บทที่ 3
ความคาดหวังทางคณิตศาสตร์ของตัวแปรเชิงสุ่ม

3.1 ความคาดหวังทางคณิตศาสตร์

แนวทางศึกษาหนึ่งของหลาย ๆ แนวทางศึกษาที่มีประโยชน์ในปัญหาเกี่ยวกับการแจกแจงของตัวแปรเชิงสุ่ม คือ ความคาดหวังทางคณิตศาสตร์ ให้ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มมี pdf f (x) และให้ u (X) เป็นฟังก์ชันของ X ชนิดต่อเนื่อง เราจะได้ว่า

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x)\, f(x)\, dx$$

หาค่าได้ ถ้าหากว่า X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มชนิดไม่ต่อเนื่อง เราจะได้ว่า

$$\Sigma\, u(x)\, f(x)$$

หาค่าได้ ค่าเหล่านี้เรียกว่า ความคาดหวังทางคณิตศาสตร์หรือค่าคาดหวังของ u (X) แสดงได้เป็น E [u (X)] นั่นคือ

$$E[u(X)] \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\, f(x)\, dx$$

ถ้าหากว่า X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มชนิดต่อเนื่อง

$$E[u(X)] \quad = \quad \Sigma\, u(x)\, f(x)$$

โดยทั่ว ๆ ไปให้ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่มมี pdf $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ และให้ $u(X_1X_2,\ldots,X_n)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปรเหล่านั้น เราจะได้ว่า (ตัวแปรชนิดต่อเนื่อง)

$\int \ldots \int u(x_1,x_2,\ldots,x_n)\, f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\, dx_1dx_2 \ldots dx_n$
หาค่าได้ (n integral) ถ้าหากว่าตัวแปรเชิงสุ่มเป็นชนิดไม่ต่อเนื่องเราจะได้

$$\Sigma \ldots \Sigma\, u(x_1,x_2,\ldots,x_n)\, f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

หาค่าได้ (รวมกัน n ครั้ง) ค่าเหล่านี้เรียกว่าความคาดหวังทางคณิตศาสตร์ เขียนได้เป็น $E[u(X_1,X_2,..,X_n)]$ ของฟังก์ชัน $u(X_1,X_2,\ldots,X_n)$

คุณสมบัติของความคาดหวังทางคณิตศาสตร์

(ก) ค่าคาดหวังของค่าคงที่ k จะเท่ากับค่าคงที่ k, $E(k) = k$

(ข) ถ้าหากว่า k เป็นค่าคงที่และ V เป็นฟังก์ชันแล้ว $E(kV) = kE(V)$

(ค) ถ้าหากว่า k_1 กับ k_2 เป็นค่าคงที่ V_1 กับ V_2 เป็นฟังก์ชันแล้ว $E(k_1V_1 + k_2V_2) = k_1E(V_1) + k_2E(V_2)$ ถ้าหากว่า $k_1,k_2,\ldots,k_m$ และ $V_1,V_2,\ldots,V_m$ เป็นฟังก์ชันแล้ว $E(k_1V_1 + k_2V_2 + \ldots + k_mV_m) = k_1E(V_1) + k_2E(V_2) + \ldots + k_mE(V_m)$

คุณสมบัติข้อนี้ทำให้เราแสดงสัญลักษณ์ E เป็น linear operator

ตัวอย่างที่ 1 ให้ X มี pdf

$$f(x) = 2(1-x),\quad 0 < x < 1$$
$$= 0 \qquad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ}$$

แล้ว

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx = \int_0^1 (x)\, 2(1-x)\, dx$$

$$= x^2 - \frac{2x^3}{3}\Big|_0^1 = 1 - 2/3 = 1/3$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, f(x)\, dx = \int_0^1 (x^2)\, 2(1-x)\, dx$$

$$= \frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{2}\Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$E(6X + 3X^2) = E(6X) + E(3X^2)$$
$$= 6E(X) + 3E(X^2)$$
$$= 6(1/3) + 3(1/6) = \frac{5}{2}$$

ตัวอย่างที่ 2 ให้ X มี pdf

$$f(x) = \frac{x}{6}, \quad x = 1, 2, 3$$
$$= 0 \qquad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ}$$

แล้ว

$$E(X^3) = \sum_x x^3 f(x) = \sum_{x=1}^{3} x^3 \left(\frac{x}{6}\right)$$
$$= (1)^3\left(\frac{1}{6}\right) + (2)^3\left(\frac{2}{6}\right) + (3)^3\left(\frac{3}{6}\right)$$
$$= \frac{98}{6}$$

ตัวอย่างที่ 3 ให้ X กับ Y มี pdf

$$f(x,y) = x + y, \; 0 < x < 1, \; 0 < y < 1$$
$$= 0 \qquad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ}$$

ด้วยเหตุนี้

$$E(XY^2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy^2 f(x,y)\, dx\, dy$$
$$= \int_0^1\int_0^1 xy^2 (x + y)\, dx\, dy$$
$$= \int_0^1 \frac{x^3y^2}{3} + \frac{x^2y^3}{2} \Big|_0^1 dy = \int_0^1 \left(\frac{y^2}{3} + \frac{y^3}{2}\right) dy$$
$$= \frac{y^3}{9} + \frac{y^4}{8} \Big|_0^1 = \frac{8+9}{72} = \frac{17}{72}$$

ตัวอย่างที่ 4 ให้เราแบ่งเส้นซึ่งมีความยาวห้าเป็นสองส่วน ให้ X เป็นความยาวของส่วนทางซ้ายมือ สมมติว่า X มี pdf คือ

$$f(x) = \frac{1}{5}, \; 0 < x < 5$$
$$= 0 \qquad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ}$$

ค่าคาดหวังของความยาว X คือ E (X) = $\frac{5}{2}$ และค่าที่คาดหวังของความยาว 5 – X คือ E (5 – X) = $\frac{5}{2}$ แต่ค่าที่คาดหวังของผลคูณของความยาวทั้งสองเท่ากับ

$$E[X(5-X)] = \int_0^5 x(5-x)\left(\frac{1}{5}\right)dx$$

$$= \frac{5x^2}{10} - \frac{x^3}{15}\Big|_0^5 = \frac{25}{2} - \frac{25}{3}$$

$$= \frac{25}{6} \neq E(X)\,E(5-X) = \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

แสดงว่า มูลค่าคาดหวังของผลคูณไม่เท่ากับผลคูณของมูลค่าคาดหวัง

ตัวอย่างที่ 5 ในหลาย ๆ ปัญหา เราสนใจขนาดของตัวแปรเชิงสุ่มโดยปราศจากเครื่องหมายทางพีชคณิตเท่านั้น นั่นคือ เราสนใจกับ $|X|$ สมมติว่า X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มชนิดต่อเนื่องมี pdf

$$f(x) = \frac{e^x}{2}, \quad x \le 0$$

$$= \frac{e^{-x}}{2}, \quad x > 0$$

ให้ Y = $|X|$ ต้องการหา E (Y) เราอาจดำเนินการได้สองแบบ

(ก) $$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} |x|\, f(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{0}(-x)e^x dx + \int_0^{\infty}(x)e^{-x} dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}[1 + 1] = 1$$

(ข) เราต้องหา pdf ของ Y = $|X|$ ให้ G เป็น cdf ของ Y ด้วยเหตุนี้

$$G(y) = P(Y \le y) = P(|X| \le y) = P(-y \le X \le y)$$

$$= 2P(0 \le X \le y)$$

เนื่องจากว่า pdf ของ X สมมาตรรอบศูนย์ เพราะฉะนั้น

$$G(y) = \int_0^y f(x)\,dy = 2\int_0^y \frac{e^{-x}}{2}\,dx$$

$$= -e^{-y} + 1$$

$$g(y) = G'(y) = e^{-y}, \ y \geq 0$$

ดังนั้น $E(Y) = \int_0^{\infty} y\,e^{-y}\,dy = 1$ เหมือนวิธีการแรก

ตัวอย่างที่ 6 กล่องใบหนึ่งมีห้าลูกเบี้ยซึ่งไม่สามารถแบ่งได้โดยการสัมผัสอย่างเดียว ลูกเบี้ยชนิดหนึ่งบาทมีสามอันส่วนที่เหลือเป็นชนิดสี่บาท ชายคนหนึ่งหยิบสองลูกเบี้ย โดยสุ่มแบบหยิบแล้วไม่ใส่คืนลงในกล่อง ชายผู้นั้นจะต้องจ่ายเงินเท่ากับผลของมูลค่าสองลูกเบี้ยที่เขาหยิบได้ เกมจึงจะยุติ ถ้าหากว่ามีจำนวนเงินสี่บาทเจ็ดสิบห้าสตางค์ที่จะเล่นเกมนี้ เวลาเล่นเกมจะยืดยื้อหรือ ? เพราะว่าเราไม่สามารถแบ่งลูกเบี้ยจากการสัมผัส เราก็ต้องสมมติว่าแต่ละคู่ของสิบคู่ที่อาจเป็นไปได้มีความน่าจะเป็นเท่ากันที่สามารถหยิบได้ เงื่อนไขนี้เป็นส่วนหนึ่งของตัวแบบความน่าจะเป็นของเรา ให้ X เป็นจำนวนของลูกเบี้ยที่เลือกได้สองลูกเบี้ยที่ทำเครื่องหมาย 1 บาทแล้ว ได้เงื่อนไข X เป็น hypergeometric pdf

$$f(x) = \frac{\binom{3}{x}\binom{2}{2-x}}{\binom{5}{2}}, \quad x = 0, 1, 2$$

$$= 0 \qquad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ}$$

ถ้า $X = x$ ชายคนนั้นจะได้รับ $u(x) = x + 4(2-x) = 8 - 3x$ บาท
ดังนั้น ความคาดหวังทางคณิตศาสตร์ของเขาเท่ากับ

$$E[8 - 3X] = \sum_{x=0}^{2} (8-3x)\,f(x)$$

$$= (8-3(0))\frac{\binom{3}{0}\binom{2}{2-0}}{\binom{5}{2}} + (8-3(1))\frac{\binom{3}{1}\binom{2}{2-1}}{\binom{5}{2}}$$

$$+ (8-3(2))\frac{\binom{3}{2}\binom{2}{2-2}}{\binom{5}{2}}$$

$$= \frac{44}{10} = 4.4 \quad \text{บาท}$$

หรือสี่บาทสี่สิบสตางค์

ทฤษฎี 1 ให้ตัวแปรเชิงสุ่ม X_1 กับ X_2 ที่มีความอิสระกันมี marginal pdf $f(x_1)$ กับ $f(x_2)$ ตามลำดับ ค่าคาดหวังของผลคูณของฟังก์ชัน $u(X_1)$ ของ X_1 กับฟังก์ชัน $v(X_2)$ ของ X_2 เท่ากับผลคูณของค่าคาดหวังของ $u(X_1)$ กับค่าคาดหวังของ $v(X_2)$ นั่นคือ

$$E[u(X_1)v(X_2)] = E[u(X_1)]\,E[v(X_2)]$$

พิสูจน์ ความอิสระของ X_1 กับ X_2 หมายความว่า pdf ร่วมของ X_1 กับ X_2 เป็น $f(x_1)f(x_2)$ ดังนั้นความคาดหวังทางคณิตศาสตร์ในกรณีต่อเนื่อง

$$\begin{aligned} E[u(X_1)v(X_2)] &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u(x_1)v(x_2)f(x_1)f(x_2)\,dx_1\,dx_2 \\ &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} u(x_1)f(x_1)\,dx_1\right]\left[\int_{-\infty}^{\infty} v(x_2)f(x_2)\,dx_2\right] \\ &= E\left[u(X_1)\right]E\left[v(X_2)\right] \end{aligned}$$

ในกรณีไม่ต่อเนื่อง

$$\begin{aligned} E[u(X_1)v(X_2)] &= \sum_{x_2}\sum_{x_1} u(x_1)v(x_2)f(x_1)f(x_2) \\ &= \left[\sum_{x_1} u(x_1)f(x_1)\right]\left[\sum_{x_2} v(x_2)f(x_2)\right] \\ &= E[u(X_1)]E[v(X_2)] \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 7 ให้ X กับ Y เป็นสองตัวแปรที่อิสระกันมีมัชฌิม μ_x กับ μ_y และความแปรปรวนเป็นบวก σ_x^2 กับ σ_y^2 ตามลำดับ เราจะแสดงว่าความอิสระของ X กับ Y สัมประสิทธิสหสัมพันธ์ของ X กับ Y จะเป็นศูนย์ นี้เป็นจริง เพราะว่าความแปรปรวนของ X กับ Y เท่ากับ

$$E[(X-\mu_x)(Y-\mu_y)] = E(X-\mu_x)E(Y-\mu_y) = 0$$

จากทฤษฎี $E[u(X_1)v(X_2)] = E[u(X_1)]E[v(x_2)]$

สำหรับตัวแปรเชิงสุ่ม X_1 กับ X_2 ที่มีความอิสระกันมาเป็นสำหรับตัวแปรเชิงสุ่ม $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ที่มีความอิสระกัน เราจะได้

$$E[u(X_1)u(X_2)\ldots u(X_n)] = E[u(X_1)]E[u(X_2)]\ldots E[u(X_n)]$$

$$E[\prod_{i=1}^{n} u(X_i)] = \prod_{i=1}^{n} E[u(X_i)]$$

3.2 มัชฌิมเลขคณิตและความแปรปรวน

ในบางกรณี ค่าคาดหวังจะมีชื่อและสัญลักษณ์เฉพาะตัว ให้เรามาพิจารณาฟังก์ชัน $u(X)$ ให้เท่ากับ X ในเมื่อ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มชนิดไม่ต่อเนื่องมี pdf $f(x)$ แล้ว

$$E(X) = \sum_{x} x f(x)$$

ถ้าหากว่าจุดที่ไม่ต่อเนื่องของ Sample space มีความน่าจะเป็นมากกว่าศูนย์คือ $a_1, a_2, \ldots$ แล้ว

$$E(X) = a_1 f(a_1) + a_2 f(a_2) + \ldots$$

ผลบวกของผลคูณนี้เป็น "ค่าเฉลี่ยแบบถ่วงน้ำหนัก" ของค่า $a_1, a_2, \ldots$ น้ำหนักที่สัมพันธ์กับแต่ละ a_i คือ $f(a_i)$ เรียก $E(X)$ ว่ามัชฌิมเลขคณิตของค่า X หรือค่ามัชฌิมของ X

ค่ามัชฌิม μ ของตัวแปรเชิงสุ่ม X เมื่อไรหาค่าได้ นิยามได้เป็น $\mu = E(X)$ ไม่ว่า X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มชนิดต่อเนื่องหรือไม่ต่อเนื่อง

ค่าคาดหวังอื่น ๆ คำนวณหาได้โดยให้ $u(X) = (X-\mu)^2$ ถ้า X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มชนิดไม่ต่อเนื่องมี pdf $f(x)$ แล้ว

$$E[(X-\mu)^2] = \sum_{x} (x-\mu)^2 f(x)$$

$$= (a_1-\mu)^2 f(a_1) + (a_2-\mu)^2 f(a_2) + \ldots$$

ถ้า $a_1, a_2, \ldots$ เป็นจุดไม่ต่อเนื่องของ Sample space มีความน่าจะเป็นมากกว่าศูนย์ ผลบวกของผลคูณนี้อาจมีความหมายเหมือนค่าเฉลี่ยแบบถ่วงน้ำหนักของกำลังสองของส่วนเบี่ยงเบนของจำนวน $a_1, a_2, \ldots$ จากค่ามัชฌิม μ ของจำนวนเหล่านี้ที่น้ำหนักสัมพันธ์กับแต่ละ $(a_i-\mu)^2$ คือ

$f(a_i)$ ค่ามัชฌิมของกำลังสองของส่วนเบี่ยงเบนของ X จากค่ามัชฌิม μ ของมันเรียกว่า ความแปรปรวนของ X แสดงได้โดย V (X) หรือ σ^2

นิยาม ให้ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม เรากำหนดความแปรปรวนของ X ได้ด้วย V (X) หรือ σ^2 ดังนี้

$$\sigma^2 = V(X) = E[X - E(X)]^2$$

รากของ V (X) ที่มีค่าเป็นบวกเรียกว่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของ X แสดงได้ด้วย σ

ข้อสังเกต (ก) V (X) แสดงออกในหน่วยกำลังสองของ X นั่นคือ ถ้าหากว่า X มีหน่วยเป็นชั่วโมงแล้ว V (X) แสดงออกในหน่วย (ชั่วโมง)^2 นี้เป็นเหตุผลหนึ่งในการพิจารณาส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเพราะมีหน่วยเหมือนกับ X

(ข) ถ้าหากว่าเราตีความให้ E (X) เป็นศูนย์กลางของมวลที่มีการแจกแจงตลอดเส้นเส้นหนึ่ง เราอาจตีความ V (X) เป็นโมเมันของอินนีเซียของมวลนี้รอบแกนตั้งฉากตลอดศูนย์กลางของมวล

(ค) V (X) อาจแสดงออกมาในรูปของ $E(X)^2 - [E(X)]^2$ ได้

พิสูจน์

$$\begin{aligned} V(X) &= E[X - E(X)]^2 \\ &= E\{X^2 - 2X\,E(X) + [E(X)]^2\} \\ &= E(X^2) - 2E(X)\,E(X) + [E(X)]^2 \\ &= E(X^2) - [E(X)]^2 \end{aligned}$$

หรือ

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$$

นี้เป็นวิธีการที่สะดวกต่อการคำนวณความแปรปรวนของ X

คุณสมบัติของความแปรปรวน

(ก) ถ้าหากว่า C เป็นค่าคงที่

$$V(X + C) = V(X)$$

$$V(X - C) = V(X)$$

พิสูจน์

$$V(X+C) = E[(X+C) - E(X+C)]^2$$
$$= E[(X+C) - E(X) - C]^2$$
$$= E[X - E(X)]^2 = V(X)$$
$$V(X-C) = E[(X-C) - E(X-C)]^2$$
$$= E[(X-C) - E(X) + C]^2$$
$$= E[X - E(X)]^2 = V(X)$$

(ข) ถ้าหากว่า C เป็นค่าคงที่

$$V(CX) = C^2 V(X)$$
$$V\left(\frac{X}{C}\right) = \frac{1}{C^2} V(X)$$

พิสูจน์

$$V(CX) = E(CX)^2 - (E(CX))^2$$
$$= C^2 E(X^2) - C^2 (E(X))^2$$
$$= C^2 [E(X^2) - (E(X))^2] = C^2 V(X)$$
$$V\left(\frac{X}{C}\right) = E\left(\frac{X}{C}\right)^2 - \left(E\left(\frac{X}{C}\right)\right)^2$$
$$= \frac{1}{C^2} E(X^2) - \frac{1}{C^2} (E(X))^2$$
$$= \frac{1}{C^2} [E(X^2) - (E(X))^2] = \frac{1}{C^2} V(X)$$

(ค) ถ้า (X,Y) เป็นสองตัวแปรเชิงสุ่มและถ้าหากว่า X กับ Y มีความอิสระกันแล้ว

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$$

พิสูจน์

$$V(X+Y) = E(X+Y)^2 - (E(X+Y))^2$$
$$= E(X^2 + 2XY + Y^2) - (E(X))^2 - 2E(X)E(Y) - (E(Y))^2$$
$$= E(X^2) - (E(X))^2 + E(Y^2) - (E(Y))^2$$
$$= V(X) + V(Y)$$

(ง) ให้ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็น n ตัวแปรเชิงสุ่มที่มีความอิสระกันแล้ว

$$V(X_1 + \ldots + X_n) = V(X_1) + \ldots + V(X_n)$$

การพิสูจน์ก็ใช้วิธีการแบบเดียวกันกับข้อ (ค)

3.3 Moment Generating Function (mgf)

ค่าคาดหวังกรณีเฉพาะอีกแบบหนึ่งซึ่งเรียกว่า moment generating function ของตัวแปรเชิงสุ่ม X โดยสมมติว่ามี h มากกว่าศูนย์ ดังเช่น $-h < t < h$ ค่าที่คาดหวัง $E(e^{Xt})$ หาค่าได้ดังนี้

$$E(e^{Xt}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{xt} f(x)\,dx$$

ถ้าหากว่า X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มชนิดต่อเนื่อง หรือ

$$E(e^{Xt}) = \sum_{x} e^{xt} f(x)$$

ถ้าหากว่า X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มชนิดไม่ต่อเนื่อง ค่าคาดหวังนี้เรียกว่า moment generating function ของ X แสดงได้โดย M (t) นั่นคือ

$$M(t) = E(e^{Xt})$$

ถ้าเราให้ $t = 0$ เราจะได้ $M(0) = 1$ และ moment generating function เป็นตัวกำหนดการแจกแจงของตัวแปรเชิงสุ่ม ดังนั้น ถ้าสองตัวแปรเชิงสุ่มมี mgf เหมือนกันจะมีการแจกแจงเหมือนกัน mgf มีประโยชน์ใช้คำนวณหามัชฌิมเลขคณิต ความแปรปรวน (การพิสูจน์ Uniqueness ของ mgf ขึ้นอยู่กับทฤษฎีของการแปลง (theory of transforms) ในการวิเคราะห์นี้) การคำนวณหาการแจกแจงของตัวแปรเชิงสุ่ม

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ว่า

$$M(t) = \frac{1}{10}e^{t} + \frac{2}{10}e^{2t} + \frac{3}{10}e^{3t} + \frac{4}{10}e^{4t}$$

เป็น mgf ของตัวแปรเชิงสุ่ม X ชนิดไม่ต่อเนื่อง ถ้าเราให้ f (x) เป็น pdf ของ X และให้ a, b, c, d,... เป็นจุดไม่ต่อเนื่องใน Sample space ที่ซึ่ง $f(x) > 0$ แล้ว

$$M(t) = \sum_{x} e^{xt} f(x)$$

หรือ

$$\frac{1}{10}e^{t} + \frac{2}{10}e^{2t} + \frac{3}{10}e^{3t} + \frac{4}{10}e^{4t} = f(a)e^{at} + f(b)e^{bt} + \ldots$$

เพราะว่านี้เป็นเอกลักษณ์สำหรับค่าจริงทั้งหมดของ t และข้างขวามือควรประกอบด้วยสี่เทอม และแต่ละเทอมควรจะเท่ากันกับแต่ละเทอมในจำนวนข้างซ้ายมือ ดังนั้น เราให้ $a = 1$, $f(a) = \frac{1}{10}$, $b = 2$, $f(b) = \frac{2}{10}$, $c = 3$, $f(c) = \frac{3}{10}$, $d = 4$, $f(d) = \frac{4}{10}$

เพราะฉะนั้น pdf ของ X คือ

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{10}, \quad x = 1, 2, 3, 4 \\ &= 0 \qquad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ} \end{aligned}$$

หรือให้ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มชนิดต่อเนื่องและกำหนดให้

$$M(t) = \frac{1}{(1-t)^2} \qquad t < 1$$

เป็น mgf ของ X นั่นคือ

$$\frac{1}{(1-t)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{xt} f(x)\,dx \qquad t < 1$$

ที่ไม่ได้ปรากฏให้เห็นได้ชัดทั้งหมดที่จะคำนวณหา f (x) ได้ อย่างไรก็ตาม มันเป็นการง่ายที่จะเห็นว่าการแจกแจงที่มี

$$\begin{aligned} f(x) &= x e^{-x} \qquad 0 < x < \infty \\ &= 0 \qquad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ} \end{aligned}$$

มี mgf $M(t) = (1-t)^{-2}$, $t < 1$ เพราะฉะนั้นตัวแปรเชิงสุ่ม X มีการแจกแจงพร้อมด้วย pdf นี้แสดงถึงการมี mgf อยู่ค่าเดียวเท่านั้น

เนื่องจากว่า mgf สามารถบอกการแจกแจงได้อย่างสมบูรณ์ทำให้เราสามารถคำนวณบางคุณสมบัติของการแจกแจงโดยตรงได้จาก M (t) ดังตัวอย่าง การคำนวณหาค่าของ M (t)

สำหรับ $-h < t < h$ หมายความว่าอนุพันธ์ของ order ทั้งหมดหาค่าได้ที่ $t = 0$ ดังนั้น

$$\frac{d\,M(t)}{dt} = M'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, e^{xt} f(x)\, dx$$

ถ้าหากว่า X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มชนิดต่อเนื่องหรือ

$$\frac{d\,M(t)}{dt} = M'(t) = \sum_{x} x\, e^{xt} f(x)$$

ถ้าหากว่า X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มชนิดไม่ต่อเนื่อง ให้ $t = 0$ เราจะได้แต่ละกรณี

$$M'(0) = E(X) = \mu$$

อนุพันธ์ที่สองของ $M(t)$ คือ

$$M''(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{xt} f(x)\, dx \text{ หรือ } \sum x^2 e^{xt} f(x)$$

ให้ $t = 0, M''(o) = E(X^2)$ ด้วยเหตุนี้

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 = M''(0) - [M'(0)]^2$$

ดังตัวอย่าง ถ้า $M(t) = (1 - t)^{-2}$, $t < 1$ ดังแสดงข้างต้นแล้ว

$$M'(t) = 2(1 - t)^{-3}$$

และ

$$M''(t) = 6(1 - t)^{-4}$$

ดังนั้น

$$\mu = M'(0) = 2$$

และ

$$\sigma^2 = M''(0) - \mu^2 = 6 - 4 = 2$$

แน่ละเราสามารถคำนวณ μ และ σ^2 จาก pdf ได้โดย

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx \quad \text{และ} \quad \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx - \mu^2$$

ตามลำดับ บางครั้งวิธีการหนึ่งคำนวณหาง่ายกว่าอีกวิธีการหนึ่ง

โดยทั่ว ๆ ไป ถ้าหากว่า m เป็นจำนวนเต็มบวกและถ้า $M^m(t)$ หมายถึงอนุพันธ์ที่ m ของ M (t) เราได้

$$M^m(0) = E(X^m)$$

$$E(X^m) = \int_{-\infty}^{\infty} x^m f(x)\,dx \quad \text{หรือ} \quad \sum_x x^m f(x)$$

ในทางกลเรียกว่า moment เนื่องจากว่า M (t) ให้กำเนิดค่าของ $E(X^m)$, m = 1, 2, 3,... เรียกว่า moment - generating function บางครั้งเรียก $E(X^m)$ ว่า moment ที่ m ของการแจกแจงหรือ moment ที่ m ของ X

ตัวอย่างที่ 2 ให้ X มี pdf

$$f(x) = \frac{1}{2}(x+1) \quad -1 < x < 1$$

$$= 0 \quad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ}$$

แล้วค่ามัชฌิมของ X คือ

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x \frac{x+1}{2}\,dx$$

$$= \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{4} \Big|_{-1}^{1} = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4}\right) - \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{5}{12} - \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$$

ความแปรปรวนของ X คือ

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - \mu^2 = \int_{-1}^{1} x^2 \frac{x+1}{2}\,dx - (1/3)^2$$

$$= \frac{x^4}{8} + \frac{x^3}{6} \Big|_{-1}^{1} - \frac{1}{9} = \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{6}\right) - \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{9}$$

$$= \frac{7}{24} + \frac{1}{24} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$$

ตัวอย่างที่ 3 ถ้า X มี pdf

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \qquad 1 < x < \infty$$
$$= 0 \qquad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ}$$

แล้ว μ หาค่าไม่ได้เนื่องจากว่า

$$\int_1^\infty x\frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty} [\ln x|_1^b]$$

$$= \lim_{b\to\infty} [\ln b - \ln 1]$$

หาค่าไม่ได้

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดให้อนุกรม

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots$$

Converges to $\pi^2/6$

$$f(x) = \frac{6}{\pi^2 x^2} \quad , \quad x = 1,2,3,\ldots$$
$$= 0 \qquad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ}$$

เป็น pdf ของตัวแปรเชิงสุ่ม X ชนิดไม่ต่อเนื่อง mgf ของการแจกแจงนี้ ถ้าหากว่าหาค่าได้กำหนดได้โดย

$$M(t) = E(e^{Xt}) = \Sigma\, e^{xt} f(x)$$

$$= \sum_{x=1}^{\infty} \frac{6e^{xt}}{\pi^2 x^2}$$

การทดสอบอัตรา (ratio test) อาจใช้เพื่อที่จะแสดงว่าอนุกรมนี้ diverges ถ้า $t > 0$ ดังนั้น จะหาจำนวน h มากกว่าศูนย์ไม่ได้อย่างเช่น M(t) หาค่าได้ สำหรับ $-h < t < h$ เพราะฉะนั้น การแจกแจงที่มี pdf f (x) ของตัวอย่างนี้ไม่มี mgf

ตัวอย่างที่ 5 ให้ X มี mgf $M(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$, $-\infty < t < \infty$ เราสามารถ differentiate M (t) หา moments ของ X แต่อย่างไรก็ตาม การศึกษาเพื่อพิจารณาวิธีการนี้ ฟังก์ชัน M(t) แทนได้โดยอนุกรม Maclaurins ดังต่อไปนี้

$$e^{t^2/2} = 1 + \frac{1}{1!}\left(\frac{t^2}{2}\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{k!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^k + \ldots$$

$$= 1 + \frac{1}{2!}t^2 + \frac{(3)(1)}{4!}t^4 + \ldots + \frac{(2k-1)\ldots(3)(1)}{(2k)!}t^{2k} + \ldots$$

โดยทั่ว ๆ ไปอนุกรม Maclaurin M (t) คือ

$$M(t) = M(0) + \frac{M'(0)}{1!}t + \frac{M''(0)}{2!}t^2 + \ldots + \frac{M^{(m)}(0)}{m!}t^m + \ldots$$

$$= 1 + \frac{E(X)}{1!}t + \frac{E(X)^2}{2!}t^2 + \ldots + \frac{E(X^m)}{m!}t^m + \ldots$$

สัมประสิทธิ์ของ $(t^m/m!)$ ในการแทนอนุกรม Maclaurin ของ M (t) คือ $E(X^m)$ ดังนั้นสำหรับ M (t) เฉพาะของเรา เรามี

$$E(X^{2k}) = (2k-1)(2k-3)\ldots(3)(1) = \frac{(2k)!}{2^k k!} \quad k = 1,2,3,\ldots$$

$$E(X^{2k-1}) = 0, \; k = 1,2,3,\ldots$$

หมายเหตุ มีการแจกแจงจำนวนมากไม่มี mgf เราควรนิยาม $E(e^{ixt})$ ในเมื่อ i เป็น imaginary unit $E(e^{ixt})$ หาค่าได้สำหรับทุก ๆ การแจกแจงและเรียกว่า characteristic function ของการแจกแจง ทุก ๆ การแจกแจงมี characteristic funcion เดียวเท่านั้น และแต่ละ characteristic function ที่สัมพันธ์กับการแจกแจงความน่าจะเป็นเท่านั้น

ตัวอย่างที่ 6 ให้ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มี $K(t) = E(t^X)$ หาค่าได้สำหรับค่า t ที่เป็นเลขจำนวนจริงทั้งหมดในช่วงเปิดที่รวมจุด t = 1 จงแสดงว่า $K^{(m)}(1)$ เท่ากับ factorial moment ที่ m

$$E[X(X-1)\ldots(X-m+1)]$$

จาก

$$K(t) = E(t^X) = \int_{-\infty}^{\infty} t^x f(x)\, dx$$

$$K'(t) = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} t^x f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x\, t^{x-1} f(x)\,dx$$

$$K''(t) = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} x t^{x-1} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x(x-1)\, t^{x-2} f(x)\,dx$$

$$\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$K^m(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(x-1)\ldots(x-m+1)\, t^{x-m} f(x)\,dx$$

ให้ $t = 1$ เราจะได้

$$K^m(1) = \int_{-\infty}^{\infty} x(x-1)\ldots(x-m+1)\, f(x)\,dx$$

$$= E[X(X-1)\ldots(X-m+1)]$$

ตัวอย่างที่ 7 ให้ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม m เป็นเลขจำนวนเต็มบวกความคาดหวัง $E[(X-b)^m]$ หาค่าได้เรียกว่า moment ที่ m ของการแจกแจงรอบจุด b ให้ moment ที่หนึ่ง ที่สองและที่สาม ของการแจกแจงรอบจุด 7 เป็น 3, 11 และ 15 ตามลำดับ จงหามัชฌิมเลขคณิต μ ของ X และแล้วคำนวณหา moment ที่หนึ่ง, ที่สอง และที่สามของการแจกแจงรอบจุด μ
จากโจทย์ที่กำหนดให้

$$E[(X-7)] = 3 \qquad \ldots\ldots.(1)$$

$$E[(X-7)^2] = 11 \qquad \ldots\ldots.(2)$$

$$E[(X-7)^3] = 15 \qquad \ldots\ldots.(3)$$

จาก (1)

$$E(X) - E(7) = 3$$

$$E(X) = 3 + 7 = 10$$

จาก (2)

$$E[X^2 - 14X + 49] = 11$$

$$E(X^2) - 14E(X) + 49 = 11$$

$$E(X^2) - 14(10) + 49 = 11$$

$E(X^2) \quad = \quad 102$

จาก (3)

$$E[(X^3 - 21X^2 + 147X - 343)] = 15$$

$$E(X^3) - 21E(X^2) + 147E(X) - 343 = 15$$

$$E(X^3) - 21 \times 102 + 147 \times 10 - 343 = 15$$

$$E(X^3) = 1030$$

$$E(X-\mu) = E(X) - \mu = \mu - \mu = 0$$

$$\begin{aligned} E(X-\mu)^2 &= E(X-10)^2 = E(X^2 - 20X + 100) \\ &= E(X^2) - 20E(X) + 100 \\ &= 102 - 20 \times 10 + 100 \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X-\mu)^3 &= E(X-10)^3 \\ &= E[X^3 - 30X^2 + 300X - 1000] \\ &= E(X^3) - 30E(X^2) + 300E(X) - 1000 \\ &= 1030 - 30 \times 102 + 300 \times 10 - 1000 \\ &= -30 \end{aligned}$$

ทฤษฎี 1 ให้ X_1 กับ X_2 เป็นสองตัวแปรเชิงสุ่มที่มี pdf ร่วม $f(x_1,x_2)$ และ marginal pdf $f(x_1)$ กับ $f(x_2)$ ตามลำดับและให้ $M(t_1,t_2)$ เป็น mgf ของการแจกแจงแล้ว X_1 กับ X_2 มีความอิสระกันก็ต่อเมื่อ $M(t_1,t_2) = M(t_1,0)\,M(0_1,t_2)$

พิสูจน์ ถ้าหากว่า X_1 กับ X_2 มีความอิสระกันแล้ว

$$\begin{aligned} M(t_1,t_2) &= E[e^{X_1 t_1 + X_2 t_2}] \\ &= E[e^{X_1 t_1}]\ E[e^{X_2 t_2}] \\ &= M(t_1,0)\ M(0,t_2) \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น X_1 กับ X_2 มีความอิสระกันแล้ว mgf ของตัวประกอบการแจกแจงร่วมจะอยู่ในผลคูณของ mgf ของสอง marginal distributions

ถ้าหากว่าเราสมมติต่อไปว่า mgf ของการแจกแจงร่วมของ X_1 กับ X_2 กำหนดได้โดย $M(t_1,t_2) = M(t_1,0)\ M(0,t_2)$ X_1 มี mgf เดียวเท่านั้นและกำหนดได้โดย

$$M(t_1,0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{x_1 t_1} f(x_1)\,dx_1$$

ในทำนองเดียวกัน mgf ของ X_2 ชนิดต่อเนื่องก็มี mgf เดียวเท่านั้น กำหนดได้โดย

$$M(o,t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{x_2 t_2} f(x_2)\,dx_2$$

ดังนั้น เราได้

$$M(t_1,0)\,M(0,t_2) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{x_1 t_1} f(x_1)\,dx_1 \right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{x_2 t_2} f(x_2)\,dx_2 \right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{x_1 t_1 + x_2 t_2} f(x_1)\,f(x_2)\,dx_1\,dx_2$$

จากที่กำหนดให้ว่า

$$M(t_1,t_2) = M(t_1,0)\,M(0,t_2)$$

เพราะฉะนั้น

$$M(t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{x_1 t_1 + x_2 t_2} f(x_1)\,f(x_2)\,dx_1\,dx_2$$

แต่ $M(t_1,t_2)$ เป็น mgf ของ X_1 กับ X_2 ดังนั้น

$$M(t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{x_1 t_1 + x_2 t_2} f(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2$$

และเป็น mgf เดียวเท่านั้นที่ถือได้ว่าสองการแจกแจงของความน่าจะเป็นที่ได้อธิบายได้โดย $f(x_1)\,f(x_2)$ กับ $f(x_1,x_2)$ เหมือนกัน เพราะฉะนั้น

$$f(x_1,x_2) = f(x_1)\,f(x_2)$$

นั่นคือ ถ้า $M(t_1,t_2) = M(t_1,0)\,M(0,t_2)$ แล้ว X_1 กับ X_2 มีความอิสระกัน นี้ก็จบการพิสูจน์สำหรับตัวแปรเชิงสุ่มชนิดต่อเนื่อง

ในกรณีที่เป็น mgf ของการแจกแจงร่วมของ n ตัวแปรเชิงสุ่ม $X_1,X_2,\ldots,X_n$ นิยามได้ดังนี้ ให้

$E[\exp(X_1t_1 + X_2t_2 + \ldots + X_nt_n)]$

หาค่าได้สำหรับ

หาค่าได้สำหรับ $-h_i < t < h_i$, $i = 1,2,\ldots, n$ ในเมื่อแต่ละ h_i มีค่ามากกว่าศูนย์ ความคาดหวังแสดงได้โดย $M(t_1,t_2,\ldots,t_n)$ และเรียก mgf ของการแจกแจงร่วมของ $X_1,X_2,\ldots,X_n$ เหมือนในกรณีของหนึ่งหรือสองตัวแปร mgf นี้มีหนึ่ง mgf เดียวเท่านั้นและกำหนดการแจกแจงร่วมได้อย่างเดียวเท่านั้น ของ n ตัวแปร mgf ของ marginal distribution ของ X_i เป็น $M(0,0,\ldots 0,t_i,0,0,\ldots,0)$ $i = 1,2,\ldots,n$ marginal distribution ของ X_i กับ X_j เป็น $M(0,\ldots,0,t_i,0,\ldots 0,t_j,0,\ldots,0)$ และต่อ ๆ ไป ทฤษฎี 1 ของหัวข้อนี้สามารถกำเนิดและ factorization ได้

$$M(t_1,t_2,\ldots,t_n) = \prod_{i=1}^{n} M(0,0,\ldots,0,t_i,0,\ldots,0)$$

เป็นเงื่อนไขสำหรับตัวแปร $X_1,X_2,\ldots,X_n$ ที่มีความอิสระกัน

หัวข้อต่อไปนี้จะเป็นการสรุปพร้อมด้วยแสดงตัวอย่าง ให้ $f(x,y)$ เป็น pdf ร่วมของสองตัวแปรเชิงสุ่ม X กับ Y ถ้าหากว่า $E(e^{Xt_1+Yt_2})$ หาค่าได้ (สำหรับ $-h_1 < t_1 < h_1$, $-h_1 < t_2 < h_2$ ในเมื่อ h_1 กับ h_2 มีค่ามากกว่าศูนย์) แสดงได้ด้วย $M(t_1,t_2)$ เรียกว่า moment-generating function ของการแจกแจงร่วมของ X กับ Y mgf $M(t_1,t_2)$ กำหนดการแจกแจงของ X กับ Y ได้อย่างสมบูรณ์และ marginal distributions ของ X กับ Y คือ

$$M(t_1,0) = E(e^{Xt_1}) = M(t_1)$$

และ

$$M(0,t_2) = E(e^{Yt_2}) = M(t_2)$$

ในกรณีของตัวแปรเชิงสุ่มชนิดต่อเนื่อง

$$\frac{\partial^{k+m} M(t_1,t_2)}{\partial t_1^k \, \partial t_2^m} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^k y^m e^{xt_1 + yt_2} f(x,y)\, dxdy$$

$$\left.\frac{\partial^{k+m} M(t_1,t_2)}{\partial t_1^k \partial t_2^m}\right|_{t_1=t_2=0} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^k y^m f(x,y)\, dxdy$$

$$= E(X^k Y^m)$$

ดังตัวอย่าง

$$\mu_x = E(X) = \frac{\partial M(t_1,o)}{\partial t_1}\Big|_{t_1=0}, \quad \mu_y = E(Y) = \frac{\partial M(o,t_2)}{\partial t_2}\Big|_{t_2=0}$$

$$\sigma_x^2 = E(X^2) - \mu_x^2 = \frac{\partial^2 M(t_1,o)}{\partial t_1^2}\Big|_{t_1=0} - \mu_x^2$$

$$\sigma_y^2 = E(Y^2) - \mu_y^2 = \frac{\partial^2 M(o,t_2)}{\partial t_2^2}\Big|_{t_2=0} - \mu_y^2$$

$$E[(X-\mu_x)(Y-\mu_y)] = \frac{\partial^2 M(t_1,t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}\Big|_{t_1=t_2=0} - \mu_x \mu_y$$

จากผลลัพธ์ข้างต้น สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์อาจคำนวณได้โดยการใช้ mgf ของการแจกแจงร่วม ถ้าฟังก์ชันนั้นใช้ได้

ตัวอย่างที่ 8 ให้ตัวแปรเชิงสุ่ม X กับ Y ชนิดต่อเนื่องมี pdf ร่วม

$$f(x,y) = e^{-y}, \quad 0 < x < y < \infty$$

$$= 0 \qquad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ}$$

mgf ของการแจกแจงร่วมนี้คือ

$$M(t_1,t_2) = \int_0^\infty \int_x^\infty e^{xt_1 + yt_2 - y}\, dydx$$

$$= \frac{1}{(1-t_1-t_2)(1-t_2)}$$

โดยให้ $t_1 + t_2 < 1$ กับ $t_2 < 1$ สำหรับการแจกแจงนี้ เราทำหนดได้

$$\mu_x = 1, \quad \mu_y = 2$$

$$\sigma_x^2 = 1, \quad \sigma_y^2 = 2$$

$$E[(X-\mu_x)(Y-\mu_y)] = 1$$

จะละไว้เป็นแบบฝึกหัด ถ้าหากว่าเรายอมรับผลลัพธ์เหล่านี้ สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ของ X กับ Y คือ $\rho = \frac{1}{\sqrt{2}}$ นอกจากนั้น marginal distribution ของ X กับ Y คือ

$$M(t_1, o) = \frac{1}{(1 - t_1)}, \quad t_1 < 1$$

$$M(o, t_2) = \frac{1}{(1 - t_2)^2}, \quad t_2 < 1$$

mgf เหล่านี้เป็น mgf ของ marginal pdf

$$f(x) = \int_x^{\infty} e^{-y}\, dy = e^{-x}, \qquad 0 < x < \infty$$
$$= \qquad = 0 \qquad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ}$$

และ

$$f(y) = e^{-y} \int_0^y dx = y\, e^{-y} \qquad 0 < y < \infty$$

สำหรับค่าอื่น ๆ $= 0$ สำหรับค่าอื่น ๆ

3.4 Chebyshev's Inequality

มีนักคณิตศาสตร์ชาวรัสเซียชื่อ Chebyshev ได้ใช้ inequality มาเป็นวิธีการหนึ่งในการนำเอาความแปรปรวนมาจัดการกระจายรอบค่าคาดหวังของตัวแปรเชิงสุ่ม

เมื่อไรเราทราบการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรเชิงสุ่ม X (pdf จะอยู่ในกรณีต่อเนื่องหรือไม่ต่อเนื่อง) แล้วเราอาจคำนวณ E (X) และ V (X) ถ้าหากว่าค่าเหล่านี้หาค่าได้อย่างไรก็ตาม ในทางตรงกันข้ามก็จะไม่เป็นจริง นั่นคือ จากการทราบ E (X) และ V (X) เราไม่สามารถสร้างการแจกแจงความน่าจะเป็นของ X ใหม่ได้ ดังนั้นจึงไม่สามารถคำนวณปริมาณอย่างเช่น $P[\,|X - E(X)| \leq C\,]$

ถึงแม้ว่าเราไม่สามารถคำนวณความน่าจะเป็นจากการที่ทราบ E (X) กับ V (X) แต่เราก็ยังสามารถให้ขอบเขตบนหรือล่างที่มีประโยชน์มากต่อความน่าจะเป็นนั้น ผลลัพธ์อันนี้เป็นที่ทราบกันในชื่อว่า Chebyshev's inequality หลักในการใช้ทฤษฎีอยู่ในคำกล่าวของทฤษฎีดังนี้

ทฤษฎี 1 ให้ u (X) เป็นฟังก์ชันที่มีค่าเป็นบวกของตัวแปรเชิงสุ่ม X ถ้าหากว่า E [u (X)] หาค่าได้แล้ว สำหรับทุก ๆ ค่าคงที่ C ที่มีค่าเป็นบวก

$$P[\,u(X) \geq C\,] \leq \frac{E[\,u(X)\,]}{C}$$

พิสูจน์ กำหนดการพิสูจน์เมื่อตัวแปรเชิงสุ่ม X เป็นชนิดต่อเนื่อง แต่การพิสูจน์สามารถดัดแปลงกับกรณีไม่ต่อเนื่องได้ ถ้าเราแทน integrals ด้วยการบวก ให้ $A = \{ x ; u(X) \geq C \}$ และ $f(x)$ เป็น pdf ของ X แล้ว ($\bar{A}$ เป็น complementary ของ A)

$$E[u(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) f(x)\, dx = \int_A u(x) f(x)\, dx + \int_{\bar{A}} u(x) f(x)\, dx$$

เนื่องจากว่าแต่ละ integral ทางด้านขวามือสุดของสมการข้างต้นมีค่าเป็นบวก และจำนวนซ้ายมือก็จะมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับแต่ละเทอมโดยเฉพาะ

$$E[u(X)] \geq \int_A u(x) f(x)\, dx$$

อย่างไรก็ตาม ถ้า $x \in A$ แล้ว $u(x) \geq C$ ดังนั้นจำนวนทางขวามือของ inequality ข้างต้นไม่ได้เพิ่มขึ้น ถ้าหากว่าเราแทนที่ $u(X)$ ด้วย C แล้ว

$$E[u(X)] \geq C \int_A f(x)\, dx$$

เนื่องจากว่า

$$\int_A f(x)\, dx = P(X \in A) = P[u(X) \geq C]$$

ติดตามด้วย

$$E[u(X)] \geq C\, P[u(X) \geq C]$$

ซึ่งเป็นผลที่ต้องการ

ทฤษฎีข้างต้นเป็น inequality ที่เรียกว่า Chebyshev's inequality

ทฤษฎี 2 Chebyshev's Inequality ให้ตัวแปรเชิงสุ่ม X มีการแจกแจงความน่าจะเป็นเกี่ยวกับซึ่งเราสมมติว่ามีความแปรปรวน σ^2 ที่แน่นอนและมีมัชฌิม μ เท่านั้น แล้วสำหรับทุก ๆ $k>0$

$$P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

พิสูจน์ ในทฤษฎี 1 ทำ $u(X) = (X - \mu)^2$ และ $C = k^2\sigma^2$ แล้ว เราได้

$$P[(X - \mu)^2 \geq k^2\sigma^2] \leq \frac{E[(X - \mu)^2]}{k^2\sigma^2}$$

เนื่องจากว่า $E[(X-\mu)^2]$ คือ σ^2 inequality อาจเขียนได้

$$P(|X-\mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

ซึ่งเป็นผลที่ต้องการ โดยทั่ว ๆ ไปเราควรให้ k มีค่าเป็นบวกมากกว่าหนึ่งจำนวน $1/k^2$ เป็นขอบเขตบนสำหรับความน่าจะเป็น $P(|X-\mu| \geq k\sigma)$ ให้เรามาพิจารณาเปรียบเทียบขอบเขตบนกับความน่าจะเป็นของค่าที่แน่นอนดังตัวอย่าง

ตัวอย่าง 1 ให้ X มี pdf.

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{3}}, \quad -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$$

$$= 0 \quad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ}$$

ในที่นี้เราคำนวณ $\mu = 0$ และ $\sigma^2 = 1$ ถ้าหากว่าให้ $k = 3/2$ เราได้ความน่าจะเป็น

$$\begin{aligned} P(|X-\mu| \geqslant k\sigma) &= P[|X| \geqslant 3/2] \\ &= 1 - \int_{-3/2}^{3/2} \frac{1}{2\sqrt{3}}\,dx \\ &= 1 - \frac{x}{2\sqrt{3}}\Big|_{-3/2}^{3/2} = 1 - \left(\frac{3}{4\sqrt{3}} + \frac{3}{4\sqrt{3}}\right) \\ &= 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 0.134 \end{aligned}$$

โดย Chebyshev's inequality ความน่าจะเป็นข้างต้นมีขอบเขตบน $1/k^2 = \frac{4}{9}$ ซึ่งมีค่ามากกว่าความน่าจะเป็น $1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.134$ ถ้าหากว่าเราให้ $k = 2$ ความน่าจะเป็น $P(|X-\mu| \geqslant 2\sigma) = P(|X| \geqslant 2) = 0$ ซึ่งมีค่าน้อยกว่าขอบเขตบน $1/k^2 = 1/4$ จากตัวอย่างจะเห็นได้ว่าความน่าจะเป็น $P(|X-\mu| \geqslant k\sigma)$ กับขอบเขตบน $1/k^2$ แตกต่างกันและ inequality hold สำหรับทุก ๆ $k > 0$ และ holdสำหรับตัวแปรเชิงสุ่มทั้งหมดที่มีความแปรปรวนแน่นอนนั้นไม่อาจเป็นไปได้เหมือนกับตัวอย่าง 2 นี้

ตัวอย่าง 2 ให้ตัวแปรเชิงสุ่ม X ชนิดไม่ต่อเนื่องมีความน่าจะเป็น $\frac{1}{8}, \frac{6}{8}, \frac{1}{8}$ ที่จุด $x = -1,0,1$ ตามลำดับ ในที่นี้เราจะได้ $\mu = 0$ และ $\sigma^2 = 1/4$ ถ้าหากว่า $k = 2$ แล้ว $1/k^2 = 1/4$ และ $P(|X - \mu| \geqslant k\sigma) = P(|X| \geqslant 1) = 1/4$ นั่นคือความน่าจะเป็น $P(|X - \mu| \geqslant k\sigma)$ บรรลุถึงขอบเขตบน $1/k^2 = 1/4$

เพราะฉะนั้นการปรับปรุง inequality ให้ดีขึ้นจะต้องขึ้นอยู่กับเงื่อนไขเกี่ยวกับการแจกแจงของ X

ตัวอย่าง 3 ให้ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มมีมัชฌิมเลขคณิต μ และให้ $E[(X - \mu)^{2k}]$ หาค่าได้ จงแสดงว่า $P(|X - \mu| \geqslant C) \leqslant E[(X - \mu)^{2k}]/C^{2k}$

จาก $P(u(X) \geqslant a) \leqslant \frac{E[u(X)]}{a}$ ในเมื่อ a เป็นค่าคงที่

ให้ $u(X) = (X - \mu)^{2k}$, $a = C^{2k}$ แล้ว

$$P[(X - \mu)^{2k} \geqslant C^{2k}] \leqslant \frac{E[(X - \mu)^{2k}]}{C^{2k}}$$

หรือ

$$P[|X - \mu| \geqslant C] \leqslant \frac{E[(X - \mu)^{2k}]}{C^{2k}}$$

ตัวอย่าง 4 ให้ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม $P(X \leqslant 0) = 0$ และให้ $\mu = E(X)$ หาค่าได้ จงแสดงว่า $P(X \geqslant 2\mu) \leqslant 1/2$ จาก Chebyshev's inequality

$$P(u(X) \geqslant a) \leqslant \frac{E[u(X)]}{a}$$

ให้ $u(X) = X$ และ $a = 2\mu$ แล้ว เราจะได้

$$P(X \geqslant 2\mu) \leqslant \frac{E(X)}{2\mu}$$

$$\leqslant \frac{\mu}{2\mu} = \frac{1}{2}$$

ตัวอย่าง 5 ถ้าหากว่า X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มมี $E(X) = 3$ และ $E(X^2) = 13$ ใช้ Chebyshev's inequality เพื่อกำหนดขอบเขตล่างสำหรับความน่าจะเป็น $P(-2 < X < 8)$

คำนวณหา σ^2 ได้จาก
$$\sigma^2 = E(X^2) - (E(X))^2 = 13 - 9 = 4$$

จาก Chebyshev's inequality

$$P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}\ ;\ P(|X - \mu| < k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

และ

$$\begin{aligned} P(-2 < X < 8) &= P\left(\frac{-2-3}{2} < \frac{X-3}{2} < \frac{8-3}{2}\right) \\ &= P\left(-\frac{5}{2} < \frac{X-3}{2} < \frac{5}{2}\right) \\ &= P\left(\left|\frac{X-3}{2}\right| < \frac{5}{2}\right) > 1 - \frac{1}{\left(\frac{5}{2}\right)^2} \\ &= 1 - \frac{4}{25} = 0.84 \end{aligned}$$

ในเมื่อ k มีค่าเท่ากับ 5/2 $(k\sigma = 5, \sigma = 2)$

3.5 สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์

เท่าที่ได้ศึกษามาเกี่ยวกับความสัมพันธ์ของพารามิเตอร์อย่างเช่น E(X) กับ V(X) ของการแจกแจงหนึ่งตัวแปรเชิงสุ่ม ตัวพารามิเตอร์เหล่านี้ใช้วัดคุณลักษณะของการแจกแจง ถ้าหากว่าเรามีสองตัวแปรเชิงสุ่ม X กับ Y โดยพิจารณาว่าตัวแปรเชิงสุ่ม X กับ Y มีความสัมพันธ์กันอย่างไร มีพารามิเตอร์หนึ่งที่มีประโยชน์มาก ซึ่งใช้วัดในความหมายองศาแห่งความสัมพันธ์ระหว่าง X กับ Y เพื่อความเข้าใจยิ่งขึ้น เรามาพิจารณานิยามต่อไปนี้

นิยาม ให้ (X, Y) เป็นตัวแปรเชิงสุ่มสองมิติ กำหนดให้ ρ เป็นสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ระหว่าง X กับ Y ดังนี้

$$\rho = \frac{E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}}{\sqrt{V(X)\,V(Y)}}$$

หมายเหตุ (ก) เราสมมติว่าค่าคาดหวังทั้งหมดหาค่าได้และทั้ง V(X) กับ V(Y) ไม่เป็นศูนย์

(ข) ตัวตั้ง $E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}$ เรียกว่า ความแปรปรวนร่วมของ X กับ Y บางครั้งแสดงได้ด้วยสัญลักษณ์ σ_{xy}

(ค) สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์เป็นปริมาณหนึ่งที่ไม่มีหน่วย

(ง) เราจะต้องทราบว่า ρ ใช้วัดอะไรก่อนที่นิยามข้างต้นสามารถจะใช้ประโยชน์

ทฤษฎี 1

$$\rho = \frac{E(XY) - E(X)\,E(Y)}{\sqrt{V(X)\,V(Y)}}$$

พิสูจน์ พิจารณา

$$\begin{aligned} E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\} &= E[XY - XE(Y) - YE(X) + E(X)E(Y)] \\ &= E(XY) - E(X)E(Y) - E(Y)E(X) + E(X)E(Y) \\ &= E(XY) - E(X)E(Y) \end{aligned}$$

ทฤษฎี 2 ถ้าหากว่า X กับ Y มีความอิสระกันแล้ว $\rho = 0$

พิสูจน์ ใช้วิธีเดียวกับทฤษฎี 1 เนื่องจากว่า

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

ถ้าหากว่า X กับ Y มีความอิสระกัน

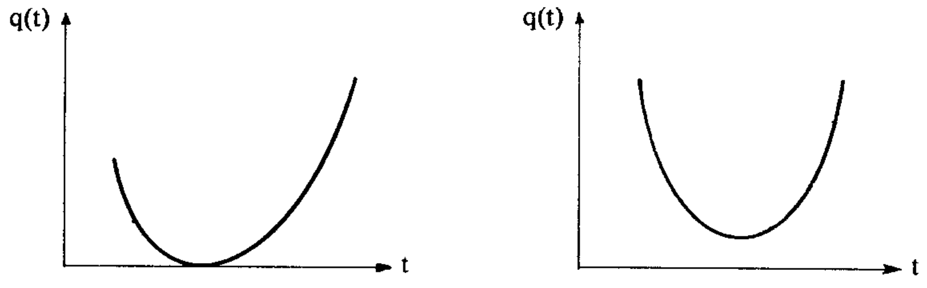
หมายเหตุ โดยทั่ว ๆ ไป ในทางตรงกันข้ามกับทฤษฎี 2 ไม่เป็นจริง นั่นคือ เราอาจมี $\rho = 0$ และ X กับ Y ยังไม่มีความอิสระ ถ้าหากว่า $\rho = 0$ เรากล่าวว่า X กับ Y ไม่มี

สหสัมพันธ์ ดังนั้นการมีสหสัมพันธ์กับการมีความอิสระกันโดยทั่ว ๆ ไปแล้วไม่ equivalent ดังตัวอย่างต่อไปนี้จะแสดงถึงความมุ่งหมายนี้

ให้ X กับ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มใด ๆ ที่มีการแจกแจงเหมือนกัน

ให้ $U = X - Y$ กับ $V = X + Y$ ดังนั้น $E(U) = 0$ และ $Cov(U, V) = E[(X - Y)(X + Y)] = E(X^2 - Y^2) = 0$ เพราะฉะนั้น U กับ V ไม่มีสหสัมพันธ์ แม้ว่า X กับ Y มีความอิสระกัน U กับ Y อาจไม่มีความอิสระกันตามการเลือกสรรของ X กับ Y แสดงให้ X กับ Y เป็นจำนวนที่ปรากฏของลูกเต๋าลูกแรกกับลูกที่สองตามลำดับ จากการทอดลูกเต๋าสองลูก เราพบว่า $P[V = 4|U = 3] = 0$ (เนื่องจากว่า $X - Y = 3, X + Y$ ไม่สามารถเท่ากับ 4) ขณะที่ $P(V = 4) = 3/36$ ดังนั้น U กับ V ไม่มีความอิสระกัน

ทฤษฎี 8 $-1 \leqslant \rho \leqslant 1$ (นั่นคือ ρ มีค่าอยู่ระหว่างตั้งแต่ -1 ถึง $+1$)



(ก) (ข)

พิสูจน์ พิจารณาฟังก์ชันของตัวแปร t ที่เป็นจริง

$$q(t) = E[V + tW]^2$$

ในเมื่อ $V = X - E(X)$ กับ $W = Y - E(Y)$ เนื่องจากว่า $[V + tW]^2 \geqslant 0$ เราจะได้ว่า $q(t) \geqslant 0$ สำหรับ t ทั้งหมด เรากระจายเทอม $E[V + tW]^2$

$$q(t) = E[V^2 + 2tVW + t^2W^2] = E(V^2) + 2tE(VW) + t^2 E(W^2)$$

ดังนั้น q(t) แสดงออกมาในรูป quadratic ใน t โดยทั่ว ๆ ไป ถ้าหากว่าการแสดงออกของ quadratic $q(t) = at^2 + bt + c$ มีคุณสมบัติที่ $q(t) \geqslant 0$ สำหรับ t ทั้งหมดนั่นหมายความว่ากราฟของมันสัมผัสกับแกน t เพียงจุดหนึ่งดังรูปข้างต้น นี้หมายความว่า discriminant $(b^2 - 4ac)$ ของมันต้อง $\leqslant 0$ เนื่องจากว่า $(b^2 - 4ac) > 0$ หมายความว่า q(t) มีสองรากที่เป็นจริง การ

ประยุกต์ข้อสรุปนี้กับฟังก์ชัน q(t) ภายใต้การพิจารณาข้างต้นเราได้

$$4[E(VW)]^2 - 4E(V^2)\,E(W^2) \leqslant 0$$

นี้หมายความว่า

$$\frac{[E(VW)]^2}{E(V^2)E(W^2)} \leqslant 1$$

และด้วยเหตุนี้

$$\frac{\{E[X - E(X)][Y - E(Y)]\}^2}{V(X)\,V(Y)} = \rho^2 \leqslant 1$$

ดังนั้น $-1 \leqslant \rho \leqslant 1$

ทฤษฎี 4 สมมติว่า $\rho^2 = 1$ แล้ว $Y = AX + B$ ในเมื่อ A กับ B เป็นค่าคงที่ นั่นคือ ถ้าหากว่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ ρ เป็น ± 1 แล้ว Y เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นของ X

พิสูจน์

พิจารณาฟังก์ชัน q(t) ที่ได้บรรยายในการพิสูจน์ของทฤษฎี 3 ถ้าหากว่า $q(t) > 0$ สำหรับ t ทั้งหมดแล้ว $\rho^2 < 1$ ด้วยเหตุนี้ สมมติฐานของทฤษฎีนี้ $\rho^2 = 1$ หมายความว่าต้องหาค่า t ได้อย่างน้อยหนึ่งค่า สมมุติให้เป็น t_0 อย่างเช่น $q(t_0) = E(V + t_0W)^2 = 0$ เนื่องจากว่า $V + t_0W = [X - E(X)] + t_0[Y - E(Y)]$ เรามี $E(V + t_0W) = 0$ และความแปรปรวน $(V + t_0W) = E(V + t_0W)^2$ ดังนั้นเราพบว่าสมมติฐานของทฤษฎีนี้นำไปสู่การสรุปว่าความแปรปรวนของ $(V + t_0W) = 0$ เพราะฉะนั้น $[X - E(X)] + t_0[Y - E(Y)] = 0$ กลับเขียนสิ่งนี้เสียใหม่ เราพบว่า $Y = AX + B$ เป็นเสมือนได้พิสูจน์แล้ว

ทฤษฎี 5 สมมุติว่า X กับ Y เป็นสองตัวแปรเชิงสุ่มสำหรับซึ่ง $Y = AX + B$ ในเมื่อ A กับ B เป็นค่าคงที่ แล้ว $\rho^2 = 1$ ถ้า $A > 0, \rho = +1$ ถ้า $A < 0, \rho = -1$

พิสูจน์

เนื่องจากว่า $Y = AX + B$ เราได้ $E(Y) = AE(X) + B$ กับ $V(Y) = A^2V(X)$

$$E(XY) = E[X(AX + B)] = AE(X^2) + BE(X)$$

ดังนั้น

$$\rho^2 = \frac{[E(XY) - E(X)E(Y)]^2}{V(X)V(Y)}$$

$$= \frac{\{AE(X^2) + BE(X) - E(X)[AE(X) + B]^2\}^2}{V(X)A^2V(X)}$$

$$= \frac{[AE(X^2) + BE(X) - A(E(X))^2 - BE(X)]^2}{A^2(V(X))^2}$$

$$= \frac{A^2\{E(X^2) - [E(X)]^2\}^2}{A^2(V(X))^2} = 1$$

ข้อความตอนที่สองของทฤษฎีเป็นการหมายเหตุว่า $\sqrt{A^2} = A$

ทฤษฎี 4 กับ 5 วางหลักคุณลักษณะที่สำคัญของสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์เป็นมาตราวัดองศาแห่งการอยู่ในเส้นระหว่าง X กับ Y ค่าของ ρ เข้าใกล้ +1 หรือ −1 แสดงองศาแห่งการอยู่ในเส้นสูงมากขณะที่ค่า ρ เข้าใกล้ 0 แสดงการขาดการอยู่ในเส้น ค่าบวกของ ρ แสดงว่า Y มีแนวโน้มเพิ่มขึ้นพร้อมด้วยค่า X เพิ่มขึ้น

ขณะที่ค่า ρ เป็นลบ แสดงว่า Y มีแนวโน้มลดลงพร้อมด้วยค่าของ X เพิ่มขึ้น มีการเข้าใจผิดในการพิจารณาเกี่ยวกับการตีความสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ ค่าของ ρ เข้าใกล้ศูนย์แสดงว่าไม่มีความสัมพันธ์เชิงเส้นระหว่าง X กับ Y เท่านั้น มันไม่ทำให้ความน่าจะเป็นไปได้สิ้นโอกาสไปของบางความสัมพันธ์ไม่เป็นเชิงเส้น

ตัวอย่าง 1 สมมติว่าตัวแปรเชิงสุ่มสองมิติ (X, Y) มีการแจกแจง uniformly ตลอดพื้นที่สามเหลี่ยม

$$R = \{(x, y) | 0 < x < y < 1\}$$

ดังนั้น pdf กำหนดได้เป็น

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 2, \qquad (x, y) \in R \\ &= 0 \qquad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ} \end{aligned}$$

และ marginal pdf ของ X กับ Y คือ

$$f(x) = \int_x^1 (2)\, dy = 2(1 - x),\ 0 \leqslant x \leqslant 1$$

$$f(y) = \int_0^y (2)\, dx = 2y,\ 0 \leqslant y \leqslant 1$$

เพราะฉะนั้น

$$E(X) = \int_0^1 x\, 2(1 - x)dx = \frac{1}{3},\ E(Y) = \int_0^1 y2y\, dy = 2/3$$

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2\, 2(1 - x)dx = 1/6,\ E(Y^2) = \int_0^1 y^2\, 2y\, dy = 1/2$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{1}{18},\ V(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = \frac{1}{18}$$

$$E(XY) = \int_0^1 \int_0^y xy\, 2dx\, dy = \frac{1}{4}$$

ดังนั้น

$$\rho = \frac{E(XY) - E(X)\,E(Y)}{\sqrt{V(X)\,V(Y)}} = \frac{\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{18}\right)\left(\frac{1}{18}\right)}}$$

$$= \frac{\frac{1}{4} - \frac{2}{9}}{\frac{1}{18}} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{18}} = \frac{1}{2}$$

สังเกตว่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์เป็นปริมาณที่ไม่มีหน่วย ค่าของมันไม่มีผลจากการเปลี่ยนแปลงสเกล

ทฤษฎี 6 ถ้าหากว่า ρ_{xy} เป็นสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ระหว่าง X กับ Y และถ้า $V = AX + B$ กับ $W = CY + D$ ในเมื่อ A, B, C และ B เป็นค่าคงที่แล้ว $\rho_{vw} = (AC/|AC|)\rho_{xy}$ (เราสมมติว่า $A \neq 0,\ C \neq 0$)

พิสูจน์

การพิสูจน์ก็คล้ายกับทฤษฎี 5

ตัวอย่าง 2 ให้แปรเชิงสุ่ม X กับ Y มี pdf ร่วม

$$f(x, y) = x + y \quad 0 < x < 1,\ 0 < y < 1$$
$$= 0 \quad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ}$$

เราจะคำนวณสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ของ X กับ Y และแสดงได้ ρ

$$E(X) = \int_0^1 \int_0^1 x(x + y)dx\,dy = \int_0^1 \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2y}{2} \right) \Big|_0^1 dy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{3} + \frac{y}{2} \right) dy = \frac{y}{3} + \frac{y^2}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

และ

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 x^2(x + y)dxdy - \left(\frac{7}{12} \right)^2$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3y}{3} \right) \Big|_0^1 dy - \left(\frac{7}{12} \right)^2$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{4} + \frac{y}{3} \right) dy - \left(\frac{7}{12} \right)^2$$

$$= \frac{y}{4} + \frac{y^2}{6} \Big|_0^1 - \left(\frac{7}{12} \right)^2$$

$$= \frac{5}{12} - \frac{49}{144} = \frac{11}{144}$$

ในทำนองเดียวกัน $E(Y) = \frac{7}{12}$ กับ $V(Y) = \frac{11}{144}$

ความแปรปรวนร่วมของ X กับ Y คือ

$$E(XY) - E(X)E(Y) = \int_0^1 \int_0^1 xy(x + y)dxdy - \left(\frac{7}{12} \right)^2$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x^3y}{3} + \frac{x^2y^2}{2} \right) \Big|_0^1 dy - \left(\frac{7}{12} \right)^2$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{y}{3} + \frac{y^2}{2} \right) dy - \left(\frac{7}{12} \right)^2$$

$$= \frac{y^2}{6} + \frac{y^3}{6} \Big|_0^1 - \left(\frac{7}{12} \right)^2$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{49}{144} = \frac{48-49}{144} = -\frac{1}{144}$$

$$\rho = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{V(X)\,V(Y)}}$$

$$= \frac{-\frac{1}{144}}{\sqrt{\left(\frac{11}{144} \right)\left(\frac{11}{144} \right)}} = -\frac{1}{11}$$

ผลลัพธ์ที่เป็นประโยชน์บางอย่างเกี่ยวกับหัวข้อ 3.2 กับ 3.5
ความแปรปรวนและความแปรปรวนร่วมของฟังก์ชันเชิงเส้นของตัวแปรเชิงสุ่ม

พิจารณาตัวแปรเชิงสุ่ม $X_1, X_2, \ldots, X_n$ มี pdf ร่วม $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ และให้

$$\mu_i = E(X_i)$$

$$\sigma_i^2 = V(X_i) = E(X_i - \mu_i)^2$$

$$\sigma_{ij} = \mathrm{Cov}(X_i, X_j) = E\left[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)\right]$$

กำหนดให้ $\sigma_{ii} = \sigma_i^2$

a กับ b เป็นค่าคงที่; $i = 1, 2, \ldots n.$ $j = 1, 2, \ldots, n$

กรณี (1)

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i a_j \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 V(X_i) + \sum_{i}^{n} \sum_{j}^{n} a_i a_j \mathrm{Cov}(X_i X_j) \quad (i \neq j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 V(X_i) + 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j<i}^{n} a_i a_j \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i^2\sigma_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j<1}^{n} a_ia_j\,\sigma_{ij}$$

พิสูจน์

จากคุณสมบัติข้อ ค ในหัวข้อ 3.1

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} a_iX_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_iE(X_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i\mu_i$$

ดังนั้น

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} a_iX_i\right) = E\left[\sum_{i=1}^{n} a_iX_i - E\left(\sum_{i=1}^{n} a_iX_i\right)\right]^2$$

$$= E\left[\sum_{i=1}^{n} a_i(X_i - \mu_i)\right]^2$$

$$= E\left\{\left[\sum_{i=1}^{n} a_i(X_i - \mu_i)\right]\left[\sum_{j=1}^{n} a_j(X_j - \mu_j)\right]\right\}$$

$$= E\left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_ia_j(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)\right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_ia_j\,E\left[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_ia_j\,\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$$

ถ้าหากว่า $X_1, X_2, \ldots, X_n$ **มีความอิสระกันแล้ว**

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} a_iX_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2V(X_i)$$

ในกรณีที่ $a_1 = a_2 \ldots = a_n = 1$

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j<i}^{n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$$

ถ้าหากว่า $X_1, X_2, \ldots, X_n$ มีความอิสระกัน

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$$

ถ้าหากว่า $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_n^2 \ (= \sigma^2)$ แล้ว

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = n\sigma^2$$

กำหนดให้ (หรือ $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n = \frac{1}{n}$)

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

เป็นมัชฌิมเลขคณิตของตัวแปรเชิงสุ่ม $X_1, X_2, \ldots, X_n$

$$V(\overline{X}) = \frac{1}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)\right]$$

$$= \frac{1}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2\sum_{i=1}^{n} \sum_{j<i} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)\right]$$

ถ้าหากว่า $X_1, X_2, \ldots, X_n$ มีความอิสระกันแล้ว

$$V(\overline{X}) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$$

และถ้าหากว่า $\sigma_1^2 = \ldots = \sigma_n^2 = (\sigma^2)$ แล้ว

$$V(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

หมายเหตุ $E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i$

และ $E(\overline{X}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mu_i$

ในกรณี $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_n \ (= \mu)$ แล้ว

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = n\mu$$

$$E(\overline{X}) = \mu$$

กรณี 2 $\quad Cov\left(\sum_{i=1}^{n} a_iX_i, \sum_{j=1}^{n} b_jX_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_ib_j\, Cov(X_i, X_j)$

พิสูจน์

$$Cov\left(\sum_{i=1}^{n} a_iX_i, \sum_{j=1}^{n} b_jX_j\right) = E\left\{\left[\sum_{i=1}^{n} a_iX_i - E\left(\sum_{i=1}^{n} a_iX_i\right)\right]\left[\sum_{j=1}^{n} b_jX_j - E\left(\sum_{j=1}^{n} b_jX_j\right)\right]\right\}$$

$$= E\left\{\left[\sum_{i=1}^{n} a_i(X_i - \mu_i)\right]\left[\sum_{j=1}^{n} b_j(X_j - \mu_j)\right]\right\}$$

$$= E\left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_ib_j(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)\right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_ib_j\, E(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_ib_j\, Cov(X_i, X_j)$$

ถ้าหากว่า $X_1, X_2, \ldots, X_n$ มีความอิสระกันแล้ว

$$Cov\left(\sum_{i=1}^{n} a_iX_i, \sum_{j=1}^{n} b_jX_j\right) = \sum_{i=1}^{n} a_ib_i\, V(X_i)$$

นอกจากนั้น ถ้าหากว่า $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_n^2 (= \sigma^2)$ แล้ว

$$Cov\left(\sum_{i=1}^{n} a_iX_i, \sum_{j=1}^{n} b_jX_j\right) = \sigma^2\left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)$$

3.6 ความคาดหวังแบบมีเงื่อนไข

เท่าที่เราได้กำหนดค่าคาดหวังของตัวแปรเชิงสุ่ม X (ในรูปของการแจกแจงความน่าจะเป็น) เป็น $\int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$ หรือ $\sum_{i=1}^{\infty} x_i\, f(x_i)$ เรายังสามารถกำหนดความคาดหวังแบบมีเงื่อนไขของตัวแปรเชิงสุ่ม (ในรูปของการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข)

นิยาม (ก) ถ้าหากว่า (X, Y) เป็นตัวแปรเชิงสุ่มชนิดต่อเนื่องสองมิติเรากำหนดความคาดหวังแบบมีเงื่อนของ X กำหนดให้ Y = y ได้เป็น

$$E(X/y) \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x/y)\, dx$$

(ข) ถ้าหากว่า (X, Y) เป็นตัวแปรเชิงสุ่มชนิดไม่ต่อเนื่องสองมิติ เรากำหนดความคาดหวังแบบมีเงื่อนไขของ X กำหนดให้ Y = y_i ให้เป็น

$$E(X/y_j) \quad = \quad \sum_{i=1}^{\infty} x_i\, f(x_i/y_j)$$

ความคาดหวังแบบมีเงื่อนไขของ Y กำหนดให้ X ก็กำหนดได้โดยแบบเดียวกัน

ข้อสังเกต (ก) การตีความของค่าคาดหวังแบบมีเงื่อนไขเป็นดังนี้ เนื่องจากว่า f(x/y) ใช้แทน pdf แบบมีเงื่อนไขของ X กำหนดให้ Y = y E(X/y) เป็นความคาดหวังของ X กำหนดให้บนเหตุการณ์ Y = y สำหรับตัวอย่าง ถ้าหากว่า (X, Y) ใช้แทนกำลังต้านทานการดึงกับความแข็งของตัวอย่างเหล็กเหนียวชนิดหนึ่งแล้ว E(X/y = 52.7) เป็นกำลังต้านทานการดึงที่คาดหวังของตัวอย่างเหล็กเหนียวที่ได้เลือกโดยสุ่มจากประชากรซึ่งมีความแข็งเป็น 52.7

(ข) โดยทั่ว ๆ ไปต้องเข้าใจ E(X/y) เป็นฟังก์ชันของ y และด้วยเหตุนี้จึงเป็นตัวแปรเชิงสุ่ม ในทำนองเดียวกัน E(Y/x) เป็นฟังก์ชันของ X และเป็นตัวแปรเชิงสุ่มด้วย (E(X/y) เป็นของตัวแปรเชิงสุ่ม E(X/Y)

(ค) เนื่องจากว่า E(Y/X) กับ E(X/Y) เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม จึงมีความสำคัญที่จะต้องกล่าวถึงความคาดหวังของมัน พร้อมทั้งพิจารณาถึง E[E(X/Y)] ต่อไปด้วย

ตัวอย่าง 1 จงแสดงว่าความแปรปรวนของการแจกแจงแบบมีเงื่อนไข Y กำหนดให้ X = x เป็น $(1-x)^2/12, 0 < x < 1$ และความแปรปรวนของการแจกแจงแบบมีเงื่อนไข X กำหนดให้ Y = y เป็น $Y^2/12, 0 < y < 1$ จาก $f(x, y) = 2, 0 < x < y, 0 < y < 1$

= 0 สำหรับค่าอื่น ๆ

$$\sigma^2_{y/x} = E\{[Y - E(Y/x)]^2 \mid x\} = E(Y^2/x) - (E(Y/x))^2$$

$$= \int_x^1 y^2 f(y/x)dy - \left(\frac{1-x}{2}\right)^2 = \int_x^1 \frac{y^2}{1-x}\,dy - \left(\frac{1+x}{2}\right)^2$$

ในเมื่อ $[E(Y/x)]^2 = \left(\frac{1+x}{2}\right)^2$ จากตัวอย่างที่ 3

$$= \frac{y^3}{3(1-x)}\Big|_x^1 - \left(\frac{1+x}{2}\right)^2 = \frac{(1-x)^3}{3(1-x)} - \left(\frac{1+x}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1+x+x^2}{3} - \frac{(1+x)^2}{4} = \frac{4+4x+4x^2-3-6x-3x^2}{12} = \frac{1-2x+x^2}{12}$$

$$= \frac{(1-x)^2}{12}$$

$$\sigma^2_{x/y} = E(X^2/y) - (E(X/y))^2$$

$$= \int_0^y x^2 f(x/y)dx - \left(\frac{y}{2}\right)^2$$

$$= \int_0^y x^2 \frac{1}{y}\,dx - \left(\frac{y^2}{2}\right) = \frac{x^3}{3y}\Big|_0^y - \frac{y^2}{4}$$

$$= \frac{y^3}{3y} - \frac{y^2}{4} = \frac{y^2}{12}$$

ตัวอย่าง 2 ให้ X กับ Y มี pdf ร่วม $f(x, y) = 1, -x < y < x, 0 < x < 1$ ศูนย์สำหรับค่าอื่น ๆ จงแสดงว่าบนเซตของความหนาแน่นน่าจะเป็นบวก กราฟของ E(Y/x) เป็นเส้นตรง ขณะที่ของ E(X/y) ไม่เป็นเส้นตรง

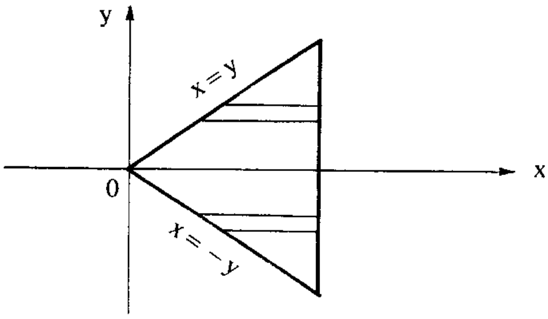
จาก $f(x, y) = 1 \quad , \quad -x < y < x, \; 0 < x < 1$

$= 0$ สำหรับค่าอื่น ๆ

หาก marginal pdf ของ X กับ Y ได้

$$f(x) = \int_{-x}^{x} f(x, y)\, dy = \int_{-x}^{x} 1 dy = y \Big|_{-x}^{x}$$

$$= 2x \qquad\qquad 0 < x < 1$$



$$f(y) = \int_{y}^{1} f(x, y)\, dx = \int_{y}^{1} 1 dx = x \Big|_{y}^{1}$$

$$= 1 - y \qquad 0 < y < 1$$

และ

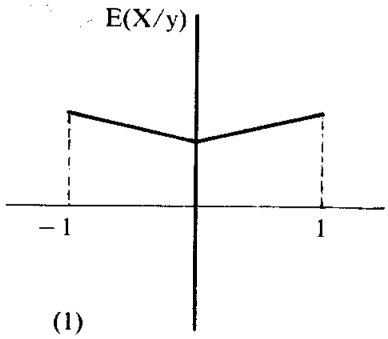
$$f(y) = \int_{-y}^{1} 1 dx = x \Big|_{-y}^{1} = 1 + y \qquad -1 < y < 0$$

pdf แบบมีเงื่อนไข f(y/x) กับ f(x/y) หาได้

$$f(y/x) = \frac{f(x, y)}{f(x)} = \frac{1}{2x}$$

$$f(x/y) = \frac{f(x, y)}{f(y)} = \frac{1}{1 - y}$$

และ



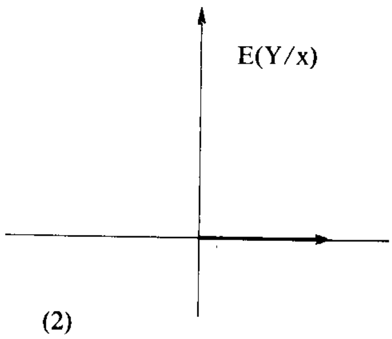
(1)

$$f(x/y) = \frac{1}{1+y}$$

$$E(X/y) = \int_{y}^{1} \frac{x}{1-y}\,dx = \frac{x^2}{2(1-y)}\Big|_{y}^{1} = \frac{1-y^2}{2(1-y)}$$

$$= \frac{1+y}{2},\ y > 0$$

และ



(2)

$$E(X/y) = \int_{-y}^{1} \frac{x}{1+y}\,dx = \frac{x^2}{2(1+y)}\Big|_{-y}^{1} = \frac{1-y^2}{2(1+y)}$$

$$= \frac{1-y}{2},\ y < 0$$

$$E(Y/x) = \int_{-x}^{x} y f(y/x)dy = \int_{-x}^{x} y\,\frac{1}{2x}\,dy$$

$$= \frac{y^2}{4x}\Big|_{-x}^{x} = \frac{0}{4x} = 0$$

กราฟของ E(Y/x) เป็นเส้นตรงอยู่บนแกน X ขณะที่ E(X/y) ไม่เป็นเส้นตรงที่จุด $y = 0$ ดังรูปข้างต้น (รูปที่ 1)

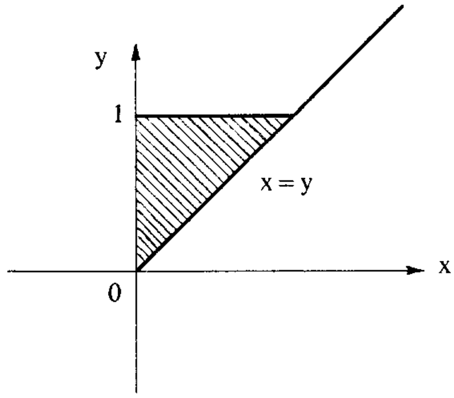
ตัวอย่าง 3 ให้ $f(x, y) = 2, 0 < x < y, 0 < y < 1$ ศูนย์สำหรับค่าอื่น ๆ เป็น pdf ร่วมของ X กับ Y (ก) จงแสดงว่ามัชฌิมแบบมีเงื่อนไข คือ $(1 + x)/2, 0 < x < 1$ กับ $y/2, 0 < y < 1$ ตามลำดับ (ข) จงแสดงว่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ของ X กับ Y คือ $\rho = 1/2$

(ก) จาก

$$f(x, y) = 2, \; 0 < x < y, \; 0 < y < 1$$
$$= 0 \quad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ}$$

หา marginal pdf ของ X ได้

$$f(x) = \int_x^1 f(x, y)dy = \int_x^1 2dy$$



$$= 2y \Big|_x^1 = (2 - 2x)$$

$$E(X) = \int_0^1 x(2 - 2x)dx = \left(x^2 \frac{2x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = 1/3$$

หา marginal pdf ของ Y ได้

$$f(y) = \int_0^y 2dx = 2x \Big|_0^y = 2y$$

$$E(Y) = \int_0^1 y2ydy = \frac{2y^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

หา pdf แบบมีเงื่อนไขของ f(x/y) กับ f(y/x) ได้

$$f(x/y) = \frac{f(x, y)}{f(y)} = \frac{2}{2y} = \frac{1}{y}$$

กับ

$$f(y/x) = \frac{f(x, y)}{f(x)} = \frac{2}{(2 - 2x)} = \frac{1}{1 - x}$$

$$E(Y/x) = \int_x^1 yf(y/x)\,dy = \int_x^1 y \frac{1}{1 - x}\,dy = \frac{y^2}{2(1 - x)} \Big|_x^1$$

$$= \frac{1 - x^2}{2(1 - x)} = \frac{1 + x}{2}$$

$$E(X/y) = \int_0^y x \frac{1}{y}\,dx = \frac{x^2}{2y} \Big|_0^y = \frac{y^2}{2y}$$

$$= \frac{y}{2}$$

(ข) หา V(X), V(Y), E(XY) ได้

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \int_0^1 x^2 2(1 - x)\,dx - \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$= \left(\frac{2x^3}{3} - \frac{2x^4}{4}\right)\Big|_0^1 - \left(\frac{1}{9}\right) = \frac{1}{18}$$

$$V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = \int_0^1 2y^3\,dy - \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$= \frac{y^4}{2} \Big|_0^1 - \frac{4}{9} = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}$$

$$E(XY) = \int_0^1 \int_0^y xy\,2\,dxdy = \int_0^1 x^2y \Big|_0^y dy = \int_0^1 y^3 dy = \frac{y^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{4}$$

$$\rho = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{V(X)\,V(Y)}} = \frac{\frac{1}{4} - (1/3)(2/3)}{\sqrt{(1/18)(1/18)}} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{18}} = \frac{1}{2}$$

ทฤษฎี 1

$$E[E(X/y)] = E(X)$$
$$E[E(Y/x)] = E(Y)$$

พิสูจน์ (กรณีตัวแปรชนิดต่อเนื่องเท่านั้น) โดยนิยาม

$$E[E(X/y)] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x/y)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{f(x, y)}{f(y)}\, dx$$

$$E[E(X/y)] = \int_{-\infty}^{\infty} E(X/y)\, f(y)\, dy$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x \frac{f(x, y)}{f(y)}\, dx \right] f(y)dy$$

ถ้าหากว่าค่าคาดหวังหาค่าได้ทั้งหมด เราจะได้ว่า

$$E[E(X/Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} x \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy \right] dx = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)dx$$
$$= E(X)$$

ในทำนองเดียวกัน $E[E(Y/X)] = E(Y)$ ก็สามารถพิสูจน์ได้ด้วยหลักการอันเดียวกัน ทฤษฎีนี้มีประโยชน์มาก ดังตัวอย่างแสดงต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4. สมมติว่าการส่งสินค้าขึ้นอยู่กับจำนวนชิ้นส่วนที่มาถึงแต่ละวัน ถ้าหากว่า N เป็นจำนวนสินค้าที่จะส่ง การแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรเชิงสุ่ม N กำหนดให้ดังนี้

n :	10	11	12	13	14	15
P(N = n) :	0.05	0.10	0.10	0.20	0.35	0.20

ความน่าจะเป็นที่ชิ้นส่วนหนึ่งส่วนใดเฉพาะที่เสียเท่ากันสำหรับชิ้นส่วนทั้งหมดเป็น 0.10 ถ้าหากว่า X เป็นจำนวนชิ้นส่วนที่เสียที่มาถึงแต่ละวัน จงคำนวณหาค่าคาดหวังของ X โดยกำหนดให้ N เท่ากับ n X มีการแจกแจงแบบทวินาม เนื่องจากว่า N ตัวมันเองเป็นตัวแปรเชิงสุ่ม เราดำเนินการได้ดังต่อไปนี้

เรามี $E(X) = E[E(X/N)]$ อย่างไรก็ตาม $E(X/N) = 0.10N$
ดังนั้น

$$\begin{aligned} E(X) &= E(0.10N) = 0.10E(N) \\ &= 0.10[10(.05) + 11(.10) + 12(.10) + 13(.20) + 14(.35) + 15(.20)] \\ &= 1.33 \end{aligned}$$

ทฤษฎี 2 สมมติว่า X กับ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีความอิสระกันแล้ว

$E(X/Y) = E(X)$ กับ $E(Y/X) = E(Y)$

พิสูจน์ จะละไว้ให้นักศึกษาเป็นแบบฝึกหัด

ตัวอย่าง 5 สมมติว่าเครื่องผลิตกำลังไฟฟ้า (กิโลวัตต์) ของบริษัทหนึ่งระหว่างระยะเวลาหนึ่งโดยเฉพาะเป็นตัวแปรเชิงสุ่ม X ซึ่งเราสมมติให้มีการแจกแจงแบบเดียวกันตลอด [10, 30] ความต้องการกำลังไฟฟ้า (กิโลวัตต์) Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มด้วยและสมมุติให้มีการแจกแจงแบบเดียวกันตลอด [10, 20] (ดังนั้น โดยเฉพาะแล้วเครื่องให้กำลังไฟฟ้ามากกว่าความต้องการไฟฟ้า) นั่นคือ $E(X) = 20$ ขณะ $E(Y) = 15$ สำหรับทุก ๆ กิโลวัตต์ที่ให้กำลังไฟฟ้า บริษัททำกำไร 0.03 บาท ถ้าหากว่าความต้องการไฟฟ้ามากกว่ากำลังการผลิต บริษัทจะต้องเอากำลังการผลิตจากแหล่งอื่นและทำกำไรได้จากกำลังการผลิตนี้ 0.01 บาทต่อกิโลวัตต์ จงหากำไรที่คาดหวังระหว่างระยะเวลาพิจารณาเฉพาะนี้

ให้ T เป็นผลกำไรนี้ เราได้

$$\begin{aligned} T &= 0.03Y \text{ ถ้า } Y < X \\ &= 0.03X + .01(Y - X) \text{ ถ้า } Y > X \end{aligned}$$

คำนวณ $E(T)$ ซึ่งเขียนได้เป็น $E[E(T/X)]$ เราได้

$$E(T/x) = \begin{cases} \int_{10}^{x} .03y \dfrac{1}{10}\, dy + \int_{x}^{20} (.01y + .02x) \dfrac{1}{10}\, dy & \text{ถ้า } 10 < x < 20 \\ \int_{10}^{20} .03y \dfrac{1}{10}\, dy & \text{ถ้า } 20 < x < 30 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{10} \; [0.015x^2 - 1.5 + 2 + .4x - 0.005x^2 - 0.02x^2]; \text{ ถ้า } 10<x<20 \\ \frac{9}{20} \qquad \text{ถ้า } 20 < x < 30 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} .05 + .04x - .001x^2 & \text{ถ้า } 10 < x < 20 \\ .45 \quad \text{ถ้า } 20 < x < 30 \end{cases}$$

เพราะฉะนั้น

$$E[E(T/X)] = \frac{1}{20} \int_{10}^{20} (.05 + .04x - .001x^2)dx + \frac{1}{20} \int_{20}^{30} .45dx$$

$$= 0.43 \quad \text{บาท}$$

ทฤษฎี 3 ความแปรปรวนของ X สามารถประกอบด้วยความแปรปรวนแบบมีเงื่อนไข กับความแปรปรวนของความคาดหวังแบบมีเงื่อนไข

$$V(X) = V(X/Y) + V[E(X/Y)]$$

พิสูจน์ เรามี

$$\begin{aligned} V(X) &= E[X - E(X)]^2 \\ &= E[X - E(X/Y) + E(X/Y) - E(X)]^2 \\ &= E[X - E(X/Y)]^2 + E[E(X/Y) - E(X)]^2 \end{aligned}$$

เทอมของผลคูณจะหายไปเนื่องจากว่า

$$\begin{aligned} & E[X - E(X/Y)][E(X/Y) - E(X)] \\ &= E[XE(X/Y) - XE(X) + E(X)E(X/Y) - [E(X/Y)]^2] \\ &= E[XE(X/Y)] - E[XE(X)] + E[E(X)E(X/Y)] - E[E(X/Y)]^2 \end{aligned}$$

แต่ $E[XE(X/Y)] = E[E(X/Y)]\, E(X/Y) = E[E(X/Y)]^2$

และ $E(XE(X)] = E[E(X/Y)]\, E(X)$

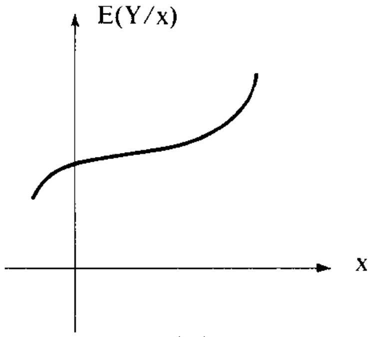
$\therefore$ เทอมของผลคูณ

$$= E[E(X/Y)]^2 - E[E(X/Y)]\,E(X) + E(X)\,.\,E[E(X/Y)] - E[E(X/Y)]^2$$
$$= 0$$

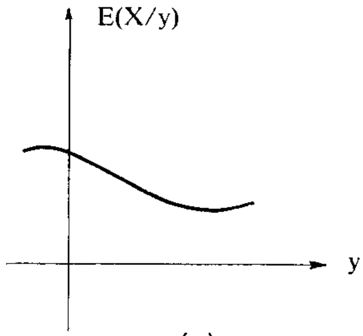
เพราะฉะนั้น $V(X) = V(X/Y) + V[E(X/Y)]$

3.7 การถดถอยของมัชฌิม

เราทราบแล้วว่า $E(X/y)$ เป็นค่าของตัวแปรเชิงสุ่ม $E(X/Y)$ กับเป็นฟังก์ชันของ y กราฟของฟังก์ชัน y นี้เป็นเส้นโค้งถดถอย (ของมัชฌิม) ของ X on Y ในทำนองเดียวกัน กราฟของฟังก์ชันของ X, $E(Y/x)$ เรียกว่า เส้นโค้งถดถอย (ของมัชฌิม) ของ Y on X สำหรับแต่ละค่าของ y คงที่ $E(X/y)$ เป็นค่าคาดหวังของตัวแปรเชิงสุ่ม โดยทั่ว ๆ ไป ค่าคาดหวังนี้จะขึ้นอยู่กับ y และ $E(Y/x)$ จะขึ้นอยู่กับ X



(ก)



(ข)

ตัวอย่าง 1 สมมติว่า (X,Y) มีการแจกแจงแบบเดียวกันตลอดครึ่งวงกลม ดังแสดงในรูป ก แล้ว $f(x, y) = 2/\pi$, $(x, y) \in$ ครึ่งวงกลม

ดังนั้น

$$f(x) = \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2}{\pi}\,dy = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}\ , \quad -1 \leqslant x \leqslant 1$$

$$f(y) = \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{2}{\pi}\,dx = \frac{4}{\pi}\sqrt{1-y^2}\ , \quad 0 \leqslant y \leqslant 1$$

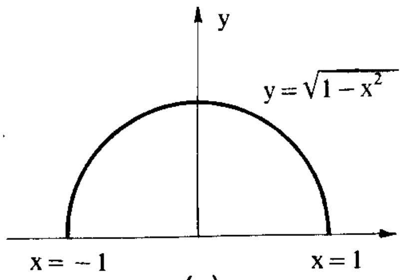
เพราะฉะนั้น

$$f(x/y) = \frac{1}{2\sqrt{1-y^2}}, \quad -\sqrt{1-y^2} \leqslant x \leqslant \sqrt{1-y^2}$$

$$f(y/x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{1-x^2}$$

ดังนั้น

$$E(Y/x) = \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y\, f(y/x)dy$$



(ค)

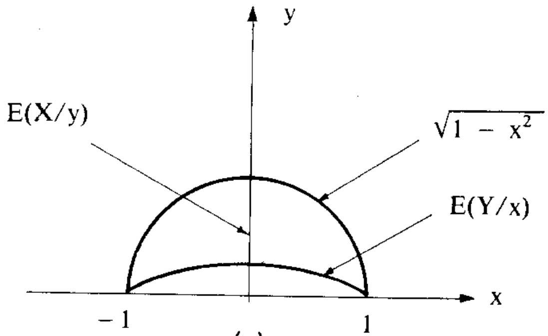
$$= \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dy = \frac{y^2}{2\sqrt{1-x^2}} \Big|_0^{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}$$

ในทำนองเดียวกัน

$$E(X/y) = \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} xf(x/y)dx = \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{x}{2\sqrt{1-y^2}}\, dx$$

$$= \frac{x^2}{4\sqrt{1-y^2}} \Big|_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} = 0$$

นี้อาจเป็นไปได้ว่าเส้นโค้งถดถอยเส้นหนึ่งหรือทั้งสองเส้นเป็นเส้นตรงจริง ๆ ดังรูป ง นั่นคือ $E(Y/x)$ อาจเป็นฟังก์ชันเชิงเส้นของ X และ $E(x|y)$ อาจเป็นฟังก์ชันเชิงเส้นของ Y ในกรณีนี้ เรากล่าวได้ว่า การถดถอยของมัชฌิมของ Y on X เป็นเส้นตรง



(ง)

ตัวอย่าง 2 สมมติว่า (X, Y) มีการแจกแจงแบบเดียวกันทั้งหมดบนสามเหลี่ยมดังรูป จ แล้ว $f(x, y) = 1 \ (x, y) \in T$ การแสดงต่อไปนี้สำหรับ marginal pdf กับ pdf แบบมีเงื่อนไข คำนวณหาได้ดังนี้

$$f(x) = 2x, 0 \leqslant x \leqslant 1 \ ; \quad f(y) = \frac{2 - y}{2}, \ 0 \leqslant y \leqslant 2$$

$$f(x/y) = \frac{2}{2 - y}, \ y/2 \leqslant x \leqslant 1 \ ; \ f(y/x) = \frac{1}{2x}, \ 0 \leqslant y \leqslant 2x$$

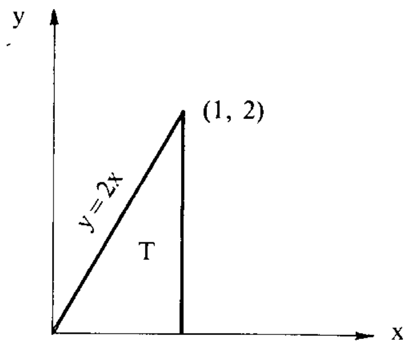
ดังนั้น

$$E(Y/x) = \int_0^{2x} y \ f(y/x)dy = \int_0^{2x} y(1/2x)dy = x$$

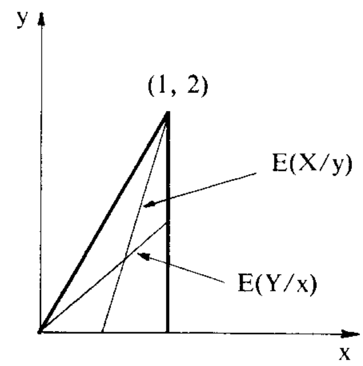
$$E(X/y) = \int_{y/2}^{1} x \ f(x/y)dx = \int_{y/2}^{1} x \ \frac{2}{2 - y} \ dx = \frac{y}{4} + \frac{1}{2}$$

ดังนั้น ทั้งการถดถอย Y on X กับของ X on Y เป็นเส้นตรงดังรูป ฉ

ถ้าหากว่าการถดถอยของมัชฌิมของ Y on X เป็นเส้นต่รง $E(Y/x) = \alpha + \beta x$ แล้ว เราสามารถแสดงสัมประสิทธิ์ α กับ β ในเทอมของพารามิเตอร์ของการแจกแจงร่วมของ (X, Y)



(จ)



(ฉ)

ทฤษฎี 1 ให้ (X, Y) เป็นตัวแปรเชิงสุ่มสองมิติและสมมติว่า $E(X) = \mu_x$, $E(Y) = \mu_y$, $V(X) = \sigma_x^2$ และ $V(Y) = \sigma_y^2$

ให้ ρ เป็นสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ระหว่าง X กับ Y ถ้าหากว่า การถดถอยของ Y on X เป็นเส้นตรง เราได้

$$E(Y/x) = \mu_y + \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \mu_x)$$

ถ้าการถดถอยของ X on Y เป็นเส้นตรง เราได้

$$E(X/y) = \mu_x + \rho \frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \mu_y)$$

พิสูจน์

ถ้าหากว่าการถดถอย Y on X เป็นเส้นตรงแล้ว มัชฌิมแบบมีเงื่อนไขของ Y กำหนดให้ X = x เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นของ x และสมมติให้เป็น $\varphi(x) = a + bx$ ในเมื่อ a กับ b เป็นค่าคงที่ เราจะได้

$$E(Y/x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y\, f(x, y)}{f(x)}\, dy = a + bx$$

เอา f(x) คูณตลอด

$$\int_{-\infty}^{\infty} y\, f(x, y)\, dy = (a + bx)\, f(x) \qquad \text{..........(1)}$$

integrated บน x ทั้งสองข้าง

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y\, f(x, y)dydx = \int_{-\infty}^{\infty} (a + bx)\, f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} y\, f(y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} a\, f(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} bx\, f(x)dx$$

$$E(Y) = a + b\, E(X)$$

หรือ

$$\mu_y = a + b\,\mu_x \qquad \text{..........(2)}$$

ถ้าหากว่าสมการ (1) คูณด้วย x ก่อนแล้ว integrated บน x เราได้

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, f(x, y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} x(a + bx)\, f(x)dx$$

$$E(XY) = aE(X) + bE(X^2)$$

หรือ

$$\rho\sigma_x\sigma_y + \mu_x\mu_y = a\mu_x + b(\sigma_x^2 + \mu_x^2) \qquad \text{..........(3)}$$

ในเมื่อ $\rho\sigma_x\sigma_y$ เป็นความแปรปรวนร่วมของ X กับ Y ค่า a กับ b สองค่าคำนวณหาได้จากสมการ (2) กับ (3) ได้

$$a = \mu_y - \rho\,\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\,\mu_x\,,\ b = \rho\,\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

นั่นคือ

$$\varphi(x) = E(Y/x) = \mu_y + \rho\,\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\,(x - \mu_x)$$

ในทำนองเดียวกัน เราก็สามารถพิสูจน์ได้ว่า

$$\varphi(y) = E(X/y) = \mu_x + \rho\,\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\,(y - \mu_y)$$

เรามาพิจารณาความแปรปรวนของการแจกแจงแบบมีเงื่อนไขภายใต้เงื่อนไขที่มัชฌิมแบบมีเงื่อนไขเป็นเชิงเส้น ความแปรปรวนแบบมีเงื่อนไขของ Y กำหนดได้โดย

$$E\{[Y - E(Y/x)]^2 \mid x\} = \int_{-\infty}^{\infty} [y - \mu_y - \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \mu_x)]^2 f(y/x)dy$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} [(y - \mu_y) - \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \mu_x)]^2 f(x, y)dy}{f(x)} \quad \text{..........(4)}$$

เมื่อตัวแปรเชิงสุ่มเป็นชนิดต่อเนื่อง ความแปรปรวนนี้มีค่าเป็นบวกและเป็นฟังก์ชันของ x อย่างเดียว ถ้าเราคูณ f(x) และ integrated บน x ผลลัพธ์ที่คำนวณได้จะเป็นค่าบวก ผลลัพธ์นี้คือ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [(y - \mu_y) - \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \mu_x)]^2 f(x, y)\, dydx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [(y - \mu_y)^2 - 2\rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (y - \mu_y)(x - \mu_x) + \rho^2 \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} (x - \mu_x)^2]$$

$$f(x, y)\, dydx$$

$$= E[(Y - \mu_y)^2] - 2\rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x} E[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)] + \rho^2 \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} E[(X - \mu_x)^2]$$

$$= \sigma_y^2 - 2\rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \rho\sigma_x\sigma_y + \rho^2 \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} \sigma_x^2$$

$$= \sigma_y^2 - \rho^2 \sigma_y^2 \qquad = \sigma_y^2 (1 - \rho^2) \geqslant 0$$

นั่นคือ ถ้าความแปรปรวนสมการ (4) เขียนได้เป็น k(x) แล้ว $E[k(X)] = \sigma_y^2(1 - \rho^2) \geqslant 0$ เพราะฉะนั้น $\rho^2 \leqslant 1$ หรือ $-1 \leqslant \rho \leqslant 1$ นี้จะละไว้เป็นแบบฝึกหัดที่จะพิสูจน์ว่า $-1 \leqslant \rho \leqslant 1$ ไม่ว่ามัชฌิมแบบมีเงื่อนไขเป็นเชิงเส้นหรือไม่ เป็นเชิงเส้น

สมมติว่าความแปรปรวนสมการ (4) มีค่าบวก แต่ไม่เป็นฟังก์ชันของ x นั่นคือ ความแปรปรวนมีค่าคงที่ $k > 0$ ถ้า k คูณด้วย f(x) และ integrated บน x ผลลัพธ์คือ $k = \sigma_y^2(1 - \rho^2)$ ดังนั้น ความแปรปรวนของแต่ละการแจกแจงแบบมีเงื่อนไขของ Y กำหนด X = x คือ $\sigma_y^2(1 - \rho^2)$ ถ้าหากว่า $\rho = 0$ ความแปรปรวนของแต่ละการแจกแจงแบบมีเงื่อนไขของ Y กำหนด X = x คือ σ_y^2 ความแปรปรวนของ marginal distribution ของ Y นอกจากนั้น ถ้า ρ^2 เข้าใกล้หนึ่ง ความแปรปรวนของแต่ละการแจกแจงแบบมีเงื่อนไขของ Y กำหนด X = x มีค่าน้อยและมีการ

รวมตัวใกล้มัชฌิม $E(Y/x) = \mu_y + \rho(\sigma_y/\sigma_x)(x - \mu_x)$

ตัวอย่าง 3 ให้ตัวแปรเชิงสุ่ม X กับ Y มีมัชฌิมแบบมีเงื่อนไข $E(Y/x) = 4x + 3$ กับ $E(X/y) = \frac{1}{16} y - 3$ ตามสูตรทั่ว ๆ ไปสำหรับมัชฌิมแบบมีเงื่อนไขเชิงเส้น เราจะเห็นว่า $E(Y/x) = \mu_y$ ถ้า $x = \mu_x$ กับ $E(X/y) = \mu_x$ ถ้าหากว่า $y = \mu_y$ เพราะฉะนั้นในกรณีพิเศษนี้เรามี $\mu_y = 4\mu_x + 3$ และ $\mu_x = \frac{1}{16} \mu_y - 3$ เราได้ $\mu_x = -\frac{15}{4}$ และ $\mu_y = -12$ สูตรทั่ว ๆ ไปสำหรับมัชฌิมแบบมีเงื่อนไขเชิงเส้นก็แสดงว่าผลคูณของสัมประสิทธิ์ของ X กับ Y เท่ากับ ρ^2 ในที่นี้ $\rho^2 = 4\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{1}{4}$, $\rho = \frac{1}{2}$ (ไม่ใช่ $-\frac{1}{2}$ และ $\sigma_y^2/\sigma_x^2 = 64$)

เพราะฉะนั้น จากส่องมัชฌิมแบบมีเงื่อนไขเชิงเส้น เราสามารถคำนวณหาค่าของ μ_x, μ_y, ρ และ σ_y/σ_x แต่ไม่ใช่เป็นค่า σ_x กับ σ_y

ข้อสังเกต (ก) จากตัวอย่างข้างต้น แสดงให้เห็นว่า การถดถอยของมัชฌิมหนึ่งอาจเป็นเส้นตรง ขณะการถดถอยของมัชฌิมอื่น ๆ ไม่เป็นเส้นตรง

(ข) ถ้าหากว่าการถดถอยของ X on Y เป็นเส้นตรงและถ้าหากว่า $\rho = 0$ แล้ว เราพบว่า $E(X/y)$ ไม่ขึ้นอยู่กับ y และเครื่องหมายของ ρ เป็นตัวกำหนดเครื่องหมายของความชันของเส้นถดถอย

(ค) ถ้าหากว่าฟังก์ชันการถดถอยทั้งสองเป็นเส้นตรง ตามทฤษฎี 1 แล้ว เส้นถดถอยจะตัดกันที่จุดศูนย์กลางของการแจกแจง (μ_x, μ_y)

ในกรณีเราต้องการฟังก์ชันการถดถอยเป็นเส้นตรงดังตัวอย่าง 5 ของหัวข้อ 3.6 อย่างไรก็ตามเราก็ยังสนใจประมาณเส้นโค้งถดถอยด้วยฟังก์ชันเส้นตรงนี้ทำได้โดยใช้หลักกำลังสองน้อยที่สุด นั่นคือเลือกค่าคงที่ a และ b เพื่อที่จะทำให้ $E[E(Y/X) - (b + aX)]^2$ มีค่าน้อยที่สุด ในทำนองเดียวกันเลือกค่าคงที่ c กับ d เพื่อที่จะทำให้ $E[E(X/Y) - (d + cY)]^2$ มีค่าน้อยที่สุด

เส้น $y = b + ax$ กับ $x = d + cy$ เรียกว่า การประมาณกำลังสองน้อยที่สุดกับเส้นโค้งถดถอย $E(Y/x)$ กับ $E(X/y)$ ที่สัมพันธ์กันตามลำดับ

ตัวอย่างที่น่าสนใจ

1. สมมติว่า X มีการแจกแจงแบบเดียวกันตลอด $(-1, 1)$ จงหา pdf ของตัวแปรเชิงสุ่มต่อไปนี้

(ก) $Y = \text{Sin}(\pi/2)X$ (ข) $Z = \text{Cos}(\pi/2)X$

(ค) $W = |X|$

(ก) $f(x) = \frac{1}{2}, \ -1 < x < 1$

$= 0$ สำหรับค่าอื่น ๆ

$$G(y) = P(Y \leqslant y) = P(\text{Sin}(\pi/2)X \leqslant y)$$

$$= P(\pi/2)X \leqslant \text{Sin}^{-1} y)$$

$$= P(X \leqslant \frac{2}{\pi} \text{Sin}^{-1} y)$$

$$= \int_{-1}^{\frac{2}{\pi}\text{Sin}^{-1} y} \frac{1}{2} dx = \frac{x}{2} \Big|_{-1}^{\frac{2}{\pi}\text{Sin}^{-1} y}$$

$$= \frac{1}{\pi} \text{Sin}^{-1} y + \frac{1}{2}$$

$$g(y) = G'(y) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}; -1 < y < 1$$

$= 0$ สำหรับค่าอื่น ๆ

(ข) $$G(z) = P(Z \leqslant z) = P(\text{Cos}(\pi/2)\, X \leqslant z)$$

$$= P((\pi/2)X \leqslant \text{Cos}^{-1} z)$$

$$= P(X \leqslant \frac{2}{\pi} \text{Cos}^{-1} z)$$

$$= \int_{-1}^{\frac{2}{\pi}\text{Cos}^{-1} z} \frac{1}{2} dx = \frac{x}{2} \Big|_{-1}^{\frac{2}{\pi}\text{Cos}^{-1} z}$$

$$= \frac{1}{\pi} \text{Cos}^{-1} z + \frac{1}{2}$$

$$g(z) = -\frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}, \ 0 < z < 1$$

$= \quad 0$ สำหรับค่าอื่น ๆ

(ค) $G(w) = P(W \leqslant w) = P(|X| \leqslant w)$

$= P(-w \leqslant X \leqslant w)$

$$= \int_{-w}^{w} \frac{1}{2}dx = \frac{x}{2}\Big|_{-w}^{w} = \frac{w}{2} + \frac{w}{2} = w$$

$g(w) = 1, \quad 0 < w < 1$

$= \quad 0$ สำหรับค่าอื่น ๆ

2. สมมติว่า $P(X \leqslant 0.29) = 0.75$ ในเมื่อ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มชนิดต่อเนื่อง พร้อมด้วยบางการแจกแจงกำหนดตลอด (0, 1) ถ้าหากว่า $Y = 1 - X$ จงหาค่า k ในเมื่อ $P(Y \leqslant k) = 0.25$

จาก	$P(X \leqslant 0.29)$	=	0.75
	$P(1 - Y \leqslant 0.29)$	=	0.75
	$P(-Y \leqslant -1 + .29)$	=	0.75
	$P(Y \geqslant 1 - 0.29)$	=	0.75
	$P(Y \geqslant .71)$	=	0.75
แต่	$P(Y \leqslant k)$	=	0.25
และ	$P(Y \leqslant k) + P(Y > .71)$	=	1

$\therefore$ จุด k กับจุด 0.71 เป็นจุดเดียวกัน

$\therefore \quad K = .71$

3. ให้ $f(x_1, x_2) = 4x_1x_2, 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1$ ศูนย์สำหรับค่าอื่น ๆ เป็น pdf ของ X_1 กับ X_2 จงหา $P(0 < X_1 < 1/2, 1/4 < X_2 < 1)$, $P(X_1 = X_2)$, $P(X_1 < X_2)$ และ $P(X_1 \leqslant X_2)$

$$P(0 < X_1 < 1/2, 1/4 < X_2 < 1) = \int_{1/4}^{1}\int_{0}^{1/2} 4x_1x_2dx_1dx_2$$

$$= \int_{1/4}^{1} \frac{4x_1^2x_2}{2}\Big|_0^{1/2} dx_2$$

$$= \int_{1/4}^{1} \frac{x_2}{2}\,dx_2 = \frac{x_2^2}{4}\Big|_{1/4}^{1}$$

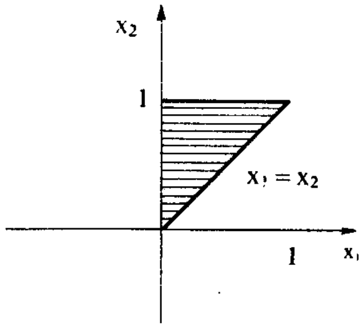
$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{64} = \frac{15}{64}$$

$$P(X_1 = X_2) = \int_0^1 \int_{x_2}^{x_2} 4x_1x_2dx_1dx_2$$

$$= \int_0^1 \frac{4x_1^2 x_2}{2} \Big|_{x_2}^{x_2} dx_2 = \int_0^1 o\ dx_2$$

$$= 0$$

$$P(X_1 < X_2) = \int_0^1 \int_0^{x_2} 4x_1x_2dx_1dx_2$$



$$= \int_0^1 2x_1^2x_2 \Big|_0^{x_2} dx_2$$

$$= \int_0^1 2x_2^3\,dx_2 = \frac{x_2^4}{2} \Big|_0^1$$

$$= 1/2$$

ในทำนองเดียวกัน $P(X_1 \leqslant X_2)$ **ก็จะมีค่า** 1/2 **เหมือน** $P(X_1 < X_2)$

4. **ให้** $f(x_1, x_2, x_3) = \exp\left[-(x_1 + x_2 + x_3)\right], 0 < x_1 < \infty, 0 < x_2 < \infty, 0 < x_3 < \infty$, **ศูนย์สำหรับค่าอื่น ๆ เป็น** pdf **ของ** X_1, X_2 **และ** X_3 **คำนวณ** $P(X_1 < X_2 < X_3)$ **กับ** $P(X_1 = X_2 < X_3)$ **สัญลักษณ์** exp(w) **หมายความว่า** e^w

จาก $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \ldots. \leqslant x_n \leqslant 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ldots\ldots\ldots. \int_0^{x_3} \int_0^{x_2} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1dx_2\ldots dx_n$$

$$\therefore\ P(X_1 < X_2 < X_3) = \int_0^{\infty} \int_0^{x_3} \int_0^{x_2} f(x_1, x_2, x_3)\, dx_1dx_2dx_3$$

$$= \int_0^{\infty} \int_0^{x_3} \int_0^{x_2} e^{-(x_1+x_2+x_3)}\, dx_1 dx_2 dx_3$$

$$= \int_0^{\infty} \int_0^{x_3} e^{-(x_2+x_3)} (1 - e^{-x_2})\, dx_2 dx_3$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-x_3} (1/2 - e^{-x_3} + e^{-2x_3})\, dx_3$$

$$= (-\frac{1}{2} e^{-x_3} + \frac{1}{2} e^{-2x_3} - e^{-3x_3}) \Big|_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 1/3$$

$$P(X_1 = X_2 < X_3) = \int_0^{\infty} \int_0^{x_3} \int_{x_2}^{x_2} e^{-(x_1+x_2+x_3)}\, dx_1 dx_2 dx_3$$

$$= \int_0^{\infty} \int_0^{x_3} (e^{-(x_2+x_2+x_3)} - e^{-(x_2+x_2+x_3)})\, dx_2 dx_3$$

$$= 0$$

5. ให้ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มโดยที่ $E[(X - b)^2]$ หาค่าได้สำหรับ b ค่าจริงทั้งหมด จงแสดงว่า $E[(X - b)^2]$ มีค่าน้อยที่สุดเมื่อ $b = E(X) = \mu$

$$\begin{aligned} E(X - b)^2 &= E[(X - \mu) + (\mu - b)]^2 \\ &= E(X - \mu)^2 + 2(\mu - b)\, E(X - \mu) + (\mu - b)^2 \\ &= V(X) + 0 + (\mu - b)^2 \\ &= V(X) \end{aligned}$$

เนื่องจากว่า V(X) ไม่ได้ขึ้นอยู่กับ b ดังนั้น $E(X - b)^2$ มีค่าน้อยที่สุด พร้อมด้วย $b = \mu$ นอกจากนั้น $b = \mu$ เป็นจุดเดียวเท่านั้นที่ซึ่งจะทำให้ $E(X - b)^2$ มีค่าน้อยที่สุดเนื่องจากว่า

$E(X - b)^2 > E(X - \mu)^2$ สำหรับ $b \neq \mu$

6. ตัวแปรเชิงสุ่มมี pdf $f(x) = ke^{-|x|}$, $|x| < \infty$ จงหา E(X), V(X) และส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ยรอบมัชฌิมเลขคณิต

เนื่องจากว่า f(x) เป็น pdf เราได้

$$\int_{-\infty}^{\infty} k e^{-|x|}\, dx = 1 \text{ หรือ } k\left[\int_{-\infty}^{0} e^{x}\, dx + \int_0^{\infty} e^{-x}\, dx\right] = 1$$

$$= k\left[e^{x}\Big|_{-\infty}^{0} + (-e^{-x}\Big|_{0}^{\infty})\right] = 1$$

$$= k[1 + 1] = 1$$

$$k = \frac{1}{2}$$

$$E(X) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x\, e^{-|x|}\,dx = \frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{0} -xe^{x}dx + \int_{0}^{\infty} xe^{-x}\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\int_{0}^{\infty} xe^{-x}\,dx + \int_{0}^{\infty} xe^{-x}\,dx\right]$$

$$= 0$$

$$V(X) = E(X^2) \quad \because \quad E(X) = 0$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-|x|}\,dx = \frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{0} x^2\, e^{x}dx + \int_{0}^{\infty} x^2 e^{-x}\,dx\right.$$

$$= \frac{1}{2}[2! + 2!] = 2$$

ส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย

$$E[|X - 0|] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}|x|\, e^{-|x|}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{0} -x\, e^{+x}\,dx + \int_{0}^{\infty} xe^{-x}\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{0}^{\infty} x\, e^{-x}\,dx + \int_{0}^{\infty} x\, e^{-x}\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}[1 + 1] = 1$$

7. การแจกแจงแบบเรขาคณิตมี pdf $f(x_i) = \dfrac{1}{2^i}$, $i = 1, 2, \ldots$

พิสูจน์ว่า Chebychev's inequality ให้

$P(|X - 2| > 2) < 1/2$

ขณะที่ความน่าจะเป็นจริง ๆ คือ 1/16

คำนวณหา

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i f(x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \frac{1}{2}i$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2^2} + 3 \frac{1}{2^3} + \ldots$$

$$= 2$$

$$E(X^2) = \Sigma i^2 \frac{1}{2^i} = 1^2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{1}{2^2} + \ldots$$

$$= \frac{2^{-1}(1 + 2^{-1})}{(1 + 2^{-1})^3} = 6$$

$$\therefore \quad V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 6 - 4 = 2$$

$$\sigma = \sqrt{2}$$

$$P(|X - 2| > 2) = 1 - P(|X - 2| \leqslant 2)$$

$$= 1 - P(0 \leqslant X \leqslant 4)$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4}\right)$$

$$= 1 - \frac{15}{16}$$

$$= \frac{1}{16}$$

จาก $P(|X - \mu| > k\sigma) < \frac{1}{k^2}$

แต่ $\mu = 2, \ \sigma = \sqrt{2}$ หา k

เนื่องจากว่า $k\sigma = 2$

$$\therefore \quad k = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\therefore \quad P(|X - 2| > 2) < \frac{1}{(\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2}$$

8. หยิบไพ่ห้าใบจากไพ่สำรับหนึ่งแบบหยิบแล้วไม่ใส่คืน ให้ X_1, X_2 และ X_3 เป็นจำนวนโพดำ, โพแดงและจำนวนข้าวหลามตัดตามลำดับที่ปรากฏระหว่างไพ่ห้าใบ (ก) จงหา pdf ร่วมของ X_1, X_2 และ X_3 (ข) จงหา marginal pdf ของ X_1, X_2 และ X_3 (ค) จงหา pdf ร่วมแบบมีเงื่อนไขของ X_2 และ X_3 กำหนดให้ $X_1 = 3$

Sample space $S = \binom{52}{5}$

เหตุการณ์ของการหยิบไพ่ได้โพดำ $= \binom{13}{x_1}$

เหตุการณ์ของการหยิบไพ่ได้โพแดง $= \binom{13}{x_2}$

เหตุการณ์ของการหยิบไพ่ได้ข้าวหลามตัด $= \binom{13}{x_3}$

pdf ร่วมของ X_1, X_2 และ X_3 คือ

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{\binom{13}{x_1}\binom{13}{x_2}\binom{13}{x_3}\binom{13}{5-x_1-x_2-x_3}}{\binom{52}{5}}$$

(ข) $$f(x_1) = \sum_{x_2=0}^{5-x_1}\sum_{x_3=0}^{5-x_1-x_2}\frac{\binom{13}{x_1}\binom{13}{x_2}\binom{13}{x_3}\binom{13}{5-x_1-x_2-x_3}}{\binom{52}{5}}$$

$$= \frac{\binom{13}{x_1}\binom{39}{5-x_1}}{\binom{52}{5}}$$

$$f(x_2) = \sum_{x_1=0}^{5-x_2}\sum_{x_3=0}^{5-x_1-x_2}\frac{\binom{13}{x_1}\binom{13}{x_2}\binom{13}{x_3}\binom{13}{5-x_1-x_2-x_3}}{\binom{52}{5}}$$

$$= \frac{\binom{13}{x_2}\binom{39}{5-x_2}}{\binom{52}{5}}$$

$$f(x_3) = \sum_{x_1=0}^{5-x_3} \sum_{x_2=0}^{5-x_1-x_3} \frac{\binom{13}{x_1}\binom{13}{x_2}\binom{13}{x_3}\binom{13}{5-x_1-x_2-x_3}}{\binom{52}{5}}$$

$$= \frac{\binom{13}{x_3}\binom{39}{5-x_3}}{\binom{52}{5}}$$

(ค) $$f(x_2x_3|x_1=3) = \frac{\dfrac{\binom{13}{3}\binom{13}{x_2}\binom{13}{x_3}\binom{13}{5-x-x_2-x_3}}{\binom{52}{5}}}{\dfrac{\binom{13}{3}\binom{39}{2}}{\binom{52}{5}}}$$

$$= \frac{\binom{13}{x_2}\binom{13}{x_3}\binom{13}{2-x_2-x_3}}{\binom{39}{2}}$$

9. ให้ X_1 กับ X_2 มี pdf ร่วม $f(x_1, x_2)$ อธิบายได้ดังนี้

(x_-, x_2)	(0, 0)	(0, 1)	(1, 0)	(1, 1)	(2, 0)	(2, 1)
$f(x_1, x_2)$	$\frac{1}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{4}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{6}{18}$	$\frac{1}{18}$

และ $f(x_1, x_2)$ เท่ากับศูนย์สำหรับค่าอื่น ๆ จงหาสอง marginal pdf และสองมัชฌิมเลขคณิตแบบมีเงื่อนไข

marginal pdf ของ $f(x_1) = \sum_{x_2=0}^{1} f(x_1, x_2), x_1 = 0, 1, 2$

x_1	0	1	2
$f(x_1)$	$\frac{4}{18}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{7}{18}$

marginal pdf $f(x_2) = \sum_{x_1=0}^{2} f(x_1, x_2), x_2 = 0, 1$

x_2	0	1
$f(x_2)$	$\frac{11}{18}$	$\frac{7}{18}$

pdf แบบมีเงื่อนไข

$$f(x_1|x_2) = \frac{f(x_1, x_2)}{f(x_2)}$$

$$E(X_1/x_2) = \sum_{x_1=0}^{2} \frac{f(x_1, x_2)}{f(x_2)} x_1$$

$$E(X_1/x_2=0) = \frac{18}{11}\left[(0)\left(\frac{1}{18}\right) + (1)\left(\frac{4}{18}\right) + (2)\left(\frac{6}{18}\right)\right]$$

$$= \frac{16}{11}$$

$$E(X_1/x_2=1) = \frac{18}{7}\left[(0)\left(\frac{3}{18}\right) + (1)\left(\frac{3}{18}\right) + (2)\left(\frac{1}{18}\right)\right]$$

$$= \frac{18}{7}\left(0 + \frac{3}{18} + \frac{2}{18}\right)$$

$$= \frac{5}{7}$$

$$E(X_2/x_1) = \sum_{x_2=0}^{1} x_2 \frac{f(x_1, x_2)}{f(x_1)}$$

$$E(X_2/x_1=0) = \frac{18}{4}\left[(0)\left(\frac{1}{18}\right) + (1)\left(\frac{3}{18}\right)\right]$$

$$= \frac{3}{4}$$

$$E(X_2/x_1 = 1) = \frac{18}{7}\left[(0)\left(\frac{4}{18}\right) + (1)\left(\frac{3}{18}\right)\right]$$

$$= \frac{3}{7}$$

$$E(X_2/x_1 = 2) = \frac{18}{7}\left[(0)\left(\frac{6}{18}\right) + (1)\left(\frac{1}{18}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{7}$$

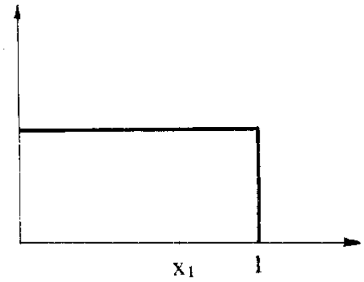
10. ให้เลือกจุด x_1 โดยสุ่มจากช่วง (0, 1) ถ้าหากว่าค่าสังเกต x_1 เป็น x_1 และเลือกจุด x_2 โดยสุ่มจากช่วง $(0, x_1)$ ถ้าหากว่าเราสมมติตัวแบบความน่าจะเป็นเป็นแบบเดียวกันสำหรับสองการทดลองแล้ว (ก) จงหา marginal pdf $f(x_1)$ และ pdf แบบมีเงื่อนไข $f(x_2/x_1)$ (ข) คำนวณหา-$P(X_1 + X_2 \geqslant 1)$ และจงหามัชฌิมแบบมีเงื่อนไข

ถ้าหากว่ามันเป็นตัวแบบความน่าจะเป็นแบบเดียวกันหมด

(ก)

$$f(x_1) = \frac{1}{1-0} = 1,\ 0 < x_1 < 1$$

$$= 0 \quad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ}$$



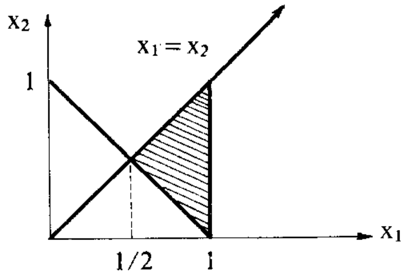
$$f(x_2/x_1) = \frac{f(x_1, x_2)}{f(x_1)}$$

$$= \frac{f(x_2)}{f(x_1)} = f(x_2)$$

$$= \frac{1}{x_1 - 0} = \frac{1}{x_1},\ 0 < x_2 < x_1 < 1$$

(ข)

$$P(X_1 + X_2 \geqslant 1) = \int_{1/2}^{1}\int_{1-x_1}^{x_1} \frac{1}{x_1}\, dx_2 dx_1$$



$$= \int_{1/2}^{1} \frac{1}{x_1}(2x_1 - 1)dx_1$$

$$= \int_{1/2}^{1} (2 - \frac{1}{x_1})\, dx_1$$

$$= (2x_1 - \ln x_1)\Big|_{1/2}^{1}$$

$$= (2x_1 - \ln x_1)\Big|_{1/2}^{1}$$

$$= 2 - (1 - \ln 1/2)$$

$$= 1 - \ln 2$$

(ค) $$f(x_1/x_2) = \frac{f(x_1x_2)}{f(x_2)} = \frac{f(x_1)\, f(x_2/x_1)}{\int_{x_1=x_2}^{1} f(x_1)f(x_2/x_1)dx_1}$$

$$= \frac{\frac{1}{x_1}}{\int_{x_2}^{1} \frac{1}{x_1}\, dx_1} = -\frac{1}{x_1 \ln x_2}$$

$$E(X_1/x_2) = \int_{x_2}^{1} x_1\, f(x_1/x_2)\, dx_1$$

$$= \int_{x_2}^{1} -\frac{x_1}{x_1 \ln x_2}\, dx_1 = -\int_{x_2}^{1} \frac{1}{\ln x_2}\, dx_1$$

$$= -\frac{x_1}{\ln x_2}\Big|_{x_2}^{1}$$

$$= \frac{(x_2 - 1)}{\ln x_2}$$