บทที่ 2
ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขและความน่าจะเป็นแบบอิสระ

2.1 ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข

ในบางการทดลองเชิงสุ่ม เราสนใจผลลัพธ์เหล่านี้ที่มีสมาชิกของเซทย่อย A_1 ของ sample space S เท่านั้น นั่นคือ sample space เป็นเซทย่อย A_1 อย่างแท้จริง เราต้องกำหนด probability set function กับ A_1 เป็นเสมือน sample space ใหม่

ให้ probability set function P (A) ถูกกำหนดบน sample space S และให้ A_1 เป็นเซทย่อยของ S ดังเช่น $P(A) > 0$ เราพิจารณาผลลัพธ์เหล่านั้นของการทดลองเชิงสุ่มที่เป็นสมาชิกของ A เราเอา A_1 เป็น sample space ให้ A_2 เป็นเซทย่อยอื่น ๆ ของ S และจะมีความสัมพันธ์อย่างไรต่อ Sample space ใหม่ A_1 เราต้องการที่จะกำหนดความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A_2 ความน่าจะเป็นนี้เรียกว่าความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขของเหตุการณ์ A_1 ที่สัมพันธ์กับสมมติฐานของเหตุการณ์ A_2 แสดงได้โดยสัญลักษณ์ $P(A_2 \mid A_1)$ และ

$P(A_2 \mid A_1) = P(A_1 \cap A_2 \mid A_1)$ ถ้าหากว่า $A_2 = A_1$ แล้ว $P(A_1 \mid A_1) = 1$

นิยาม

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \quad P(A) > 0$$

หรือ

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0$$

สังเกตว่า นิยามข้างต้นไม่ได้เป็นทฤษฎี (เราไม่ได้พิสูจน์) เป็นเพียงสัญลักษณ์ของความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขและการนิยามตามความหมายสัญลักษณ์นี้ แต่นิยามนี้สอดคล้องกับคุณสมบัติต่อไปนี้

(ก) $0 \leq P(B/A) \leq 1$

(ข) $P(S/A) = 1$ หรือ $P(A/A) = 1$

(ค) $P(B_1 \cup B_2|A) = P(B_1/A) + P(B_2/A)$ ถ้าหากว่า $B_1 \cap B_2 = 0$

(J) $P(B_1 \cup B_2 \cup \ldots /A) = P(B_1/A) + P(B_2/A) + \ldots$

ถ้าหากว่า $B_i \cap B_j = 0$ สำหรับ $i \neq j$

จากข้อ (ข) ถ้า $A = S$, $P(B/S) = P(B \cap S)/P(S) = P(B)$

ตัวอย่างที่ 1 หยิบไพ่ห้าใบแบบหยิบแล้วไม่ใส่คืนโดยสุ่มจากไพ่สำรับหนึ่ง 52 ใบ ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขของไพ่ทั้งห้าใบเป็นโพดำ (A_2) กำหนดให้ว่าไพ่ทั้งห้าใบนั้นมีไพ่โพดำอย่างน้อยสี่ใบ (A_1), $P(A_2|A_1)$ เนื่องจากว่า $A_1 \cap A_2 = A_2$

$$P(A_2|A_1) = \frac{P(A_2)}{P(A_1)}$$

$$= \frac{\binom{13}{5}/\binom{52}{5}}{[\binom{13}{4}\binom{39}{1} + \binom{13}{5}]/\binom{52}{5}}$$

ถ้าเราให้ X เท่ากับจำนวนของโพดำในไพ่ห้าใบที่หยิบขึ้นมา ตัวแบบความน่าจะเป็นสำหรับ X กำหนดได้โดย hypergeometric pdf

$$f(x) = \frac{\binom{13}{x}\binom{39}{5-x}}{\binom{52}{5}}, \quad x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

$$= 0 \quad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ}$$

เพราะฉะนั้น เราสามารถเขียน $P(A_2/A_1) = P(X=5)/[P(X=4, 5)] = f(5)/[f(4) + f(5)]$

จากนิยามของความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข เราได้

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)\, P(A_2/A_1)$$

ความสัมพันธ์นี้เรียกว่า กฎของผลคูณสำหรับความน่าจะเป็น

ตัวอย่างที่ 2 กล่องใบหนึ่งมีลูกบอลล์อยู่แปดลูก สามลูกเป็นสีแดง อีกห้าลูกเป็นสีน้ำเงิน เลือกลูกบอลล์สองลูกโดยสุ่มแบบหยิบแล้วไม่ใส่คืน (หยิบครั้งละหนึ่งลูก) จงคำนวณหาความน่าจะเป็นที่ผลการหยิบลูกแรกเป็นสีแดง (A_1) และผลการหยิบลูกที่สองเป็นสีน้ำเงิน (A_2)
ดังนั้น

$$P(A_1) = 3/8 \quad \text{และ} \quad P(A_2/A_1) = 5/7$$

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)\,P(A_2/A_1)$$

$$= (3/8)\,(5/7) = \frac{15}{56}$$

ตัวอย่างที่ 3 หยิบไพ่หกใบจากไพ่สำรับหนึ่ง 52 ใบ โดยสุ่มแบบหยิบแล้วไม่ใส่คืน จงคำนวณหาความน่าจะเป็นที่ไพ่โพดำใบที่สามปรากฏจากการหยิบครั้งที่หก

ให้ A_1 เป็นเหตุการณ์ที่หยิบได้สองโพดำในการหยิบห้าครั้งแรก

A_2 เป็นเหตุการณ์ที่หยิบได้โพดำในการหยิบครั้งที่หก

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่เราประสงค์จะคำนวณคือ $P(A_1 \cup A_2)$ ในที่นี้เราได้

$$P(A_1) = \frac{\binom{13}{2}\binom{39}{3}}{\binom{52}{5}} \quad \text{และ} \quad P(A_2/A_1) = \frac{11}{47}$$

$\therefore$ ความน่าจะเป็น $P(A_1 \cap A_2)$ ที่ต้องการคือผลคูณของเลขสองจำนวนเหล่านี้ นั่นคือ

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)\,P(A_2/A_1) = \left[\frac{\binom{13}{2}\binom{39}{3}}{\binom{52}{5}}\right]\left(\frac{11}{47}\right)$$

โดยทั่ว ๆ ไป ถ้า $x + 3$ เป็นจำนวนของการหยิบจำเป็นที่จะให้โพดำสามตัว ตัวแบบความน่าจะเป็นสำหรับ X กำหนดได้โดย pdf

$$f(x) = \left[\frac{\binom{13}{2}\binom{39}{x}}{\binom{52}{2+x}}\right]\left(\frac{11}{50-x}\right), \; x = 0,1,2,\ldots,39$$

$$= 0 \qquad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ}$$

แล้วความน่าจะเป็นเฉพาะที่เราจะได้คำนวณคือ $P(A_1 \cap A_2) = P(X = 3) = f(x)$ กฎของการคูณสามารถขยายไปถึงสามเหตุการณ์หรือมากกว่า ในกรณีสามเหตุการณ์

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P[(A_1 \cap A_2) \cap A_3]$$
$$= P(A_1 \cap A_2)\, P(A_3/A_1 \cap A_2)$$

แต่ $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)\, P(A_2/A_1)$

ดังนั้น $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)\, P(A_2/A_1)\, P(A_3/A_1 \cap A_2)$

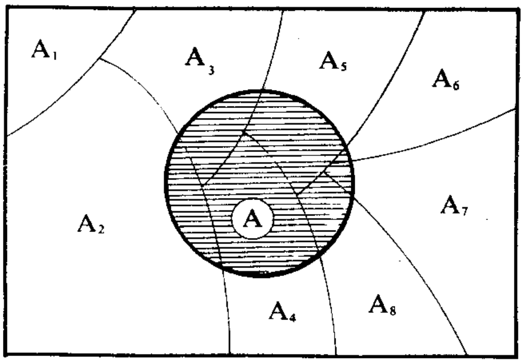
จากแนวทางการศึกษาความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขข้างต้น เพื่อที่จะคำนวณความน่าจะเป็นของสองเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นพร้อม ๆ กัน เราสามารถใช้แนวทางการศึกษานี้เพื่อคำนวณความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A เดี่ยว ๆ เราต้องการนิยามต่อไปนี้

นิยาม ให้เหตุการณ์ $A_1, A_2, \ldots, A_k$ เป็นเหตุการณ์ย่อยของ sample space S ถ้าหากว่า

(ก) $A_i \cap A_j = \varnothing$ สำหรับ $i \neq j$ ทั้งหมด

(ข) $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = S$

(ค) $P(A_i) > 0$ สำหรับ i ทั้งหมด



ให้ A เป็นเหตุการณ์หนึ่งของ S และให้ $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k$ เป็นเหตุการณ์ย่อย ๆ ของ S ดังแสดงตามแผนภาพเวนน์ข้างต้น ในกรณีนี้ $k = 8$ เท่านั้น เราอาจเขียน

$$A = A \cap A_1 \cup A \cap A_2 \cup, \ldots, \cup A \cap A_k$$

เซทบางเซทของ $A \cap A_j$ อาจเป็นเซทว่างเปล่า แต่ก็ไม่ทำให้ขาดความถูกต้องไป สิ่งที่สำคัญคือเหตุการณ์ทั้งหมด $A \cap A_1, \ldots, A \cap A_k$ เป็น pairwise mutually exclusive ด้วยเหตุนี้เราจึงใช้คุณสมบัติของการรวมสำหรับเหตุการณ์ mutually exclusive และเขียนได้

$$P(A) = P(A \cap A_1) + P(A \cap A_2) + \ldots + P(A \cap A_k)$$

อย่างไรก็ตาม เทอม $P(A \cap A_j)$ อาจเขียนได้เป็น $P(A/A_j)\,P(A_j)$ ดังนั้นความน่าจะเป็นของ A คือ

$$P(A) = P(A/A_1)\,P(A_1) + P(A/A_2)\,P(A_2) + \ldots + P(A_k)\,P(A/A_k)$$

ตัวอย่างที่ 4 สินค้าชนิดหนึ่งผลิตจากสามโรงงาน 1, 2 และ 3 เป็นที่ทราบว่าโรงงานที่ 1 ผลิตได้เป็นสองเท่าของโรงงานที่ 2 และโรงงานที่ 2 และ 3 ผลิตได้จำนวนเท่ากัน (ในระยะเวลาเท่ากัน) และเป็นที่ทราบว่าสินค้าที่ผลิตจากโรงงานที่ 1 กับ 2 เสีย 2 เปอร์เซ็นต์ ขณะที่โรงงานที่ 3 ผลิตเสีย 3 เปอร์เซ็นต์ สินค้าทั้งหมดที่ผลิตได้เก็บรวมกันในที่แห่งเดียว และสุ่มเลือกสินค้าชิ้นหนึ่ง จงหาความน่าจะเป็นที่สินค้าชิ้นนี้เป็นสินค้าเสีย

ให้

A = { จำนวนสินค้าเสีย}, A_1 = { จำนวนสินค้ามาจากโรงงานที่ 1}

A_2 = { จำนวนสินค้ามาจากโรงงานที่ 2} A_3 = { จำนวนสินค้ามาจากโรงงานที่ 3}

เราต้องการคำนวณ $P(A)$ และใช้ผลลัพธ์จากข้างต้น เราเขียนได้

$$P(A) = P(A/A_1)\,P(A_1) + P(A/A_2)\,P(A_2) + P(A/A_3)\,P(A_3)$$

ในเมื่อ $P(A_1) = \frac{1}{2}$, $P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{4}$, $P(A/A_1) = P(A/A_2) = 0.02$

$P(A/A_3) = 0.04$

แทนค่าเหล่านี้ลงในสูตรข้างต้นเราได้

$$\begin{aligned} P(A) &= (0.02)\left(\tfrac{1}{2}\right) + (0.02)\left(\tfrac{1}{4}\right) + (.04)\left(\tfrac{1}{4}\right) \\ &= (0.01) + (.005) + (.01) \\ &= 0.025 \end{aligned}$$

2.2 ทฤษฎีของเบย์

เราใช้ตัวอย่าง 4 ข้างต้นมาพิจารณา สมมุติว่าเลือกสินค้ามาชิ้นหนึ่งจากที่เก็บสินค้าและพบว่าเป็นสินค้าเสีย เราต้องการหา $P(A_1/A)$ เราสามารถคำนวณความน่าจะเป็นนี้ได้จากการพิจารณาต่อไปนี้ให้ $A_1, A_2, \ldots, A_k$ เป็นเซทย่อยของ Sample space S เดียวกันและให้ A เป็นเหตุการณ์ที่สัมพันธ์กับ S ใช้นิยามความน่าจะเป็น แบบมีเงื่อนไข เราเขียนได้

$$P(A_i/A) = \frac{P(A \cap A_i)}{P(A)} \quad ; \; i = 1, 2, \ldots, k$$

ในเมื่อ

$$P(A) = P(A/A_1)\,P(A_1) + \ldots + P(A/A_k)\,P(A_k)$$

$$= \sum_{j=1}^{k} P(A/A_j)\,P(A_j)$$

ดังนั้น

$$P(A_i/A) = \frac{P(A \cap A_i) = P(A/A_i)\,P(A_i)}{\sum_{j=1}^{k} P(A/A_j)\,P(A_j)} \quad , \; i = 1, 2, \ldots, k$$

ผลลัพธ์นี้เป็นทฤษฎีของเบย์ เป็นสูตรสำหรับความน่าจะเป็นของสาเหตุ เนื่องจากว่าค่าของ A_i เป็นเซทย่อยของ Sample space และมีหนึ่งเหตุการณ์ของเหตุการณ์ A_i เกิดขึ้นเท่านั้น โดยกำหนดว่าเหตุการณ์ A ได้เกิดขึ้นแล้ว เพื่อที่จะใช้กับทฤษฎีนี้เราต้องรู้ค่าของ $P(A_i)$

เรากลับไปยังคำถามสูตรของเราข้างต้นเราได้

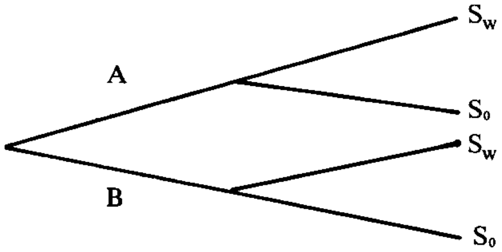
$$P(A_1/A) = \frac{P(A/A_1)\,P(A_1)}{\sum_{j=1}^{3} P(A/A_j)\,P(A_j)} = \frac{(.02)\,(1/2)}{(.02)\,(1/2) + (0.2)\,(1/4) + (.04)\,(1/4)}$$

$$= \quad 40$$

ทฤษฎีของเบย์ให้ข้อเสนอแนะแนวความคิด tree diagram แก่เราเพื่อเป็นเครื่องมือสำหรับวิเคราะห์ปัญหาเฉพาะ

สมมติว่า มีภาชนะจำนวนมากบรรจุลูกกวาดสองชนิด A กับ B ชนิด A มีอยู่ 60 เปอร์เซ็นต์ขณะชนิด B มี 40 เปอร์เซ็นต์ ลูกกวาดชนิด A ยังแบ่งออกได้เป็นชนิดหวาน 70 เปอร์เซ็นต์ เปรี้ยว 30 เปอร์เซ็นต์ ส่วนชนิด B มีผลกลับกันกับชนิด A

ท่านจะต้องเจอกับปัญหาการตัดสินใจต่อไปนี้โดยกำหนด ภาชนะใบหนึ่งที่ไม่ทราบชนิดของลูกกวาดแก่ท่าน แต่อนุญาตให้ท่านสุ่มตัวอย่างหนึ่งของลูกกวาดและจากข่าวสารนี้ ท่านคิดตัดสินโดยการเดาว่าท่านเสนอชนิด A หรือ B tree diagram ต่อไปนี้จะช่วยให้เราวิเคราะห์ปัญหาได้



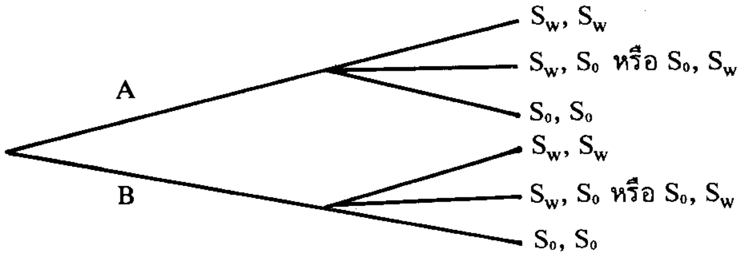
สมมุติว่าเราต้องการทราบ $P(A/S_w)$, $P(A/S_0)$, $P(B/S_w)$ และ $P(B/S_0)$ โดยที่เราหยิบลูกกวาดชนิดหวานลูกหนึ่ง เราพยายามที่จะทำการตัดสินใจอย่างไร ให้เราเปรียบเทียบได้ $P(A/S_w)$ กับ $P(B/S_w)$ ใช้ทฤษฎีของเบย์เราได้

$$P(A/S_w) = \frac{P(S_w/A)\,P(A)}{P(S_w/A)\,P(A) + P(S_w/B)\,P(B)}$$

$$= \frac{(.7)\,(.6)}{(.7)\,(.6) + (.3)\,(.4)} = \frac{7}{9}$$

ใช้หลักการคำนวณแบบเดียวกันเราได้ $P(B/S_w) = 2/9$ จากการคำนวณแสดงว่าเรามีความสัมพันธ์กับภาชนะที่บรรจุชนิด A มากกว่าชนิด B $2\frac{1}{2}$ เท่า ดังนั้นเราควรตัดสินใจว่าเราควรใช้ภาชนะ A

ถ้าหากว่าเขาอนุญาตให้เราเลือกลูกกวาดสองลูกก่อนการตัดสินใจว่าเป็นชนิด A หรือชนิด B ในกรณีนี้ tree diagram ควรจะเป็น



2.3 Marginal and Conditional Distributions

ให้ $f(x_1, x_2)$ เป็น pdf ของสองตัวแปรเชิงสุ่ม X_1 กับ X_2 จากนี้ไปเมื่อไรที่เกี่ยวข้องกับตัวแปรเชิงสุ่มมากกว่าหนึ่งตัวเราเรียก pdf หรือฟังก์ชันการแจกแจงว่า pdf ร่วม ด้วยเหตุนี้ $f(x_1, x_2)$ เป็น pdf ร่วมของตัวแปรเชิงสุ่ม X_1 กับ X_2 พิจารณาเหตุการณ์ $a < X_1 < b$, $a<b$ เหตุการณ์นี้สามารถเกิดขึ้นก็ต่อเมื่อเหตุการณ์ $a < X_1 < b, -\infty < X_2 < \infty$ เกิดขึ้น นั่นคือสองเหตุการณ์ equivalent กันแต่ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์นิยามได้เป็น

$$P(a < X_1 < b, -\infty < X_2 < \infty) = \int_a^b \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)\, dx_2\, dx_1$$

สำหรับกรณีต่อเนื่องและโดย

$$P(a < X_1 < b, -\infty < X_2 < \infty) = \sum_{a<x_1<b} \sum_{x_2} f(x_1, x_2)$$

สำหรับกรณีไม่ต่อเนื่อง แต่ละ

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)\, dx_2 \quad \text{กับ} \quad \sum_{x_2} f(x_1, x_2)$$

เป็นฟังก์ชันของ x_1 เดี่ยว ๆ อย่างเช่น $f(x_1)$ ดังนั้นสำหรับทุก ๆ $a < b$ เรามี

$$P(a < X_1 < b) = \int_a^b f(x_1)\, dx_1 \qquad \text{กรณีต่อเนื่อง}$$

$$= \sum_{a<x_1<b} f(x_1) \qquad \text{กรณีไม่ต่อเนื่อง}$$

$f(x_1)$ เป็น pdf ของ X_1 เดี่ยว ๆ และคำนวณได้โดยการบวกหรือ integrating pdf $f(x_1, x_2)$ ร่วมของ x_2 ทั้งหมดสำหรับ x_1 เป็นตัวคงที่ $f(x_1)$ เรียกว่า marginal pdf ของ X_1 ในลักษณะเดียวกัน

$$f(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)\, dx_1 \qquad \text{กรณีต่อเนื่อง}$$

$$= \sum_{x_1} f(x_1, x_2) \qquad \text{กรณีไม่ต่อเนื่อง}$$

เรียกว่า marginal pdf ของ X_2

ตัวอย่างที่ 1 ให้ pdf ของ X_1 กับ X_2 เป็น

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1 + x_2}{21}, \quad x_1 = 1, 2, 3, x_2 = 1, 2$$
$$= 0 \quad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ}$$

แล้ว สำหรับ $P(X_1 = 3) = f(3, 1) + f(3, 2) = 3/7$

และ $P(X_2 = 2) = f(1, 2) + f(2, 2) + f(3, 2) = \frac{4}{7}$

โดยทั่วไป marginal pdf ของ X_1 คือ

$$f(x_1) = \sum_{x_2=1}^{2} \frac{x_1 + x_2}{21} = \frac{x_1 + 1}{21} + \frac{x_1 + 2}{21} = \frac{2x_1 + 3}{21}, \quad x_1 = 1, 2, 3$$
$$= 0 \quad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ}$$

และ marginal pdf ของ X_2 คือ

$$f(x_2) = \sum_{x_1=1}^{3} \frac{x_1 + x_2}{21} = \frac{1 + x_2}{21} + \frac{2 + x_2}{21} + \frac{3 + x_2}{21} = \frac{6 + 3x_2}{21}, \quad x_2 = 1, 2$$
$$= 0 \quad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นข้างต้นอาจคำนวณได้เหมือน

$P(X_1 = 3) = f(3) = 3/7$ และ $P(X_2 = 2) = f(2) = 4/7$

เรามาพิจารณาถึง pdf แบบมีเงื่อนไข ให้ X_1 กับ X_2 เป็นตัวแปรเชิงสุ่มของชนิดไม่ต่อเนื่องซึ่งมี pdf ร่วม $f(x_1, x_2)$ นั่นคือมีค่ามากกว่าศูนย์บน S และศูนย์สำหรับค่าอื่น ๆ ให้ $f(x_1)$ กับ $f(x_2)$ เป็น marginal pdf ของ X_1 กับ X_2 ตามลำดับ ให้ A_1 เป็นเซท $A_1 = \{(x_1, x_2) ; x_1 = x_1', -\infty < x_2 < \infty\}$ ในเมื่อ x_1' เป็น $P(A_1) = P(X_1 = x_1') = f(x_1) > 0$ และให้ A_2 เป็นเซท $A_2 = \{(x_1, x_2) ; -\infty < x_1 < \infty, x_2 = x_2'\}$ แล้วจากนิยามความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขของเหตุการณ์ A_2 กำหนดเหตุการณ์ A_1 คือ

$$P(A_2/A_1) = \frac{P(A \cap A_2)}{P(A_1)} = \frac{P(X_1 = x_1', X_2 = x_2')}{P(X_1 = x_1')}$$
$$= \frac{f(x_1', x_2')}{f(x_1')}$$

นั่นคือ ถ้า (x_1, x_2) เป็นจุดใดจุดหนึ่งที่ซึ่ง $f(x_1) > 0$, ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขที่ $X_2 = x_2$

กำหนดว่า $X_1 = x_1$ คือ $f(x_1, x_2)/f(x_1)$ และ $f(x_1) > 0$ ฟังก์ชันของ x_2 นี้สอดคล้องเงื่อนไขของการเป็น pdf ชนิดไม่ต่อเนื่องของตัวแปรเชิงสุ่ม X_2 เพราะว่า $f(x_1, x_2)/f(x_1)$ มากกว่าศูนย์และ

$$\sum_{x_2} \frac{f(x_1, x_2)}{f(x_1)} = \frac{1}{f(x_1)} \sum_{x_2} f(x_1, x_2) = \frac{f(x_1)}{f(x_1)} = 1$$

เรานิยามสัญลักษณ์ $f(x_2/x_1)$ ได้โดย

$$f(x_2/x_1) = \frac{f(x_1, x_2)}{f(x_1)}, \; f(x_1) > 0$$

และเรียก $f(x_2/x_1)$ ว่า pdf แบบมีเงื่อนไขของตัวแปรเชิงสุ่ม X_2 ชนิดไม่ต่อเนื่องกำหนดให้ตัวแปรเชิงสุ่ม X_1 ชนิดไม่ต่อเนื่องมีค่าเท่ากับ x_1 ในลักษณะเช่นเดียวกันเรานิยามสัญลักษณ์ $f(x_1/x_2)$ ได้โดย

$$f(x_1/x_2) = \frac{f(x_1, x_2)}{f(x_2)}, \; f(x_2) > 0$$

และเราเรียก $f(x_1/x_2)$ ว่า pdf แบบมีเงื่อนไขของตัวแปรเชิงสุ่ม X_1 ชนิดไม่ต่อเนื่องกำหนดให้ตัวแปรเชิงสุ่ม X_2 ชนิดไม่ต่อเนื่องมีค่าเท่ากับ x_2

ในกรณี X_1 กับ X_2 เป็นตัวแปรเชิงสุ่มชนิดต่อเนื่องซึ่งมี pdf ร่วม $f(x_1, x_2)$ และ marginal pdf $f(x_1)$ กับ $f(x_2)$ ตามลำดับ เราก็สามารถนิยาม pdf แบบมีเงื่อนไข $f(x_2/x_1)$ โดย $f(x_1) > 0$ ได้โดย

$$f(x_2/x_1) = \frac{f(x_1, x_2)}{f(x_1)}$$

จะเห็นได้ว่า $f(x_2/x_1)$ มีค่าเป็นบวกและที่

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x_2/x_1)\, dx_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x_1, x_2)}{f(x_1)}\, dx_2 \\
&= \frac{1}{f(x_1)} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)\, dx_2 \\
&= \frac{1}{f(x_1)} f(x_1) = 1
\end{aligned}$$

นั่นคือ $f(x_2/x_1)$ มีคุณสมบัติเป็น pdf ของตัวแปรเชิงสุ่มชนิดต่อเนื่องเรียกว่า pdf แบบมีเงื่อนไขของตัวแปรเชิงสุ่มชนิดต่อเนื่อง X_2 กำหนดให้ตัวแปรเชิงสุ่ม X_1 ชนิดต่อเนื่องมีค่า x_1 เมื่อไร $f(x_2) > 0$, pdf แบบมีเงื่อนไขของตัวแปรเชิงสุ่ม X_1 กำหนดให้ตัวแปรเชิงสุ่ม X_2 ชนิดต่อเนื่องมีค่า x_2 นิยามได้โดย

$$f(x_1/x_2) = \frac{f(x_1, x_2)}{f(x_2)}, \quad f(x_2) > 0$$

เนื่องจากว่าแต่ละ $f(x_2/x_1)$ กับ $f(x_1/x_2)$ เป็น pdf ของหนึ่งตัวแปรเชิงสุ่มและมีคุณสมบัติเป็น pdf ดังนั้น เราจึงสามารถคำนวณความน่าจะเป็นและค่าคาดหวังได้ ถ้าหากว่าตัวแปรเชิงสุ่มเป็นชนิดต่อเนื่อง ความน่าจะเป็น

$$P(a < X_2 < b \mid X_1 = x_1) = \int_a^b f(x_2/x_1)\, dx_2$$

เรียกว่า "ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขที่ $a < X_2 < b$ กำหนดว่า $X_1 = x_1$" ในทำนองเดียวกัน ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขที่ $c < X_1 < d$ กำหนดว่า $X_2 = x_2$ เป็น

$$P(c < X_1 < d \mid X_2 = x_2) = \int_c^d f(x_1 \mid x_2)\, dx_1$$

ตัวอย่างที่ 2 ให้ X_1 กับ X_2 มี pdf ร่วม

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= 2 \quad 0 < x_1 < x_2 < 1 \\ &= 0 \quad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ} \end{aligned}$$

แล้ว marginal pdf คือ

$$\begin{aligned} f(x_1) &= \int_{x_1}^{1} 2\, dx_2 = 2x_2 \Big|_{x_1}^{1} \\ &= 2(1 - x_1) \quad 0 < x_1 < 1 \\ &= 0 \quad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{และ} \quad f(x_2) &= \int_0^{x_2} 2dx_1 = 2x_2 \quad 0 < x_2 < 1 \\ &= 0 \quad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ} \end{aligned}$$

pdf แบบมีเงื่อนไขของ X_1 กำหนด $X_2 = x_2$ คือ

$$f(x_1/x_2) = \frac{f(x_1, x_2)}{f(x_2)} = \frac{2}{2x_2}$$

$$= \frac{1}{x_2}, 0 < x_1 < x_2, 0 < x_2 < 1$$

$$= 0 \quad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ}$$

ในกรณีที่เราต้องการคำนวณ $P(0 < X_1 < 1/2 \mid x_2 = 3/4)$

และ $P(0 < X_1 < 1/2)$

เราได้

$$P(0 < X_1 < 1/2 \mid X_2 = 3/4) = \int_0^{1/2} f(x_1 \mid x_2 = \frac{3}{4})\, dx_1$$

$$= \int_0^{1/2} \frac{1}{3/4}\, dx_1$$

$$= \int_0^{1/2} \frac{4}{3}\, dx_1 = \frac{4x_1}{3} \Big|_0^{1/2}$$

$$= \frac{2}{3}$$

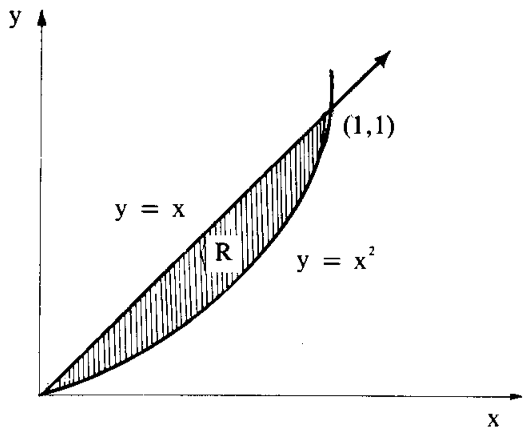
$$P(0 < X_1 < \frac{1}{2}) = \int_0^{1/2} f(x_1)\, dx_1 = \int_0^{1/2} 2(1 - x_1)\, dx_1$$

$$= -(1 - x_1)^2 \Big|_0^{1/2} = -(1 - \frac{1}{2})^2 + (1 - 0)^2$$

$$= \frac{3}{4}$$

ตัวอย่างที่ 3 สมมุติว่าตัวแปรเชิงสุ่ม (X,Y) มีการแจกแจงตลอดพื้นที่ R ดังรูป ดังนั้น

$$f(x,y) = \frac{1}{\text{พื้นที่ } (R)}, (x,y) \in R$$



เราจะต้องหาพื้นที่ R ได้

$$R = \int_0^1 (x - x^2)\,dx$$

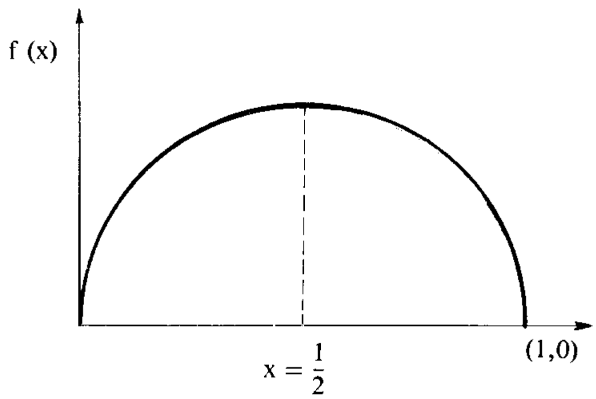
$$= \left(\frac{X^2}{2} - \frac{X^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{6}$$

∴ pdf กำหนดได้โดย

$$f(x,y) = \frac{1}{1/6} = 6 \qquad (x,y) \in R$$

$$= 0 \qquad (x,y) \notin R$$



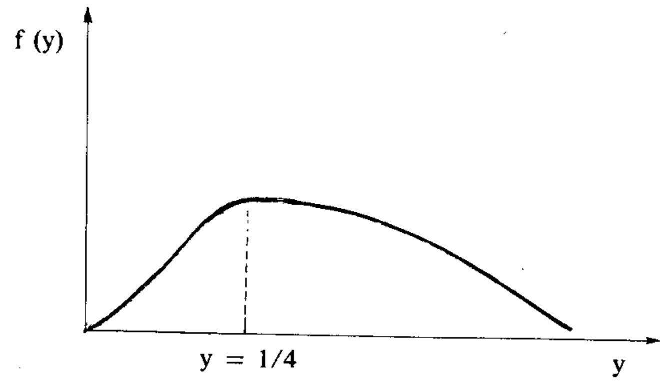
จากสมการนี้เราต้องการหา marginal pdf ของ X กับ Y

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \int_{x^2}^{x} 6dy$$

$$= 6y \Big|_{x^2}^{x} = 6(x - x^2) \qquad 0 \le x \le 1$$

$$f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx = \int_{y}^{\sqrt{y}} 6dx$$

$$= 6(\sqrt{y} - y), \quad 0 \le y \le 1$$



ตัวอย่างที่ 4 ให้ตัวแปรเชิงสุ่มชนิดต่อเนื่อง (X,Y) มี pdf ร่วมคือ

$$f(x,y) = x^2 + \frac{xy}{3} \qquad 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2$$

$$= 0 \qquad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ}$$

(ก) จงแสดงว่า f (x,y) เป็น pdf

(ข) จงหา $P(X + Y \ge 1)$

(ค) จงหา pdf ของ X กับของ Y

(ง) จงหา pdf f (x/y) กับของ f (y/x)

(ก) $$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^2\int_0^1 \left(x^2 + \frac{xy}{3}\right) dx\,dy$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2y}{6}\right)\Big|_0^1 dy$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{1}{3} + \frac{y}{6}\right) dy$$

$$= \frac{y}{3} + \frac{y^2}{12} \Big|_0^2 = \frac{2}{3} + \frac{4}{12}$$

$$= 1$$

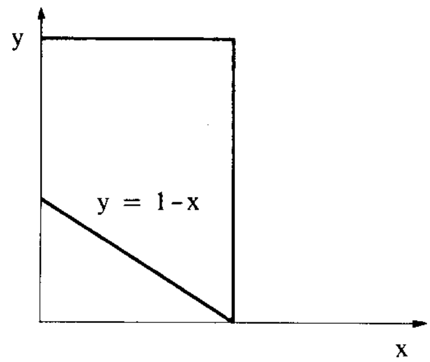
(ข) ให้ $B = \{X + Y \geq 1\}$ ดูรูป เราจะคำนวณ P(B) ได้จาก $1 - P(\overline{B})$ ในเมื่อ $\overline{B} = \{X + Y < 1\}$ ดังนั้น

$$P(B) = 1 - \int_0^1 \int_0^{1-x} \left(x^2 + \frac{xy}{3}\right) dy\, dx$$

$$= 1 - \int_0^1 \left[x^2(1-x) + \frac{x(1-x)^2}{6} \right] dx$$

$$= 1 - \frac{7}{72}$$

$$= \frac{65}{72}$$



(ค) $f(x) = \int_0^2 \left(x^2 + \frac{xy}{3}\right) dy = 2x^2 + \frac{2}{3}x$

$f(y) = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{xy}{3}\right) dx = \frac{y}{6} + \frac{1}{3}$

(ง) $f(x/y) = \frac{f(x, y)}{f(y)} = \frac{x^2 + xy/3}{1/3 + y/6}$

$= \frac{6x^2 + 2xy}{2 + y} \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$

$f(y/x) = \frac{f(x, y)}{f(x)} = \frac{3x^2 + xy}{6x^2 + 2x} = \frac{3x + y}{6x + 2} \quad 0 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq 1$

เพื่อต้องการที่จะตรวจสอบว่า f(x/y) กับ f(y/x) เป็น pdf หรือไม่

$$\int_0^1 f(x/y)\,dx = \int_0^1 \frac{6x^2 + 2xy}{2 + y}\,dx = \frac{1}{2+y}\left(\frac{6x^3}{3} + \frac{2x^2y}{2}\right)\Big|_0^1$$

$$= \frac{2+y}{2+y} = 1 \quad \text{สำหรับ } y \text{ ทั้งหมด}$$

$$\int_0^2 f(y/x)\,dy = \int_0^2 \frac{3x + y}{6x + 2}\,dy = \frac{1}{6x+2}\left(3xy + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^2$$

$$= \frac{6x+2}{6x+2} = 1$$

ในกรณีของ marginal และ pdf แบบมีเงื่อนไขของ n ตัวแปรเชิงสุ่ม นิยามทั้งหมดข้างต้นสามารถทำเป็นรูปทั่ว ๆ ไปโดยตรงของ n ตัวแปรในลักษณะต่อไปนี้ ให้ตัวแปรเชิงสุ่ม $X_1, X_2, \ldots, X_n$ มี pdf $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ถ้าหากว่าตัวแปรเชิงสุ่มเป็นชนิดต่อเนื่องแล้ว จากหลักการของสองตัวแปร ถ้า $a < b$ แล้ว

$$P(a < X_1 < b) = \int_a^b f(x_1)\,dx_1$$

ในเมื่อกำหนด $f(x_1)$ ได้จากการ integral (n-1) ครั้ง

$$f(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots\ldots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_2 \ldots dx_n$$

เพราะฉะนั้น $f(x_1)$ เป็น pdf ของหนึ่งตัวแปรเชิงสุ่ม X_1 และเป็น marginal pdf ของ X_1 marginal pdf $f(x_2), \ldots, f(x_n)$ ของ $X_2, \ldots, X_n$ ตามลำดับก็ได้มาจากการ integral (n-1) ครั้งของ pdf ร่วมที่คล้ายคลึงกัน

เราทราบแล้วว่า แต่ละ marginal pdf เป็น pdf ของหนึ่งตัวแปรเชิงสุ่ม เมื่อต้องการที่จะขยายเทอมนี้กับ pdf ร่วม ให้ $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ เป็น pdf ร่วมของตัวแปรเชิงสุ่ม $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เราต้องการกลุ่มใดกลุ่มหนึ่งของ $k < n$ ตัวแปรเชิงสุ่มเหล่านี้และคำนวณหา pdf ร่วม pdf ร่วมนี้เรียกว่า marginal pdf ของกลุ่ม k ตัวแปรเฉพาะนี้ สมมุติว่า $n=6$, $k=3$ และเราเลือกกลุ่ม X_2, X_4, X_5 แล้ว marginal pdf ของ X_2, X_4, X_5 คือ pdf ร่วมของกลุ่มเฉพาะนี้ อย่างเช่น

$$f(x_2, x_4, x_5) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)\, dx_1\, dx_3\, dx_6$$

เราจะขยายนิยาม pdf แบบมีเงื่อนไข ถ้า $f(x_1) > 0$ สัญลักษณ์ $f(x_2, \ldots, x_n/x_1)$ นิยามได้โดย

$$f(x_2, x_3, \ldots, x_n | x_1) = \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{f(x_1)}$$

และเรียก $f(x_2, x_3, \ldots, x_n | x_1)$ ว่า pdf แบบมีเงื่อนไขร่วมของ $X_2, X_3, \ldots, X_n$ กำหนดให้ $X_1 = x_1$ pdf แบบมีเงื่อนไขร่วมของ $(n-1)$ ตัวแปรเชิงสุ่มใด ๆ อย่างเช่น $X_1, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1} \ldots, X_n$ กำหนดให้ $X_i = x_i$ นิยามได้เป็น pdf ร่วมของ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ หารด้วย marginal pdf $f(x_i)$ โดยให้ $f(x_i) > 0$ โดยทั่ว ๆ ไป pdf แบบมีเงื่อนไขร่วมของ $n-k$ ตัวแปรเชิงสุ่มโดยกำหนดค่าของ k ตัวแปรที่เหลือ นิยามได้เป็น pdf ร่วม n ตัวแปรเชิงสุ่มหารด้วย marginal pdf ของกลุ่ม k ตัวแปรเฉพาะ โดยให้ pdf ของ k ตัวแปรมีค่ามากกว่าศูนย์

2.4 เหตุการณ์ที่มีความอิสระกัน

ให้ X_1 กับ X_2 เป็นตัวแปรเชิงสุ่มของชนิดไม่ต่อเนื่องหรือต่อเนื่องมี pdf ร่วม $f(x_1, x_2)$ และ marginal pdf เป็น $f(x_1)$ กับ $f(x_2)$ ตามลำดับ ตามนิยามของ pdf แบบมีเงื่อนไข $f(x_2|x_1)$ เราอาจเขียน pdf ร่วม $f(x_1, x_2)$ เป็น

$$f(x_1, x_2) = f(x_2 | x_1)\, f(x_1)$$

สมมุติว่า $f(x_2|x_1)$ ไม่ขึ้นอยู่กับ x_1 แล้ว marginal pdf ของ X_2 คือ (ตัวแปรเชิงสุ่มชนิดต่อเนื่อง)

$$\begin{aligned} f(x_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x_2|x_1)\, f(x_1)\, dx_1 \\ &= f(x_2|x_1) \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1)\, dx_1 \\ &= f(x_2|x_1) \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $f(x_2) = f(x_2|x_1)$ และ $f(x_1, x_2) = f(x_1)\, f(x_2)$ เมื่อ $f(x_2|x_1)$ ไม่ขึ้นอยู่กับ x_1 นั่นคือ ถ้าหากว่าการแจกแจงแบบมีเงื่อนไขของ X_2 กำหนดให้ $X_1 = x_1$ มีความอิสระกันตามเงื่อนไขเกี่ยวกับ x_1 แล้ว $f(x_1, x_2) = f(x_1)\, f(x_2)$ ตามนิยามต่อไปนี้

นิยาม 1 ให้ตัวแปรเชิงสุ่ม X_1 กับ X_2 มี pdf ร่วม $f(x_1, x_2)$ และ marginal pdf $f(x_1)$ กับ $f(x_2)$ ตามลำดับแล้ว ตัวแปรเชิงสุ่ม X_1 กับ X_2 จะมีความอิสระกันก็ต่อเมื่อ

$$f(x_1, x_2) = f(x_1)\, f(x_2)$$

ตัวอย่างที่ 1 ให้ pdf ร่วมของ X_1 กับ X_2 เป็น

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= x_1 + x_2, \quad 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1 \\ &= 0 \qquad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ} \end{aligned}$$

ต้องการแสดงว่า X_1 กับ X_2 ไม่มีความอิสระกัน marginal pdf คือ

$$\begin{aligned} f(x_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)\, dx_2 = \int_0^1 (x_1 + x_2)\, dx_2 \\ &= x_1 + \frac{1}{2} \qquad 0 < x_1 < 1 \\ &= 0 \qquad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ} \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} f(x_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)\, dx_1 = \int_0^1 (x_1 + x_2)\, dx_1 \\ &= \frac{1}{2} + x_2 \qquad 0 < x_2 < 1 \\ &= 0 \qquad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ} \end{aligned}$$

เนื่องจากว่า $f(x_1, x_2) \not\equiv f(x_1)\, f(x_2)$ ตัวแปรเชิงสุ่ม X_1 กับ X_2 ไม่มีความอิสระกัน

ทฤษฎีต่อไปนี้เป็นที่ยืนยันปราศจากการคำนวณ pdf ว่าตัวแปรเชิงสุ่ม X_1 กับ X_2 มีความอิสระกัน

ทฤษฎี 1 ให้ตัวแปรเชิงสุ่ม X_1 กับ X_2 มี pdf ร่วม $f(x_1, x_2)$ แล้ว X_1 กับ X_2 มีความอิสระกันก็ต่อเมื่อ $f(x_1, x_2)$ สามารถเขียนได้เป็นผลคูณของฟังก์ชัน X_1 ที่มีค่ามากกว่าศูนย์ กับฟังก์ชัน X_2 ที่มีค่ามากกว่าศูนย์ นั่นคือ $f(x_1, x_2) = f(x_1)\, f(x_2)$

ในเมื่อ $f(x_1) > 0, x_1 \in S_1$ ศูนย์สำหรับค่าอื่น ๆ และ $f(x_2) > 0, x_2 \in S_2$ ศูนย์สำหรับค่าอื่นๆ

พิสูจน์ ถ้าหากว่า X_1 กับ X_2 มีความอิสระกันแล้ว $f(x_1, x_2) \equiv f(x_1)\, f(x_2)$ ในเมื่อ $f(x_1)$ กับ $f(x_2)$ เป็น marginal pdf ของ X_1 กับ X_2 ตามลำดับ ดังนั้นเงื่อนไข $f(x_1, x_2) \equiv f(x_1)\, f(x_2)$ ก็บรรลุ

ผล

ถ้าหากว่า $f(x_1, x_2) \equiv f(x_1) f(x_2)$ สำหรับตัวแปรเชิงสุ่มชนิดต่อเนื่องแล้วเรามี

$$g(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1) f(x_2)\, dx_2 = f(x_1) \int_{-\infty}^{\infty} f(x_2)\, dx_2 = c_1 f(x_1)$$

และ
$$h(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1) f(x_2)\, dx_1 = f(x_2) \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1)\, dx_1 = c_2 f(x_2)$$

ในเมื่อ c_1 กับ c_2 เป็นค่าคงที่ไม่เป็นฟังก์ชันของ x_1 หรือ x_2 นอกจากนั้น $c_1c_2 = 1$ เพราะว่า

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1) f(x_2)\, dx_1\, dx_2 = \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1)\, dx_1\right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x_2)\, dx_2\right]$$
$$= c_1 c_2$$

ผลลัพธ์เหล่านี้หมายความว่า

$$f(x_1, x_2) \equiv f(x_1) f(x_2) \equiv c_1 f(x_1) c_2 f(x_2) \equiv g(x_1) h(x_2)$$

เพราะฉะนั้น X_1 กับ X_2 มีความอิสระกัน

ถ้าอ้างถึงตัวอย่าง 1 เราอาจจะเห็นว่า pdf ร่วม

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \quad 0 < x_1 < 1,\ 0 < x_2 < 1$$
$$= 0 \qquad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ}$$

ไม่สามารถเขียนเป็นผลคูณของฟังก์ชัน x_1 มากกว่าศูนย์กับฟังก์ชัน x_2 มากกว่าศูนย์ เพราะฉะนั้น X_1 กับ X_2 ไม่มีความอิสระกัน

ตัวอย่างที่ 2 ให้ pdf ของตัวแปรเชิงสุ่ม X_1 กับ X_2 เป็น $f(x_1, x_2) = 8x_1x_2 \ \ 0 < x_1 < x_2 < 1$ ศูนย์สำหรับค่าอื่น ๆ ค่า $8x_1x_2$ อาจให้ข้อเสนอแนะบางอย่างที่ X_1 กับ X_2 มีความอิสระกัน อย่างไรก็ตาม ถ้าเราพิจารณา space $S = \{(x_1, x_2) ; 0 < x_1 < x_2 < 1\}$

เราเห็นว่าไม่เป็น product space โดยทั่วไป X_1 กับ X_2 ต้องมีความอิสระ ถ้า space ของความหนาแน่นน่าจะเป็นของ X_1 กับ X_2 มากกว่าศูนย์ถูกจำกัดขอบเขตโดยเส้นโค้งที่ในแนวตั้งหรือแนวนอน

ทฤษฎีต่อไปนี้ที่สะดวกในการคำนวณความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ซึ่งเกี่ยวกับตัวแปรที่มีความอิสระกัน

ทฤษฎี 2 ถ้าหากว่า X_1 กับ X_2 เป็นตัวแปรเชิงสุ่มอิสระกันพร้อมด้วย marginal pdf $f(x_1)$ กับ

$f(x_2)$ ตามลำดับแล้ว

$$P(a < X_1 < b, c < X_2 < d) = P(a < X_1 < b)\, P(c < X_2 < d)$$

สำหรับทุก ๆ $a < b$ และ $c < d$ ในเมื่อ a, b, c และ d เป็นค่าคงที่

พิสูจน์ จากความอิสระของ X_1 กับ X_2 pdf ร่วมของ X_1 กับ X_2 คือ $f(x_1)\, f(x_2)$ เพราะฉะนั้นในกรณีต่อเนื่อง

$$\begin{aligned} P(a < X_1 < b, c < X_2 < d) &= \int_a^b \int_c^d f(x_1)\, f(x_2)\, dx_2\, dx_1 \\ &= \left[\int_a^b f(x_1)\, dx_1\right] \left[\int_a^d f(x_2)\, dx_2\right] \\ &= P(a < X_1 < b)\, P(c < X_2 < d) \end{aligned}$$

ในกรณีไม่ต่อเนื่อง

$$\begin{aligned} P(a < X_1 < b, c < X_2 < d) &= \sum_{a<x_1<b} \sum_{c<x_2<d} f(x_1)\, f(x_2) \\ &= \left[\sum_{a<x_1<b} f(x_1)\right] \left[\sum_{c<x_2<d} f(x_2)\right] \\ &= P(a < X_1 < b)\, P(c < X_2 < d) \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 3 ในตัวอย่าง 1 X_1 กับ X_2 คำนวณได้ว่าไม่มีความอิสระกัน โดยทั่ว ๆ ไป

$$P(a < X_1 < b, c < X_2 < d) \neq P(a < X_1 < b)\, P(c < X_2 < d)$$

$$\begin{aligned} P(0 < X_1 < 1/2, 0 < X_2 < 1/2) &= \int_0^{1/2} \int_0^{1/2} (x_1 + x_2)\, dx_1\, dx_2 \\ &= \int_0^{1/2} \left(\frac{x^2}{2} + x_1 x_2\right) \Big|_0^{1/2} dx_2 \\ &= \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{8} + \frac{x_2}{2}\right) dx_2 = \left(\frac{x_2}{8} + \frac{x_2^2}{4}\right) \Big|_0^{1/2} \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

ขณะที่

$$\begin{aligned} P(0 < X_1 < 1/2) &= \int_0^{1/2} \left(x_1 + \frac{1}{2}\right) dx_1 = \left(\frac{x_1^2}{2} + \frac{x_1}{2}\right) \Big|_0^{1/2} \\ &= \frac{3}{8} \end{aligned}$$

และ

$$P(0 < X_2 < 1/2) = \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{2} + x_2\right) dx_2 = \left(\frac{x_2}{2} + \frac{x_2^2}{2}\right) \Big|_0^{1/2}$$

$$= \frac{3}{8}$$

$$\therefore \quad P(a < X_1 < b, c < X_2 < d) \neq P(a < X_1 < b)\, P(c < X_2 < d)$$

ตัวอย่างที่ 4 ให้ (X, Y) เป็นตัวแปรเชิงสุ่มมี pdf ร่วม

$$f(x, y) = k(1 + x + y)^{-n}, \quad x > 0, y > 0, n > 2$$
$$= 0 \qquad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ}$$

(ก) หาค่าคงที่ k

(ข) จงหา marginal pdf กับ pdf แบบมีเงื่อนไข

(ค) X กับ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีความอิสระกันหรือไม่

(ง) คำนวณ $P(Y \leq 3)$ กับ $P(X + Y \geq 1)$

(ก) เนื่องจากว่า $\int_0^\infty \int_0^\infty k(1 + x + y)^{-n}\, dx\, dy = 1$

เราได้ $k \int_0^\infty \left[\frac{(1 + x + y)^{-n+1}}{-n + 1}\right]\Big|_0^\infty dy = 1$

$$\frac{-k}{1 - n} \int_0^\infty (1 + y)^{-n+1}\, dy = 1$$

$$\frac{-k}{(n - 1)(n - 2)} \left[(1 + y)^{-n+1}\right]\Big|_0^\infty = 1$$

$$\therefore \quad k = (n - 1)(n - 2)$$

(ข) marginal pdf คือ

$$g(x) = \int_0^\infty f(x, y)\, dx = \int_0^\infty k(1 + x + y)^{-n}\, dy$$

$$= \frac{k(1 + x + y)^{-n+1}}{-n + 1}\Big|_0^\infty$$

$$= \frac{k}{-n + 1}\left[(1 + x + \infty)^{-n+1} - (1 + x + 0)^{-n+1}\right]$$

$$= -\frac{(n - 1)(n - 2)}{(n - 1)}\left[0 - (1 + x)^{-n+1}\right]$$

$$= (n - 2)(1 + x)^{-n+1} \qquad x > 0$$

$$= 0 \qquad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ}$$

$$h(y) = \int_0^\infty k(1+x+y)^{-n}\,dx = k\int_0^\infty (1+x+y)^{-n}\,dx$$

$$= \frac{k(1+x+y)^{-n+1}}{-n+1}\Big|_0^\infty$$

$$= -\frac{(n-1)(n-2)}{(n-1)}\left[0-(1+y)^{-n+1}\right]$$

$$= (n-2)(1+y)^{-n+1}, \quad y > 0$$

$$= 0 \qquad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ}$$

pdf แบบมีเงื่อนไข คือ

$$g(y \mid x) = \frac{f(x,y)}{f(x)} = \frac{(n-1)(n-2)(1+x+y)^{-n}}{(n-2)(1+x)^{-n+1}}$$

$$= \frac{(n-1)(1+x+y)^{-n}}{(1+x)^{-n+1}}$$

และ

$$h(x/y) = \frac{(n-1)(1+x+y)^{-n}}{(1+y)^{-n+1}}$$

(ค) X กับ Y ไม่มีความอิสระกัน เนื่องจากว่า

$$f(x,y) \neq g(x)\,h(y)$$

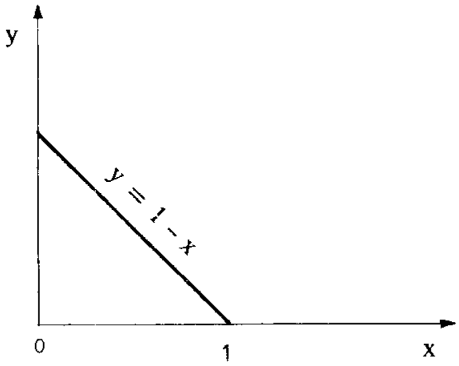
$$(n-1)(n-2)(1+x+y^{-n}) \neq (n-2)(1+x)^{-n+1}(n-2)(1+y)^{-n+1}$$

หรือ

$$g\left(\frac{1}{2} \mid \frac{1}{2}\right) = \frac{(n-1)\,2^{-n}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{-n+1}} \neq g\left(\frac{1}{2}\right) = (n-2)\left(\frac{3}{2}\right)^{-n+1}$$

(ง) ให้ $B = \{X+Y \geq 1\}$ เราจะต้องคำนวณ $P(B)$ ได้จาก $1-P(\bar{B})$ ในเมื่อ $\bar{B} = \{X+Y < 1\}$ ดังนั้น

$$P(B) = 1 - \int_0^1 \int_0^{1-x} (n-1)(n-2)(1+x+y)^{-n}\,dy\,dx$$



$$= \quad 1 + \int_0^1 (n-2)\,[\,1+x+y)^{-n+1}\,]\,\Big|_0^{1-x}\,dx$$

$$= \quad 1 + \int_0^1 (n-2)\,[\,2^{-n+1} - (1+x)^{-n+1}\,]\,dx$$

$$= \quad 1 + (n-2)\,[\,2^{-n+1}\,x + \frac{(1+x)^{-n+2}}{n-2}\,]\,\Big|_0^1$$

$$= \quad 1 + (n-2)\,[\,2^{-n+1} + \frac{2^{-n+1}}{n-2} - \frac{1}{n-2}\,]$$

ทฤษฎีที่ 3 (ก) ให้ (X,Y) เป็นสองตัวแปรเชิงสุ่มไม่ต่อเนื่องหรือต่อเนื่องแล้ว X กับ Y มีความอิสระกันก็ต่อเมื่อ $f(x/y) = f(x)$ หรือ $f(y/x) = f(y)$ สำหรับ (x,y) ทั้งหมด สำหรับการพิสูจน์จะละไว้เป็นแบบฝึกหัดนักศึกษา

ในกรณีตัวแปรเชิงสุ่ม $X_1, X_2, \ldots, X_n$ มี pdf ร่วม $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ และ marginal pdf $f(x_1)$, $f(x_2), \ldots, f(x_n)$ ตามลำดับ ตัวแปรเชิงสุ่ม $X_1, X_2, \ldots, X_n$ จะมีความอิสระกันต่อเมื่อ $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$ ซึ่งจะเป็นไปตามนิยามดังนี้

$$P(a_1 < X_1 < b_1,\ a_2 < X_2 < b_2, \ldots a_n < X_n < b_n) = P(a_1 < X_1 < b_1)\,P(a_2 < X_2 < b_2) \ldots P(a_n < X_n < b_n)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} P(a_i < X_i < b_i)$$

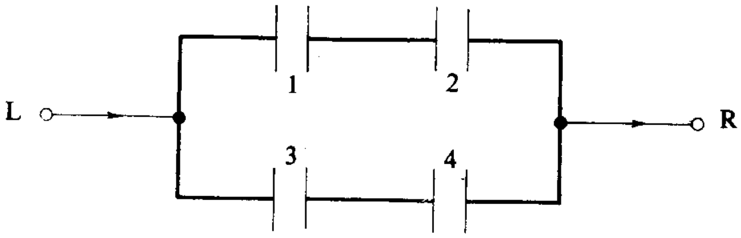
นิยาม เหตุการณ์ n เหตุการณ์ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ มีความอิสระกันก็ต่อเมื่อเรามี k = 2,3,...,n

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})\,P(A_{i_2}) \ldots P(A_{i_k})$$

ตัวอย่าง 5 ความน่าจะเป็นของแต่ละ relay ของวงจรดังรูปจะปิดเท่ากับ p ถ้าหากว่าหน้าที่ของ relay ทั้งหมดมีความอิสระกัน จงหาความน่าจะเป็นที่กระแสไฟฟ้าคงอยู่ระหว่างขั้ว L กับ R เป็นเท่าไร

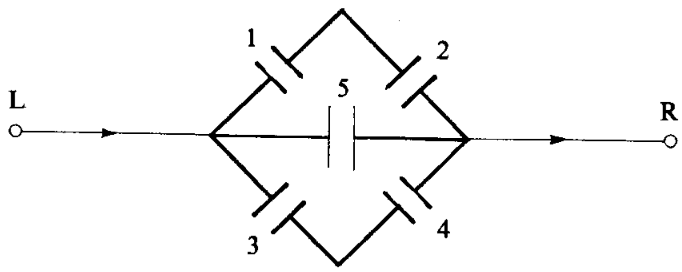
ให้ A_i เป็นเหตุการณ์ { relay ที่ i ปิด } i = 1,2,3,4

ให้ E เป็นเหตุการณ์ { กระแสไฟฟ้าไหลจาก L ไป R }



ด้วยเหตุนี้ $E = (A_1 \cap A_2) \cap (A_3 \cap A_4)$ และเหตุการณ์ $A_1 \cap A_2$ กับ $A_3 \cap A_4$ ไม่เป็น mutually exclusive ดังนั้น

$$P(E) = P(A_1 \cap A_2) + P(A_3 \cap A_4) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)$$
$$= P(A_1)P(A_2) + P(A_3)P(A_4) - P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)$$
$$= P^2 + P^2 - P^4 = 2P^2 - P^4$$



ตัวอย่าง 6 สมมุติว่าความน่าจะเป็นของแต่ละ relay ในวงจรจะปิดเท่ากับ p และ relay ทั้งหมดมีหน้าที่อิสระกัน จงหาความน่าจะเป็นที่กระแสไฟฟ้าคงอยู่ระหว่างขั้ว L กับ R เป็นเท่าไร ใช้สัญลักษณ์แบบเดียวกันกับตัวอย่าง 5 เราได้

$$P(E) = P(A_1 \cap A_2) + P(A_5) + P(A_3 \cap A_4) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_5)$$
$$- P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) - P(A_5 \cap A_3 \cap A_4)$$
$$+ P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5)$$

$$= P(A_1)P(A_2) + P(A_5) + P(A_3)P(A_4) - P(A_1)P(A_2)P(A_5)$$
$$- P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4) - P(A_5)P(A_3)P(A_4)$$
$$+ P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)P(A_5)$$
$$= p^2 + p + p^2 - p^3 - p^4 - p^3 + p^5$$
$$= p + 2p^2 - 2p^3 - p^4 + p^5$$

ในกรณี X_1, X_2 และ X_3 ทั้งสามเป็น pairwise stochastically independent นั่นคือ X_i กับ X_j $i \neq j$ ในเมื่อ $i,j = 1,2,3$ มีความอิสระกัน pairwise independence ไม่จำเป็นที่จะถือว่าเป็น mutually independence

ดังตัวอย่าง ให้ X_1, X_2 และ X_3 มี pdf ร่วม

$$f(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{4}, (x_1,x_2,x_3) \in \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,1)\}$$
$$= 0 \quad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ}$$

pdf ร่วมของ X_i กับ X_j, $i \neq j$ คือ

$$f(x_i, x_j) = \frac{1}{4}, (x_i x_j) \in \{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)\}$$
$$= 0 \quad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ}$$

ขณะที่ marginal pdf ของ X_i เป็น

$$f(x_i) = \frac{1}{2} \quad x_i = 0,1$$
$$= 0 \quad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ}$$

ถ้าหากว่า $i \neq j$ เราได้

$$f(x_i,x_j) = f(x_i)f(x_j)$$

ดังนั้น X_i กับ X_j มีความอิสระกัน อย่างไรก็ตาม

$$f(x_1,x_2,x_3) \neq f(x_1)f(x_2)f(x_3)$$

เพราะฉะนั้น X_1, X_2, และ X_3 ไม่มีความอิสระกัน

ตัวอย่าง 7 ให้ X_1, X_2, และ X_3 เป็นสามตัวแปรที่มีความอิสระกันและให้แต่ละตัวมี pdf $f(x) = 2x,\ 0 < x < 1$ ศูนย์สำหรับค่าอื่น ๆ pdf ร่วมของ X_1, X_2, X_3 เป็น $f(x_1)f(x_2)f(x_3) = 8x_1x_2x_3,\ 0 < x_i < 1,\ i = 1,2,3$ ศูนย์สำหรับค่าอื่น ๆ ให้ Y เป็นค่าสูงสุดของ X_1, X_2 และ X_3 แล้ว เราจะได้

$$P\left(Y \le \frac{1}{2}\right) = P(X_1 \le 1/2,\ X_2 \le 1/2,\ X_3 \le 1/2)$$

$$= \int_0^{1/2}\int_0^{1/2}\int_0^{1/2} 8x_1x_2x_3\,dx_1dx_2dx_3$$

$$= (1/2)^6 = 1/64$$

ในลักษณะเดียวกัน เราคำนวณหา ฟังก์ชันการแจกแจงของ Y เป็น

$$F(Y) = P(Y \le y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ y^6 & 0 \le y < 1 \\ 1 & y \ge 1 \end{cases}$$

เพราะฉะนั้น pdf ของ Y เป็น $f(y) = 6y^5 \quad 0 < y < 1$

$= 0$ สำหรับค่าอื่น ๆ

ตัวอย่างที่ 8 โยนเหรียญที่สมดุลย์โดยสุ่มจากการทดลองที่อิสระกัน ให้ตัวแปรเชิงสุ่ม X_i แทนผลลัพธ์ของการโยนสุ่มซ้ำ ๆ กันที่ i ครั้ง $i = 1,2,3,\ldots, X_i$ สามารถเป็นหัวแสดงได้โดย $X_i = 1$ หรือก้อยแสดงได้โดย $X_i = 0$ ตัวแบบความน่าจะเป็นสำหรับแต่ละ X_i คือ pdf $f(x) = \frac{1}{2}, x = 0, 1$ ศูนย์สำหรับค่าอื่น ๆ เนื่องจากว่าการทดลองมีความอิสระกัน เราจึงกล่าวได้ว่า $X_1, X_2, X_3, \ldots$ มีความอิสระกัน ความน่าจะเป็นที่ปรากฏหัวครั้งแรกของการทดลองสามครั้งคือ

$$P(X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 1) = P(X_1 = 0)\,P(X_2 = 0)\,P(X_3 = 1)$$

$$= (1/2)(1/2)(1/2) = (1/2)^3 = 1/8$$

โดยทั่ว ๆ ไป ถ้าหากว่า Y เป็นจำนวนของการทดลองซึ่งปรากฏหัวครั้งแรกแล้ว pdf ของ Y คือ

$f(y) = (1/2)^y,\ y = 1,2,3,\ldots$

$= 0$ สำหรับค่าอื่น ๆ

โดยเฉพาะ $P(Y = 3) = f(3) = 1/8$

ทฤษฎี 4 ถ้าหากว่า A กับ B เป็นเหตุการณ์ที่มีความอิสระกันใน sample space S แล้ว (ก) เหตุการณ์ $\overline{A}$ กับ $\overline{B}$ มีความอิสระกัน (ข) เหตุการณ์ $\overline{A}$ กับ B มีความอิสระกัน และ (ค) เหตุการณ์ A กับ $\overline{B}$ มีความอิสระกัน

พิสูจน์ (ก)

$$
\begin{aligned}
P(\overline{A} \cap \overline{B}) &= P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) \\
&= 1 - [P(A) + P(B) - P(A)P(B)] \\
&= [1 - P(A)][1 - P(B)] = P(\overline{A})P(\overline{B})
\end{aligned}
$$

เพราะฉะนั้น $\overline{A}$ กับ $\overline{B}$ มีความอิสระกัน (ก)

หรือ

$$
\begin{aligned}
P(\overline{A} \cap \overline{B}) &= P(\overline{A}) - P(\overline{A} \cap B) \\
&= P(\overline{A}) - P(\overline{A})P(B) \\
&= P(\overline{A})[1 - P(B)] \\
&= P(\overline{A})P(\overline{B})
\end{aligned}
$$

(ข)

$$
\begin{aligned}
P(\overline{A} \cap B) &= P(B) - P(A \cap B) \\
&= P(B) - P(A)P(B) = P(B)[1 - P(A)] \\
&= P(B)P(\overline{A})
\end{aligned}
$$

แสดงว่า $\overline{A}$ กับ B มีความอิสระกัน

(ค)

$$
\begin{aligned}
A &= (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B) \\
\therefore \quad P(A) &= P(A \cap \overline{B}) + P(A \cap B)
\end{aligned}
$$

หรือ

$$
\begin{aligned}
P(A \cap \overline{B}) &= P(A) - P(A)P(B) = P(A)[1 - P(B)] \\
&= P(A)P(\overline{B})
\end{aligned}
$$

เพราะฉะนั้น A กับ $\overline{B}$ มีความอิสระกัน