่างเช่น X เป็น b(5, 1/3) หมายความว่า X มี pdf

$$f(x) = \binom{5}{x} (1/3)^x (2/3)^{5-x}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, 5$$
$$= 0 \qquad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ}$$

**ทฤษฎี** ถ้าหากว่า X มีการแจกแจงทวินามแล้ว

$$E(X) = np \qquad V(X) = npq$$

**พิสูจน์**

$$E(X) = \sum_{x=0}^{n} x \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$
$$= \sum_{x=1}^{n} \frac{n(n-1)!}{(x-1)!\,(n-x)!} p^x q^{n-x}$$
$$= np \sum_{x-1=0}^{n-1} \binom{n-1}{x-1} p^{x-1} q^{(n-1)-(x-1)}$$
$$= np(p+q)^{n-1}$$
$$= np \quad (\text{เนื่องจากว่า } p+q = 1)$$
$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$
$$= E(X(X-1)) + E(X) - (E(X))^2$$

ในเมื่อ
$$E(X(X-1)) = \sum_{x=0}^{n} x(x-1) \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$
$$= \sum_{x=2}^{n} \frac{n(n-1)\,(n-2)!}{(x-2)!\,(n-x)!} p^x q^{n-x}$$
$$= n(n-1)p^2 \sum_{x-2=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{(x-2)!\,(n-x)!} p^{x-2} q^{(n-2)-(x-2)}$$
$$= n(n-1)p^2 \sum_{x-2=0}^{n-2} \binom{n-2}{x-2} p^{x-2} q^{(n-2)-(x-2)}$$
$$= n(n-1)p^2 (p+q)^{n-2}$$
$$= n(n-1)p^2$$

$$
\begin{aligned}
V(X) &= n(n-1)p^2 + np - (np)^2 \\
&= n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2 \\
&= np(1-p) \\
&= npq
\end{aligned}
$$

mgf ของการแจกแจงทวินามหาได้

$$
\begin{aligned}
M(t) &= \sum_x e^{xt} f(x) \\
&= \sum_{x=0}^{n} e^{xt} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \\
&= \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} (pe^t)^x (1-p)^{n-x} \\
&= \left[(1-p) + pe^t\right]^n = (q+pe^t)^n
\end{aligned}
$$

สำหรับค่าทั้งหมดของ t มัชฌิมเลขคณิต $\mu$ กับความแปรปรวน $\sigma^2$ ของ X คำนวณได้จาก M(t)

$$
\begin{aligned}
\frac{dM(t)}{dt} &= M'(t) \\
&= n\left[(1-p) + pe^t\right]^{n-1} (pe^t) \\
\frac{d^2M(t)}{dt^2} &= M''(t) \\
&= n\left[(1-p) + pe^t\right]^{n-1} (pe^t) + n(n-1)\left[(1-p) + pe^t\right]^{n-2} (pe^t)^2 \\
\mu &= M'(0) = np \\
E(X^2) &= M''(0) = np + n(n-1)p^2 \\
\sigma^2 &= M''(0) - \left(M'(0)\right)^2 = np + n(n-1)p^2 - (np)^2 \\
&= np(1-p)
\end{aligned}
$$

**ตัวอย่าง 1** การแจกแจงทวินามพร้อมด้วย pdf

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \binom{7}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{7-x}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, 7 \\
&= 0 \qquad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ}
\end{aligned}
$$

มี mgf $M(t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^t\right)^7$

$$\mu = np = 7 \times \frac{1}{2} = 3.5,$$

$$\sigma^2 = np(1-p) = 7\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{4}$$

$$P(0 \leqslant X \leqslant 1) = \sum_{x=0}^{1} f(x)$$

$$= \binom{7}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^7 + \binom{7}{1}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$$= \frac{1}{128} + \frac{7}{128} = \frac{8}{128}$$

$$P(X = 5) = f(5) = \frac{7!}{5!\,2!}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{21}{128}$$

**ตัวอย่าง 2** mgf ของตัวแปรเชิงสุ่ม X เป็น $M(t) = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}e^t\right)^5$ แล้ว X มีการแจกแจงแบบทวินามมี $n = 5, p = \frac{1}{3}$ นั่นคือ pdf ของ X คือ

$$f(x) = \binom{5}{x}\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{5-x}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, 5$$

$$= 0 \qquad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ}$$

$$\mu = np = \frac{5}{3}$$

และ $\sigma^2 = np(1-p) = 5\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{10}{9}$

**ตัวอย่าง 3** ถ้าหากว่า Y เป็น $b\left(n, \frac{1}{3}\right)$ แล้ว $P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$ สมมติเราประสงค์ที่จะหาค่าเล็กที่สุดของ n ที่ให้ $P(Y \geqslant 1) > 0.80$ เราได้ $1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n > 0.80$ หรือ $0.20 > \left(\frac{2}{3}\right)^n$ โดยการทดสอบเราจะได้ว่า $n = 4$ เป็นคำตอบ นั่นคือความน่าจะเป็นของความสำเร็จอย่างน้อยตลอด $n = 4$ การทดลองเชิงสุ่มซ้ำ ๆ กันด้วยความน่าจะเป็นของความสำเร็จ $p = \frac{1}{3}$ มากกว่า 0.80

**ตัวอย่าง 4** ให้ Y เป็นจำนวนความสำเร็จตลอดการทดลองเชิงสุ่มซ้ำ ๆ กัน n ครั้งที่อิสระกันด้วยความน่าจะเป็นของความสำเร็จ p นั่นคือ Y เป็น b(n, p) สัดส่วน $\frac{y}{n}$ เรียกว่าความถี่สัมพัทธ์ของความสำเร็จ สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ เรามี

$$P\left(\left|\frac{Y}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) = P(|y - np| \geqslant \varepsilon n)$$

$$= P\left(|Y - \mu| \geqslant \varepsilon\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\,\sigma\right)$$

ในเมื่อ $\mu = np$ และ $\sigma^2 = np(1-p)$ ตาม chebyshev's inequality พร้อม $k = \varepsilon\sqrt{n/p(1-q)}$ เรามี $P\left(|Y - \mu| \geqslant \varepsilon\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\,\sigma\right) \leqslant \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$

ดังนั้น $P\left(\left|\frac{Y}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$

สำหรับทุก ๆ ค่าคงที่ $\varepsilon > 0$ จำนวนด้านขวามือของ inequality ก่อน ๆ เข้าใกล้ศูนย์สำหรับ n ใหญ่พอ นั่นคือ

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{Y}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0$$

และ

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{Y}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1$$

นี่เป็นจริงสำหรับทุก ๆ ค่าคงที่ $\varepsilon > 0$ จะเห็นได้ว่าความถี่สัมพัทธ์ของความสำเร็จเข้าใกล้ p สำหรับค่า n ใหญ่ ผลลัพธ์นี้เป็นฟอร์มหนึ่งของ law of large numbers

## 4.3 การแจกแจงแบบเรขาคณิต

สมมติว่าเราดำเนินการทดลอง $\xi$ และเกี่ยวกับการเกิดขึ้นหรือไม่เกิดขึ้นของบางเหตุการณ์ A เหมือนการแจกแจงทวินาม แต่ละการทดลองซ้ำ ๆ กันมี $P(A) = p$ และ $P(\bar{A}) = 1 - p = q$ สมมติว่าเราทำการทดลองซ้ำ ๆ กันจนกระทั่ง A เกิดขึ้นครั้งแรก

**ตัวอย่าง** การทดลองจนกว่าจะสำเร็จครั้งแรก สมมติว่าลำดับของการทดลองแบบทวินามกระทำต่อไปจนกว่าความสำเร็จเกิดขึ้นครั้งแรก ถ้าหากว่าให้ผลการทดลองในการสำเร็จหนึ่งครั้ง เราใช้อักษร S สำหรับการทดลองนั้น ถ้าหากว่าผลการทดลองในความไม่สำเร็จเราใช้อักษร F ดังนั้น sample space สำหรับการทดลองเขียนได้เป็น

$$\{S, FS, FFS, FFFS, \underbrace{\ldots F \ldots}_{\text{ค่าของ } F(n-1) \text{ ค่า}} FS, \ldots\}$$

ถ้าหากว่าความน่าจะเป็นของความสำเร็จเป็น $p$ และไม่สำเร็จ $q = 1-p$ ความน่าจะเป็นที่สัมพันธ์กับเหตุการณ์ใน sample space คือ

$$p, qp, q^2p, q^3p, \ldots, q^{n-1}p, \ldots$$

เพราะว่าการทดลองแต่ละครั้งติดต่อกันไปมีความอิสระกันและการคำนวณหาความน่าจะเป็นได้ด้วยการคูณ สังเกตว่าความสำเร็จครั้งแรกเกิดขึ้นจากการทดลองครั้งที่ $n$ ขณะที่ความไม่สำเร็จเกิดขึ้นก่อน $n-1$ ครั้ง ถ้าหากว่าเราให้ $X$ เป็นจำนวนครั้งของการทดลองรวมถึงความสำเร็จครั้งแรกด้วยแล้ว ฟังก์ชันน่าจะเป็นสำหรับ $X$ กำหนดได้โดย

$$P(X = x) = f(x) = q^{x-1}p \qquad x = 1, 2, 3, \ldots \qquad (1)$$

ตัวแปรเชิงสุ่มที่มีการแจกแจงความน่าจะเป็นดังสมการ (1) เรียกว่าการแจกแจงแบบเรขาคณิต

เราสามารถหาค่าคาดหวังของ $X$ ได้ดังนี้

**ทฤษฎี** ถ้าหากว่า $X$ มีการแจกแจงแบบเรขาคณิต ดังสมการ (1) แล้ว

$$E(X) = \frac{1}{p}, \qquad V(X) = \frac{q}{p^2}$$

**พิสูจน์**

$$E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} xpq^{x-1} = p\sum_{x=1}^{\infty} \frac{d}{dq}q^x$$

$$= p\frac{d}{dq}\sum_{x=1}^{\infty} q^x = p\frac{d}{dq}\left[\frac{q}{1-q}\right]$$

$$= p\left[\frac{(1-q)dq - qd(1-q)}{(1-q)^2}\right]$$

$$= p\left[\frac{(1-q)+q}{(1-q)^2}\right] = \frac{1}{p}$$

หรือ

$$E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} xpq^{x-1}$$

$$= p + 2pq + 3pq^2 + 4pq^3 + \ldots \qquad \ldots\ldots (2)$$

$(2)\times q$ $$qE(X) = pq + 2pq^2 + 3pq^3 + \ldots \qquad \ldots\ldots (3)$$

$(2)-(3)$ $$(1-q)E(X) = p + pq + pq^2 + pq^3 + \ldots$$

$$= \frac{p}{1-q}$$

$$E(X) = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p} \;;\quad p \neq 0 .$$

$$V(X) = E(X)^2 - \left(E(X)\right)^2$$

$$= E\left(X(X-1)\right) + E(X) - \left(E(X)\right)^2$$

ในเมื่อ $\quad E\left(X(X-1)\right) = \sum_{x=1}^{\infty} x(x-1)pq^{x-1}$

$$= 2pq + 6pq^2 + 12pq^3 + \ldots \qquad \ldots\ldots (4)$$

$(4) \times q \qquad qE\left(X(X-1)\right) = 2pq^2 + 6pq^3 + 12pq^4 + \ldots \qquad \ldots\ldots (5)$

$(4) - (5) \qquad (1-q)E\left(X(X-1)\right) = 2pq + 4pq^2 + 6pq^3 + \ldots$

$$= 2pq\left[1 + 2q + 3q^2 + \ldots\right]$$

$$= 2pq(1-q)^{-2}$$

$$E\left(X(X-1)\right) = \frac{2pq}{(1-q)^3}$$

$$= \frac{2q}{p^2}$$

$$V(X) = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}$$

$$= \frac{2q+p-1}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

สังเกตว่า $E(X)$ เป็นปฏิภาคกลับของ $p$

mgf ของการแจกแจงแบบเรขาคณิตหาได้

$$M(t) = \sum_{x=1}^{\infty} e^{xt}\, pq^{x-1}$$

$$= p\sum_{x=1}^{\infty} q^{x-1} e^{xt}$$

$$= p(e^t + qe^{2t} + q^2e^{3t} + \ldots)$$

$$= pe^t(1 + qe^t + q^2e^{2t} + \ldots)$$

$$= pe^t\left[\frac{1}{1-qe^t}\right]$$

หรือ $$= pe^t[1-qe^t]^{-1}$$

**ตัวอย่าง 1** สมมติว่าต้นทุนการดำเนินงานทดลองหนึ่งเป็น 1,000 บาท ถ้าหากว่าการทดลองล้มเหลว จึงต้องเพิ่มทุนอีก 300 บาท เพื่อที่จะต้องทำการเปลี่ยนแปลงก่อนการทำการทดลองต่อไป ถ้าหากว่าความน่าจะเป็นของความสำเร็จเกี่ยวกับการทดลองที่กำหนดขึ้น 0.2 ถ้าหากว่าการทดลองแต่ละครั้งมีความอิสระกันและการทดลองยังคงดำเนินต่อไปจนกระทั่งผลลัพธ์เป็นผลสำเร็จครั้งแรกต้นทุนที่คาดหวังของการดำเนินงานทั้งหมดเป็นเท่าไร

ถ้าหากว่า C เป็นต้นทุน และ X เป็นจำนวนครั้งของการทดลองเพื่อต้องการให้สำเร็จเราได้ $C = 1000X + 300(X-1) = 1300X - 300$

ดังนั้น $$E(C) = 1300E(X) - 300 = 1300\frac{1}{.2} - 300$$

$$= 6200 \text{ บาท}$$

**ตัวอย่าง 2** ความน่าจะเป็นที่ฟ้าจะร้องเกิดขึ้นของวันที่กำหนดให้ระหว่างฤดูร้อนในตำบลหนึ่งเท่ากับ 0.1 สมมติว่าจากวันหนึ่งไปยังอีกวันหนึ่งมีความอิสระกัน ความน่าจะเป็นที่ฟ้าจะร้องครั้งแรกเกิดขึ้นของหน้าฤดูร้อนวันที่ 3 เมษายนเป็นเท่าไร

เราให้ X เป็นจำนวนวัน (เริ่มตั้งแต่วันที่ 1 มีนาคม) จนกระทั่งฟ้าจะร้องครั้งแรก และเราจะได้ $P(X = 34)$ ซึ่งเท่ากับ $(.9)^{33}(.1) = .003$

**ตัวอย่าง 3** ถ้าหากว่าการทดสอบหนึ่งให้ปฏิกิริยาเป็นบวกเท่ากับ .4 ความน่าจะเป็นที่ปฏิกิริยาเป็นลบน้อยกว่า 5 ครั้งเกิดขึ้นเป็นเท่าไรก่อนที่ปฏิกิริยาเป็นบวกเกิดขึ้นครั้งแรก

ให้ X เป็นจำนวนปฏิกิริยาเป็นลบก่อนที่ปฏิกิริยาเป็นบวกครั้งแรกเราได้

$$P(X = x) = (.6)^x(.4), \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

ดังนั้น $$P(X < 5) = \sum_{x=0}^{4} (.6)^x(.4)$$

$$= 0.92$$

**ข้อสังเกต** ถ้าหากว่า X มีการแจกแจงแบบเรขาคณิตดังสมการ (1) และถ้าเราให้ $Z = X-1$ เราอาจตีความ Z เป็นเสมือนจำนวนของความไม่สำเร็จก่อนความสำเร็จครั้งแรก เราได้

$P(Z = k) = q^k p,\ k = 0, 1, 2, \ldots$ ในเมื่อ $p = P$(สำเร็จ) และ $q = P$ (ไม่สำเร็จ)

การแจกแจงแบบเรขาคณิตมีคุณสมบัติที่น่าจะสนใจพอสรุปได้ดังทฤษฎีดังนี้

**ทฤษฎี** สมมติว่า X มีการแจกแจงเรขาคณิตดังสมการ (1) แล้ว ดังนั้นสำหรับสองเลขจำนวนเต็มบวก s กับ t ใด ๆ

$$P(X \geqslant s + t \mid X > s) = P(X \geqslant t) \tag{2}$$

สำหรับการพิสูจน์จะละไว้เป็นแบบฝึกหัด

## 4.4 การแจกแจงแบบพาสกัล (Pascal Distribution)

โดยทั่ว ๆ ไปการแจกแจงแบบเรขาคณิต ถ้าหากว่าเรามีคำถามดังต่อไปนี้ สมมติว่าการทดลองดำเนินต่อเนื่องกันจนกระทั่งเหตุการณ์ A เฉพาะเกิดขึ้นสำหรับครั้งที่ r ถ้าหากว่า

$$P(A) = p,\quad P(\bar{A}) = q = 1-p$$

ของแต่ละการทดลองซ้ำ ๆ กัน เรากำหนดให้ตัวแปรเชิงสุ่ม X เป็นดังนี้

X เป็นจำนวนของการทดลองซ้ำ ๆ กันเพื่อต้องการให้มี A เกิดขึ้น r ครั้ง

เราต้องการการแจกแจงความน่าจะเป็นของ X ถ้าหากว่า r − 1, X มีการแจกแจงแบบเรขาคณิตกำหนดได้ดังสมการ (1) ของหัวข้อ 4.3

X = k ก็ต่อเมื่อ A เกิดขึ้นบนการทดลองซ้ำ ๆ กันครั้งที่ k และ A เกิดขึ้น (r − 1) ครั้งในการทดลองก่อน (k − 1) ครั้ง ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ธรรมดานี้ $p\binom{k-1}{r-1} p^{r-1} q^{k-r}$ เนื่องจากว่าอะไรจะเกิดขึ้นบนการทดลอง (k − 1) ครั้งแรกที่อิสระกันของอะไรจะเกิดขึ้นบนการทดลองซ้ำ ๆ กันครั้งที่ k ด้วยเหตุนี้

$$P(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r},\quad k = r, r+1, \ldots \tag{1}$$

สำหรับ r = 1 สมการข้างต้นก็จะลดลงเป็นสมการ (1) ของหัวข้อ 4.2 ตัวแปรเชิงสุ่มหนึ่งมีการแจกแจงความน่าจะเป็นดังสมการ (1) ที่กำหนดให้ก็จะมีการแจกแจงแบบพาสกัลหรือการแจกแจงทวินามนิเสธ

หรือเราอาจเขียนการแจกแจงแบบพาสกัลหรือทวินามนิเสธได้อีกรูปหนึ่งเป็น

$$P(Y = y) = \binom{y+r-1}{r-1} p^r q^y,\quad y = 0, 1, 2, \ldots \tag{2}$$

**ทฤษฎี** ถ้าหากว่า X มีการแจกแจงแบบพาสกัลหรือทวินามนิเสธ ดังสมการ (1) แล้ว

$$E(X) = r/p, \quad V(X) = rq/p^2$$

$$M(t) = \left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right)^r$$

แต่ถ้าหากว่าการแจกแจงเป็นไปตามสมการ (2) แล้ว

$$E(Y) = \frac{rq}{p}, \quad V(Y) = \frac{rq}{p^2}$$

$$M(t) = \left(\frac{p}{1-qe^t}\right)^r$$

พิสูจน์

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{x=r}^{\infty} x \binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r} \\
&= p^r \left[ r \binom{r-1}{r-1} q^{r-r} + (r+1)\binom{r+1-1}{r-1} q^{r+1-r} + \ldots\ldots \right] \\
&= p^r \left[ r + \frac{(r+1)(r)}{1!} q + \frac{(r+2)(r+1)\,r}{2!} q^2 + \ldots\ldots \right] \\
&= rp^r \left[ 1 + \frac{(r+1)}{1!} q + \frac{(r+1)(r+2)}{2!} q^2 + \ldots\ldots \right] \\
&= rp^r (1-q)^{-(r+1)} \\
&= rp^r p^{-(r+1)} \\
&= \frac{r}{p}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\
&= E(X(X+1)) - E(X) - (E(X))^2
\end{aligned}$$

ในเมื่อ

$$\begin{aligned}
E(X(X+1)) &= \sum_{x=r}^{\infty} x(x+1) \binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r} \\
&= p^r \left[ r(r+1) \binom{r-1}{r-1} q^{r-r} + (r+1)(r+2) \binom{r+1-1}{r-1} q^{r+1-r} + \ldots\ldots \right] \\
&= p^r \left[ r(r+1) + \frac{r(r+1)(r+2)}{1!} q + \frac{r(r+1)(r+2)(r+3)}{2!} q^2 + \ldots\ldots \right] \\
&= r(r+1)p^r \left[ 1 + \frac{(r+2)}{1!} q + \frac{(r+2)(r+3)}{2!} q^2 + \ldots\ldots \right] \\
&= r(r+1)p^r (1-q)^{-(r+2)} \\
&= \frac{r(r+1)}{p^2}
\end{aligned}$$

$$V(x) = \frac{r(r+1)}{p^2} - \frac{r}{p} - \left(\frac{r}{p}\right)^2$$
$$= \frac{r^2 + r}{p^2} - \frac{r}{p} - \frac{r^2}{p^2}$$
$$= \frac{r^2 + r - rp - r^2}{p^2} = \frac{r(1-p)}{p^2}$$
$$= \frac{rq}{p^2}$$

$$M(t) = E(e^{Xt})$$
$$= \sum_{x=r}^{\infty} e^{xt} \binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r}$$
$$= p^r \left[ e^{rt} \binom{r-1}{r-1} q^{r-r} + e^{(r+1)t} \binom{r+1-1}{r-1} q^{r+1-r} + \ldots.. \right]$$
$$= p^r \left[ e^{rt} + \frac{re^{(r+1)t}}{1!} q + \frac{r(r+1)}{2!} e^{(r+2)t} q^2 + \ldots.. \right]$$
$$= e^{rt} p^r \left[ 1 + \frac{re^t}{1!} q + \frac{r(r+1)}{2!} e^{2t} q^2 + \ldots.. \right]$$
$$= p^r e^{rt} \left[ 1 + \frac{r}{1!} (qe^t) + \frac{r(r+1)}{2!} (qe^t)^2 + \ldots.. \right]$$
$$= p^r e^{rt} (1 - qe^t)^{-r}$$
$$= \left( \frac{pe^t}{1 - qe^t} \right)^r$$

พิสูจน์

$$E(Y) = \sum_{y=0}^{\infty} y \binom{y+r-1}{r-1} p^r q^y$$
$$= p^r \left[ 0 \binom{r-1}{r-1} q^0 + (1) \binom{1+r-1}{r-1} q + (2) \binom{2+r-1}{r-1} q^2 + \ldots.. \right]$$
$$= p^r \left[ 0 + \frac{r}{1!} q + (2) \frac{(r+1)(r)}{2!} q^2 + (3) \frac{(r+2)(r+1)r}{3!} q^3 + \ldots.. \right]$$
$$= rqp^r \left[ 1 + \frac{(r+1)}{1!} q + \frac{(r+1)(r+2)}{2!} q^2 + \ldots.. \right]$$
$$= rqp^r (1-q)^{-(r+1)}$$
$$= \frac{rq}{p}$$
$$V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2$$
$$= E(Y(Y-1) + E(Y) - (E(Y))^2$$

ในเมื่อ

$$E(Y(Y-1)) = \sum_{y=0}^{\infty} y(y-1)\binom{y+r-1}{r-1} p^r q^y$$

$$= p^r\left[0 - 0 + (2)(1)\binom{2+r-1}{r-1} q^2 + (3)(2)\binom{3+r-1}{r-1} q^3 + \ldots..\right]$$

$$= p^r\left[(2)(1)\frac{r(r+1)}{2!} q^2 + (3)(2)\frac{r(r+1)(r+2)}{3!} q^3 + \ldots..\right]$$

$$= p^r\left[r(r+1)q^2 + \frac{r(r+1)(r+2)}{1!} q^3 + \ldots..\right]$$

$$= r(r+1)p^r q^2(1 + \frac{(r+2)}{1!} q + \ldots..$$

$$= r(r+1)p^r q^2(1-q)^{-(r+2)}$$

$$= r(r+1)p^r q^2 p^{-(r+2)}$$

$$= r(r+1)p^{-2}q^2$$

$$= \frac{r(r+1)q^2}{p^2}$$

$$V(Y) = \frac{r(r+1)q^2}{p^2} + \frac{rq}{p} - \left(\frac{rq}{p}\right)^2$$

$$= \frac{r^2q^2 + rq^2 + rqp - r^2q^2}{p^2}$$

$$= \frac{rq(q+p)}{p^2} = \frac{rq}{p^2}$$

$$M(t) = E(E^{Yt}) = \sum_{y=0}^{\infty} e^{yt} \binom{y+r-1}{r-1} p^r q^y$$

$$= p^r\left[e^0\binom{r-1}{r-1} q^0 + e^t\binom{1+r-1}{r-1} q + e^{2t}\binom{2+r-1}{r-1} q^2 + \ldots..\right]$$

$$= p^r\left[1 + \frac{r}{1!} qe^t + \frac{r(r+1)}{2!}(qe^t)^2 + \ldots..\right]$$

$$= p^r(1-qe^t)^{-r}$$

$$= \frac{p^r}{(1-qe^t)^r}$$

$$= \left(\frac{p}{1-qe^t}\right)^r$$

**ตัวอย่าง 1** ความน่าจะเป็นที่การทดลองหนึ่งจะสำเร็จเป็น 0.8 ถ้าหากว่าการทดลองกระทำซ้ำ ๆ กันจนกระทั่งผลลัพธ์ที่สี่ของความสำเร็จเกิดขึ้นครั้งแรก จำนวนที่คาดหวังของการทดลองซ้ำ ๆ กันที่ต้องการเป็นเท่าไร

จากทฤษฎี เราได้ E (จำนวนของการทดลองซ้ำ ๆ กัน) $= (4)(.2/.8) = 1$

## 4.5 การแจกแจงแบบไฮเปอร์จีโอเมตริค

เมื่อไรที่การสุ่มตัวอย่างเป็นแบบหยิบแล้วไม่ใส่คืน การแจกแจงไฮเปอร์จีโอเมตริคก็จะถูกนำไปใช้แทนการแจกแจงทวินาม การแจกแจงนี้ใช้กันมากในสถิติที่เกี่ยวกับการควบคุมคุณภาพ ตารางใหม่ของการแจกแจงก็ได้ถูกตีพิมพ์ประกาศใช้แล้ว

ตัวแปรเชิงสุ่ม X จะมีการแจกแจงแบบไฮเปอร์จีโอเมตริค ถ้าหากว่า X มี pdf เป็น

$$f(x) = \frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \quad x = 0, 1, 2 \text{ ถึง } (n \text{ หรือ } r)$$

ในเมื่อ

(1) N เป็นเลขจำนวนเต็ม

(2) r เป็นเลขจำนวนเต็ม $r < N$

(3) n เป็นเลขจำนวนเต็ม $n < N$

(4) x มีค่าได้เป็น 0, 1, 2, ... ถึง (n หรือ r) ทั้งนี้ต้องแล้วแต่ว่าจำนวนไหนจะน้อยกว่ากัน

ตัวแปรเชิงสุ่มแบบนี้เกิดขึ้นในกรณีที่มีการสุ่มลูกบอล n ลูก โดยไม่ใส่กลับลงในหีบที่มีลูกบอล N ลูก ในจำนวนนี้ r ลูกเป็นบอลสีขาวและ (N−r) ลูกเป็นบอลสีแดง หากจะนับจำนวนสีขาวที่จะมีอยู่ในตัวอย่าง จำนวนที่นับได้เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีการแจกแจงแบบไฮเปอร์จีโอเมตริค

**ตัวอย่าง 1** มีหลอดไฟอยู่ในกล่อง 50 หลอด สุ่มเลือกหลอดไฟ 5 หลอด จากหลอดไฟเหล่านี้เพื่อทดสอบ ถ้าหากว่าไม่พบหลอดไฟเสียเลย ก็ยอมรับกล่องนี้ ถ้าหากว่าพบหลอดไฟเสียหนึ่งหลอดหรือมากกว่า จะต้องตรวจสอบทั้งหมด สมมติว่ามีหลอดไฟเสียสามหลอดในกล่อง ความน่าจะเป็นที่ต้องการตรวจสอบ 100 เปอร์เซ็นต์เป็นเท่าไร

ถ้าหากว่าเราให้ X เป็นจำนวนหลอดไฟเสียที่ต้องการหา ต้องการตรวจสอบ 100 เปอร์เซ็นต์ก็ต่อเมื่อ $X \geqslant 1$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} P(X \geqslant 1) &= 1 - P(X = 0) \\ &= 1 - \frac{\binom{3}{0}\binom{47}{5}}{\binom{50}{5}} \\ &= 1 - 0.72 \\ &= 0.28 \end{aligned}$$

**ทฤษฎี** ให้ X มีการแจกแจงแบบไฮเปอร์จีโอเมตริค มี pdf

$$f(x) = \frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

ให้ $p = r/N$, $q = 1-p$ แล้วเราได้

(ก) $E(X) = np$

(ข) $V(X) = npq\dfrac{N-n}{N-1}$

(ค) $P(X = x) \simeq \binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$ สำหรับ N มีค่ามาก

**พิสูจน์**

ก)
$$E(X) = \sum_{x=0}^{n} x \frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$= \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{x=1}^{n} \frac{r(r-1)!}{(x-1)!\,(r-x)!} \binom{N-r}{n-x}$$

$$= \frac{r}{\binom{N}{n}} \sum_{x-1=0}^{n} \binom{r-1}{x-1} \binom{N-r}{n-x}$$

$$= \frac{r}{\binom{N}{n}} \sum_{x-1=0}^{n-1} \binom{r-1}{x-1} \binom{(N-1)-(r-1)}{(n-1)-(x-1)}$$

$$= \frac{r}{\binom{N}{n}} \binom{N-1}{n-1}$$

$$= \frac{r}{\frac{N!}{n!(N-n)!}} \frac{(N-1)!}{(n-1)!\,(N-n)!}$$

$$= \frac{rn}{N} = np \quad \left(p = \frac{r}{N}\right)$$

ข)
$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$= E(X(X-1) + E(X) - (E(X))^2$$

ในเมื่อ

$$E(X(X-1)) = \sum_{x=0}^{n} x(x-1) \frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-r}}{\binom{N}{n}}$$

$$= \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{x=2}^{n} \frac{r!}{(x-2)!\,(r-x)!} \binom{N-r}{n-x}$$

$$= \frac{r(r-1)}{\binom{N}{n}} \sum_{x-2=0}^{n-2} \binom{r-2}{x-2} \binom{(N-2)-(r-2)}{(n-2)-(x-2)}$$

$$= \frac{r(r-1)}{\binom{N}{n}} \binom{N-2}{n-2}$$

$$= \left( \frac{r(r-1)}{\frac{N!}{n!(N-n)!}} \right) \left( \frac{(N-2)!}{(n-2)!\,(N-n)!} \right)$$

$$= \frac{r(r-1)\,n(n-1)}{N(N-1)}$$

$$V(X) = \frac{r(r-1)\,n(n-1)}{N(N-1)} + \frac{rn}{N} - \left(\frac{rn}{N}\right)^2$$

$$V(X) = \frac{rn}{N} \left[ \frac{(r-1)(n-1)}{N-1} + 1 - \frac{rn}{N} \right]$$

$$= \frac{rn}{N} \left[ \frac{rnN - nN - rN + N^2 - rnN + rn}{N(N-1)} \right]$$

$$= \frac{rn}{N} \left[ \frac{N^2 - nN - rN + rn}{N(N-1)} \right]$$

$$= \frac{rn}{N} \left[ \frac{N(N-n) - r(N-n)}{N(N-1)} \right]$$

$$= \frac{rn(N-r)(N-n)}{N^2(N-1)}$$

$$= n\left(\frac{r}{N}\right)\left(\frac{N-r}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

$= npq\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$ ในเมื่อ $p = \frac{r}{N}, \quad q = 1-p$

ค) $$P(X = x) = \frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, n$$

ให้ $p = \frac{r}{N} \Rightarrow r = pN, \quad q = 1-p = 1-\frac{r}{N}$

$$P(X = x) = \frac{\binom{pN}{x}\binom{N-pN}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$= \frac{\left[\frac{(pN)!}{x!(pN-x)!}\right]\left[\frac{(N-pN)!}{(n-x)!\,(N-pN-(n-x))!}\right]}{\frac{N!}{n!(N-n)!}}$$

$$= \left[\frac{n!}{x!(n-x)!}\right]\left[\frac{(pN)(pN-1)\dots(pN-x+1)(N-pN)\dots(N-pN-(n-x-1))}{N(N-1)\dots(N-n+1)}\right]$$

$$= \left[\frac{n!}{x!(n-x)!}\right]\left[\frac{N^x(p)\left(p-\frac{1}{N}\right)\dots\left(p-\frac{x-1}{N}\right)N^{n-k}(1-p)\left(1-p-\frac{1}{N}\right)\dots\left(1-p-\frac{(n-x-1)}{N}\right)}{N^n(1)\left(1-\frac{1}{N}\right)\dots\left(1-\frac{(n-1)}{N}\right)}\right]$$

$$= \left[\frac{n!}{x!(n-x)!}\right]\left[\frac{(p)\left(p-\frac{1}{N}\right)\dots\left(p-\frac{x-1}{N}\right)(1-p)\left(1-p-\frac{1}{N}\right)\dots\left(1-p-\frac{(n-x-1)}{N}\right)}{(1)\left(1-\frac{1}{N}\right)\dots\left(1-\frac{(n-1)}{N}\right)}\right]$$

$$\lim_{N\to\infty} P(X = x) = \lim_{N\to\infty}\frac{n!}{x!(n-x)!}\left[\overbrace{(p)(p)\dots(p)}^{x\text{ ตัว}}\overbrace{(1-p)(1-p)\dots(1-p)}^{(n-x)\text{ ตัว}}\right]$$

$$\simeq \frac{n!}{x!(n-x)!}\;p^x(1-p)^{n-x}$$

$$\simeq \binom{n}{x}p^xq^{n-x}$$

**ข้อสังเกต** คุณสมบัติข้อ (ค) ของทฤษฎี กล่าวว่าถ้าหากว่า N มีขนาดใหญ่พอ การแจกแจงของ X อาจประมาณด้วยการแจกแจงทวินามทั้ง ๆ ที่การแจกแจงทวินามใช้กับตัวอย่างที่ได้รับเลือกมาแบบหยิบแล้วใส่คืน ขณะที่การแจกแจงแบบไฮเปอร์จีโอเมตริคใช้กับตัวอย่างที่ได้รับเลือกมาแบบหยิบแล้วไม่ใส่คืน สำหรับค่าคาดหวังของตัวแปรเชิงสุ่มแบบไฮเปอร์จีโอเมตริค X ก็เหมือนกันกับตัวแปรเชิงสุ่มทวินาม ส่วนความแปรปรวนของ X มีค่าน้อยกว่าความแปรปรวนทวินาม Correction term $(N-n)/(N-1)$ เข้าใกล้ 1 สำหรับ N มีค่ามาก

เราสามารถแสดงความหมายของ (ค) ดังตัวอย่างง่าย ๆ ต่อไปนี้ สมมติว่าเราต้องการหาค่า $P(X = 0)$

สำหรับ $n = 1$ เราคำนวณหาจากการแจกแจงแบบไฮเปอร์จีโอเมตริค $P(X = 0) = (N-r)/N = 1-r/N = q$ จากการแจกแจงทวินามเราคำนวณหาได้โดยตรง $P(X = 0) = q$ เพราะฉะนั้น คำตอบเหล่านี้เหมือนกันสำหรับ $n = 1$

กรณี $n = 2$ เราคำนวณจากการแจกแจงไฮเปอร์จีโอเมตริค

$$P(X = 0) = \frac{N-r}{N}\,\frac{N-r-1}{N-1} = \left(1-\frac{r}{N}\right)\left(1-\frac{r}{N-1}\right)$$

จากการแจกแจงทวินาม เราคำนวณ $P(X = 0) = q^2$ สังเกตว่า $(1-r/N) = q$ ขณะที่ $[1-r/(N-1)]$ เกือบเท่ากับ $q$

โดยทั่ว ๆ ไป การประมาณการแจกแจงแบบไฮเปอร์จีโอ เมตริคด้วยการแจกแจงทวินามได้ดีมาก ถ้าหากว่า $n/N \leqslant 0.1$

## 4.6 การแจกแจงแบบ Multinomial

การแจกแจงทวินามสามารถให้การแจกแจงมากกว่าหนึ่งตัวแปร ถ้าหากว่า $n$ เป็นเลขจำนวนเต็มบวก และ $a_1, a_2, a_3$ เป็นค่าคงที่ เราได้

$$\sum_{x=0}^{n}\sum_{y=0}^{n-x}\frac{n!}{x!\;y!\;(n-x-y)!}\;a_1^x a_2^y a_3^{n-x-y}$$

$$= \sum_{x=0}^{n}\frac{n!}{x!\;(n-x)!}\;a_1^x\sum_{y=0}^{n-x}\frac{(n-x)!}{y!\;(n-x-y)!}\;a_2^y a_3^{n-x-y}$$

$$= \sum_{x=0}^{n}\frac{n!}{x!\;(n-x)!}\;a_1^x(a_2+a_3)^{n-x}$$

$$= (a_1 + a_2 + a_3)^n$$

ให้ฟังก์ชัน $f(x, y)$ กำหนดได้

$$f(x, y) = \frac{n!}{x!y!(n-x-y)!}\;p_1^x p_2^y p_3^{n-x-y}\,.$$

$$= 0 \quad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ}$$

ในเมื่อ $x$ กับ $y$ เป็นเลขจำนวนเต็มบวก $x+y \leqslant n$ และ $p_1, p_2$ และ $p_3$ เป็นเศษส่วน $p_1 + p_2 + p_3 = 1$

f(x, y) เป็น pdf ของสองตัวแปรเชิงสุ่ม X กับ Y ชนิดไม่ต่อเนื่อง นั่นคือ f(x, y) มากกว่าศูนย์และผลบวกของจุดทั้งหมด (x, y) ที่ f(x, y) เท่ากับ $(p_1+p_2+p_3)^n = 1$, f(x, y) เรียกว่าการแจกแจงแบบ trinomial, mgf

คำนวณหาได้

$$M(t_1, t_2) = \sum_{x=0}^{n}\sum_{y=0}^{n-x} \frac{n!}{x!y!\,(n-x-y)!}(p_1e^{t_1})^x(p_2e^{t_2})^y p_3^{n-x-y}$$

$$= (p_1e^{t_1} + p_2e^{t_2} + p_3)^n$$

สำหรับค่าจริงของ $t_1$ กับ $t_2$ ทั้งหมด mgf ของการแจกแจง marginal ของ X กับ Y คือ

$$M(t_1, 0) = (p_1e^{t_1} + p_2 + p_3)^n = \left[(1-p_1) + p_1e^{t_1}\right]^n$$

และ

$$M(0, t_2) = (p_1 + p_2e^{t_2} + p_3)^n = \left[(1-p_2) + p_2e^{t_2}\right]^n$$

ถ้าหากว่า X กับ Y ไม่มีความอิสระกัน X มี $b(n, p_1)$ กับ Y มี $b(n, p_2)$ มัชฌิมเลขคณิตกับความแปรปรวนของ X กับ Y เป็น $\mu_1 = np_1$, $\mu_2 = np_2$, $\sigma_1^2 = np_1(1-p_1)$ และ $\sigma_2^2 = np_2(1-p_2)$

$$f(y/x) = \frac{\frac{n!}{x!y!\,(n-x-y)!}p_1^x p_2^y p_3^{n-x-y}}{\frac{n!}{x!\,(n-x)!}p_1^x(1-p_1)^{n-x}}$$

$$= \frac{(n-x)!}{y!\,(n-x-y)!}\;\frac{p_2^y p_3^{n-x-y}}{(1-p_1)^{n-x}}$$

$$= \frac{(n-x)!}{y!\,(n-x-y)!}\left(\frac{p_2}{1-p_1}\right)^y\left(\frac{p_3}{1-p_1}\right)^{n-x-y},$$

$$y = 0, 1, \ldots, n-x$$

$= 0$ สำหรับค่าอื่น ๆ

ดังนั้น การแจกแจงแบบมีเงื่อนไขของ Y กำหนด X = x เป็น $b\left(n-x, \frac{p_2}{1-p_1}\right)$

เพราะฉะนั้น มัชฌิมแบบมีเงื่อนไขกำหนด X = x เป็นฟังก์ชันเชิงเส้น

$$E(Y/x) = (n-x)\left(\frac{p_2}{1-p_1}\right)$$

$$f(x/y) = b\left(n-y, \frac{p_1}{1-p_2}\right)$$

$$E(X/y) = (n-y)\left(\frac{p_1}{1-p_2}\right)$$

$$\rho^2 = \left(-\frac{p_2}{1-p_1}\right)\left(-\frac{p_1}{1-p_2}\right)$$

เนื่องจากว่าสัมประสิทธิ์เหล่านี้เป็นลบ ดังนั้น $\rho$ เป็นลบ

$$= -\sqrt{\frac{p_1 p_2}{(1-p_1)(1-p_2)}}$$

ในกรณีที่การทดลองซ้ำ ๆ กัน n ครั้งที่อิสระกัน $p_i$ เป็นความน่าจะเป็นของ k วิธีที่ mutually exclusive ($i = 1, 2, \ldots, k$) ให้ $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$ เป็นเลขจำนวนเต็มบวกในเมื่อ $x_1 + x_2 + \ldots + x_{k-1} \leqslant n$ โดยที่ $x_1$ เป็นจำนวนที่เกิดขึ้นของ $p_1$, $x_2$ เป็นจำนวนที่เกิดขึ้นของ $p_2, \ldots, x_{k-1}$ เป็นจำนวนที่เกิดขึ้นของ $p_{k-1}$ และ $n-(x_1 + \ldots + x_{k-1})$ เป็นจำนวนที่เกิดขึ้นของ $p_k$

$$\frac{n!}{x_1!\,x_2!\ldots x_{k-1}!\,x_k!}\; p_1^{x_1}\ldots p_{k-1}^{x_{k-1}}\; p_k^{x_k} \qquad (1)$$

ในเมื่อ $x_k = n - (x_1 + x_2 + \ldots + x_{k-1})$ นี้เป็น multinomial pdf ของ $k-1$ ตัวแปรเชิงสุ่ม $X_1, X_2, \ldots, X_{k-1}$ ของชนิดไม่ต่อเนื่อง

**ทฤษฎี** สมมติว่า $(X_1, \ldots, X_k)$ มีการแจกแจงแบบ multinomial ดังสมการ (1) ข้างต้นแล้ว

$$E(X_i) = np_i \text{ และ } V(X_i) = np_i(1-p_i), \quad i = 1, 2, \ldots, k$$

**พิสูจน์** นี้เป็นผลที่จะเกิดภายหลังโดยตรงของการสังเกตว่าแต่ละ $X_i$ ตามนิยามข้างต้นมีการแจกแจงทวินามพร้อมด้วยความน่าจะเป็นของความสำเร็จ (นั่นคือการเกิดขึ้นของ $A_i$) เท่ากับ $p_i$

**ตัวอย่าง 2** ผลิตแท่งโลหะที่มีความยาวเฉพาะ สมมติว่าความยาวจริง ๆ X (นิ้ว) เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีการแจกแจงแบบเดียวกันบน [10, 12] อยากทราบหนึ่งของสามเหตุการณ์ที่เกิดขึ้น

$A_1 = \{X < 10.5\}$ $A_2 = \{10.5 \leqslant X \leqslant 11.8\}$ และ $A_3 = \{X > 11.8\}$

เราจะได้ว่า

$$p_1 = p(A_1) = \int_{10}^{10.5} \frac{1}{12-10}\,dx = \left.\frac{x}{2}\right|_{10}^{10.5} = \frac{1}{4} = .25$$

$$p_2 = p(A_2) = \int_{10.5}^{11.8} \frac{1}{12-10}\,dx = \left.\frac{x}{2}\right|_{10.5}^{11.8} = \frac{1.3}{2} = .65$$

และ

$$p_3 = p(A_3) = \int_{11.8}^{12} \frac{1}{12-10}\,dx = \left.\frac{x}{2}\right|_{11.8}^{12} = \frac{.2}{2} = .1$$

ถ้าหากว่าผลิตแท่งโลหะนั้น 10 แท่ง ความน่าจะเป็นที่จะได้ 5 แท่ง มีความยาวน้อยกว่า 10.5 นิ้ว และ 2 แท่งยาวกว่า 11.8 นิ้ว คือ

$$\frac{10!}{5!\,3!\,2!}(0.25)^5(.65)^3(.1)^2$$

mgf ของการแจกแจงแบบ multinomial

$$M(t_1, \ldots, t_{k-1}) = (p_1e^{t_1} + \ldots + p_{k-1}e^{t_{k-1}} + p_k)^n$$

สำหรับค่าจริงของ $t_1, t_2, \ldots, t_{k-1}$ ดังนั้น แต่ละหนึ่งตัวแปร marginal pdf เป็นทวินาม แต่ละสองตัวแปร marginal pdf เป็น trinomial และต่อ ๆ ไป

**ตัวอย่าง 3** mgf ของตัวแปรเชิงสุ่ม X เป็น $(2/3 + 1/3e^t)^9$ จงแสดงว่า

$$P(\mu-2\sigma < X < \mu+2\sigma) = \sum_{x=1}^{5}\binom{9}{x}(1/3)^x(2/3)^{9-x}$$

**วิธีทำ** เนื่องจากว่า X เป็นการแจกแจงทวินาม (ตัวแปรเชิงสุ่มไม่ต่อเนื่อง) มีตัวพารามิเตอร์ $n = 9,\ p = 1/3$ ดังนั้น $\mu = np = 9(1/3) = 3$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{9(1/3)(2/3)} = 1.414$$

จาก

$$\begin{aligned} P(\mu-2\sigma < X < \mu+2\sigma) &= P(3-2(1.414) < X < 3+2(1.414)) \\ &= P(3-2.828 < X < 3+2.828) \\ &= P(.172 < X < 5.828) = P(1 \leqslant x \leqslant 5) \\ &= \sum_{x=1}^{5}\binom{9}{x}(1/3)^x(2/3)^{9-x} \end{aligned}$$

**ตัวอย่าง 4** ให้ตัวแปรเชิงสุ่ม $X_1, X_2, X_3$ มีความอิสระกันพร้อมด้วย pdf เหมือนกันคือ $f(x) = 3x^2,\ 0 < x < 1$ ศูนย์สำหรับค่าอื่น ๆ จงหาความน่าจะเป็นที่สองในสามตัวแปรเหล่านี้มีมากกว่า 1/2

**วิธีทำ** ให้ p เป็นความน่าจะเป็นของความสำเร็จในหนึ่งครั้ง ดังนั้น

$$p = \int_{1/2}^{1} f(x)\,dx = \int_{1/2}^{1} 3x^2\,dx$$

$$= x^3\Big|_{1/2}^{1} = 1-1/8 = 7/8$$

$$q = 1-p = 1/8$$

ให้ P(x) เป็นความน่าจะเป็นที่สองในสามตัวแปรเหล่านี้มีมากกว่า 1/2

$$P(x) = \binom{3}{2}(7/8)^2(1/8) = 3\left(\frac{49}{512}\right)$$

$$= \frac{147}{512}$$

**ตัวอย่าง 5** ให้ตัวแปรเชิงสุ่ม $X_1$ กับ $X_2$ มีความอิสระกัน มีการแจกแจงแบบทวินามพร้อมด้วยพารามิเตอร์ $n_1 = 3,\ p_1 = 2/3$ กับ $n_2 = 4,\ p_2 = 1/2$ ตามลำดับ จงคำนวณ $P(X_1 = X_2)$

**วิธีทำ**

$$\begin{aligned}
P(X_1 = X_2) &= P(X_1 = X_2 = x,\ x = 0, 1, 2, 3) \\
&= P(X_1 = 0)\,P(X_2 = 0) + P(X_1 = 1)\,P(X_2 = 1) + \\
&\quad P(X_1 = 2)\,P(X_2 = 2) + P(X_1 = 3)\,P(X_2 = 3) \\
&= \binom{3}{0}\left(\frac{2}{3}\right)^0(1/3)^3\binom{4}{0}(1/2)^0(1/2)^4 + \binom{3}{1}(2/3)(1/3)^2 \\
&\quad \binom{4}{1}(1/2)(1/2)^3 + \binom{3}{2}(2/3)^2(1/3)\binom{4}{2}(1/2)^2(1/2)^2 \\
&\quad + \binom{3}{3}(2/3)^3(1/3)^0\binom{4}{3}(1/2)^3(1/2) \\
&= (1/2)^4\left[\frac{1}{27} + \frac{24}{27} + \frac{72}{27} + \frac{32}{27}\right] \\
&= \frac{43}{144}
\end{aligned}$$

# แบบฝึกหัด

1. ให้ y เป็นจำนวนของความสำเร็จของการทดลองเชิงสุ่มซ้ำ ๆ กัน n ครั้ง ที่มีความอิสระกัน มีความน่าจะเป็นของความสำเร็จ $p = 1/4$ จงคำนวณค่า n ที่เล็กที่สุดที่ $P(1 \leqslant y) \geqslant 0.70$
2. ให้ X เป็น $b(2, p)$ และให้ Y เป็น $b(4, p)$ ถ้าหากว่า $P(X \geqslant 1) = \frac{5}{9}$ จงคำนวณหา $P(Y \geqslant 1)$
3. ถ้าหากว่า $x = r$ เป็นฐานนิยม (mode) เดียวเท่านั้นของการแจกแจงที่เป็น $b(n, p)$ จงแสดงว่า

$$(n+1)p-1 < r < (n+1)p$$

4. เลือกหมายเลขหนึ่งจากหมายเลข 1, 2, ..., 6 ของการทอดลูกเต๋าที่สมดุลหนึ่งลูก ให้การทดลองสุ่มกระทำซ้ำ ๆ กัน 5 ครั้งและอิสระกัน ถ้าหากว่า $X_1$ เป็นจำนวนของการสิ้นสุดใน $A_1 = \{x: x = 1, 2, 3\}$ และถ้าหากว่า $X_2$ เป็นจำนวนของการสิ้นสุดใน $A_2 = \{x: x = 4, 5)$ จงคำนวณ $P(X_1 = 2, X_2 = 1)$
5. ถ้าหากว่าโยนเหรียญสมดุลอันหนึ่งห้าครั้ง จงคำนวณหาความน่าจะเป็นของการเกิดหัวห้าครั้ง โดยกำหนดให้ว่าเกิดหัวอย่างน้อยสี่ครั้ง

## 4.7 การแจกแจงแบบพัวซอง

การแจกแจงแบบพัวซองถูกนำมาใช้ในการวิจัยของการดำเนินงานบ่อย ๆ เพราะการแจกแจงนี้เหมาะสมหลาย ๆ สภาวะที่เหตุการณ์เกิดขึ้นตลอดระยะเวลาคล้ายกับการมาถึงของลูกค้า เมื่อไรที่เหตุการณ์คล้ายกับเหตุการณ์ที่จะเกิดขึ้นในช่วงหนึ่งเหมือนกับในช่วงอื่น ๆ ของเหตุการณ์ก็จะไม่มีผล ไม่ว่าเหตุการณ์อื่น ๆ จะเกิดขึ้นหรือไม่ ดังนั้น จำนวนของลูกค้ามาถึงในเวลาที่กำหนดก็เป็นการแจกแจงแบบพัวซอง ในทำนองเดียวกันอุปสงค์สำหรับผลิตภัณฑ์ที่กำหนดให้ก็สามารถสมมติให้เป็นการแจกแจงนี้

พิจารณาอนุกรม

$$1 + m + \frac{m^2}{2!} + \frac{m^3}{3!} + \ldots \quad = \quad \sum_{x=0}^{\infty} \frac{m^x}{x!}$$

จะ Converges เข้าสู่ $e^m$ สำหรับค่าทั้งหมดของ m กำหนดให้ฟังก์ชัน f(x) นิยามได้

$$f(x) = \frac{m^x e^{-m}}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

$$= 0 \quad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ}$$

ในเมื่อ $m > 0$ เนื่องจากว่า $m > 0$ แล้ว $f(x) \geqslant 0$ และ

$$\sum_x f(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{m^x e^{-m}}{x!} = e^{-m} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{m^x}{x!} = e^{-m}e^{m} = 1$$

นั่นคือ f(x) สอดคล้องเงื่อนไขของการเป็น pdf ของตัวแปรเชิงสุ่ม และเรียกว่าพัวซอง pdf

**ทฤษฎี** ถ้าหากว่า X มีการแจกแจงแบบพัวซองพร้อมด้วยพารามิเตอร์ m แล้ว

$E(X) = m$ และ $V(X) = m$

**พิสูจน์**

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{xe^{-m}m^x}{x!} = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{e^{-m}m^x}{(x-1)!}$$

ให้ $s = x-1$ เราพบว่า

$$E(X) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{e^{-m}m^{s+1}}{s!} = m \sum_{s=0}^{\infty} \frac{e^{-m}m^s}{s!}$$

$$= m$$

ในทำนองเดียวกัน

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{x^2e^{-m}m^x}{x!} = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{xe^{-m}m^x}{(x-1)!}$$

ให้ $s = x-1$ เราได้

$$E(X^2) = \sum_{s=0}^{\infty}(s+1)\frac{e^{-m}m^{s+1}}{s!} = m\sum_{s=0}^{\infty} s\frac{e^{-m}m^{s}}{s!} + m\sum_{s=0}^{\infty}\frac{e^{-m}m^{s}}{s!}$$

$$= m^2 + m$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$= m^2 + m - m^2$$

$$= m$$

mgf ของการแจกแจงแบบพัวซอง กำหนดได้

$$M(t) = \sum_{x} e^{xt}f(x) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{xt}\frac{m^x e^{-m}}{x!}$$

$$= e^{-m}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(me^t)^x}{x!}$$

$$= e^{-m}e^{me^t} = e^{m(e^t-1)}$$

สำหรับค่าจริง t ทั้งหมด เนื่องจากว่า

$$M'(t) = e^{m(e^t-1)}(me^t)$$

และ $$M''(t) = e^{m(e^t-1)}(me^t) + e^{m(e^t-1)}(me^t)^2$$

แล้ว $$\mu = M'(0) = m$$

และ $$\sigma^2 = M''(0) - \mu^2 = m + m^2 - m^2 = m$$

พัวซอง pdf นิยมเขียนได้

$$f(x) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!} \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

$$= 0 \quad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ}$$

**ตัวอย่าง 1** สมมติ X มีการแจกแจงแบบพัวซองพร้อมด้วย $\mu = 2$ แล้ว pdf ของ X คือ

$$f(x) = \frac{2^x e^{-2}}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

$$= 0 \quad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ}$$

ความแปรปรวนของการแจกแจงนี้ $\sigma^2 = \mu = 2$ หากเราต้องการคำนวณหา $P(1 \leqslant X)$ เราได้

$$P(1 \leqslant X) = 1 - P(X = 0)$$

$$= 1 - f(0) = 1 - e^{-2}$$
$$= 0.865$$

**ตัวอย่าง 2** ถ้าหากว่า mgf ของตัวแปรเชิงสุ่ม X เป็น

$$M(t) = e^{4(e^t - 1)}$$

แล้ว X มีการแจกแจงแบบพัวซอง $\mu = 4$

$$P(X = 3) = \frac{4^3e^{-4}}{3!} = \frac{32}{3}e^{-4}$$

**จากตาราง 1**

$$P(X = 3) = P(X \leqslant 3) - P(X \leqslant 2)$$
$$= 0.433 - 0.238 = 0.195$$

**ตัวอย่าง 3** ความน่าจะเป็นที่ลวดจะเสียในหนึ่งฟุตประมาณ $\frac{1}{1000}$ และให้ x เป็นจำนวนที่ลวดเสียใน 3,000 ฟุต ถ้าหากว่าจำนวนที่เสียมีความอิสระกันในช่วงที่ไม่เหลื่อมล้ำกันแล้ว กระบวนการพัวซองก็ประมาณได้ $p = \frac{1}{1000}$ และ $n = 3000$ ดังนั้น X มีการแจกแจงแบบพัวซองโดยประมาณมี $\mu = (3000)\left(\frac{1}{1000}\right) = 3$ ดังนั้น การแสดงความน่าจะเป็นที่มีจำนวนลวดเสีย 5 ใน 3000 ฟุต คือ

$$P(X = 5) = \frac{3^5e^{-3}}{5!}$$

จากตารางที่ 1

$$P(X = 5) = P(X \leqslant 5) - P(X \leqslant 4)$$
$$= 0.101$$

## การประมาณการแจกแจงทวินามด้วยการแจกแจงแบบพัวซอง

ถ้าหากว่า $n \to \infty$ และ $p \to 0$ ในลักษณะที่ $np = \mu$ ยังคงที่ อะไรจะเกิดขึ้นกับความน่าจะเป็นทวินาม $\binom{n}{x} p^x(1-p)^{n-x}$

การคำนวณต่อไปนี้ให้คำตอบต่อคำถามที่สำคัญมากนี้ เรามาพิจารณา

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x(1-p)^{n-x} = \frac{n!}{x!\,(n-x)!}\, p^x(1-p)^{(n-x)}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-x+1)}{x!}\, p^x(1-p)^{n-x}$$

ให้ $np = \mu$ ดังนั้น $p = \frac{\mu}{n}$ และ $1-p = 1-\frac{\mu}{n}$

แทนค่าเทอมทั้งหมดที่เกี่ยวกับ p ได้

$$P(X = x) = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-x+1)}{x!} \left(\frac{\mu}{n}\right)^x \left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{n-x}$$

$$= \frac{\mu^x}{x!}\left[\left(\frac{n}{n}\right)\left(\frac{n-1}{n}\right)\ldots\left(\frac{n-x+1}{n}\right)\right]\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{n-x}$$

$$= \frac{\mu^x}{x!}\left[(1)\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{x-1}{n}\right)\right]\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^n\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{-x}$$

ให้ $n \to \infty$, $np = \mu$ ยังคงที่ นี้หมายความว่า $p \to 0$ ขณะ $n \to \infty$ สำหรับค่าอื่น ๆ np ไม่สามารถคงที่ ขณะที่ n เข้าใกล้อนันต์เทอมต่อไปนี้ $(1-1/n)$, $(1-2/n)$, ... เข้าใกล้หนึ่ง ในทำนองเดียวกัน $\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{-x}$ ก็เข้าใกล้หนึ่ง แต่ $\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^n$ เข้าใกล้ $e^{-\mu}$ ดังนั้น

$$\lim_{n\to\infty} P(X = x) = \frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!}$$

**ทฤษฎี** ให้ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มทวินามพร้อมด้วยพารามิเตอร์ p (ขึ้นอยู่กับการทดลองซ้ำ ๆ n ครั้ง) นั่นคือ

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

สมมติว่าขณะ $n \to \infty$, $np = \mu$ คงที่ หรือ $n \to \infty$, $p \to 0$, $np \to \mu$ ภายใต้เงื่อนไขเหล่านี้ เราได้

$$\lim_{n\to\infty} P(X = x) = \frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!}$$

การแจกแจงแบบพัวซองพร้อมด้วยพารามิเตอร์ $\mu$

# แบบฝึกหัด

1. ถ้าหากว่าตัวแปรเชิงสุ่ม X มีการแจกแจงแบบพัวซองจนกระทั่ง $P(X = 1) = P(X = 2)$, จงคำนวณหา $P(X = 4)$
2. mgf ของตัวแปรเชิงสุ่ม X คือ $e^{4(e^t - 1)}$ จงแสดงว่า $P(\mu - 2\sigma < x < \mu + 2\sigma) = 0.931$
3. ให้ pdf f(x) มีค่าเป็นบวกโดยกำหนดให้ $f(x) = (4/x)\, f(x-1)$, $x = 1, 2, 3, \ldots$ จงหา f(x)
4. ให้ X มีการแจกแจงแบบพัวซองพร้อมด้วย $\mu = 100$ ใช้ Chebyshev's inequality เพื่อคำนวณหา lower bound สำหรับ $P(75 < X < 125)$
5. ให้ X กับ Y มี pdf ร่วม $f(x, y) = e^{-2} \big/ [x!\,(y-x)!]$ $y = 0, 1, 2, \ldots$ $x = 0, 1, 2, \ldots y$ ศูนย์สำหรับค่าอื่น ๆ

   (ก) จงคำนวณหา mgf $M(t_1, t_2)$ ของการแจกแจงร่วมนี้

   (ข) คำนวณหามัชฌิมความแปรปรวนและสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ของ X กับ Y

   (ค) คำนวณมัชฌิมแบบมีเงื่อนไข $E(X/y)$

((ก) $e^{-2 + e^{t_2}(1 + e^{t_1})}$ (ข) $E(x) = 1$, $V(x) = 1$, $E(y) = 2$, $V(Y) = 2$, $\rho = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(ค) $y/2$)

## 4.8 การแจกแจงแบบเอกซ์โพเน้นเชียล แกมม่า และไคสแคว

ก่อนที่จะกล่าวถึงการแจกแจงของตัวแปรเชิงสุ่มชนิดต่อเนื่อง ให้นักศึกษามาทำความเข้าใจกับอนุพันธ์ของอินทิกรัล เพราะว่ามีอยู่หลาย ๆ การแจกแจงด้วยกันที่ต้องใช้อนุพันธ์ของอินทิกรัลในการหา pdf ซึ่งนักศึกษาจะได้ศึกษารายละเอียดในหัวข้อต่อไป

ให้เรามาพิจารณาการคำนวณหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

$$F(y) = \int_{g(y)}^{h(y)} f(x, y)dx$$

ในเมื่อ $g(y)$ และ $h(y)$ เป็นขีดจำกัดของอินทิเกรชันแสดงอยู่ในรูปฟังก์ชันของ $y$ สมมติว่าขีดจำกัดเหล่านี้ของอินทิเกรชันเป็นค่าคงที่ อย่างเช่น $g(y) = a$ และ $h(y) = b$ ตามลำดับ สำหรับกรณีพิเศษเช่นนี้ อนุพันธ์ก็ง่ายมาก

$$\frac{d}{dy}\int_{a}^{b} f(x, y)dx = \int_{a}^{b} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx$$

ดังตัวอย่าง ถ้าหากว่า $f(x, y) = e^{-xy}$, $a = 0$ และ $b = \infty$ แล้ว

$$\frac{d}{dy}\int_{0}^{\infty} e^{-xy}dx = \int_{0}^{\infty}(-x)e^{-xy}dx = -\frac{1}{y^2}$$

ที่ค่าบวกใด ๆ ของ $y$ ดังนั้น กระบวนการที่เกิดขึ้นโดยสัญชาตญาณของการแลกเปลี่ยนตามกฎของดิฟเฟอร์เรนทิเอชันและอินทิเกรชันระหว่างกันให้สมบูรณ์ยิ่งขึ้นสำหรับกรณีนี้ อย่างไรก็ตาม การคำนวณหาอนุพันธ์จะกลายเป็นข้อยุ่งยากยิ่งขึ้นกว่า เมื่อไรขีดจำกัดของอินทิเกรชันเป็นฟังก์ชันโดยเฉพาะ

$$\frac{d}{dy}\int_{g(y)}^{h(y)} f(x, y)dx = \int_{g(y)}^{h(y)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx + f(h(y), y)\frac{dh(y)}{dy} - f(g(y), y)\frac{dg(y)}{dy}$$

ในเมื่อ $f(h(y), y)$ คำนวณหาได้โดยการเขียน $f(x, y)$ และแล้วแทนค่า $x$ ด้วย $h(y)$ ในทำนองเดียวกันสำหรับ $f(g(y), y)$ ก็ทำแบบเดียวกัน ดังตัวอย่างเช่น $f(x, y) = x^2y^3$, $g(y) = y$ และ $h(y) = 2y$ แล้ว

$$\begin{aligned}\frac{d}{dy}\int_{y}^{2y} x^2y^3dx &= \int_{y}^{2y} 3x^2y^2dx + (2y)^2y^3\frac{d(2y)}{dy} - y^2y^3\frac{dy}{dy} \\ &= x^3y^2\Big|_{y}^{2y} + (2y)^2y^3(2) - y^2y^3(1) \\ &= 8y^3y^2 - y^3y^2 + 8y^5 - y^5 = 14y^5\end{aligned}$$

ที่ค่าบวกใด ๆ ของ $y$

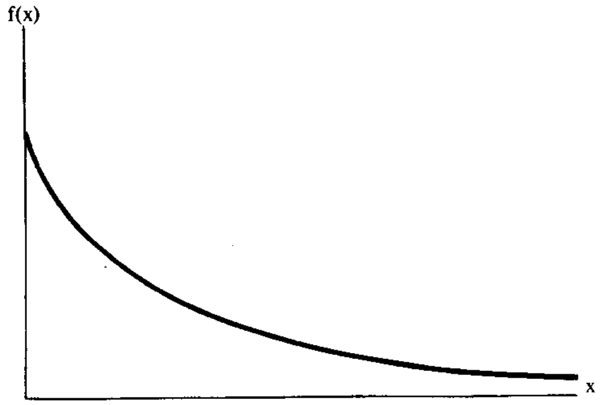
**การแจกแจงแบบเอกซ์โพเน้นเชียล**

การแจกแจงแบบเอกซ์โพเน้นเชียลใช้กันมากเกี่ยวกับเวลาระหว่างลูกค้ามาถึง ระยะเวลาของการสนทนาทางโทรศัพท์ อายุของส่วนประกอบหลอดอิเล็กทรอนิกส์

**นิยาม** ตัวแปรเชิงสุ่มชนิดต่อเนื่อง X (มีค่ามากกว่าศูนย์) มีการแจกแจงแบบเอกซ์โพเน้นเชียลพร้อมด้วยพารามิเตอร์ $\beta > 0$ ถ้าหากว่า pdf ของตัวแปรเชิงสุ่มกำหนดได้

$$f(x) = \frac{1}{\beta}e^{-\frac{x}{\beta}}, \quad x > 0$$

$$= 0 \quad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ}$$




**คุณสมบัติของการแจกแจงแบบเอกซ์โพเน้นเชียล**

(1) cdf F ของการแจกแจงแบบเอกซ์โพเน้นเชียลกำหนดได้โดย

$$F(x) = P(X \leqslant x) = \int_0^x \frac{1}{\beta} e^{-\frac{t}{\beta}} dt$$

$$= 1 - e^{-\frac{x}{\beta}} \quad x \geqslant 0$$

$$= 0 \quad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ}$$

ดังนั้น $\quad P(X > x) = e^{-\frac{x}{\beta}}$

(2) ค่าคาดหวังของ X คำนวณหาได้ดังนี้

$$E(X) = \int_0^\infty x\frac{1}{\beta}e^{-\frac{x}{\beta}} dx$$

ต้องใช้ Integrating by parts โดยให้ $u = x$, $dv = \frac{1}{\beta}e^{-\frac{x}{\beta}}\,dx$ เราได้ $v = -e^{-\frac{x}{\beta}}$, $du = dx$

$$E(X) = -xe^{-\frac{x}{\beta}}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\frac{x}{\beta}}\,dx = \beta$$

ดังนั้น ค่าคาดหวังเท่ากับพารามิเตอร์ $\beta$ (ถ้าหากว่า $\beta = \frac{1}{\alpha}$ เราสามารถเขียน pdf ของ X ได้ $f(x) = \alpha e^{-\alpha x}$ ในกรณีนี้ $\frac{1}{\alpha}$ คือค่าคาดหวังของ X)

(3) ความแปรปรวนของ X อาจคำนวณหาได้จากการ integration แบบเดียวกัน เราคำนวณ $E(X^2) = 2\beta^2$ ดังนั้น

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 2\beta^2 - \beta^2 = \beta^2$$

(4) การแจกแจงแบบเอกซ์โพเน้นเชียลมีดังนี้

$$P(X > s + t/X > s) = \frac{P(X > s + t)}{P(X > s)} = \frac{e^{-\frac{1}{\beta}(s+t)}}{e^{-\frac{s}{\beta}}}$$

$$= e^{-\frac{t}{\beta}}$$

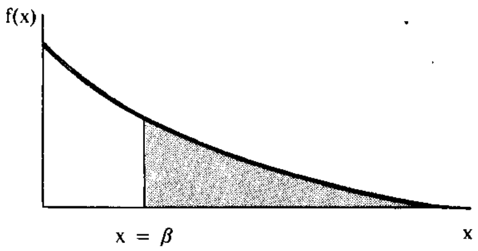
ดังนั้น

$$P(X > s+t|X > s) = P(X > t)$$

**ตัวอย่าง 1** สมมติว่า X มีการแจกแจงแบบเอกซ์โพเน้นเชียลพร้อมด้วยพารามิเตอร์ $\beta$ แล้ว $E(X) = \beta$ เราต้องการคำนวณความน่าจะเป็นว่า X มากกว่าค่าคาดหวังของมัน

$$P(X > \beta) = \int_\beta^\infty \frac{1}{\beta}e^{-\frac{x}{\beta}}dx$$

$$= -e^{-\frac{x}{\beta}}\Big|_\beta^\infty = e^{-1} < 1/2$$




## การแจกแจงแบบแกมม่า

**นิยาม** Γ เป็นแกมม่าฟังก์ชันกำหนดได้ดังนี้

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty y^{\alpha-1}e^{-y}\,dy, \quad \alpha > 0$$

ถ้าหากว่าเรา integrate by parts โดยให้ $u = y^{\alpha-1}$, $dv = e^{-y}\,dy$ เราจะได้

$$\Gamma(\alpha) = -e^{-y}y^{\alpha-1}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty\left[-e^{-y}(\alpha-1)y^{\alpha-2}\right]dy$$

$$= 0 + (\alpha-1)\int_0^\infty e^{-y}y^{\alpha-2}\,dy$$

$$= (\alpha-1)\ \Gamma(\alpha-1)$$

ถ้าหากว่า $\alpha$ เป็นเลขจำนวนเต็มบวกมากกว่าหนึ่ง

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(3)(2)(1) = (\alpha-1)!$$

ในเมื่อ $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-y}\,dy = 1$

และ $\Gamma(1/2) = \int_0^\infty y^{-\frac{1}{2}}e^{-y}\,dy$

ให้ $y = \frac{u^2}{2}$, $dy = udu$

$$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty \left(\frac{u^2}{2}\right)^{-1/2} e^{-\frac{u^2}{2}}\,udu$$

$$= \int_0^\infty \sqrt{2}\,e^{-\frac{u^2}{2}}du = \int_0^\infty 2\sqrt{\pi}\ \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,du$$

$$= \sqrt{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,du = \sqrt{\pi}$$

ถ้าหากว่าเราใช้ $y = x/\beta$ ในเมื่อ $\beta > 0$ แล้ว

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}\left(\frac{1}{\beta}\right)dx$$

$$1 = \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\beta^\alpha}\,x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\beta}}dx$$

เนื่องจากว่า $\alpha > 0$, $\beta > 0$ และ $\Gamma(\alpha) > 0$

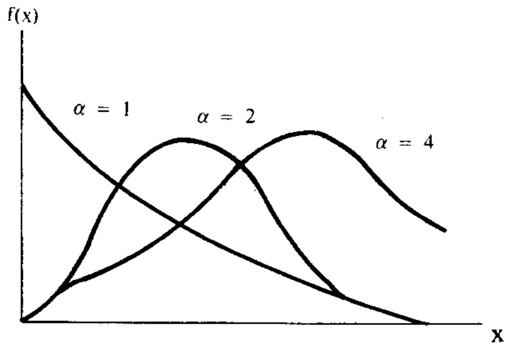
**นิยาม** ให้ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มชนิดต่อเนื่องมีค่าเป็นบวก X จะมีการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบแกมม่า ถ้าหากว่า pdf ของ X กำหนดให้เป็น

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\beta^{\alpha}} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}, 0 < x < \infty$$

$$= 0 \quad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ}$$

การแจกแจงนี้ขึ้นอยู่กับสองพารามิเตอร์ $\alpha$ กับ $\beta$

รูปนี้ใช้ค่า $\alpha$ ต่าง ๆ กัน และ $\beta = 1$




**คุณสมบัติของการแจกแจงแบบแกมม่า**

(1) ถ้าหากว่า $\alpha = 1$, $f(x) = \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}}$ การแจกแจงแบบเอกซ์โพเน้นเชียลเป็นกรณีพิเศษของการแจกแจงแบบแกมม่า

(2) พารามิเตอร์ $\alpha$ มีเลขจำนวนเต็มบวก ในกรณีนี้ความสัมพันธ์ที่สนใจระหว่าง cdf ของการแจกแจงแบบแกมม่ากับการแจกแจงแบบพัวซองหาค่าได้

พิจารณา integral $I = \int_{\alpha}^{\infty} (e^{-y} y^r / r!)\,dy$ ในเมื่อ r เป็นเลขจำนวนเต็มบวก และ $\alpha > 0$ แล้ว $r!\,I = \int_{\alpha}^{\infty} e^{-y} y^r dy$ ใช้ integrating by parts, ให้ $u = y^r$ กับ $dv = e^{-y}dy$ จะให้ $du = ry^{r-1}dy$ และ $v = -e^{-y}$ ดังนั้น

$$r!\,I = -e^{-y} y^r \Big|_{\alpha}^{\infty} + r\int_{\alpha}^{\infty} e^{-y} y^{r-1} dy$$

$$= e^{-\alpha}\alpha^r + r\int_{\alpha}^{\infty} e^{-y} y^{r-1} dy$$

Integral แบบเดียวกันนี้ ต่อไปจะได้

$$r!I = e^{-\alpha}\alpha^r + e^{-\alpha} r\alpha^{r-1} + e^{-\alpha} r(r-1)\alpha^{r-2} + \ldots + e^{-\alpha} r!$$

$$I = e^{-\alpha}[1 + \alpha + \alpha^2/2! + \ldots + \alpha^r/r!]$$

$$= \sum_{y=0}^{r} \frac{\alpha^y e^{-\alpha}}{y!}$$

ในเมื่อ Y เป็นการแจกแจงแบบพัวซองมีพารามิเตอร์ $\alpha$

เรามาพิจารณา cdf ของตัวแปรเชิงสุ่มซึ่งมี pdf กำหนดได้โดย

$$f(x) = \frac{1}{(\alpha-1)!\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}, \quad x > 0$$

$\alpha$ เป็นเลขจำนวนเต็มบวก cdf ของ X คือ

$$F(x) = 1 - P(X > x)$$

$$= 1 - \int_x^\infty \frac{1}{(\alpha-1)!\beta^\alpha} s^{\alpha-1} e^{-\frac{s}{\beta}} ds \qquad x > 0$$

$$= 1 - \int_x^\infty \frac{1}{(\alpha-1)!} \left(\frac{s}{\beta}\right)^{\alpha-1} e^{-\frac{s}{\beta}} d\frac{s}{\beta}$$

ให้ $u = \frac{s}{\beta}$ เราได้

$$F(x) = 1 - \int_{\frac{x}{\beta}}^\infty \frac{u^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} e^{-u} du \qquad x > 0$$

$$= 1 - \sum_{y=0}^{\alpha-1} \frac{e^{-u}u^y}{y!}$$

$$= 1 - \sum_{y=0}^{\alpha-1} \frac{e^{-\frac{x}{\beta}}\left(\frac{x}{\beta}\right)^y}{y!}$$

**ตัวอย่าง 2** สมมติว่า X เป็นจำนวนของการเกิดขึ้นของเหตุการณ์ A ระหว่าง (0, t] แล้วภายใต้เงื่อนไขที่เหมาะสม X มีการแจกแจงแบบพัวซองพร้อมด้วยพารามิเตอร์ $\alpha t$ ในเมื่อ $\alpha$ คือจำนวนที่คาดหวังของการเกิดขึ้นของ A ระหว่างช่วงหน่วยเวลา (unit time interval) ให้ T เป็นเวลาที่ต้องการสังเกต A เกิดขึ้น r ครั้ง เราได้

$$H(t) = P(T \leqslant t) = 1 - P(T > t)$$

$$= 1 - P\ (\text{น้อยกว่า A เกิดขึ้น r ครั้งใน } (0, t]\ )$$

$$= 1 - P(X < r)$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{r-1} \frac{e^{-\alpha t}(\alpha t)^k}{k!}$$

(3) ถ้าหากว่า X มีการแจกแจงแบบแกมม่าแล้ว $E(X) = \alpha\beta$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$
$$= \alpha(\alpha+1)\beta^2 - \alpha^2\beta^2 = \alpha\beta^2$$

mgf ของการแจกแจงแบบแกมม่า

$$M(t) = \int_0^\infty e^{xt} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x(1-\beta t)/\beta} dx$$

ให้ $y = x(1-\beta t)/\beta$, $t < 1/\beta$ หรือ $x = \beta y/(1-\beta t)$

$$M(t) = \int_0^\infty \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha(1-\beta t)} \left(\frac{\beta y}{1-\beta t}\right)^{\alpha-1} e^{-y} dy$$

$$= \left(\frac{1}{1-\beta t}\right)^{\alpha} \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1} e^{-y} dy$$

$$= \frac{1}{(1-\beta t)^\alpha}, \quad t < \frac{1}{\beta}$$

$$M'(t) = (-\alpha)(1-\beta t)^{-\alpha-1}(-\beta)$$

$$M''(t) = (-\alpha)(-\alpha-1)(1-\beta t)^{-\alpha-2}(-\beta)^2$$

ดังนั้น $\mu = M'(0) = \alpha\beta$

$$\sigma^2 = M''(0) - \mu^2 = \alpha(\alpha+1)\beta^2 - \alpha^2\beta^2 = \alpha\beta^2$$

**ตัวอย่าง 3** ให้ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มซึ่งมี

$$E(X^m) = \frac{(m+3)!}{3!} 3^m, m = 1, 2, 3, \ldots$$

แล้ว mgf ของ X กำหนดเป็นอนุกรมได้

$$M(t) = 1 + E(X)t + \frac{E(X^2)}{2!} t^2 + \ldots$$

$$= 1 + \frac{4!\,3}{3!\,1!} t + \frac{5!\,3^2}{3!\,2!} t^2 + \ldots$$

$$= \quad 1 + \frac{4!}{3!1!}(3t) + \frac{5!}{3!2!}(3t)^2 + \frac{6!}{3!3!}(3t)^3 + \ldots$$

$$= \quad 1 + \frac{4}{1!}(3t) + \frac{4\times5}{2!}(3t)^2 + \frac{4\times5\times6}{3!}(3t)^3 + \ldots$$

นี้เป็น Maclaurin's series สำหรับ $(1-3t)^{-4}$, $-1 < 3t < 1$ ดังนั้น X มีการแจกแจงแบบแกมม่าที่ $\alpha = 4$ และ $\beta = 3$

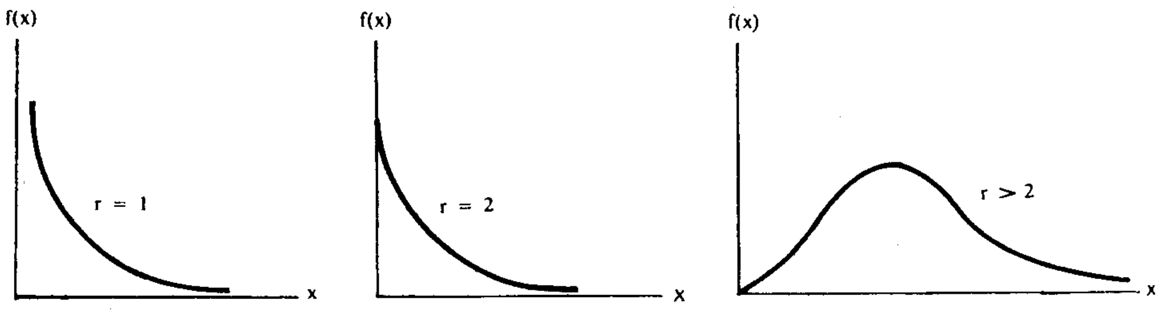
ตัวแบบเชิงสุ่มที่มีการแจกแจงแบบแกมม่ามีประโยชน์ใช้แทนปรากฏการณ์ทางกายภาพ อย่างเช่น เวลาของการบริการลูกค้ามีการแจกแจงแบบเอกซ์โพเน้นด้วยพารามิเตอร์ $\beta$ ตัวแปรเชิงสุ่ม X เป็นเวลาทั้งหมดที่ใช้บริการลูกค้า $\alpha$ คน แล้วจะมีการแจกแจงแบบแกมม่าด้วยพารามิเตอร์ $\alpha$ กับ $\beta$ เมื่อไรที่ $\alpha = 1$ การแจกแจงแบบแกมม่าจะเป็นการแจกแจงของตัวแปรเชิงสุ่มแบบเอกซ์โพเน้น ดังนั้น ผลบวกของตัวแปรเชิงสุ่มที่มีการแจกแจงแบบเอกซ์โพเน้นที่อิสระกันจะมีการแจกแจงแบบแกมม่า

**การแจกแจงแบบไคสแคว**

พิจารณาการแจกแจงแบบแกมม่าในที่ซึ่ง $\alpha = r/2$, r เป็นตัวเลขจำนวนเต็มบวก และ $\beta = 2$ ตัวแปรเชิงสุ่มชนิดต่อเนื่อง X ซึ่งมี pdf

$$f(x) \quad = \quad \frac{1}{\Gamma(r/2)2^{\frac{r}{2}}} x^{\frac{r}{2}-1} e^{-\frac{x}{\beta}} \qquad 0 < x < \infty$$

$$= \quad 0 \quad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ}$$




(ก) (ข) (ค)

mgf ของการแจกแจงแบบไคสแคว คือ

$$M(t) = (1-2t)^{-\frac{r}{2}}, \quad t < 1/2$$

มัชฌิมและความแปรปรวนของการแจกแจงแบบไคสแคว $\mu = \alpha\beta = (r/2)\ 2 = r$ และ $\sigma^2 = \alpha\beta^2 = (r/2)2^2 = 2r$ เราเรียก r ว่า องศาแห่งความอิสระของการแจกแจงแบบไคสแคว เราเขียนได้เป็น $\chi^2(r)$ มีองศาแห่งความอิสระ r

**ตัวอย่าง 4** ถ้าหากว่า X มี pdf

$$f(x) = \frac{1}{4}xe^{-\frac{x}{2}} \qquad 0 < x < \infty$$

$$= 0 \quad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ}$$

ดังนั้น X คือ $\chi^2(4)$ มี $\mu = 4, \sigma^2 = 8$ และ $M(t) = (1-2t)^{-2}\ t < 1/2$

**ตัวอย่าง 5** ถ้าหากว่า X มี mgf $M(t) = (1-2t)^{-8}\ t < 1/2$ แล้ว X เป็น $\chi^2(16)$

ถ้าหากว่าตัวแปรเชิงสุ่ม X เป็น $\chi^2(r)$ แล้ว $c_1 < c_2$ เราจะได้ว่า

$$P(c_1 \leqslant X \leqslant c_2) = P(X \leqslant c_2) - P(X \leqslant c_1)$$

เนื่องจากว่า $P(X = c_1) = 0$ การคำนวณความน่าจะเป็นนั้น เราต้องการค่าของ integral ดังเช่น

$$P(X \leqslant x) = \int_0^x \frac{1}{\Gamma(r/2)2^{r/2}} w^{\frac{r}{2}-1} e^{-\frac{w}{2}}\, dw$$

ตารางของ integral นี้ สำหรับค่าที่เลือกได้ของ r และ x ในตาราง 2

**ตัวอย่าง 6** ให้ X เป็น $\chi^2(10)$ แล้ว จากตาราง 2 พร้อมด้วย $r = 10$

$$P(3.25 \leqslant X \leqslant 20.5) = P(X \leqslant 20.5) - P(X \leqslant 3.25)$$

$$= 0.975 - 0.025 = 0.95$$

ในกรณีนี้ถ้าหากว่า $P(a < X) = 0.05$ แล้ว $P(X \leqslant a) = .95$

ดังนั้น จากตาราง 2 พร้อมด้วย $r = 10, a = 18.3$

**ตัวอย่าง 7** ให้ X มีการแจกแจงแบบแกมม่าพร้อมด้วย $\alpha = r/2$ ในเมื่อ r เป็นเลขจำนวนเต็มบวก และ $\beta > 0$ กำหนดให้ตัวแปรเชิงสุ่ม $Y = \frac{2X}{\beta}$

จงหา pdf ของ Y

ฟังก์ชันการแจกแจงของ Y คือ

$$G(y) = P(Y \leqslant y) = P\left(\frac{2X}{\beta} \leqslant y\right)$$

$$= P\left(X \leqslant \frac{\beta y}{2}\right)$$

ถ้าหากว่า $y \leqslant 0$ แล้ว $G(y) = 0$ แต่ถ้าหากว่า $y > 0$ แล้ว

$$G(y) = \int_0^{\frac{\beta y}{2}} \frac{1}{\Gamma(r/2)\beta^{\frac{r}{2}}} x^{\frac{r}{2}-1} e^{\frac{-x}{\beta}} dx$$

ดังนั้น pdf ของ Y คือ (ใช้หลักอนุพันธ์ของอินทิกรัล)

$$g(y) = G'(y) = \int_0^{\frac{\beta y}{2}} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\Gamma(r/2)\beta^{\frac{r}{2}}} x^{\frac{r}{2}-1} e^{\frac{-x}{\beta}} dx$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(r/2)\beta^{\frac{r}{2}}} \left(\frac{\beta y}{2}\right)^{\frac{r}{2}-1} e^{-\left(\frac{\beta y}{2\beta}\right)} \frac{d}{dy}\left(\frac{\beta y}{2}\right)$$

$$- \frac{1}{\Gamma(r/2)\beta^{\frac{r}{2}}} (0)^{\frac{r}{2}-1} e^{-\left(\frac{0}{\beta}\right)} \frac{d(0)}{dy}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(r/2)\beta^{\frac{r}{2}}} \left(\frac{\beta y}{2}\right)^{\frac{r}{2}-1} e^{\frac{-y}{2}} \left(\frac{\beta}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(r/2)2^{\frac{r}{2}}} y^{\frac{r}{2}-1} e^{\frac{-y}{2}} \qquad y > 0$$

นั่นคือ ถ้าหากว่า $y > 0$, y เป็น $\chi^2(r)$

# แบบฝึกหัด

1. ถ้าหากว่า $(1-2t)^{-6}$, $t < 1/2$ เป็น mgf ของตัวแปรเชิงสุ่ม X จงหา $P(X < 5.23)$
2. ถ้าหากว่า X เป็น $\chi^2(5)$ คำนวณค่าคงที่ c และ d เพื่อว่า $P(c < X < d) = .95$ กับ $P(X < c) = 0.025$
3. ถ้าหากว่า X มีการแจกแจงแบบแกมม่าพร้อม $\alpha = 3$ และ $\beta = 4$ จงหา $P(3.28<X<25.2)$ (ข้อเสนอแนะ ให้พิจารณาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่เหมือนกัน $1.64 < Y < 12.6$ ในเมื่อ $Y = 2X/4 = X/2$)
4. ให้ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มซึ่งมี $E(X^m) = (m+1)!\, 2^m$, $m = 1, 2, 3, \ldots$ จงหาการแจกแจงของ X
5. จงแสดงว่า

$$\int_{\mu}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k)} z^{k-1}e^{-z}dz = \sum_{x=0}^{k-1} \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

6. ให้ X มีการแจกแจงแบบแกมม่าพร้อมด้วย pdf

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\beta^2} xe^{\frac{-x}{\beta}} \qquad 0 < x < \infty \\ &= 0 \quad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ} \end{aligned}$$

ถ้าหากว่า $x = 2$ เป็นค่าฐานนิยมเดียวเท่านั้นของการแจกแจง จงหาค่าพารามิเตอร์ $\beta$ กับ $P(X < 9.49)$

7. ให้ X มีการแจกแจงแบบเดียวกันหมดพร้อมด้วย pdf

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\theta_2}, \theta_1 - \theta_2 < X < \theta_1 + \theta_2, \quad 0 < \theta_2 \\ &= 0 \quad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ} \end{aligned}$$

จงหา $\theta_1$ กับ $\theta_2$ เพื่อว่ามัชฌิมและความแปรปรวนของ X เท่ากับมัชฌิมและความแปรปรวนของการแจกแจง $\chi^2(8)$ ตามลำดับ

8. ให้ X มีการแจกแจงแบบเดียวกันหมด พร้อมด้วย pdf $f(x) = 1, 0 < x < 1$, ศูนย์สำหรับค่าอื่น ๆ จงหาฟังก์ชันการแจกแจงของ $Y = -2\ell nX$ และ pdf ของ Y

## 4.9 การแจกแจงปกติ

เรามาพิจารณา integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-y^2}{2}} dy$$

ซึ่งหาค่าได้ สังเกตว่า $I > 0$ และ $I^2$ นั้น อาจเขียนได้

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2+z^2}{2}} dy\, dz$$

เราเปลี่ยนเป็น polar Coordinate โดยให้ $y = r\cos\theta$; $z = r\sin\theta$, $r^2 = y^2 + z^2$ เราจะได้

$$I^2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{\frac{-r^2}{2}} r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} -e^{\frac{-r^2}{2}}\Big|_0^{\infty} d\theta = \int_0^{2\pi} 1 d\theta$$

$$= \theta\Big|_0^{2\pi} = 2\pi$$

ดังนั้น $I = \sqrt{2\pi}$ และ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-y^2}{2}} dy = 1$$

ถ้าหากว่าเราให้

$$Y = \frac{X-\mu}{\sigma}, \quad \sigma > 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = 1, \quad \sigma > 0$$

นี้หมายความว่า

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad -\infty < x < \infty$$

f(x) มีการแจกแจงปกติมี

$$E(X) = \mu, \quad V(X) = \sigma^2$$

**พิสูจน์**

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

ให้ $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ และ $x = \sigma z+\mu$, $dx = \sigma\, dz$ เราได้

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\sigma z+\mu)}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2}} \sigma dz$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma z}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2}} dz + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2}} dz$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-z^2}{2}} \frac{dz^2}{2} + \mu\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2}} dz$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left(-e^{\frac{-z^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{\infty}\right) + \mu$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} (-0+0) + \mu$$

$$= \mu$$

สำหรับความแปรปรวน

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

ในเมื่อ

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

และให้ $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$, $x = \sigma z+\mu$, $dx = \sigma dz$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\sigma z+\mu)^2}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2}} \sigma dz$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma^2 z^2}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2}} dz + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\mu\sigma z}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2}} dz$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu^2}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2}} dz$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z e^{\frac{-z^2}{2}} \frac{dz^2}{2} + \frac{2\mu\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-z^2}{2}} \frac{dz^2}{2}$$

$$+ \mu^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2}} dz$$

**เทอมที่สองจะมีค่าเท่ากับศูนย์ตามที่ได้พิสูจน์มาแล้วในการหา E(X) สำหรับเทอมที่สามมีค่าเท่ากับ $\mu^2$ ให้เรามาพิจารณาเทอมที่หนึ่ง โดยใช้อินทิเกรตบายพาท โดยให้**

$$dv = e^{\frac{-z^2}{2}} \frac{dz^2}{2}, \quad v = -e^{\frac{-z^2}{2}}$$

$$u = z, \quad du = dz$$

$$\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z e^{\frac{-z^2}{2}} \frac{dz^2}{2} = -\frac{\sigma^2 z e^{\frac{-z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \Bigg|_{-\infty}^{+\infty} - \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-e^{\frac{-z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dz$$

$$= 0 + \sigma^2$$

$$\therefore \quad E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2$$

**ดังนั้น**

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\ &= \sigma^2 + \mu^2 - (\mu)^2 \\ &= \sigma^2 \end{aligned}$$

โมเมนต์เจนเนอเรติงฟังก์ชันของการแจกแจงปกติคือ

$$M(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{xt} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

ให้ $x = \sigma y + \sigma^2 t + \mu$ แล้ว M(t) กลายเป็น

$$M(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\sigma y + \sigma^2 t + \mu)t} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma y + \sigma^2 t}{\sigma}\right)^2} \sigma dy$$

$$M(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2} - \frac{y^2}{2}} dy$$

$$= e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-y^2}{2}} dy$$

$$= e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

สำหรับค่าจริงทั้งหมดของ t

**ตัวอย่าง 1** ถ้าหากว่า X มี mgf เป็น

$$M(t) = e^{2t + 32t^2}$$

แล้ว X มีการแจกแจงแบบปกติ $\mu = 2,\ \sigma^2 = 64$

การแจกแจงปกติมี pdf เขียนย่อ ๆ ได้ $n(\mu, \sigma^2)$ ดังนั้น ถ้าหากว่าตัวแปรเชิงสุ่ม X เป็น $n(0, 1)$ หมายความว่า X มีการแจกแจงปกติ $\mu = 0$ และ $\sigma^2 = 1$ ดังนั้น pdf ของ X เป็น

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}, \quad -\infty < x < \infty$$

ถ้าหากว่า X เป็น $n(5, 4)$ นี้ หมายความว่า X มีการแจกแจงปกติ $\mu = 5$ และ $\sigma^2 = 4$ ดังนั้น pdf ของ x เป็น

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-5)^2}{2(4)}\right], \quad -\infty < x < \infty$$

ถ้าหากว่า

$$M(t) = e^{\frac{t^2}{2}} \text{ แล้ว } X \text{ เป็น } n(0, 1)$$

กราฟของ $\quad f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right], \quad -\infty < x < \infty$

(1) สมมาตรรอบแกนตั้งตลอด $X = \mu$

(2) ค่ามากที่สุด $1/(\sigma\sqrt{2\pi})$ ที่ $X = \mu$

(3) มีแกน x เป็นเสมือน asymptote ตามพื้นราบ

(4) มีจุด inflection ที่ $X = \mu \pm \sigma$

**ทฤษฎี** ถ้าหากว่าตัวแปรเชิงสุ่ม X เป็น $n(\mu, \sigma^2)$, $\sigma^2 > 0$ แล้ว ตัวแปรเชิงสุ่ม $W = (X-\mu)/\sigma$ เป็น $n(0, 1)$

**พิสูจน์** ฟังก์ชันการแจกแจง $G(\omega)$ ของ W คือ $(\sigma > 0)$

$$G(\omega) = P(W \leqslant \omega) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leqslant \omega\right)$$

$$= P(X \leqslant \mu + \sigma\omega)$$

นั่นคือ

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\mu+\sigma\omega} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

เพราะฉะนั้น pdf ของ W คือ (ใช้หลักอนุพันธ์ของอินทิกรัล)

$$g(\omega) = G'(\omega) = \int_{-\infty}^{\mu+\sigma\omega} \frac{\partial}{\partial\omega} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx + \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu+\sigma\omega-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$\frac{d}{d\omega}(\mu+\sigma\omega) - \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{-\infty-\mu}{\sigma}\right)^2} \frac{d}{d\omega}(-\infty)$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{2}}(\sigma)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{2}} \qquad -\infty < \omega < \infty$$

ซึ่งเป็น n(0, 1) ที่ต้องการ

สมมติว่า X เป็น $n(\mu, \sigma^2)$ แล้ว $c_1 < c_2$ เราจะได้ว่า $P(X = c_1) = 0$

$$P(c_1 < X < c_2) = P(X < c_2) - P(X < c_1)$$

$$= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{c_2-\mu}{\sigma}\right) - P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{c_1-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{\frac{c_2-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{2}} d\omega - \int_{-\infty}^{\frac{(c_1-\mu)}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{2}} d\omega$$

เพราะว่า $W = (X-\mu)/\sigma$ เป็น n(0, 1) นั่นคือ ความน่าจะเป็นเกี่ยวกับ X ซึ่งเป็น $n(\mu, \sigma^2)$ สามารถแสดงในเทอมของความน่าจะเป็นเกี่ยวกับ W ซึ่งเป็น n(0, 1) อย่างไรก็ตาม การ integral ก็คล้ายกันกับ

$$\int_{-\infty}^{k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{2}} d\omega$$

ซึ่งสามารถคำนวณได้โดยทฤษฎีพื้นฐานของแคลคูลัส ตารางของค่าโดยประมาณของ integral นี้สำหรับค่าต่าง ๆ ของ k ได้เตรียมไว้ในตาราง 3 เราใช้สัญลักษณ์

$$N(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{2}} d\omega$$

ดังนั้น ถ้าหากว่า X เป็น $n(\mu, \sigma^2)$ แล้ว

$$P(c_1 < X < c_2) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) < \frac{c_2-\mu}{\sigma}\right) - P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{c_1-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= N\left(\frac{c_2-\mu}{\sigma}\right) - N\left(\frac{c_1-\mu}{\sigma}\right)$$

สำหรับ $N(-x) = 1-N(x)$ จะละไว้ให้นักศึกษาพิสูจน์

**ตัวอย่าง 2** ให้ X เป็น $n(2, 25)$ แล้ว จากตารางที่ 3

$$\begin{aligned}
P(0 < X < 10) &= N\left(\frac{10-2}{5}\right) - N\left(\frac{0-2}{5}\right) \\
&= N(1.6) - N(-.4) \\
&= N(1.6) - (1-N(.4)) \\
&= 0.945 - (1-0.655) = 0.600 \\
P(-8 < X < 1) &= N\left(\frac{1-2}{5}\right) - N\left(\frac{-8-2}{5}\right) \\
&= N(-.2) - N(-2) \\
&= (1-N(.2)) - (1-N(2)) \\
&= (1-0.579) - (1-.977) = 0.398
\end{aligned}$$

**ตัวอย่าง 3** ให้ X เป็น $n(\mu, \sigma^2)$ แล้วจากตารางที่ 3

$$\begin{aligned}
P(\mu-2\sigma < X < \mu+2\sigma) &= N\left(\frac{\mu+2\sigma-\mu}{\sigma}\right) - N\left(\frac{\mu-2\sigma-\mu}{\sigma}\right) \\
&= N(2) - N(-2) \\
&= 0.977 - (1-.977) = 0.954
\end{aligned}$$

•

**ตัวอย่าง 4** สมมติว่า 10 เปอร์เซ็นต์ของความน่าจะเป็นสำหรับการแจกแจงซึ่งเป็น $n(\mu, \sigma^2)$ อยู่ใต้ 60 และ 5 เปอร์เซ็นต์เหนือ 90 จงหาค่า $\mu$ และ $\sigma$

**วิธีทำ** เราทราบว่าตัวแปรเชิงสุ่ม X เป็น $n(\mu, \sigma^2)$ และ $P(X \leqslant 60) = .10$ และ $P(X \leqslant 90) = 0.95$

เพราะฉะนั้น $N[(60-\mu)/\sigma] = 0.10$ และ $N[(90-\mu)/\sigma] = 0.95$ จากตารางที่ 3 ในภาคผนวก เราได้

$$\frac{60-\mu}{\sigma} = -1.282 \qquad (1)$$

$$\frac{90-\mu}{\sigma} = 1.645 \qquad (2)$$

จาก (1) $\quad \mu - 1.282\sigma = 60 \qquad (3)$

จาก (2) $\quad \mu + 1.645\sigma = 90 \qquad (4)$

(4) − (3) $\quad 2.927\sigma = 30$

$\sigma = 10.2$

แทนค่า $\sigma$ ลงใน (3) $\quad \mu = 73.1$

**ทฤษฎี** ถ้าหากว่าตัวแปรเชิงสุ่ม X เป็น $n(\mu, \sigma^2), \sigma^2 > 0$ แล้ว ตัวแปรเชิงสุ่ม $V = \left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2$ เป็น $\chi^2(1)$

**พิสูจน์** เพราะว่า $V = W^2$ ในเมื่อ $W = (X-\mu)/\sigma$ เป็น $n(0, 1)$ ฟังก์ชันการแจกแจง $G(v)$ ของ V คือ (สำหรับ $v \geq 0$)

$$G(v) = P(W^2 \leq v) = P(-\sqrt{v} \leq W \leq \sqrt{v})$$

นั่นคือ

$$G(v) = \int_{-\sqrt{v}}^{\sqrt{v}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{2}}\, d\omega$$

$$= 2\int_0^{\sqrt{v}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{2}}\, d\omega \quad v \geq 0$$

$$= 0 \qquad \text{สำหรับ } v < 0$$

ดังนั้น pdf ของ V คือ (ใช้หลักอนุพันธ์ของอินทิกรัล)

$$g(v) = G'(v)$$

$$= 2\int_0^{\sqrt{v}} \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{\omega^2}{2}}\, d\omega + \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\sqrt{v})^2}{2}} \frac{d\sqrt{v}}{dv} - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(0)^2}{2}} \frac{d(0)}{dv}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v}{2}} \left(\frac{1}{2}\right) v^{-\frac{1}{2}} \qquad = \frac{1}{\sqrt{\pi}\, 2^{\frac{1}{2}}} v^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{v}{2}}$$

ในเมื่อ $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

$$g(v) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)2^{\frac{1}{2}}} v^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{v}{2}} \qquad v \geqslant 0$$

$$= 0 \qquad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ}$$

เพราะฉะนั้น V จึงเป็น $\chi^2(1)$

**ทฤษฎี** ถ้าหากว่า X มีการแจกแจง $n(\mu, \sigma^2)$ และถ้าหากว่า $Y = aX+b$ แล้ว Y มีการแจกแจง $n(a\mu+b, a^2\sigma^2)$

**พิสูจน์** ให้ฟังก์ชันการแจกแจง G(y) ของ Y เขียนได้เป็น

$$G(y) = P(Y \leqslant y) = P(aX+b \leqslant y)$$

$$= P\left(X \leqslant \frac{y-b}{a}\right) = \int_{-\infty}^{\frac{y-b}{a}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

ใช้หลักอนุพันธ์ของอินทิกรัลเพื่อหา pdf $g(y) = G'(y)$ ของตัวแปรเชิงสุ่ม Y ได้

$$g(y) = G'(y)$$

$$= \int_{-\infty}^{\frac{y-b}{a}} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx + \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{y-b}{a}-\mu}{\sigma}\right)^2} \frac{d}{dy}\frac{y-b}{a}$$

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{-\infty-\mu}{\sigma}\right)^2} \frac{d(-\infty)}{dy}$$

$$= \frac{1}{|a|\,\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-(a\mu+b)}{a\sigma}\right)^2} \qquad -\infty < y < +\infty$$

$$= 0 \qquad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ}$$

# แบบฝึกหัด

1. ถ้าหากว่า X เป็น n(75, 100), จงคำนวณหา $P(X<60)$ กับ $P(70<X<100)$
2. ถ้าหากว่า X เป็น $n(\mu, \sigma^2)$ จงคำนวณหาค่า b เพื่อว่า $P\left(-b < \left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) < b\right) = 0.90$
3. ให้ X เป็น $n(\mu, \sigma^2)$ เพื่อว่า $P(X<89) = 0.90$ และ $P(X<94) = .95$ จงหาค่า $\mu$ กับ $\sigma^2$
4. จงหาค่าคงที่ c เพื่อว่า $f(x) = ce^{-x^2+4x}$, $-\infty < x < \infty$ สอดคล้องตามเงื่อนไขการเป็น pdf
5. จงแสดงว่ากราฟของ pdf $n(\mu, \sigma^2)$ มีจุด inflection ที่ $x = \mu-\sigma$ กับ $x = \mu+\sigma$
6. ถ้าหากว่า $e^{3t+8t^2}$ เป็น mgf ของตัวแปรเชิงสุ่ม X จงหา $P(-1<X<9)$
7. ให้ตัวแปรเชิงสุ่ม X มี pdf

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad 0<x<\infty \\
&= 0 \quad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ}
\end{aligned}
$$

   จงคำนวณหาค่ามัชฌิมและความแปรปรวนของ X

8. ให้ X เป็น n(5, 10) จงหา $P[0.04 < (X-5)^2 < 38.4]$
9. ถ้าหากว่า X เป็น n(1, 4) จงคำนวณความน่าจะเป็น $P(1<X^2<9)$

# ตัวอย่างที่น่าจะสนใจ

1. ถ้าหากว่า X เป็น n(1, 4) จงคำนวณความน่าจะเป็น $P(1<X^2<9)$

$$\begin{aligned}
P(1<X^2<9) &= P(\pm 1<X<\pm 3) \\
&= P(-3<X<-1 \text{ หรือ } 1<X<3) \\
&= P(-3<X<-1) + P(1<X<3) \\
&= P\left(\frac{-3-1}{2} < \frac{X-1}{2} < \frac{-1-1}{2}\right) + P\left(\frac{1-1}{2} < \frac{X-1}{2} < \frac{3-1}{2}\right) \\
&= N(-1) - N(-2) + N(1) - N(0) \\
&= (1-.841) - (1-.977) + .841 - 0.5 \\
&= .159 - .023 + .841 - 0.5 \\
&= .477
\end{aligned}$$

2. ถ้าหากว่า X เป็น n(75, 25) จงหาความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขที่ X มีค่ามากกว่า 80 โดยกำหนดให้ว่า X มีค่ามากกว่า 77

$$\begin{aligned}
P(X>80|X>77) &= \frac{P[(X>80) \cap (X>77)]}{P(X>77)} \\
&= \frac{P(X>80)}{P(X>77)}
\end{aligned}$$

ในเมื่อ

$$\begin{aligned}
P(X>80) &= P\left(\frac{X-75}{5} > \frac{80-75}{5}\right) \\
&= P\left(\frac{X-75}{5} > 1\right) \\
&= 1 - P\left(\frac{X-75}{5} \leqslant 1\right) \\
&= 1 - N(1) \\
&= 1 - .841 = .159
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(X>77) &= P\left(\frac{X-75}{5} > \frac{77-75}{5}\right) \\
&= P\left(\frac{X-75}{5} > .4\right)
\end{aligned}$$

$$= \quad 1 - P\left(\frac{X-75}{5} \leqslant .4\right)$$

$$= \quad 1 - N(.4)$$

$$= \quad 1 - .655 \quad = \quad .345$$

$$\therefore P(X>80|X>77) \quad = \quad \frac{.159}{.345} \quad = \quad 0.4608$$

3. ให้ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มโดยมี $E(X^{2m}) = (2m)!/(2^m m!)$, $m = 1, 2, 3, \ldots$ และ $E(X^{2m-1}) = 0$, $m = 1, 2, 3, \ldots$ จงหา mgf กับ pdf ของ X

$$M(t) \quad = \quad 1 + \frac{E(X)}{1!} t + \frac{E(X^2)}{2!} t^2 + \frac{E(X^3)}{3!} t^3 + \ldots$$

$$= \quad 1 + 0 + \frac{E(X^2)}{2!} t^2 + 0 + \frac{E(X^4)}{4!} t^4 + 0 + \ldots$$

เนื่องจากว่าการแจกแจงของเทอมคี่เป็นศูนย์

$$M(t) \quad = \quad 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2m)!}{2^m m!} \frac{t^{2m}}{2m!}$$

$$= \quad 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{t^{2m}}{2^m}$$

$$= \quad 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{t^2}{2}\right)^m}{m!} \quad = \quad e^{\frac{t^2}{2}}$$

$\therefore$ pdf คือ $X \sim n(0, 1)$

4. ให้ตัวแปรเชิงสุ่ม $X_1, X_2$ และ $X_3$ ที่มีความอิสระกัน $n(0, 1), n(2, 4)$ และ $n(-1, 1)$ ตามลำดับ คำนวณความน่าจะเป็นที่สองของสามตัวแปรเชิงสุ่มน้อยกว่าศูนย์

ให้ $\left.\begin{array}{l} X_1 \text{ เป็น } n(0, 1) \\ X_2 \text{ เป็น } n(2, 4) \\ X_3 \text{ เป็น } n(-1, 1) \end{array}\right\}$ $X_1, X_2$ และ $X_3$ มีความอิสระกัน

A เป็นเหตุการณ์ที่สองตัวแปรของสามตัวแปรน้อยกว่าศูนย์ซึ่งประกอบด้วยสามผลลัพธ์ (outcomes) นั่นคือ

$$A \quad = \quad E_1 \cup E_2 \cup E_3 \quad \text{ในเมื่อ}$$

$$\therefore \quad P(A) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3)$$

| | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ |
|---|---|---|---|
| $E_1$ | $\geqslant 0$ | $<0$ | $<0$ |
| $E_2$ | $<0$ | $\geqslant 0$ | $<0$ |
| $E_3$ | $<0$ | $<0$ | $\geqslant 0$ |

$$\begin{aligned}
P(E_1) &= P(X_1 \geqslant 0)\, P(X_2 < 0)\, P(X_3 < 0) \\
&= P\left(\frac{X_1 - 0}{1} \geqslant \frac{0-0}{1}\right) P\left(\frac{X_2 - 2}{2} < \frac{0-2}{2}\right) P\left(\frac{X_3+1}{1} < \frac{0+1}{1}\right) \\
&= \left(1 - N(0)\right)\left(N(-1)\right) N(1) \\
&= (0.5)(1 - .841)(.841) \quad = \quad 0.06686
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(E_2) &= P(X_1 < 0)\, P(X_2 \geqslant 0)\, P(X_3 < 0) \\
&= P\left(\frac{X_1 - 0}{1} < \frac{0-0}{1}\right) P\left(\frac{X_2 - 2}{2} \geqslant \frac{0-2}{2}\right) P\left(\frac{X_3+1}{1} < \frac{0+1}{1}\right) \\
&= P\left(\frac{X_1 - 0}{1} < 0\right) P\left(\frac{X_2 - 2}{2} \geqslant -1\right) P\left(\frac{X_3+1}{1} < 1\right) \\
&= N(0)\left(1 - N(-1)\right) N(1) \\
&= (.5)\left(1 - 1 + N(1)\right)(.841) \\
&= (.5)(.841)(.841) \quad = \quad .3536
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(E_3) &= P\left(\frac{X_1 - 0}{1} < 0\right) P\left(\frac{X_2 - 2}{2} < -1\right) P\left(\frac{X_3+1}{1} \geqslant 1\right) \\
&= N(0)\, N(-1)\left(1 - N(1)\right) \\
&= (.5)(1 - .841)(1 - .841) \\
&= (.5)(.159)(.159) \quad = \quad 0.01264
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(A) &= 0.06686 + 0.3536 + 0.01264 \\
&= 0.433
\end{aligned}$$

## 4.10 The Bivariate Normal Distribution

**นิยาม** ให้ (X, Y) เป็นสองตัวแปรเชิงสุ่มชนิดต่อเนื่องมีทุก ๆ ค่าอยู่ในระนาบ euclidean (X, Y) มีการแจกแจง bivariate normal ถ้าหากว่า pdf ของมันแสดงได้ดังนี้

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2}\right\}\right] \quad -\infty<x<\infty, \quad -\infty<y<\infty$$

pdf ข้างต้นขึ้นอยู่กับ 5 พารามิเตอร์ $\mu_x, \mu_y, \sigma_x^2, \sigma_y^2$ และ $\rho$ โดยที่ $-\infty<\mu_x<\infty$ ; $-\infty<\mu_y<\infty$ ; $\sigma_x>0$ ; $\sigma_y>0$ ; $-1<\rho<1$

คุณสมบัติของการแจกแจงแบบ bivariate normal คือ

(ก) การแจกแจง marginal ของ X กับ Y เป็น $n(\mu_x, \sigma_x^2)$ กับ $n(\mu_y, \sigma_y^2)$ ตามลำดับ

(ข) ตัวพารามิเตอร์ $\rho$ เป็นสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ระหว่าง X กับ Y

(ค) f(x, y) เป็น pdf ร่วม

(ง) การแจกแจงแบบมีเงื่อนไขของ X กำหนด Y = y กับของ Y กำหนด X = x คือ

$$n\left[\mu_x + \rho\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y-\mu_y), \sigma_x^2(1-\rho^2)\right], \quad n\left[\mu_y + \rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\mu_x), \sigma_y^2(1-\rho^2)\right] \text{ ตามลำดับ}$$

f(x, y) เป็น pdf ร่วมมีค่ามากกว่าศูนย์ กำหนดให้ f(x) ได้โดย

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 - 2\rho\frac{(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right\}\right]dy$$

ให้

$$q = \frac{1}{1-\rho^2}\left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right) + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right]$$

$$(1-\rho^2)q = \left[\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right) - \rho\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)\right]^2 + (1-\rho^2)\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2$$

$$= \left[\frac{y-\mu_y}{\sigma_y} - \rho\frac{\sigma_y}{\sigma_y}\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)\right]^2 + (1-\rho^2)\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2$$

$$= \left[\frac{1}{\sigma_y}\left(y-\mu_y-\rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\mu_x)\right)\right]^2 + (1-\rho^2)\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2$$

ให้ $b = \mu_y + \rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\mu_x)$ ดังนั้น

$$(1-\rho^2)q = \left(\frac{y-b}{\sigma_y}\right)^2 + (1-\rho^2)\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2$$

$$q = \frac{1}{1-\rho^2}\left(\frac{y-b}{\sigma_y}\right)^2 + \left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2$$

$$\therefore \quad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma_x \; 2\pi\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \, e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1-\rho^2)}\left(\frac{y-b}{\sigma_y}\right)^2 + \left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2\right]} dy$$

$$= \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(y-b)^2}{2\sigma_y^2(1-\rho^2)}} dy$$

$$= \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}} \quad -\infty < x < \infty$$

เนื่องจากว่า $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(y-b)^2}{2\sigma_y^2(1-\rho^2)}} dy = 1$

$$\therefore \quad \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

เพราะว่า $f(x, y)$ เป็น pdf ร่วมของสองตัวแปรเชิงสุ่ม X กับ Y ดังนั้น $f(x)$ เป็น marginal pdf ของ X และ X เป็น $n(\mu_x, \sigma_x^2)$ ในทำนองเดียวกัน Y เป็น $n(\mu_y, \sigma_y^2)$ ส่วน

$\frac{1}{\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(y-b)^2}{2\sigma^2(1-\rho^2)}\right]$ เป็น pdf แบบมีเงื่อนไขของ Y กำหนด X = x นั่นคือ pdf แบบมีเงื่อนไขของ Y กำหนด X = x มีการแจกแจงปกติ มีมัชฌิม $\mu_y+\rho(\sigma_y/\sigma_x)(x-\mu_x)$ และความแปรปรวน $\sigma_y^2(1-\rho^2)$ ดังนั้น มัชฌิมแบบมีเงื่อนไขของ Y กำหนด X = x เป็นเส้นตรงในค่าของ x และกำหนดได้โดย (เว้นแต่ $\rho = 0$)

$$E(Y/x) = \mu_y + \rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\mu_x)$$

ความแปรปรวน $\sigma_y^2(1-\rho^2)$ ในทำนองเดียวกัน เราสามารถแสดงได้ว่า การแจกแจงแบบมีเงื่อนไขของ X กำหนด Y = y เป็นการแจกแจงปกติ

$$n\left[\mu_x + \rho\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y-\mu_y),\ \sigma_x^2(1-\rho^2)\right]$$

**ตัวอย่าง 1** สมมติว่าประชากรหนึ่งของคู่สมรสโดยที่ $X_1$ เป็นความสูงของสามีและ $X_2$ เป็นความสูงของภรรยามีการแจกแจงแบบ bivariate normal พร้อมด้วยพารามิเตอร์ $\mu_1 = 5.8$ ฟุต- $\mu_2 = 5.3$ ฟุต $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.2$ ฟุต และ $\rho = 0.6$

pdf แบบมีเงื่อนไขของ $X_2$ กำหนดให้ $x_1 = 6.3$ เป็นปกติมีมัชฌิม

$$\mu_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x_1 - \mu_1) = 5.3 + (.6)(6.3 - 5.8) = 5.6$$

และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน $\sigma_2\sqrt{1-\rho^2} = (.2)\sqrt{(1-.36)} = 0.16$

ถ้าหากว่า กำหนดให้ว่าความสูงของสามีเป็น 6.3 ฟุต ความน่าจะเป็นที่ภรรยาของเขามีความสูงระหว่าง 5.28 กับ 5.92 ฟุต คือ

$$P(5.28 < X_2 < 5.92/x_1 = 6.3) = N(2) - N(-2) = 0.954$$

mgf ของการแจกแจงแบบ bivariate normal สามารถคำนวณได้

$$M(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{x_1t_1 + x_2t_2} f(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{x_1t_1} f(x_1)\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{x_2t_2} f(x_2/x_1)dx_2\right] dx_1$$

สำหรับค่าจริงทั้งหมดของ $t_1$ กับ $t_2$ integral ภายในวงเล็บเป็น mgf ของ pdf แบบมีเงื่อนไข $f(x_2/x_1)$ เนื่องจากว่า $f(x_2/x_1)$ เป็น pdf ปกติมีมัชฌิม $\mu_2 + \rho(\sigma_2/\sigma_1)(x - \mu_1)$ และความแปรปรวน $\sigma_2^2(1-\rho^2)$ แล้ว

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{x_2t_2} f(x_2/x_1)dx_2 = \exp\left\{t_2\left[\mu_2 + \rho(\sigma_2/\sigma_1)(x_1 - \mu_1)\right] + \frac{\sigma_2^2(1-\rho^2)t_2^2}{2}\right\}$$

เพราะฉะนั้น $M(t_1, t_2)$ สามารถเขียนได้ในรูป

$$\exp\left\{\mu_2t_2 - \rho(\sigma_2/\sigma_1)\mu_1t_2 + \frac{\sigma_2^2(1-\rho)^2t_2^2}{2}\right\}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[\left(t_1 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}t_2\right)x_1\right]f(x_1)dx_1$$

แต่ $E(e^{xt}) = \exp\left[\mu t + (\sigma^2t^2)/2\right]$ สำหรับค่าจริงทั้งหมดของ t

ดังนั้น ถ้าหากว่าเราให้ $t = t_1 + \rho(\sigma_2/\sigma_1)t_2$ เราเห็นว่า $M(t_1, t_2)$ กำหนดได้โดย

$$\exp\left\{\mu_2t_2 - \rho(\sigma_2/\sigma_1)\mu_1t_1 + \frac{\sigma_2^2(1-\rho^2)t_2^2}{2} + \mu_1(t_1 + \rho(\sigma_2/\sigma_1)t_2) + \frac{\sigma_1^2(t_1 + \rho(\sigma_2/\sigma_1)t_2)^2}{2}\right\}$$

หรือ $M(t_1, t_2) = \exp\left(\mu_1 t_1 + \mu_2 t_2 + \frac{\sigma_1^2 t_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 t_1 t_2 + \sigma_2^2 t_2^2}{2}\right)$

สังเกตว่า mgf **นี้มีสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์** $\rho$ เท่ากับศูนย์แล้ว

$$M(t_1, t_2) = M(t_1, 0)\, M(0, t_2)$$

# แบบฝึกหัด

1. ให้ X กับ Y มีการแจกแจงแบบ bivariate normal พร้อมด้วยพารามิเตอร์ $\mu_1 = 3, \mu_2 = 1,$ $\sigma_1^2 = 16, \sigma_2^2 = 25$ และ $\rho = 3/5$ จงคำนวณหาความน่าจะเป็นดังต่อไปนี้

   (ก) $P(3<Y<8)$ (ข) $P(3<Y<8|x = 7)$

   (ค) $P(-3<X<3)$ (ง) $P(-3<X<3|y = -4)$

2. ให้ X กับ Y มีการแจกแจงแบบ bivariate normal พร้อมด้วยพารามิเตอร์ $\mu_1 = 5, \mu_2 = 10,$ $\sigma_1^2 = 1, \sigma_2^2 = 25$ และ $\rho>0$ ถ้าหากว่า $P(4<Y<16|x = 5) = 0.954$ จงหาค่าของ $\rho$

3. ถ้าหากว่า $M(t_1, t_2)$ เป็น mgf ของการแจกแจงแบบ bivariate normal จงคำนวณความแปรปรวนร่วมโดยการใช้สูตร

$$\frac{\partial^2 M(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}\Bigg|_{t_1=t_2=0} - \left(\frac{\partial M(t_1, 0)}{\partial t_1}\Bigg/_{t_1=0}\right)\left(\frac{\partial M(0, t_2)}{\partial t_2}\Bigg/_{t_2=0}\right)$$

ถ้าหากว่าให้ $\psi(t_1, t_2) = \ell n\, M(t_1, t_2)$ จงแสดงว่า $\frac{\partial \psi(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}\Big/_{t_1=t_2=0}$ ให้ความแปรปรวนร่วมนี้โดยตรง

## 4.11 การประยุกต์

(1) สมมติว่าภาชนะใบหนึ่งบรรจุอนุภาค 10,000 อนุภาค ความน่าจะเป็นที่อนุภาคหนึ่งหนีออกจากภาชนะเท่ากับ 0.0004 จงหาความน่าจะเป็นที่อนุภาคมากกว่า 5 อนุภาคหนีออกจากภาชนะเกิดขึ้น (สมมติว่าอนุภาคแต่ละอนุภาคหนีออกจากภาชนะ มีความอิสระกัน)

**วิธีทำ** เนื่องจากว่า P = 0.0004 ซึ่งเข้าใกล้ศูนย์โดยที่ n = 10,000 มีค่ามาก, $x > 5$

จาก
$$P(x) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!}$$

$$\mu = np = 10{,}000(.0004) = 4$$

$$\begin{aligned}
P(X>5) &= 1 - p(X \leqslant 5) \\
&= 1 - \sum_{x=0}^{5} \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!} \\
&= 1 - \sum_{x=0}^{5} \frac{4^x e^{-4}}{x!} \\
&= 1 - (.0183 + .0733 + .1465 + .1954 + .1954 + .1563) \\
&= 1 - (.7852) = .2148
\end{aligned}$$

$\therefore$ ความน่าจะเป็นที่อนุภาคมากกว่า 5 อนุภาคหนีออกจากภาชนะ 0.2148

(2) พบว่ามีจำนวน transistor เสียในเครื่องคำนวณอิเล็กทรอนิกส์ ระยะเวลาหนึ่งชั่วโมงเป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบพัวซองด้วยพารามิเตอร์ 0.1 (นั่นคือ โดยเฉลี่ยมีหนึ่ง transistor เสียทุก ๆ 10 ชั่วโมง เริ่มต้นต้องการคำนวณ 20 ชั่วโมง จงคำนวณความน่าจะเป็นที่ตลอดระยะเวลาการคำนวณข้างต้นไม่มี transistor เสียเลย

$$P(x = 0) = \frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!}$$

ในเมื่อ $\mu = np = 20(.1) = 2$,

$$P(x = 0) = \frac{e^{-2}2^0}{0!} = 0.1353$$

$\therefore$ ความน่าจะเป็นที่ตลอดระยะเวลาการคำนวณข้างต้นไม่มี transistor เสียเลย .1353

(3) นักแม่นปืนคนหนึ่งยิงถูกเป้า 95 เปอร์เซ็นต์ของครั้ง จงคำนวณหาความน่าจะเป็นที่นักแม่นปืนจะยิงเป้าผิด

(ก) สำหรับครั้งแรกในการยิงครั้งที่สิบห้า

(ข) สำหรับครั้งที่สองในการยิงครั้งที่สิบแปด

จาก $P(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r}$

(ก) $k = 15,\ r = 1,\ p = .05,\ q = .95$

$$\begin{aligned} P(X = 15) &= \binom{15-1}{1-1} (.95)^{14} (.05) \\ &= 1(.95)^{14} (.05) \\ &= 0.0244 \end{aligned}$$

(ข) $k = 18,\ r = 2,\ p = .05,\ q = .95$

$$\begin{aligned} P(X = 18) &= \binom{18-1}{2-1} (.95)^{16}(.05)^2 \\ &= 17(.95)^{16} (.05)^2 = 0.0187 \end{aligned}$$

(4) เวลาการเผาไหม้ของจรวดเป็นตัวแปรเชิงสุ่มมีการแจกแจงปกติพร้อมด้วย $\mu = 5.24$ วินาที และ $\sigma = 0.04$ วินาที จงคำนวณหาความน่าจะเป็นที่จรวดนั้นจะใช้เวลา

(ก) เผาไหม้น้อยกว่า 5.18 วินาที

(ข) เผาไหม้อย่างน้อย 5.22 วินาที

(ค) เผาไหม้ระหว่าง 5.23 กับ 5.25 วินาที

ให้ X = เวลาการเผาไหม้ของจรวด ; $\mu = 5.24,\ \sigma = 0.04$

(ก)
$$\begin{aligned} P(X<5.18) &= P\left(\frac{X-5.24}{.04} < \frac{5.18-5.24}{.04}\right) \\ &= N\left(\frac{5.18-5.24}{.04}\right) = N(-1.5) \\ &= 1 - N(1.5) = 1 - .9332 \\ &= 0.0668 \end{aligned}$$

(ข) $$P(X \geqslant 5.22) = 1 - P(X < 5.22)$$

$$= 1 - P\left(\frac{X-5.24}{.04} < \frac{5.22-5.24}{.04}\right)$$

$$= 1 - N\left(\frac{5.22-5.24}{.04}\right)$$

$$= 1 - N(-.5) = 1 - \left(1 - N(.5)\right)$$

$$= N(.5) = .6915$$

(ค) $$P(5.23 < X < 5.25) = P\left(\frac{5.23-5.24}{.04} < \frac{X-5.24}{.04} < \frac{5.25-5.24}{.04}\right)$$

$$= N\left(\frac{5.25-5.24}{.04}\right) - N\left(\frac{5.23-5.24}{.04}\right)$$

$$= N(.25) - N(-.25) = N(.25) - 1 + N(.25)$$

$$= 2 \times .5987 - 1 = 0.1974$$

(5) อายุของแบตเตอรีเป็นตัวแปรเชิงสุ่มมีการแจกแจงปกติพร้อมด้วยส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 5 ชั่วโมง จงคำนวณหามัชฌิมของการแจกแจงนี้ ถ้าหากว่าความน่าจะเป็นที่แบตเตอรีใดแบตเตอรีหนึ่งของแบตเตอรีเหล่านี้มีอายุมากกว่า 400 ชั่วโมงเป็น 0.10

ให้ X = อายุของแบตเตอรี, $\mu$ = มัชฌิมของการแจกแจง,

$\sigma$ = ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

$$P(X>400) = P\left(\frac{X-\mu}{5} > \frac{400-\mu}{5}\right) = 0.10$$

$$= 1 - P\left(\frac{X-\mu}{5} \leqslant \frac{400-\mu}{5}\right) = 0.10$$

$$= 1 - N\left(\frac{400-\mu}{5}\right) = 0.10$$

$$= N\left(\frac{400-\mu}{5}\right) = 0.90 = N(1.28)$$

$$\therefore \quad \frac{400-\mu}{5} = 1.28$$

$$400-\mu = 6.40$$

$$\mu = 393.6 \text{ ชั่วโมง}$$

(6) ความน่าจะเป็นที่รถส่วนตัวเกิดอุบัติเหตุที่สี่แยกของถนนขณะจราจรติดขัดเป็น- P = 0.0001 ซึ่งน้อยมาก อย่างไรก็ตามในระหว่าง 16.00 น. ถึง 18.00 น. มีจำนวนรถผ่านสี่แยก- 1000 คัน จงคำนวณหาความน่าจะเป็นที่รถสองคันหรือมากกว่าเกิดอุบัติเหตุระยะเวลานั้น

ให้ X = เป็นจำนวนอุบัติเหตุ

$$P(X \geqslant 2) = 1 - P(X \leqslant 1)$$

$$= 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$$

$$= 1 - \sum_{x=0}^{1} \frac{e^{-\mu}\mu^{x}}{x!}$$

$$= 1 - \frac{e^{-.1}(.1)^{0}}{0!} \; \frac{e^{-.1}(.1)}{1!}$$

$$= 1 - e^{-.1}(1+.1) = .0045$$

(7) สมมติว่ารัศมี R ของลูกปืนมีการแจกแจงปกติพร้อมด้วยค่าคาดหวัง 1 ความแปรปรวน 0.04 จงหา pdf ของปริมาตรของลูกปืน pdf ของตัวแปรเชิงสุ่ม R กำหนดได้โดย

$$f(r) = \frac{1}{(.2)\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{r-1}{.2}\right)^2\right]$$

เนื่องจากว่า V (ปริมาตร) เป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้นอย่างเดียวของ R pdf ของ $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ และหาได้ $g(v) = f(r)\ (dr/dv)$ ในเมื่อ r อยู่ในรูปของ v ทุก ๆ จุด จากความสัมพันธ์ข้างต้น เราได้ $r = \sqrt[3]{3v/4\pi}$

ดังนั้น $dr/dv = (1/4\pi)(3v/4\pi)^{-\frac{2}{3}}$ แทนค่าเหล่านี้ลงในสมการข้างต้น เราได้ pdf ของ V ที่ต้องการ

$$g(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(.2)}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt[3]{3v/4\pi}-1}{.2}\right)^2\right](1/4\pi)(3v/4\pi)^{-\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{1}{4\pi\sqrt{2\pi}(.2)}(3v/4\pi)^{-\frac{2}{3}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt[3]{(3v/4\pi}-1}{.2}\right)^2\right]$$

(8) สมมติว่า X เป็นเส้นผ่าศูนย์กลางด้านในของหัวฉีด มีการแจกแจงปกติพร้อมด้วยค่าคาดหวัง $\mu$ และความแปรปรวน 1 ถ้าหากว่าไม่ทราบรายละเอียดของ X ก็จะสร้างความสูญเสียแก่ผู้ผลิต สมมติว่าผลกำไรต่อหัวฉีด T เป็นฟังก์ชันของ X

$$\begin{aligned} T &= C_1 \text{ บาท} && \text{ถ้าหากว่า } 10 \leqslant X \leqslant 12 \\ &= -C_2 && \text{ถ้าหากว่า } X < 10 \\ &= -C_3 && \text{ถ้าหากว่า } X > 12 \end{aligned}$$

ดังนั้น ผลกำไรต่อหัวฉีดเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} E(T) &= C_1[P(10 \leqslant X \leqslant 12)] - C_2P(X<10) - C_3P(X>12) \\ &= C_1[N(12-\mu) - N(10-\mu)] - C_2N(10-\mu) - C_3[1-N(12-\mu)] \\ &= (C_1+C_3)N(12-\mu) - (C_1+C_2)N(10-\mu) - C_3 \end{aligned}$$

สมมติว่ากระบวนผลิตสามารถปรับให้ $\mu$ ที่มีค่าต่าง ๆ กันได้สำเร็จ $\mu$ จะมีค่าเท่าไรที่จะทำให้ผลกำไรที่คาดหวังมากที่สุด เราจะต้องหา $dE(T)/d\mu$ และปรับให้เท่ากับศูนย์ ให้ pdf ของการแจกแจง n(0, 1) เขียนได้ f เราได้

$$\frac{dE(T)}{d\mu} = (C_1+C_3)\, f(12-\mu)(-1) - (C_1+C_2)\, f(10-\mu)(-1) = 0$$

**ดังนั้น** $$-(C_1+C_3)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(12-\mu)^2} + (C_1+C_2)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(10-\mu)^2} = 0$$

$$e^{\frac{1}{2}(12-\mu)^2 - \frac{1}{2}(10-\mu)^2} = \frac{C_1+C_3}{C_1+C_2}$$

$$e^{22-2\mu} = \frac{C_1+C_3}{C_1+C_2}$$

$$22-2\mu = \ell n\left(\frac{C_1+C_3}{C_1+C_2}\right)$$

$$2\mu = 22-\ell n\left(\frac{C_1+C_3}{C_1+C_2}\right)$$

$$\mu = 11-\frac{1}{2}\ell n\left(\frac{C_1+C_3}{C_1+C_2}\right)$$

**ข้อสังเกต** (ก) ถ้าหากว่า $C_2 = C_3$ แล้วเส้นผ่าศูนย์กลาง X จะมีค่าใหญ่เกินไปหรือเล็กเกินไปจะมีผลเสียเหมือนกัน ดังนั้น ค่าของ $\mu$ ซึ่งจะทำให้ E(T) มีค่ามากที่สุดเท่ากับ $\mu = 11$

(ข) ถ้าหากว่า $C_1 = 10$ บาท $C_2 = 3$ บาท และ $C_3 = 2$ บาท แล้ว ค่าของ $\mu$ สำหรับ-E(T) มีค่ามากที่สุดเท่ากับ $\mu = 11+\frac{1}{2}\ \ell n\left(\frac{12}{13}\right) = 11.04$ และ $E(T) = 6.04$ บาทต่อหัวฉีด

(9) สมมติว่าอายุ X ของฟิวส์เป็นตัวแปรเชิงสุ่มชนิดต่อเนื่องมีการแจกแจงแบบเอกซ์โปแนนเชียล มีสองกระบวนการสำหรับผลิตฟิวส์ กระบวนการที่ 1 ให้อายุที่คาดหวัง 100 ชั่วโมง ขณะที่กระบวนการที่ 2 ให้อายุที่คาดหวัง 150 ชั่วโมง สมมติว่าต้นทุนของกระบวนการที่ 2 ต่อฟิวส์เป็นสองเท่าของกระบวนการที่ 1 ซึ่งใช้ทุน C บาทต่อฟิวส์ นอกจากนั้น ถ้าหากว่าฟิวส์มีอายุน้อยกว่า 200 ชั่วโมง ผู้ผลิตจะต้องเสียเพิ่มอีก K บาท ควรจะใช้กระบวนการไหน คำนวณต้นทุนที่คาดหวังสำหรับแต่ละกระบวน สำหรับกระบวนการที่ 1 เราได้

$C_1$ = ต้นทุนต่อฟิวส์

= $C$ ถ้าหากว่า $X > 200$

= $C+K$ ถ้าหากว่า $X \leqslant 200$

เพราะฉะนั้น

$$E(C_1) = C\,P(X>200) + (C+K)\,P(X\leqslant 200)$$

$$= \int_{200}^{\infty} C\,f(X)\,dx + \int_{0}^{200} (C+K)\,f(x)\,dx$$

$$= \int_{200}^{\infty} C\frac{1}{100}e^{\frac{-x}{100}}\,dx + \int_{0}^{200} (C+K)\frac{1}{100}e^{\frac{-x}{100}}\,dx$$

$$= -C\,e^{\frac{-x}{100}}\Big|_{200}^{\infty} - (C+K)\,e^{\frac{-x}{100}}\Big|_{0}^{200}$$

$$= C\,e^{\frac{-200}{100}} + \left[-(C+K)\,e^{\frac{-200}{100}} + (C+K)\right]$$

$$= Ce^{-2} + (C+K)(1-e^{-2})$$

$$= K(1-e^{-2}) + C$$

ในทำนองเดียวกันสำหรับกระบวนการที่ 2

$$E(C_2) = 2C\,P(X>200) + (2C+K)\,P(X\leqslant 200)$$

$$= \int_{200}^{\infty} 2C\frac{1}{150}e^{\frac{-x}{150}}\,dx + \int_{0}^{200} (2C+K)\frac{1}{150}e^{\frac{-x}{150}}\,dx$$

$$= -2C\,e^{\frac{-x}{150}}\Big|_{200}^{\infty} - (2C+K)\,e^{\frac{-x}{150}}\Big|_{0}^{200}$$

$$= 2Ce^{\frac{-200}{150}} + (2C+K)(1-e^{\frac{-200}{150}})$$

$$= K(1-e^{-\frac{4}{3}}) + 2C$$

ดังนั้น $E(C_2) - E(C_1) = C + K(e^{-2} - e^{-\frac{4}{3}})$

$$= C - 0.13K$$

เพราะฉะนั้น เราเลือกกระบวนการ 1 ถ้าหากว่า $C > 0.13\,K$