บทที่ 5
การคาดหมายของตัวแปรเชิงสุ่ม
Expectation of a Random Variable

วัตถุประสงค์ มุ่งที่จะบรรยายลักษณะของตัวแปรเชิงสุ่ม ในแง่ของการคาดหมายว่า จะมีศูนย์กลางของการแจกแจงอยู่ที่ใด และการกระจายของฟังก์ชันของตัวแปรเชิงสุ่มจะห่างจากศูนย์กลางของการแจกแจงมากน้อยเพียงใด การพยากรณ์ค่าของตัวแปรเชิงสุ่มในเชิงของค่าคาดหมาย ก่อนที่จะทราบผลลัพธ์ที่แท้จริง เพื่อใช้ในการตัดสินใจเรื่องต่าง ๆ เช่นในเรื่องเกี่ยวกับธุรกิจ ทางเศรษฐศาสตร์ เป็นต้น ศึกษาเกี่ยวกับกฎเกณฑ์ต่าง ๆ ที่ใช้ในเรื่องค่าคาดหมายของ X การคาดหมายที่เกี่ยวกับตัวแปร n ตัว ($n \geq 2$) การคำนวณค่าคาดหมายและความแปรปรวนของตัวแปรแต่ละตัว โดยไม่สนใจว่าตัวแปรอื่น ๆ จะออกผลลัพธ์อย่างไร การวัดองศาแห่งความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรเชิงสุ่ม 2 ตัว กฎเกณฑ์ที่เกี่ยวกับการคาดหมายของตัวแปรเชิงสุ่มที่มีความสัมพันธ์กัน และที่ไม่มีความสัมพันธ์กัน ตลอดจนการคาดหมายของผลบวกของฟังก์ชันของตัวแปรเชิงสุ่ม การคาดหมายภายใต้เงื่อนไข การพิจารณาในลักษณะที่เป็นฟังก์ชันการถดถอย

5.1 ค่าคาดหมายและความแปรปรวนของตัวแปรเชิงสุ่ม

ในบทที่ 2 เราได้พูดถึงการหาค่าเฉลี่ยของตัวแปรเชิงสุ่ม ซึ่งเป็นค่าเฉลี่ยที่หมายถึงค่ากลาง ๆ ของ X หรือศูนย์กลางของการแจกแจงของ X และเราวัดค่าเฉลี่ยนี้ด้วยค่าคาดหมายของ X ใช้สัญญลักษณ์แทนด้วย E(X) โดยนิยามค่าไว้ดังนี้

$$E(X) = \sum_{\forall x} x\, f(x)$$

ในเมื่อ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง และ

$$E(X) = \int_{-\infty} x\, f(x)\, dx$$

หรือ

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, dF(x)$$

ในเมื่อ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบต่อเนื่อง

เราจะสามารถหาค่าของ E(X) ได้ ถ้า $\Sigma |x| \; f(x) < \infty$ **หรือ** $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)\,dx < \infty$

ถ้าเรามี g(X) เป็นฟังก์ชันของ X ที่ไม่ใช่ฟังก์ชันความหนาแน่น หรือฟังก์ชันน่าจะเป็น เรานิยามค่าคาดหมายของ g(X) ได้ดังต่อไปนี้

นิยาม 5.1 X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น (หรือฟังก์ชันน่าจะเป็น) f(x) และมีฟังก์ชันการแจกแจงสะสม F(x) ค่าคาดหมายของ g(X) จะกำหนดได้โดย

$$E[\,g(X)\,] = \begin{cases} \sum\limits_{\forall x} g(x)\,f(x) \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,f(x)\,dx \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dF(x) \end{cases}$$

ขึ้นอยู่กับว่า ลักษณะของ X จะบรรยายด้วยฟังก์ชันน่าจะเป็น หรือฟังก์ชันความหนาแน่น f(x) หรือด้วยฟังก์ชันการแจกแจงสะสม F(x) เราจะสามารถหาค่าของ E [g(X)] ได้ ถ้า

$$\sum_{\forall x} |\,g(x)\,|\,f(x) < \infty \text{ หรือ } \int_{-\infty}^{\infty} |\,g(x)\,|\,f(x)\,dx < \infty$$

จะเห็นว่า เมื่อ $g(X) = X$, $E[\,g(X)\,] = E(X)$ นั่นเอง

ทฤษฎี 5.1 X เป็นตัวแปรเชิงส่มที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น (หรือฟังก์ชันน่จจะเป็น) f(x) ถ้า a และ b เป็นค่าคงที่ใด ๆ แล้ว

$$E(aX + b) = a\,E(X) + b$$

พิสูจน์

$$E(aX + b) = \int_{-\infty}^{\infty} (ax + b)\,f(x)\,dx \qquad \text{(นิยาม 5.1)}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} ax\,f(x)\,dx + \int_{-\infty}^{\infty} bf(x)\,dx$$

$$= a \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx + b \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$$

อาศัยนิยามของ E(X) และคุณสมบัติของฟังก์ชันความหนาแน่น เราจะได้

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

บทแทรก 1 ถ้า $b = 0$ แล้ว $E(aX) = aE(X)$

บทแทรก 2 ถ้า $a = 0$ แล้ว $E(b) = b$

ทฤษฎี 5.2 ค่าคาดหมายของผลบวกหรือผลต่างของฟังก์ชันของ X n ฟังก์ชัน ($n \geqslant 2$) ก็คือผลบวกหรือผลต่างของค่าคาดหมายของฟังก์ชันเหล่านั้น กล่าวคือ

$$E[g(X) \pm h(X)] = E[g(X)] \pm E[h(X)]$$

พิสูจน์

$$E[g(X) \pm h(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} [g(x) \pm h(x)]\, f(x)\, dx \qquad \text{(นิยาม 5.1)}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f(x)\, dx \pm \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\, f(x)\, dx$$

$$= E[g(X)] \pm E[h(X)]$$

โดยทั่วไป

$$E\left[\sum_i a_i\, g_i(X)\right] = \sum_i a_i\, E[g_i(X)]$$

ตัวอย่างที่ 5.1 X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น กำหนดไว้โดย

$$f(x) = 1/x^2,\ 1 \leqslant x$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

จงแสดงให้เห็นจริงว่า ค่าคาดหมายของ X จะหาค่าไม่ได้

วิธีทำ

$$E(X) = \int_{1}^{\infty} x(1/x^2)dx$$

$$= \ln x \Big|_{x=1}^{x=\infty} = \infty$$

แสดงว่า E(X) หาค่าไม่ได้

ตัวอย่างที่ 5.2 กำหนดฟังก์ชันความหนาแน่นของ X โดย

$$f(x) = 2(1-x) \quad , \quad 0 < x < 1$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

จงคำนวณค่าของ $E(6X + 12X^2 - 20X^3)$

วิธีทำ

$$E(X) = \int_0^1 x\, 2(1-x)\, dx = x^2 - \frac{2x^3}{3} \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3}$$

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2\, 2(1-x) dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{2} \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{6}$$

$$E(X^3) = \int_0^1 x^3\, 2(1-x) dx = \frac{x^4}{2} - \frac{2x^5}{5} \Big|_{x=0}^{x=1} = 1/10$$

ดังนั้น

$$E(6X + 12X^2 - 20X^3) = 6(1/3) + 12(1/6) - 20(1/10) = 2$$

หากเราพิจารณาค่าของ E(X) จะเห็นว่า E(X) เป็นค่าคงที่ ใช้ชี้บอกอย่างคร่าว ๆ ว่า X จะออกค่าเป็นอย่างไร หรือศูนย์กลางของการแจกแจงของตัวแปรเชิงสุ่มจะอยู่ที่ใด E(X) มักจะใช้สัญญลักษณ์แทนด้วย μ (มิว) การบรรยายลักษณะของตัวแปรเชิงสุ่ม นอกจากจะใช้ค่าคาดหมายแล้ว อาจจะบรรยายลักษณะของตัวแปรเชิงสุ่ม โดยอาศัยค่าคงที่ซึ่งเป็นดัชนีชี้ให้เห็นการกระจายของฟังก์ชันว่าห่างจากศูนย์กลางของการแจกแจง มากน้อยเพียงไร ค่าคงที่นี้เราเรียกว่า ความแปรปรวนของ X เขียนแทนด้วย Var(X) และให้นิยามไว้ดังต่อไปนี้

นิยาม 5.2 ค่าความแปรปรวนของ X, Var(X), จะกำหนดได้โดย

$$\mathrm{Var}(X) = E[\{X - E(X)\}^2] = \begin{cases} \sum_{\forall x} (x-\mu)^2 f(x) \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 dF(x) \end{cases}$$

เราจะหาค่าของความแปรปรวนไม่ได้ ถ้า $E(X) = \infty$ และจะสามารถหาค่า Var(X) ได้ถ้าค่าที่นิยามใน (5.2) น้อยกว่า ∞

Var(X) มักจะนิยมใช้สัญญลักษณ์แทนด้วย σ^2 พิจารณาจากนิยาม 5.2 จะเห็นว่าความแปรปรวนของ X จะมีค่าเป็นบวกเท่านั้น และหน่วยของ Var(X) จะเป็น กำลังสองของหน่วยของ X ซึ่งไม่สะดวกในการใช้ เราจึงใช้รากที่สองของความแปรปรวนของ X ซึ่งเรียกว่าค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน (Standard Deviation) ของตัวแปรเชิงสุ่ม X แทน และนิยามไว้โดย

$$\sigma_{(\text{ซิกมา})} = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$$

ในทฤษฎีการตัดสินใจ เมื่อมีการเลือกหลาย ๆ ทาง และเราทราบโอกาสของการเกิดขึ้นของสภาวการณ์ต่าง ๆ เราจะใช้ค่าคาดหมายหรือความแปรปรวนเป็นเครื่องมือช่วยในการตัดสินใจ กล่าวคือ เลือกทางเลือกที่ทำให้ได้ค่าคาดหมายของผลประโยชน์สูงสุด หรือเลือกทางเลือกที่ทำให้ได้ค่าคาดหมายของการสูญเสียต่ำสุด เป็นต้น ในกรณีที่มีทางเลือกหลายทางซึ่งให้ค่าคาดหมายสูงสุดเท่ากัน แต่เราต้องการเลือกเพียงทางเดียวที่เสี่ยงน้อยที่สุด เช่นนี้เราต้องเปรียบเทียบค่าความแปรปรวน และเลือกทางที่ให้ค่าความแปรปรวนน้อยที่สุด รายละเอียดในเรื่องนี้นักศึกษาจะได้ศึกษาในวิชา ST 305 (ทฤษฎีการตัดสินใจทางสถิติ)

ทฤษฎี 5.3 $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$

พิสูจน์

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= E[\{X - E(X)\}^2] && \text{(นิยาม 5.2)} \\ &= E[X^2 - 2XE(X) + \{E(X)\}^2] \\ &= E(X^2) - E[2XE(X)] + E[\{E(X)\}^2] && \text{(ทฤษฎี 5.2)} \\ &= E(X^2) - 2E(X)E(X) + \{E(X)\}^2 && \text{(E(X) เป็นค่าคงที่)} \\ &= E(X^2) - \{E(X)\}^2 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 5.3 X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น กำหนดไว้โดย

$$f(x) = 2/x^3 \quad x > 1$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

จงคำนวณค่าคาดหมายของ X และแสดงให้เห็นจริงว่าความแปรปรวนของ X จะหาค่าไม่ได้

วิธีทำ

$$E(X) = \int_1^\infty x(2/x^3)\,dx = -2x\Big|_{x=1}^{x=\infty} = 2$$

$$E(X^2) = \int_1^\infty x^2(2/x^3)\,dx = 2\ln x\Big|_{x=1}^{x=\infty} = \infty$$

$$Var(X) = \infty - 4 = \infty$$

แสดงว่า ความแปรปรวนของ X หาค่าไม่ได้

ทฤษฎี 5.4 X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น (หรือฟังก์ชันน่าจะเป็น) f(x) g(X) เป็นฟังก์ชันใด ๆ ของ X ที่ไม่ใช่ฟังก์ชันความหนาแน่น ความแปรปรวนของฟังก์ชัน g(X) จะกำหนดได้โดย

$$Var[g(X)] = E[\{g(X) - E(g(X))\}^2]$$

พิสูจน์

g(X) เป็นฟังก์ชันของตัวแปรเชิงสุ่ม X ดังนั้น

g(X) จะมีลักษณะเป็นตัวแปรเชิงสุ่มด้วย

อาศัยนิยามของความแปรปรวนของตัวแปรเชิงสุ่ม จะได้

$$Var[g(X)] = E[\{g(X) - E(g(X))\}^2]$$

ทฤษฎี 5.5 ถ้า X เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม และ b เป็นค่าคงที่ใด ๆ แล้ว

$$Var(X + b) = Var(X)$$

พิสูจน์

$$\begin{aligned} Var(X+b) &= E[\{X+b-E(X+b)\}^2] && (\text{นิยาม } 5.2) \\ &= E[\{X+b-E(X)-b\}^2] && (\text{ทฤษฎี } 5.1 \text{ และ } a=1) \\ &= E[\{X-E(X)\}^2] \\ &= Var(X) && (\text{นิยาม } 5.2) \end{aligned}$$

ทฤษฎี 5.6 ถ้า X เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม และ a เป็นค่าคงที่ใด ๆ แล้ว

$$Var(aX) = a^2 Var(X)$$

พิสูจน์

$$\begin{aligned} Var(aX) &= E[\{aX-E(aX)\}^2] && (\text{นิยาม } 5.2) \\ &= E[\{aX-aE(X)\}^2] && (\text{บทแทรก 1 ทฤษฎี } 5.1) \\ &= a^2E[\{X-E(X)\}^2] \\ &= a^2\,Var(X) && (\text{นิยาม } 5.2) \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 5.4 กำหนดฟังก์ชันความหนาแน่นของตัวแปรเชิงสุ่ม X โดย

$$\begin{aligned} f(x) &= x+1, \quad -1 < x < 0 \\ &= 1-x, \quad 0 < x < 1 \\ &= 0 \quad \text{อื่น ๆ} \end{aligned}$$

จงคำนวณค่าคาดหมายและความแปรปรวนของ X, ของ 3X + 2

วิธีทำ

$$\text{ค่าคาดหมายของ } X = E(X) = \int_{-1}^{0} x(x+1)\,dx + \int_{0}^{1} x(1-x)dx$$

$$= (x^3/3 + x^2/2)\Big|_{-1}^{0} + (x^2/2 - x^3/3)\Big|_{0}^{1}$$

$$= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 0$$

$$E(X^2) = \int_{-1}^{0} x^2(x+1)dx + \int_{0}^{1} x^2(1-x)dx$$

$$= \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{6}$$

ความแปรปรวนของ X $= 1/6$

ค่าคาดหมายของ $3X + 2 = 2$

ความแปรปรวนของ $3X + 2 = 9 \times \frac{1}{6} = \frac{3}{2}$

ในการคาดคะเนหรือประมาณค่าของ X ก่อนที่จะทราบผลลัพธ์ที่แท้จริง ซึ่งเราประมาณด้วยค่าคาดหมายของ X ค่าที่ได้นี้จะถูกต้องหรือผิดพลาดแค่ไหน เราไม่อาจบอกได้ แต่เราสามารถประมาณค่าด้วยค่าเป็นช่วง ๆ ซึ่งสามารถจะบอกได้ว่า จะมีความคลาดเคลื่อนเท่าใด ช่วงที่ได้เราเรียกว่า **ช่วงความเชื่อมั่น** (confidence interval) เกี่ยวกับเรื่องการประมาณค่านี้นักศึกษา **จะได้ศึกษารายละเอียดใน** ST 411 (ทฤษฎีสถิติ)

ตัวอย่างที่ 5.5 ถ้าฟังก์ชันความหนาแน่นของ X คือ

$$f(x) = \frac{1}{6}(2x + 1),\ 0 < x < 2$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

จงคำนวณความน่าจะเป็นที่ X จะออกผลลัพธ์ ในช่วง $\mu - \sigma$ และ $\mu + \sigma$

วิธีทำ

$$\mu = E(X) = \int_0^2 x \cdot \frac{1}{6}(2x + 1)dx = \frac{1}{6}\ (2x^3/3 + x^2/2)\Big|_{x=0}^{x=2}$$

$$= \frac{11}{9}$$

$$E(X^2) = \int_0^2 x^2 \cdot \frac{1}{6}(2x + 1)dx = \frac{1}{6}(2x^4/4 + x^3/3)\Big|_{x=0}^{x=2} = \frac{16}{9}$$

$$\sigma^2 = (16/9) - (11/9)^2 = 23/81 \text{ ดังนั้น } \sigma = \sqrt{23}/9$$

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = \int_{\frac{11 - \sqrt{23}}{9}}^{\frac{11 + \sqrt{23}}{9}} \frac{1}{6}(2x + 1)dx$$

$$= \quad (x^2 + x)/6 \Big|_{x=(11-\sqrt{23})/9}^{x=(11+\sqrt{23})/9}$$

$$= \quad (44\sqrt{23}/81 + 2\sqrt{23}/9)/6 \quad = \quad 0.6!$$

มีการกะประมาณด้วยช่วงอีกแบบหนึ่ง ซึ่งกะประมาณค่าได้ด้วยค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด โดยอาศัยทฤษฎีของเชบบีเชฟ ดังต่อไปนี้

ทฤษฎี 5.7 (Chebyshev's Inequality)

X เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม ที่มีค่า $E(X) = \mu$ และ $Var(X) = \sigma^2$

$$P(|X - \mu| \geqslant k\sigma) \leqslant 1/k^2$$

หรือ

$$P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma) \geqslant 1 - 1/k^2$$

สำหรับทุก ๆ ค่าของ k ที่มากกว่า 0

พิสูจน์

$$\sigma^2 = E[\{X - \mu\}^2]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x)\,dx \qquad \text{(นิยาม 5.2)}$$

$$= \int_{-\infty}^{\mu-k\sigma} (x - \mu)^2 f(x)dx + \int_{\mu-k\sigma}^{\mu+k\sigma} (x - \mu)^2 f(x)dx + \int_{\mu+k\sigma}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x)dx$$

$$\geqslant \int_{-\infty}^{\mu-k\sigma} (x - \mu)^2 f(x)dx + \int_{\mu+k\sigma}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x)dx$$

เนื่องจาก $|x - \mu| \geqslant k\sigma$ หรืออีกนัยหนึ่ง $x \geqslant \mu + k\sigma$ และ $x \leqslant \mu - k\sigma$
ดังนั้น $(x - \mu)^2 \geqslant k^2\sigma^2$ เราจะได้

$$\sigma^2 \geqslant \int_{-\infty}^{\mu-k\sigma} k^2\sigma^2 f(x)dx + \int_{\mu+k\sigma}^{\infty} k^2\sigma^2 f(x)\,dx$$

$$\geqslant k^2\sigma^2 \left[\int_{-\infty}^{\mu-k\sigma} f(x)dx + \int_{\mu+k\sigma}^{\infty} f(x)dx \right]$$

$$\frac{1}{k^2} \geqslant P(X \leqslant \mu - k\sigma) + P(X \geqslant \mu + k\sigma) = P(|X - \mu| \geqslant k\sigma)$$

แสดงว่า

$$P(|X - \mu| \geqslant k\sigma) \leqslant 1/k^2$$

โดยทั่วไป ถ้า u(X) เป็นฟังก์ชันที่ไม่เป็นลบ ของตัวแปรเชิงสุ่ม X และ E [u(X)] สามารถหาค่าได้ แล้ว

$$P\,[\,u(X) \geqslant c\,] \leqslant \frac{E\,[\,u(X)\,]}{c}$$

สำหรับทุก ๆ ค่า c ที่เป็นบวก

เป็นแบบฝึกหัดให้นักศึกษาพิสูจน์

ตัวอย่างที่ 5.6 X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มี $E(X) = 3$ และ $E(X^2) = 13$ จงใช้ทฤษฎีของเชบบีเชฟ คำนวณค่าต่ำสุดของ $P(-2 < X < 8)$

วิธีทำ

$P(-2 < X < 8) = P(3 - 5 < X < 3 + 5)$

อาศัยทฤษฎี 5.7 (ทฤษฎีของเชฟบีเชฟ) จะได้ $k\sigma = 5$

แต่ $\sigma^2 = 13 - 9 = 4$

ดังนั้น $k^2 = 25/4$

และ $P(3 - 5 < X < 3 + 5) \geqslant 1 - \frac{4}{25} = .84$

$\Rightarrow$ ค่าต่ำสุดของ $P(-2 < X < 8)$ คือ .84

อาศัยทฤษฎีของเชบบีเชฟ สามารถคำนวณหาช่วงความเชื่อมั่นในการคาดคะเนค่าของ X ได้โดยที่เราไม่จำเป็นต้องทราบฟอร์มของฟังก์ชัน f(x) เพียงแต่รู้ค่าคาดหมายของ X และความแปรปรวนของ X เท่านั้น

จากนิยาม 5.1 จะเห็นได้ว่า ค่าคาดหมายของ g(X) จะเปลี่ยนแปรไป ขึ้นอยู่กับว่า g(X) มีรูปร่างอย่างไร เช่นเมื่อ $g(X) = [X - E(X)]^2$ ค่าคาดหมายที่ได้ก็คือ ค่าความแปรปรวนของ X (ตามนิยาม 5.2) ถ้าเรากำหนด $g(X) = e^{tX}$ เราเรียกผลที่ได้ว่า moment generating function ของ X และถ้าเรากำหนด $g(X) = e^{itX}$ เราเรียกผลที่ได้ว่า characteristic function ผลที่ตามมา เราจะได้นิยามดังต่อไปนี้

นิยาม 5.3 moment generating function (mgf) ของตัวแปรเชิงสุ่ม X เขียนแทนด้วย $m_X(t)$ คือ ค่าคาดหมายของฟังก์ชัน e^{tX} เมื่อ t เป็นตัวแปรจริง นั่นก็คือ

$$m_X(t) = E[e^{tX}] = \begin{cases} \sum\limits_{\forall x} e^{tX} f(x) \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{tX} f(x)\, dx \end{cases}$$

เมื่อ f(x) เป็นฟังก์ชันน่าจะเป็นหรือฟังก์ชันหนาแน่นของ X

ถ้า mgf มีจริง สำหรับทุกค่าของ t ในช่วง $(-\sigma, \sigma), 0 < \sigma \to 0$ รอบจุดกำเนิด เราสามารถหาฟังก์ชันน่าจะเป็นหรือฟังก์ชันหนาแน่นของ X จาก mgf ได้ ถ้า mgf ของตัวแปรเชิงสุ่ม 2 ตัว มีจริง และเท่ากัน ย่อมแสดงว่าตัวแปรทั้ง 2 นี้ ต่างมีฟังก์ชันหนาแน่นรูปเดียวกัน ในความหมายนี้ ก็คือ mgf จะสมนัยกันกับฟังก์ชันการแจกแจงหรือฟังก์ชันหนาแน่น

สมมติว่า mgf ของ X มีจริง ในบริเวณของ t รอบจุดกำเนิด เรากระจาย e^{tx} ได้ดังนี้

$$e^{tx} = 1 + tx + \frac{1}{2!} t^2x^2 + \frac{1}{3!} t^3x^3 + \ldots$$

ถ้า X เป็นตัวแปรต่อเนื่อง mgf ของ X จะเขียนได้ดังนี้

$$m_X(t) = E[e^{tX}] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(tx)^i}{i!} \right) f(x)dx$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^i f(x)dx$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} E[X^i]$$

หาอนุพันธ์ที่ 1 ของ $m_X(t)$ จะได้ว่า

$$\frac{d}{dt} m_X(t) = m'_X(t) = E(X) + t E(X^2) + \frac{t^2}{2!} E(X^3) + \ldots$$

แทนค่า t = 0 จะได้ว่า

$$m'_X(0) = E(X)$$

ในทำนองเดียวกัน เราจะหาอนุพันธ์ที่ 2 ของ $m_X(t)$ ได้

$$\frac{d^2}{dt^2}\ m_X(t) = m_X^{(2)}(t) = E(X^2) + t\,E(X^3) + \ldots$$

แทนค่า $t = 0$ จะได้ว่า

$$m_X^{(2)}(0) = E(X^2)$$

โดยทั่ว ๆ ไป

$$m_X^{(k)}(t) = \sum_{i=k}^{\infty} \frac{t^{i-k}}{(i-k)!}\, E(X^i)$$

และ

$$m_X^{(k)}(0) = E(X^k),\ k = 1, 2, \ldots$$

ความสัมพันธ์นี้ จัดว่าเป็นประโยชน์ที่สำคัญมากของ mgf หากเราทราบ mgf ของตัวแปรเชิงสุ่ม และสามารถหาอนุพันธ์ได้ง่าย ๆ เราจะหาโมเม้นต์ของตัวแปรเชิงสุ่มได้ ซึ่งจะเป็นวิธีการที่ง่ายกว่าการใช้การบวกหรือการอินทิเกรตที่เคยใช้มาแล้ว

นิยาม 5.4 characteristic function (cf) ของตัวแปรเชิงสุ่ม X เขียนแทนด้วย $C_X(t)$ คือค่าคาดหมายของฟังก์ชัน e^{itX} เมื่อ $i = \sqrt{-1}$ และ t เป็นตัวแปรจริง นั่นก็คือ

$$C_X(t) = E\,|\,e^{itX}\,| = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itX} f(x)dx$$

เมื่อ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่องที่มีฟังก์ชันหนาแน่น $f(x)$

ทั้ง mgf และ cf มีประโยชน์อย่างยิ่งในการหาฟังก์ชันหนาแน่นของตัวแปร โดยเฉพาะการหาการแจกแจงของผลบวกของตัวแปร และการหาโมเมนต์ต่าง ๆ รายละเอียดในเรื่องนี้จะไม่พูดถึงในบทนี้ แต่นักศึกษาจะศึกษาเพิ่มเติมได้จากวิชา ST 312 Probability Theory 2

แบบฝึกหัด 5.1

1. X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นกำหนดไว้โดย

$$f(x) = 8/x^3, \quad x > 2$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

จงหาค่าคาดหมายและความแปรปรวนของ $\dfrac{X-2}{X}$

2. เลือกตัวเลข 2 ตัว โดยไม่ให้ซ้ำกัน จากเลข จำนวนเต็มบวกที่มีค่าไม่เกิน 6 จงคำนวณค่าคาดหมายของค่าสัมบูรณ์ของผลต่างระหว่างตัวเลขทั้งสองที่ได้จากการสุ่ม

3. กำหนดฟังก์ชันน่าจะเป็นของตัวแปรเชิงสุ่ม X มีค่าเป็นบวก ที่ $x = -1, 0, 1$ นอกนั้นเป็น 0

3.1) ถ้า $f(0) = \frac{1}{2}$ จงคำนวณค่าของ $E(X^2)$

3.2) ถ้า $f(0) = \frac{1}{2}$ และ $E(X) = 1/6$ จงคำนวณค่าของ $E(3X^3 + 2)$ และ $Var(2X)$

4. X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มี $E[(X-1)^2] = 10$ และ $E[(X-2)^2] = 6$ จงหาค่าคาดหมายและความแปรปรวนของ X

5. X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น $f(x) = (x+2)/18, \; -2 \leqslant x \leqslant 4$ นอกนั้นเป็น 0 จงคำนวณค่าของ $E(X)$, $E[(X+2)^3]$ และ $E[6X - 2(X+2)^3]$

6.
$$f(x) = e^{-x}, \quad x \geqslant 0$$
$$= 0, \quad \text{อื่น ๆ}$$

เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นของ X จงคำนวณค่าของ $E(X)$, $E(X^2)$, $E(X^{(3)})$ และ $E(e^{2x/3})$

$$\left[\int_0^\infty x^{n-1} e^{-x}\, dx = (n-1)! \right]$$

7. จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าถูกหรือผิด

7.1) $E(1/X) = 1/E(X)$

7.2) $E(c\, g(X)) = c\, E(g(X))$

7.3) $E(X^2) \geqslant \{E(X)\}^2$

7.4) $Var(3 - X) = -Var(X)$

7.5) $E[g_1(X)] \leqslant E[g_2(X)]$ ถ้า $g_1(X) \leqslant g_2(X)$ ทุก ๆ ค่า x

7.6) $Var(X - 1/X) = Var(X) + Var(1/X) - 2E(X)\,E(1/X)$

8. กำหนด $f(x) = 2x, 0 < x < 1$ นอกนั้นเป็น 0 เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นของ X จงหา

8.1) ค่าของ $E(\sqrt{X})$

8.2) ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมและฟังก์ชันความหนาแน่นของ $Y = \sqrt{X}$

8.3) อาศัยผลจากข้อ (8.2) จงหาค่าของ E(Y) แล้วเปรียบเทียบผลที่ได้กับข้อ (8.1)

9. กำหนดฟังก์ชันความหนาแน่นของ X ดังต่อไปนี้

9.1) $f(x) = 6x(1-x) \quad , \quad 0 \leq x \leq 1$

$ = 0 \quad ;$ อื่น ๆ

9.2) $f(x) = 1/3 \quad , \quad 0 < x < 1, 2 < x < 4$

$ = 0 \quad ,$ อื่น ๆ

9.3) $f(x) = 1/3\sqrt{x} \quad , \quad 0 \leq x \leq 1$

$ = 1/6\sqrt{x} \quad , \quad 1 \leq x \leq 4$

$ = 0 \quad ,$ อื่น ๆ

ในแต่ละกรณี จงคำนวณความน่าจะเป็นที่ X จะออกผลลัพธ์ในช่วง $\mu - 2\sigma$ กับ $\mu + 2\sigma$

10. X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันการแจกแจงสะสม กำหนดไว้โดย

$$
\begin{aligned}
F(x) &= 0 &&, \quad x < 0 \\
&= x/8 &&, \quad 0 \leq x < 2 \\
&= x^2/16 &&, \quad 2 \leq x < 4 \\
&= 1 &&, \quad x \geq 4
\end{aligned}
$$

จงคำนวณค่าของ $E(2X^2 + 5X - 4)$ และ $Var(2 - 3X)$

11. X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่อง ที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น f และฟังก์ชันการแจกแจงสะสม F จงแสดงให้เห็นจริงว่า ถ้า E(X) หาค่าได้

$$E(X) = \int_0^{\infty} \{ 1 - F(x) \} dx - \int_{-\infty}^{0} F(x)dx$$

ดังนั้น ถ้า $f(x) = 0$ ในเมื่อ $x \leq 0$ แล้ว

$$E(X) = \int_0^{\infty} [1 - F(x)] dx$$

12. ให้ u(X) เป็นฟังก์ชันที่ไม่เป็นลบของตัวแปรเชิงสุ่ม X ถ้า E | u(X) | สามารถหาค่าได้ จงแสดงให้เห็นจริงว่า

$$P[u(X) \geqslant c] \leqslant \frac{E|u(X)|}{c}$$

สำหรับทุก ๆ ค่าของ c ที่เป็นบวก

อาศัยผลที่ได้ จงคำนวณค่าของ $P(5X^2 - 20X \geqslant 7)$ ในเมื่อ $E(X) = 3$ และ $Var(X) = 4$

13. X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีค่าเฉลี่ย $\mu = 10$ และความแปรปรวน $\sigma^2 = 4$ จงใช้ทฤษฎีของเชบบีเชฟ คำนวณค่าของ

13.1) $P(|X - 10| \geqslant 3)$

13.2) $P(5 < X < 15)$

13.3) c ซึ่งทำให้ $P(|X - 10| \geqslant c) \leqslant 0.04$

5-2 ค่าคาดหมายของตัวแปรเชิงสุ่มที่มีการแจกแจงร่วม

เมื่อมีตัวแปรเชิงสุ่มแบบทวิคูณ X และ Y ที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นร่วม หรือฟังก์ชันน่าจะเป็นร่วม f(x, y) หรือฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วม F(x, y) และเมื่อมีฟังก์ชัน g(X, Y) ซึ่งเป็นฟังก์ชันใด ๆ ที่กำหนดในเทอมของ X และ Y เรานิยามค่าคาดหมายของฟังก์ชัน g(X, Y) ได้ดังนี้

นิยาม 5-2.1 ค่าคาดหมายของฟังก์ชัน g(X, Y) จะกำหนดได้โดย

$$E[g(X, Y)] = \sum_{\forall x} \sum_{\forall y} g(x, y) f(x, y)$$

ในเมื่อ f(x, y) เป็นฟังก์ชันน่าจะเป็นร่วมของตัวแปรเชิงสุ่มไม่ต่อเนื่อง X และ Y

$$E[g(X, Y)] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f(x, y) dx dy \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y)\, dF(x, y) \end{cases}$$

ในเมื่อ X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่องที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นร่วม $f(x, y)$ หรือมีฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วม $F(x, y)$

กรณีของตัวแปรเชิงสุ่มพหุคูณ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เรานิยามค่าคาดหมายของฟังก์ชัน $g(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ ได้ดังนี้

นิยาม 5-2.2 ค่าคาดหมายของฟังก์ชัน $g(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ จะกำหนดได้โดย

$$E[g(X_1, \ldots, X_n)] = \begin{cases} \sum\limits_{\forall x_n} \cdots \sum\limits_{\forall x_1} g(x_1, \ldots, x_n) f(x_1, \ldots, x_n) \\ \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x_1, \ldots, x_n) f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n \end{cases}$$

ขึ้นอยู่กับว่า $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ เป็นฟังก์ชันน่าจะเป็นร่วมหรือฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ $X_1, X_2, \ldots, X_n$

ตัวอย่างที่ 5-2.1 กำหนดฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X และ Y โดย

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 4xy \quad , \quad 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ &= 0 \quad , \quad \text{อื่น ๆ} \end{aligned}$$

จงคำนวณค่าคาดหมายของ $P = \dfrac{X + Y}{Y}$ และ $Q = \sqrt{X^2 + Y^2}$

$$E(P) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{x + y}{y} (4xy)dxdy$$

$$= 4 \int_0^1 \left(\frac{1}{3} + \frac{y}{2}\right) dy = 4(1/3 + 1/4) = 2.33$$

$$E(Q) = \int_0^1 \int_0^1 (\sqrt{x^2 + y^2})\,(4xy)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 2y \sqrt{x^2 + y^2}\, d(x^2 + y^2)\, dy$$

$$= \int_0^1 (4y/3)\,[(1 + y^2)^{3/2} - y^3]\, dy$$

$$= (2/3)\,\frac{2^{5/2}-1}{5/2} - (4/3)(1/5) = 0.9752$$

จากนิยาม 5-2.1 หากกำหนด $g(X, Y) = X$ จะเห็นว่า

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xf(x, y)\,dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} x \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dydx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} xg(x)dx = E(X)$$

แสดงว่า เราสามารถคำนวณค่าคาดหมายเฉพาะของ X (โดยไม่สนใจว่า Y จะมีค่าอย่างไร) ได้เมื่อกำหนดฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X และ Y หรือเมื่อกำหนดฟังก์ชันความหนาแน่นแบบ marginal ของ X มาให้

การคำนวณค่าคาดหมายเฉพาะของ Y ก็เช่นเดียวกัน เราจึงนิยามค่าคาดหมายเฉพาะของ X และของ Y ไว้ดังนี้

นิยาม 5-2.3 X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม ที่มีฟังก์ชันการแจกแจงร่วม $f(x, y)$ ค่าคาดหมายของ X, $E(X)$, และค่าคาดหมายของ Y, $E(Y)$, จะกำหนดได้โดย

$$E(X) = \begin{cases} \sum\limits_{\forall x}\sum\limits_{\forall y} x\,f(x, y) \\ \\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x, y)\,dx\,dy \end{cases}$$

และ

$$E(Y) = \begin{cases} \sum\limits_{\forall x}\sum\limits_{\forall y} y\,f(x, y) \\ \\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y\,f(x, y)\,dx\,dy \end{cases}$$

ขึ้นอยู่กับว่า $f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันน่าจะเป็นร่วม หรือฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X กับ Y

นิยมเขียน $E(X)$ และ $E(Y)$ แทนด้วยสัญญลักษณ์ μ_X, และ μ_Y, ตามลำดับ

จากนิยาม 5-2.1 หากกำหนด $g(X, Y) = (X - \mu_X)^2$ ผลลัพธ์ที่ได้คือค่าความแปรปรวนของ X หากเราพิจารณาผลที่ได้นี้ จะเห็นว่า

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 f(x, y)\, dx\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 g(x)\, dx$$

ซึ่งเป็นนิยามของความแปรปรวนของ X นั่นเอง หากกำหนด $g(X, Y) = (X - \mu_Y)^2$ ผลลัพธ์ที่ได้ก็คือค่าของความแปรปรวนของ Y จะเห็นได้ว่าการคำนวณค่าความแปรปรวนของ X และของ Y สามารถหาค่าได้ หากกำหนดฟังก์ชันการแจกแจงแบบ marginal หรือกำหนดฟังก์ชันการแจกแจงร่วมมาให้ เรานิยามความแปรปรวนเฉพาะของ X และของ Y ไว้ดังนี้

นิยาม 5-2.4 X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม ที่มีฟังก์ชันการแจกแจงร่วม $f(x, y)$ และ μ_X, μ_Y เป็นค่าคาดหมายของ X กับของ Y ตามลำดับ ความแปรปรวนเฉพาะของ X กับของ Y กำหนดได้โดย

$$\sigma_X^2 = \begin{cases} \sum\limits_{\forall y} \sum\limits_{\forall x} (x - \mu_X)^2 f(x, y) \\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 f(x, y)\, dxdy \end{cases}$$

และ

$$\sigma_Y^2 = \begin{cases} \sum\limits_{\forall y} \sum\limits_{\forall x} (y - \mu_Y)^2 f(x, y) \\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (y - \mu_Y)^2 f(x, y)\, dxdy \end{cases}$$

ขึ้นอยู่กับว่า X และ Y จะเป็นตัวแปรแบบไม่ต่อเนื่องหรือแบบต่อเนื่อง

ตัวอย่างที่ 5-2.2 ให้

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{5}(2x + xy + 1) \quad , \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 2 \\ &= 0 \quad , \quad \text{อื่น ๆ} \end{aligned}$$

เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X กับ Y จงหา

1) ฟังก์ชันความหนาแน่นแบบ marginal ของ X

2) ค่าคาดหมายและความแปรปรวนของ X

3) ค่าคาดหมายและความแปรปรวนของ 5 − 3Y

วิธีทำ

1) ให้ g(x) เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นแบบ marginal ของ X ดังนั้น

$$g(x) = \int_0^2 (2x + xy + 1)/5 \, dy$$

$$= (2x \cdot 2 + x \cdot 2^2/2 + 2)/5 = \frac{2}{5}(3x + 1) \quad , \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$$

$$= 0 \quad , \quad \text{อื่น ๆ}$$

2) ค่าคาดหมายของ X, E(X)

$$= \int_0^1 (2x/5)(3x + 1) \, dx = (2/5)(1 + \frac{1}{2}) = 3/5$$

$$E(X^2) \int_0^1 (2x^2/5)(3x + 1) dx = (2/5)(3/4 + 1/3) = 13/30$$

ความแปรปรวนของ X = (13/30 − 9/25) = 11/150

3) $$E(Y) = \int_0^2 \int_0^1 (y/5)(2x + xy + 1) \, dx \, dy$$

$$= \int_0^2 (y/5)(2(1/2) + y/2 + 1) \, dy$$

$$= \int_0^2 (y/5)(2 + y/2) \, dy = \frac{1}{5}(2^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2^3}{3}) = 16/15$$

$$E(Y^2) = \int_0^2 (y^2/5)(2 + y/2) \, dy = \frac{1}{5}(2 \cdot \frac{2^3}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2^4}{4}) = 22/15$$

ค่าคาดหมายของ 5 − 3Y $= 5 - 3 \cdot \frac{16}{15} = \frac{9}{5}$

ความแปรปรวนของ 5 − 3Y $= 9\sigma_Y^2 = 9\left(\frac{22}{15} - \frac{256}{225}\right) = \frac{74}{25}$

ทฤษฎีที่ 5-2.1 ค่าคาาดหมายของผลบวกหรือผลต่างของฟังก์ชันของตัวแปรเชิงสุ่ม X และ Y ตั้งแต่ 2 ฟังก์ชันขึ้นไป ก็คือ ผลบวกหรือผลต่างของค่าคาดหมายของฟังก์ชัน กล่าวคือ

$$E[g(X, Y) \pm h(X, Y)] = E[g(X, Y)] \pm E[h(X, Y)]$$

พิสูจน์ อาศัยนิยาม 5-2.1

$$E[g(X, Y) \pm h(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [g(x, y) \pm h(x, y)] f(x, y)\, dx\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f(x, y)\, dxdy \pm \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) f(x, y)\, dxdy$$

$$= E[g(X, Y)] \pm E[h(X, Y)]$$

บทแทรก กำหนด $g(X, Y) = X$ และ $h(X, Y) = Y$ จะเห็นว่า

$$E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$$

หาก X เป็นรายได้ต่อเดือนของชายคนหนึ่ง และ Y เป็นรายจ่ายต่อเดือนของชายคนนี้ แล้ว X − Y จะเป็นเงินสะสมต่อเดือน บทแทรกของทฤษฎี 5-2.1 กล่าวว่า เงินสะสมโดยเฉลี่ยต่อเดือนของชายคนหนึ่ง จะเท่ากับ ผลต่างของรายได้โดยเฉลี่ยต่อเดือนกับรายจ่ายโดยเฉลี่ยต่อเดือน

ทฤษฎี 5-2.2 X และ Y เป็นตัวแปรที่เป็นอิสระต่อกัน และมีฟังก์ชันความหนาแน่นร่วม f(x, y) ค่าคาดหมายของผลคูณระหว่างฟังก์ชัน u(X) กับฟังก์ชัน v(Y) จะเท่ากับผลคูณระหว่างค่าคาดหมายของฟังก์ชัน u(X) กับค่าคาดหมายของฟังก์ชัน v(Y) กล่าวคือ

$$E[u(X) \cdot v(Y)] = E[u(X)]\, E[v(Y)]$$

พิสูจน์ อาศัยนิยาม 5-2.1

$$E[u(X) \cdot v(Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u(x)\, v(y)\, f(x, y)\, dxdy$$

เนื่องจาก X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน เราจึงได้

$$f(x, y) = g(x) \cdot h(y)$$

ในเมื่อ g(x) และ h(y) เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นแบบ marginal ของ X และของ Y ตามลำดับ ดังนั้น

$$E[u(X) \cdot v(Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u(x)\, v(y)\, g(x)\, h(y)\, dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\, g(x)\, dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} v(y)\, h(y)\, dy$$

$$= E[u(X)] \cdot E[v(Y)]$$

หาก $u(X) = X$ และ $v(Y) = Y$ จะเห็นว่า

$$E(XY) = E(X)\, E(Y)$$

ตัวอย่างที่ 5-2.3 X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน และมีฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมกำหนดไว้โดย

$$f(x, y) = \frac{1}{5}(3x + 2xy) \quad , \quad 0 < x < 1, 0 < y < 2$$
$$= 0 \quad , \quad \text{อื่น ๆ}$$

จงแสดงให้เห็นจริงว่า

$$E(XY) = E(X)\, E(Y)$$

วิธีทำ

$$E(XY) = \int_0^2\int_0^1 \frac{xy}{5}(3x + 2xy)\, dxdy$$

$$= \int_0^2 \frac{y}{5}(1 + \frac{2}{3}y)\, dy \qquad = \frac{1}{5}(\frac{4}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{8}{3}) = \frac{34}{45}$$

$$E(X) = \int_0^2\int_0^1 \frac{x}{5}(3x + 2xy)\, dxdy \qquad = \frac{1}{5}(2 + \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{2}) = \frac{2}{3}$$

$$E(Y) = \int_0^2 \int_0^1 \frac{y}{5}(3x + 2xy)\,dxdy = \frac{17}{15}$$

$$E(X)\,E(Y) = \frac{2}{3}\cdot\frac{17}{15} = \frac{34}{45}$$

แสดงว่า $E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$

จากนิยาม 5-2.1 หากกำหนด $g(X, Y) = (X - \mu_X)(Y - \mu_Y)$ ในเมื่อ $\mu_X = E(X)$ และ $\mu_Y = E(Y)$ ผลลัพธ์ที่ได้จะเป็นค่าจริงที่คงที่ ซึ่งเรียกว่า ความแปรปรวนร่วม (covariance) ของ X กับ Y นิยมเขียนแทนด้วยสัญญลักษณ์ Cov (X, Y) หรือ σ_{XY} เราจึงนิยามความแปรปรวนร่วมระหว่าง X กับ Y ไว้ดังนี้

นิยาม 5-2.5 X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม ที่มีการแจกแจงร่วม f(x, y) และมี $\mu_X = E(X)$ $\mu_Y = E(Y)$ ความแปรปรวนร่วมของ X กับ Y จะกำหนดได้โดย

$$\text{Cov}(X, Y) = E[\{X - E(X)\}\{Y - E(Y)\}] \begin{cases} \sum\limits_{\forall x}\sum\limits_{\forall y} (x - \mu_X)(y - \mu_Y) f(x, y) \\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)(y - \mu_Y) f(x, y)\,dx\,dy \end{cases}$$

ขึ้นอยู่กับว่า X กับ Y จะเป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบไม่ต่อเนื่องหรือแบบต่อเนื่อง

ทฤษฎี 5-2.3 X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีค่าเฉลี่ย $\mu_X = E(X)$ และ $\mu_Y = E(Y)$ ความแปรปรวนร่วมระหว่าง X กับ Y กำหนดได้โดย

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(XY) - \mu_X\mu_Y$$

พิสูจน์ อาศัยนิยาม 5-2.5

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] \\ &= E(XY - \mu_X Y - \mu_Y X - \mu_X\mu_Y) \end{aligned}$$

อาศัยทฤษฎี 5-2.1 และบทแทรก 1 ของทฤษฎี 5.1 จะได้

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= E(XY) - \mu_X E(Y) - \mu_Y E(X) + E(\mu_X\mu_Y) \\ &= E(XY) - \mu_X\mu_Y - \mu_Y\mu_X + \mu_X\mu_Y = E(XY) - \mu_X\mu_Y \end{aligned}$$

บทแทรก ถ้า X และ Y เป็นอิสระต่อกันแล้ว ความแปรปรวนร่วม Cov (X, Y) = 0 (เป็นการบ้านให้นักศึกษาพิสูจน์)

บทกลับไม่จริง กล่าวคือ หากความแปรปรวนร่วม Cov (X, Y) = 0 X และ Y อาจเป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน หรือเป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่พึ่งพิงกันก็ได้

ตัวอย่างที่ 5-2.4 กำหนด

$$
\begin{aligned}
f(x, y) &= \frac{1}{8}(x^2 - y^2)e^{-x} \quad , \quad x \geqslant 0, \ -x \leqslant y \leqslant x \\
&= 0 \quad , \quad \text{อื่น ๆ}
\end{aligned}
$$

เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X และ Y จงแสดงให้เห็นจริงว่า ความแปรปรวนร่วม Cov (X, Y) เป็น 0 แต่ X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่พึ่งพิงกัน

วิธีทำ

$$E(XY) = \int_0^\infty \int_{-x}^{x} \frac{xy}{8}(x^2 - y^2)e^{-x}\,dydx$$

$$E(XY) = \int_0^\infty \frac{x}{8}\left(x^2 \cdot \frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4}\right)e^{-x} \Big|_{y=-x}^{y=x} dx = 0$$

$$E(X) = \int_0^\infty \int_{-x}^{x} \frac{x}{8}(x^2 - y^2)e^{-x}dydx = \int_0^\infty \frac{1}{6}x^4 e^{-x}dx = 4$$

$$E(Y) = \int_0^\infty \int_{-x}^{x} \frac{y}{8}(x^2 - y^2)e^{-x}\,dy\,dx = 0$$

จะเห็นว่า

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$$

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \int_{-x}^{x} \frac{1}{8}(x^2 - y^2)e^{-x}dy = \frac{1}{6}x^3e^{-x} \quad , \quad x \geqslant 0 \\
&= 0 \quad , \quad \text{อื่น ๆ}
\end{aligned}
$$

$$
h(y) = \begin{cases} \displaystyle\int_y^\infty \frac{1}{8}(x^2 - y^2)e^{-x}dx \quad , \quad y \geqslant 0 \\[2ex] \displaystyle\int_{-y}^\infty \frac{1}{8}(x^2 - y^2)e^{-x}\,dx \quad , \quad y \leqslant 0 \end{cases}
$$

$$
= \begin{cases} \int_0^\infty \frac{1}{8}(u^2 + 2uy)\, e^{-u-y} du & (U = X - Y) \\ \int_0^\infty \frac{1}{8}(u^2 - 2uy)\, e^{-u+y} du & (U = X + Y) \end{cases}
$$

$$
= \begin{cases} \frac{1}{8}(2 + 2y)\, e^{-y} & , \quad y \geqslant 0 \\ \frac{1}{8}(2 - 2y)\, e^{y} & , \quad y \leqslant 0 \end{cases}
$$

$$g(x)\, h(y) \neq f(x, y)$$

แสดงว่า X และ Y ไม่เป็นอิสระต่อกัน

สรุปว่า ความแปรปรวนร่วม Cov (X, Y) = 0 แต่ X และ Y เป็นตัวแปรที่พึ่งพิงกัน

ทฤษฎี 5-2.4 ถ้า X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีการแจกแจงร่วม a และ b เป็นค่าคงที่ใด ๆ แล้ว

$$Var(aX + bY) = a^2Var(X) + b^2Var(Y) + 2abCov(X, Y)$$

พิสูจน์

$$Var(aX + bY) = E\,[\,\{(aX + bY) - E(aX + bY)\}^2\,]$$

อาศัยทฤษฎี 5-2.1 และบทแทรก 1 ของทฤษฎี 5.1 จะเห็นว่า

$$
\begin{aligned}
Var(aX + bY) &= E\,[\,\{aX + bY - aE(X) - bE(Y)\}^2\,] \\
&= a^2E\,[\,\{X - E(X)\}^2\,] + b^2E\,[\,\{Y - E(Y)\}^2\,] \\
&\qquad + 2abE\,[\,\{X - E(X)\} \cdot \{Y - E(Y)\}\,] \\
&= a^2Var(X) + b^2Var(Y) + 2abCov(X, Y)
\end{aligned}
$$

บทแทรก ถ้า X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน แล้ว

$$Var(aX + bY) = a^2Var(X) + b^2Var(Y)$$

ตัวอย่างที่ 5-2.5 X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน มีฟังก์ชันความหนาแน่นของ X, g(x), และของ Y, h(y), กำหนดไว้โดย

$$g(x) = \frac{1}{3} \quad , \quad -1 < x < 2$$

$$h(y) = \frac{1}{2}(1 + 3y^2) \quad , \quad 0 < y < 1$$

นอกนั้นเป็น 0 จงคำนวณค่าของ E(8XY), Var(3X + 4Y)

วิธีทำ

$$E(X) = \int_{-1}^{2} \frac{x}{3}\,dx = \frac{1}{2}$$

$$E(Y) = \int_{0}^{1} \frac{y}{2}(1 + 3y^2)\,dy = \frac{5}{8}$$

$$E(X^2) = \int_{-1}^{2} \frac{x^2}{3}\,dx = 1$$

$$E(Y^2) = \int_{0}^{1} \frac{y^2}{2}(1 + 3y^2)\,dy = \frac{7}{15}$$

X และ Y เป็นตัวแปรที่เป็นอิสระต่อกัน ดังนั้น

$$E(8XY) = 8E(X)\,E(Y) = 8\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{5}{8}\right) = 2.5$$

$$\begin{aligned} Var(3X + 4Y) &= 9Var(X) + 16Var(Y) \\ &= 9\left(1 - \frac{1}{4}\right) + 16\left(\frac{7}{15} - \frac{25}{64}\right) = 7.97 \end{aligned}$$

จากนิยาม 5-2.5 เมื่อเราพิจารณาค่าของความแปรปรวนร่วมระหว่าง X กับ Y จะเห็นว่า ค่าของ Cov(X, Y) อาจจะเป็นบวกหรือลบก็ได้ ความแปรปรวนร่วมจะมีค่าเป็นบวก หากค่าของ X มากกว่า μ_X และค่าของ Y มากกว่า μ_Y ซึ่งแสดงว่า ค่าของ X และ Y มีค่าเพิ่มด้วยกันทั้งคู่หรือลดลงด้วยกันทั้งคู่ ในทางตรงกันข้าม ความแปรปรวนร่วมจะมีค่าเป็นลบ หากค่าของ X น้อยกว่า μ_X แต่ค่าของ Y มากกว่า μ_Y หรือค่าของ X มากกว่า μ_X แต่ค่าของ Y น้อยกว่า μ_Y ซึ่งแสดงว่า ค่าของ X ลดลงในขณะที่ค่าของ Y เพิ่มขึ้น หรือค่าของ X เพิ่มขึ้นในขณะที่ค่าของ Y ลดลง และเมื่อ X กับ Y เป็นอิสระต่อกัน ค่าของความแปรปรวนจะเป็น 0 เราจึงกล่าวได้ว่า ความแปรปรวนร่วมใช้เป็นตัววัดความสัมพันธ์ระหว่าง X กับ Y ได้

ค่าของความแปรปรวนร่วมจะเป็นเลขจริง และมีหน่วยเป็นผลคูณระหว่างหน่วยของ X กับหน่วยของ Y เช่น X เป็นน้ำหนักของนักศึกษามีหน่วยเป็นกิโลกรัม Y เป็นความสูงของนักศึกษามีหน่วยเป็นเซ็นติเมตร ค่าของความแปรปรวนร่วมระหว่าง X กับ Y จะมีหน่วยเป็น กิโลกรัม-เซ็นติเมตร อย่างไรก็ตาม กรณีที่เราต้องการพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่าง X กับ Y ว่าจะมีความสัมพันธ์มากน้อยขนาดไหน ความแปรปรวนร่วมระหว่าง X กับ Y ควรมีค่าสูงสุดหรือต่ำสุดเท่าใดเราไม่อาจกำหนดได้ชัดเจน ในทางปฏิบัติเราจึงไม่นิยมใช้ความแปรปรวนร่วมเป็นตัววัดความสัมพันธ์ระหว่าง X กับ Y และโดยที่ X กับ Y เราบรรยายลักษณะได้ด้วยค่าเฉลี่ย และความแปรปรวน ดังนั้นตัววัดที่ดีที่จะใช้วัดความสัมพันธ์ระหว่าง X กับ Y จึงควรอยู่ในเทอมของค่าเหล่านี้ เราจึงกำหนดตัววัดขึ้นใหม่ ซึ่งเป็นอัตราส่วนระหว่างความแปรปรวนร่วม, Cov(X, Y), กับ ผลคูณของส่วนเบี่ยงเบนของ X, σ_X, และของ Y, σ_Y, ซึ่งจะได้ผลลัพธ์เป็นตัวเลขที่ไม่มีหน่วย เรียกค่าที่ได้นี้ว่า สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ (correlation coefficient) ระหว่าง X กับ Y เขียนแทนด้วยสัญญลักษณ์ $\rho(X, Y)$ หรือ ρ_{XY} และนิยามไว้ดังต่อไปนี้

นิยาม 5-2.6 X กับ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีความแปรปรวนร่วม Cov(X, Y) และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน $\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$, $\sigma_Y = \sqrt{\mathrm{Var}(Y)}$ สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ระหว่าง X กับ Y จะกำหนดได้ดังนี้

$$\rho_{XY} = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$$

ส.ป.ส.สหสัมพันธ์เป็นค่าจริงที่ไม่มีหน่วย ใช้วัดองศาแห่งความสัมพันธ์ระหว่าง X กับ Y ค่าที่ได้นี้จะบอกขนาดและความสัมพันธ์ระหว่าง X กับ Y ρ มีค่าอยู่ระหว่าง +1 กับ −1 เมื่อ ρ เป็นบวก แสดงว่า X กับ Y มีค่าเพิ่มขึ้นด้วยกันหรือลดลงด้วยกัน และเมื่อ ρ เป็นลบ แสดงว่าค่าของ X กับ Y สวนทางกัน เช่นเมื่อ X เพิ่มขึ้น Y จะลดลง เมื่อ $\rho = +1$ แสดงว่า X กับ Y มีความสัมพันธ์ร่วมอย่างสมบูรณ์ และมีการเปลี่ยนแปลงไปทางเดียวกัน แต่ถ้า $\rho = -1$ แสดงว่า X กับ Y มีความสัมพันธ์ร่วมอย่างสมบูรณ์แต่เปลี่ยนแปลงในทางตรงข้ามกัน และถ้า $\rho = 0$ แสดงว่า X กับ Y ไม่มีสหสัมพันธ์กัน

ตัวอย่างที่ 5-2.6 กำหนดฟังก์ชันน่าจะเป็นร่วมของ X และ Y โดย

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (x + y)/21 \quad , \; x = 1, 2, 3;\; y = 1, 2 \\ &= 0 \qquad\qquad\quad , \; \text{อื่น ๆ} \end{aligned}$$

จงคำนวณค่าของ E(X), E(Y), Var(X), Var(Y), Cov(X, Y) และ ρ_{XY}

วิธีทำ

$$E(x) = \sum_{y=1}^{2} \sum_{x=1}^{3} \frac{x(x+y)}{21} = \sum_{y=1}^{2} \frac{14+6y}{21} = \frac{46}{21}$$

$$E(Y) = \sum_{y=1}^{2} \sum_{x=1}^{3} \frac{y(x+y)}{21} = \sum_{y=1}^{2} \frac{y(6+3y)}{21} = \frac{11}{7}$$

$$E(X^2) = \sum_{y=1}^{2} \sum_{x=1}^{3} \frac{x^2(x+y)}{21} = \sum_{y=1}^{2} \frac{36+14y}{21} = \frac{38}{7}$$

$$E(Y^2) = \sum_{y=1}^{2} \sum_{x=1}^{3} \frac{y^2(x+y)}{21} = \sum_{y=1}^{2} \frac{y^2(6+3y)}{21} = \frac{19}{7}$$

$$E(XY) = \sum_{y=1}^{2} \sum_{x=1}^{3} \frac{xy(x+y)}{21} = \sum_{y=1}^{2} \frac{y(14+6y)}{21} = \frac{24}{7}$$

$$Var(X) = 38/7 - (46/21)^2 = 278/441$$

$$Var(Y) = 19/7 - (11/7)^2 = 12/49$$

$$Cov(X, Y) = 24/7 - (46/21)(11/7) = -2/147$$

$$\Rightarrow \quad \rho_{XY} = \frac{-\frac{2}{147}}{\sqrt{\frac{278}{441} \cdot \frac{12}{49}}} = -0.03$$

ตัวอย่างที่ 5-2.7 กำหนดฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X กับ Y ดังนี้

$$f(x, y) = 8xy \ , \quad 0 < x < y < 1$$
$$= 0 \ , \quad \text{อื่น ๆ}$$

จงคำนวณค่าของ E(X), E(Y), Var(X), Var(Y), Cov(X, Y) และ ρ_{XY}

วิธีทำ

$$E(X) = \int_0^1 \int_0^y 8x^2y \, dx \, dy = \frac{8}{3} \int_0^1 y^4 dy = \frac{8}{15}$$

$$E(Y) = \int_0^1 \int_0^y 8xy^2 \, dx \, dy = 4 \int_0^1 y^4 dy = \frac{4}{5}$$

$$E(X^2) = \int_0^1 \int_0^y 8x^3y \, dx \, dy = 2 \int_0^1 y^5 dy = \frac{1}{3}$$

$$E(Y^2) = \int_0^1 \int_0^y 8xy^3 \, dx \, dy = 4 \int_0^1 y^5 dy = \frac{2}{3}$$

$$E(XY) = \int_0^1 \int_0^y 8x^2y^2 dx \, dy = \frac{8}{3} \int_0^1 y^5 dy = \frac{4}{9}$$

ดังนั้น

$$\mathrm{Var}(X) = (1/3) - (8/15)^2 = 11/225$$

$$\mathrm{Var}(Y) = (2/3) - (4/5)^2 = 2/75$$

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = (4/9) - (8/15)(4/5) = 4/225$$

และ $\rho_{XY} = \dfrac{4/225}{\sqrt{(11/225)\,(2/75)}} = .49$

จากนิยาม 5-2.2 เราพิจารณา $E \mid g(X_1, X_2, \ldots, X_n) \mid$ ในแต่ละกรณีดังต่อไปนี้ หาก $g(X_1, X_2, \ldots, X_n) = X_i$ จะเห็นว่า ผลลัพธ์ที่ได้คือค่าของ $E(X_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ ดังนั้น

$$\mu_i = E(X_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} x_i \, f(x_1, \ldots, x_n) \, dx_1 \ldots dx_n \qquad \ldots\ldots\ldots(5\text{-}2.7)$$

หาก $g(X_1, X_2, \ldots, X_n) = (X_i - \mu_i)^2$ ในเมื่อ $\mu_i = E(X_i)$ จะเห็นว่าผลลัพธ์ที่ได้จากนิยาม 5-2.2 คือค่าของ $\mathrm{Var}(X_i)$ หรือ σ_i^2, $i = 1, 2, \ldots, n$ กล่าวคือ

$$\sigma_i^2 = E \mid (X_i - \mu_i)^2 \mid = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - \mu_i)^2 \, f(x_1, \ldots, x_n) \, dx_1 \ldots dx_n \qquad \ldots\ldots\ldots(5\text{-}2.8)$$

หาก $g(X_1, X_2, \ldots, X_n) = (X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)$, $i \neq j$ ในเมื่อ $\mu_i = E(X_i)$, $\mu_j = E(X_j)$ จะเห็นว่า ผลลัพธ์ที่ได้จากนิยาม 5-2.2 คือค่าความแปรปรวนร่วมของ X_i กับ X_j

กล่าวคือ

$$\sigma_{ij} = E \mid (X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j) \mid$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j) \, f(x_1, \ldots, x_n) \, dx_1 \ldots dx_n \qquad \ldots\ldots\ldots(5\text{-}2.9)$$

อาศัยนิยาม 5-2.6 จะเห็นว่า ส.ป.ส.สหสัมพันธ์ระหว่าง X_i กับ X_j กำหนดได้โดย

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \cdot \sigma_j} \qquad \text{.........(5-2.10)}$$

ในเมื่อ $\sigma_{ij} = \text{Cov}(X_i, X_j)$ และ $\sigma_i^2 = \text{Var}(X_i)$, $\sigma_j^2 = \text{Var}(X_j)$

ทฤษฎีที่ 5-2.5 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบพหุคูณ ที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นร่วม $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ กำหนด $Y = \sum_{i=1}^{n} a_iX_i$ เมื่อ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ เป็นค่าคงที่ ค่าคาดหมาย และความแปรปรวนของ Y กำหนดได้โดย

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{n} a_i\mu_i \quad \text{และ} \quad \sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_ia_j\,\sigma_{ij}$$

พิสูจน์

$$E(Y) = E\left[\sum_{i=1}^{n} a_iX_i\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots\cdots \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} a_ix_i\right) f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots\cdots \int_{-\infty}^{\infty} a_1x_1\, f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n + \ldots$$

$$\ldots + \int_{-\infty}^{\infty} \cdots\cdots \int_{-\infty}^{\infty} a_nx_n\, f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n$$

$$= a_1 E(X_1) + a_2E(X_2 + \ldots + a_n E(X_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i\mu_i$$

$$\sigma_Y^2 = E\left[\{(Y - E(Y)\}^2\right] = E\left[\left\{\sum_{i=1}^{n} a_iX_i - \sum_{i=1}^{n} a_i\mu_i\right\}^2\right]$$

$$= E\left[\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i(X_i - \mu_i)\right\}^2\right]$$

$$= E\left[\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i (X_i - \mu_i)\right\}\left\{\sum_{j=1}^{n} a_j (X_j - \mu_j)\right\}\right]$$

$$= E\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j (X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j E\left[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)\right] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j \sigma_{ij}$$

บทแทรกที่ 1 ถ้า $Y = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ และ $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ **เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระ**ซึ่งกันและกัน เราจะได้

$$\sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2$$

(เป็นแบบฝึกหัดให้นักศึกษาพิสูจน์)

บทแทรก 2 ถ้า $Y = aX + b$ **ในเมื่อ** a **และ** b **เป็นค่าคงที่**

$$E(Y) = a E(X) + b, \ Var(Y) = a^2 Var(X)$$

ซึ่งเป็นทฤษฎี 5.1 นั่นเอง

ทฤษฎีที่ 5-2.6 กำหนด U และ V เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นของตัวแปรเชิงสุ่ม $X_1, X_2, \ldots, X_n$ สองฟังก์ชัน โดย $U = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$, $V = \sum_{j=1}^{n} b_j X_j$ ความแปรปรวนร่วมของ U กับ V กำหนดได้โดย

$$\sigma_{UV} = \sum_i \sum_j a_i b_j \sigma_{ij}$$

พิสูจน์

$$E[(U - \mu_U)(V - \mu_V)] = E\left[\left(\sum_i a_i X_i - \sum_i a_i \mu_i\right)\left(\sum_j b_j X_j - \sum_j b_j \mu_j\right)\right]$$

$$\Rightarrow \sigma_{UV} = E\left[\left\{\sum_i a_i (X_i - \mu_i)\right\}\left\{\sum_j b_j (X_j - \mu_j)\right\}\right]$$

$$= E\left[\sum_i \sum_j a_i b_j (X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)\right]$$

$$= \sum_i \sum_j a_i b_j \sigma_{ij}$$

บทแทรกที่ 1 ถ้า $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระซึ่งกันและกัน

$$\sigma_{UV} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \sigma_i^2$$

บทแทรกที่ 2 ถ้า $U = aX + b$ และ $V = cY + d$ **ความแปรปรวนร่วมระหว่าง U กับ V** กำหนดได้โดย

$$\sigma_{UV} = ac\sigma_{XY}$$

ในกรณีพิเศษ ถ้า $X = Y$ แล้ว $\sigma_{UV} = ac\sigma_X^2$

ทฤษฎีที่ 5-2.7 ถ้า $U = aX + b$ และ $V = cY + d$ แล้ว

$$\rho_{UV} = \rho_{XY}$$

(เป็นแบบฝึกหัดให้นักศึกษาพิสูจน์)

ทฤษฎีที่ 5-2.8 สำหรับตัวแปรเชิงสุ่ม X, Y ทุกคู่ ที่ ρ_{XY} สามารถหาค่าได้ เราจะได้

$$-1 \leqslant \rho_{XY} \leqslant 1$$

พิสูจน์

ให้ $U = (X - \mu_X)/\sigma_X$ และ $V = (Y - \mu_Y)/\sigma_Y$

ดังนั้น $E(U) = E[(X - \mu_X)/\sigma_X] = [E(X) - \mu_X]/\sigma_X = 0$

ทำนองเดียวกัน $E(V) = 0$

$$\sigma_U^2 = \mathrm{Var}[(X - \mu_X)/\sigma_X] = \mathrm{Var}(X)/\sigma_X^2 = 1$$

ทำนองเดียวกัน $\sigma_V^2 = 1$

$$\rho_{UV} = \sigma_{UV} = E(UV) = E\left[\left\{\frac{X - \mu_X}{\sigma_X}\right\}\left\{\frac{Y - \mu_Y}{\sigma_Y}\right\}\right] = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y} = \rho_{XY}$$

ดังนั้นเราจะได้ $\sigma_{(U+V)}^2 = \sigma_U^2 + \sigma_V^2 + 2\sigma_{UV} = 2 + 2\rho_{UV}$

และ $\sigma_{(U-V)}^2 = \sigma_U^2 + \sigma_V^2 - 2\sigma_{UV} = 2 - 2\rho_{UV}$

เนื่องจากความแปรปรวนมีค่าเป็นบวกเสมอ ดังนั้นเราจะได้

$$2 + 2\rho_{UV} \geqslant 0 \text{ หรือ } \rho_{UV} \geqslant -1$$

และ $2 - 2\rho_{UV} \geq 0$ หรือ $\rho_{UV} \leq 1$

นั่นคือ $-1 \leq \rho_{UV} \leq 1$

หรือ $-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$

ตัวอย่างที่ 5-2.8 X, Y และ Z เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม ที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมกำหนดไว้โดย

$$f(x, y, z) = \frac{1}{15}(2xyz + 1) \quad , \quad 0 < x < 1, 0 < y < 2, 0 < z < 3$$
$$= 0 \quad , \quad \text{อื่น ๆ}$$

จงคำนวณค่าของ E(2X − 3Y + 5Z), Cov(2X, Y), Var(2X − 3Z) และ ρ_{YZ}

วิธีทำ

$$E(X) = \int_0^1 \int_0^2 \int_0^3 \frac{x}{15}(2xyz + 1)\, dzdydx$$

$$= \int_0^1 \int_0^2 \frac{x}{5}(3xy + 1)\, dydx$$

$$= \int_0^1 \frac{x}{5}(6x + 2)\, dx \qquad = \frac{3}{5}$$

$$E(Y) = \int_0^1 \int_0^2 \frac{y}{5}(3xy + 1)\, dydx \qquad = \frac{6}{5}$$

$$E(Z) = \int_0^1 \int_0^2 \int_0^3 \frac{z}{15}(2xyz + 1)\, dzdydx \qquad = \frac{9}{5}$$

ดังนั้น $E(2X - 3Y + 5Z) = 2E(X) - 3E(Y) + 5E(Z)$

$$= 2(3/5) - 3(6/5) + 5(9/5) \quad = 33/5 \quad \text{..........(1)}$$

เนื่องจาก $E(XY) = \int_0^1 \int_0^2 \frac{3xy}{15}(3xy + 1)\, dydx = \frac{11}{15}$

จะได้ $\text{Cov}(2X, Y) = 2\left(\frac{11}{15} - \frac{3}{5}\cdot\frac{6}{5}\right) \quad = \frac{2}{75} \quad \text{..........(2)}$

เนื่องจาก $\operatorname{Var}(2X - 3Z) = 4\operatorname{Var}(X) + 9\operatorname{Var}(Z) - 12\operatorname{Cov}(X, Z)$

และ

$$E(X^2) = \int_0^1 \frac{x^2}{5}(6x + 2)\,dx = \frac{13}{30}$$

$$\operatorname{Var}(X) = 13/30 - 9/25 = .11/150$$

$$E(Z^2) = \int_0^1 \int_0^2 \int_0^3 \frac{z^2}{15}(2xyz + 1)\,dzdydx = \frac{39}{10}$$

$$\operatorname{Var}(Z) = \frac{39}{10} - \frac{81}{25} = \frac{33}{50}$$

$$E(XZ) = \int_0^1 \int_0^2 \int_0^3 \frac{xz}{15}(2xyz + 1)\,dzdydx = \frac{11}{10}$$

$$\operatorname{Cov}(X, Z) = \frac{11}{10} - \frac{3}{5}\cdot\frac{9}{5} = \frac{1}{50}$$

ดังนั้น

$$\operatorname{Var}(2X - 3Z) = 4\cdot\frac{11}{150} + 9\cdot\frac{33}{50} - 12\cdot\frac{1}{50} = \frac{899}{150} \quad \text{..........(3)}$$

$$E(Y^2) = \int_0^1 \int_0^2 \frac{y^2}{5}(3xy + 1)\,dydx = \frac{26}{15}$$

$$\operatorname{Var}(Y) = \frac{26}{15} - \frac{36}{25} = \frac{22}{75}$$

$$E(YZ) = \int_0^1 \int_0^2 \int_0^3 \frac{yz}{15}(2xyz + 1)\,dzdydx = \frac{11}{5}$$

$$\operatorname{Cov}(Y, Z) = \frac{11}{5} - \frac{6}{5}\cdot\frac{9}{5} = \frac{1}{25}$$

จะเห็นว่า

$$\rho_{YZ} = \frac{\frac{1}{25}}{\sqrt{\frac{22}{75}\cdot\frac{33}{50}}} = \frac{1}{11} \quad \text{..........(4)}$$

ทฤษฎีที่กล่าวมาแล้วแสดงให้เห็นว่า ส.ป.ส.สหสัมพันธ์ เป็นตัววัดขนาดและความสัมพันธ์ของตัวแปรเชิงสุ่มแต่ละคู่ โดยที่ค่าของ ρ จะอยู่ในช่วง -1 กับ 1 เท่านั้น ทฤษฎีต่อไปนี้จะชี้ให้เห็นว่า หาก $\rho_{XY} = \pm 1$ Y และ X จะมีความสัมพันธ์กันแบบเชิงเส้น หรืออาจกล่าวได้ว่า Y เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นของ X

ทฤษฎีที่ 5-2.9 เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอที่ว่า $|\rho_{XY}| = 1$ ก็คือ จะต้องมีเลขจำนวนจริง $a \neq 0$ และ b ซึ่งมีสมบัติว่า $P(Y = aX + b) = 1$ และหาก $a > 0$ แล้ว $\rho = 1$ หาก $a < 0$ แล้ว $\rho = -1$

พิสูจน์ กำหนด $Y = aX + b$ ด้วยความน่าจะเป็น 1 ในเมื่อ $a \neq 0$

จะได้

$$\sigma_{XY} = a\sigma_X^2 \qquad \text{(บทแทรก 2 ทฤษฎี 5-2.6)}$$

และ

$$\sigma_Y^2 = a^2\sigma_X^2 \qquad \text{(บทแทรก 2 ทฤษฎี 5-2.5)}$$

ดังนั้น

$$\rho_{XY} = \frac{a\sigma_X^2}{\sqrt{\sigma_X^2\, a^2\sigma_X^2}} = \frac{a}{|a|}$$

แสดงว่า ρ มีค่าเป็น 1 หรือ -1 ขึ้นอยู่กับว่า $a > 0$ หรือ $a < 0$

สมมติว่า $\rho_{XY} = 1$ กำหนด $U = \dfrac{X - \mu_X}{\sigma_X}$ และ $V = \dfrac{Y - \mu_Y}{\sigma_Y}$

อาศัยทฤษฎีที่ 5-2.7 จะเห็นว่า $\rho_{UV} = 1$

อาศัยผลที่พิสูจน์มาแล้วในทฤษฎีที่ 5-2.8 จะเห็นว่า

หาก $\rho_{UV} = 1$ แล้ว $\sigma^2_{(U-V)} = 2 - 2\rho_{UV} = 0$

แต่ความแปรปรวนของตัวแปรเชิงสุ่มจะไม่เท่ากับ 0 เว้นแต่ว่าตัวแปรเชิงสุ่มนั้นจะมีการแจกแจงจุดเดียว (one-point distribution) กล่าวคือ ตัวแปรเชิงสุ่มจะเท่ากับค่าคงที่ ด้วยความน่าจะเป็น 1

ดังนั้น $P(U-V = C) = 1$

หาก $c = 0$ นั่นคือ $U = V$ ด้วยความน่าจะเป็น 1 เราจะได้

$$(X - \mu_X)/\sigma_X = (Y - \mu_Y)/\sigma_Y$$

ด้วยความน่าจะเป็น 1 หรือ

$$Y = \mu_Y + \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \cdot (X - \mu_X)$$

ด้วยความน่าจะเป็น 1 นั่นเอง

ในทำนองเดียวกัน หาก $\rho_{UV} = -1$ เราจะได้

$$P(U + V = 0) = 1$$

และ

$$Y = \mu_Y - \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(X - \mu_X)$$

ด้วยความน่าจะเป็น 1

จากทฤษฎีนี้ จะชี้ให้เห็นว่า ρ เป็นตัววัดขนาดของความสัมพันธ์เชิงเส้นระหว่างตัวแปรเชิงสุ่ม 2 ตัว กล่าวคือ หากสังเกตุค่าของ X ได้ ρ_{XY} จะบอกให้รู้ว่าความสัมพันธ์เชิงเส้นจะนำไปใช้ในการพยากรณ์ค่าของ Y ได้ดีเพียงไร

แบบฝึกหัดที่ 5-2

1. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม ที่มีฟังก์ชันน่าจะเป็นร่วมกำหนดไว้โดย

$$f(x) = \begin{cases} 1/4, & x = 1 \\ 1/8, & x = 2 \\ 1/2, & x = 3 \\ 1/8, & x = 4 \end{cases} \quad ; \quad f(y) = \begin{cases} 1/4, & y = 2 \\ 1/8, & y = 4 \\ 1/2, & y = 6 \\ 1/8, & y = 8 \end{cases}$$

จงคำนวณค่าของ $E(X + Y)$, $Var(X - Y)$

2. ให้ตัวแปรเชิงสุ่ม X และ Y มีฟังก์ชันน่าจะเป็นร่วมกำหนดไว้โดย

2.1) $f(x, y) = \frac{1}{3}$, $(x, y) = (0, 0), (1, 1), (2, 2)$ นอกนั้นเป็น 0

2.2) $f(x, y) = \frac{1}{3}$, $(x, y) = (0, 2), (1, 1), (2, 0)$ นอกนั้นเป็น 0

2.3) $f(x, y) = \frac{1}{3}$, $(x, y) = (0, 0), (1, 1), (2, 0)$ นอกนั้นเป็น 0

ในแต่ละกรณีจงหา ส.ป.ส. สหสัมพันธ์ระหว่าง X กับ Y

3. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันน่าจะเป็นร่วมกำหนดไว้โดย

(x, y)	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)
f(x, y)	2/15	4/15	3/15	1/15	1/15	4/15

จงคำนวณค่า ส.ป.ส. สหสัมพันธ์ระหว่าง X กับ Y

4. หาก $E(X^2)$ และ $E(Y^2)$ สามารถหาค่าได้ แล้วค่าของ $E[(X+Y)^2]$ จะสามารถหาได้ด้วย จงแสดงว่า

4.1) $E[(X+Y)^2] \leqslant 2E(X^2) + 2E(Y^2)$

4.2) $E[(tX+Y)^2] = t^2E(X^2) + 2tE(XY) + E(Y^2)$

สำหรับค่าจริงใด ๆ ของ t

4.3) อาศัยผลที่ได้จาก (4.2) ถ้า

$E[(tX+Y)^2] \geqslant 0$ แล้ว $[E(XY)]^2 \leqslant E(X^2)E(Y^2)$

5. ฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของตัวแปรเชิงสุ่ม X และ Y กำหนดไว้โดย

$$f(x, y) = 6xy(2 - x - y) \ , \ 0 \leqslant x, y \leqslant 1$$
$$= 0 \qquad , \text{ อื่น ๆ}$$

จงคำนวณค่าของ

5.1) $E(X^2Y^2 + XY + 1)$

5.2) $Cov(X, Y)$

5.3) ρ_{XY}

6. $f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X และ Y ซึ่งกำหนดไว้โดย

$$f(x, y) = \frac{1}{8}(x + y) \ , \ 0 \leqslant x, y \leqslant 2$$
$$= 0 \qquad , \text{ อื่น ๆ}$$

จงคำนวณค่าของ $E(X^2 + 3XY - Y^2)$ และ $Var(3X + 2Y)$

7. กำหนด $f(x, y) = 21x^2y^3 \ , \ 0 < x < y < 1$

$$= 0 \qquad , \text{ อื่น ๆ}$$

เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X และ Y จงคำนวณค่าของ

7.1) $E(10X + 3Y - 7)$

7.2) $Cov(X - Y, X + Y)$

7.3) $Var(4X - 3Y)$

7.4) สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ระหว่าง X กับ Y

8. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มี $E(X) = E(Y)$ และ $E(X^2) = E(Y^2)$ จงแสดงว่า

$$Cov(X - Y, X + Y) = 0$$

9. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่ $Var(X + Y) = 13$ และ $Var(X - Y) = 5$ จงหา

9.1)ความแปรปรวนร่วมระหว่าง 4X กับ Y

9.2) สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ระหว่าง X + Y กับ X ในเมื่อ Var(X) = 4

10. $X_1, X_2, \ldots, X_5$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มี $E(X_i) = 3$, $Var(X_i) = 5$ และ $Cov(X_i, X_j) = 2, i \neq j$ จงหาค่าของ $E(Y)$, σ_Y^2, σ_{YX_i} ในเมื่อ $Y = \sum_{i=1}^{5} X_i$

11. X_1, X_2 และ X_3 เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีความแปรปรวนของ $X_i = \sigma_i^2$ และความแปรปรวนร่วมระหว่าง X_i กับ $X_j = \sigma_{ij}$ จงคำนวณค่าของสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ระหว่าง

11.1) $X_1 + X_2$ กับ $X_1 - X_2$

11.2) $X_1 + X_2$ กับ $X_2 + X_3$

12. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน และมีฟังก์ชันการแจกแจงรูปเดียวกันคือ

$$f(t) = 1, 1 < t < 2$$

นอกนั้นเป็น 0 จงแสดงให้เห็นจริงว่า

12.1) $E(X/Y) = \frac{3}{2} \ln 2$

12.2) $\rho_{X(X-Y)} = \sqrt{2}/2$

13. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันน่าจะเป็นร่วม f(x, y) กำหนดไว้โดย

f(x, y)

x \ y	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$
2	$\frac{3}{16}$	0	$\frac{1}{16}$

จงแสดงให้เห็นจริงว่า Cov(X, Y) = 0 แต่ X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่พึ่งพิงกัน

14. กำหนด

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}, (x, y) \in A_1 \cup A_2 \cup A_3$$

นอกนั้นเป็น 0 เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X กับ Y จงแสดงให้เห็นจริงว่า Cov(X, Y) เท่ากับ 0 แต่ X กับ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่พึ่งพิงกัน

ในเมื่อ $A_1 = \{(x, y) : x < -c, y > 0\}$

$$A_2 = \{(x, y) : x > c, y > 0\}$$

$$A_3 = \{(x, y) : -c < x < c, y > 0\}$$

และ $\quad P(X \leqslant -c) = P(X \geqslant c) = \frac{1}{2} P(X \geqslant 0)$

โดยที่

$$P(X \geqslant 0) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

15. X, Y, Z เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน และมีความแปรปรวนเท่ากัน กำหนด

$U = X + Z$ และ $V = Y + Z$

จงแสดงให้เห็นจริงว่า

15.1) $\rho_{UZ} = \rho_{VZ} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

15.2) $\rho_{UV} = \frac{1}{2}$

5-3 ค่าคาดหมายภายใต้เงื่อนไข (CONDITIONAL EXPECTATION)

เมื่อมีตัวแปรเชิงสุ่มภายใต้เงื่อนไข Y ซึ่งรู้ค่าของ X หากกำหนดฟังก์ชันการแจกแจงภายใต้เงื่อนไขมาให้ เราสามารถหาค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของตัวแปรนี้ได้ และเรียกว่าค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนภายใต้เงื่อนไขของ $Y|X = x$ ซึ่งนิยามค่าไว้ดังต่อไปนี้

นิยาม $f(y|x)$ และ $F(y|x)$ เป็นฟังก์ชันการแจกแจงและฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ Y ภายใต้เงื่อนไขว่า $X = x$ ค่าคาดหมายและความแปรปรวนของ Y ภายใต้เงื่อนไขว่า $X = x$ จะกำหนดได้โดย

$$E[Y|X = x] = \begin{cases} \sum\limits_{\forall y} y\, f(y|x) \\ \int_{-\infty}^{\infty} y\, f(y|x)\, dy \\ \int_{-\infty}^{\infty} y\, d\, F(y|x) \end{cases} \qquad \text{..........(5-3.1)}$$

เป็นค่าคาดหมายของ $Y/X = x$ เขียนแทนด้วย $\mu_{Y|x}$

และ

$$\mathrm{Var}(Y|X = x) = E[(Y - \mu_{Y|x})^2] = \begin{cases} \sum_{\forall y} (y - \mu_{Y|x})^2 f(y|x) \\ \int_{-\infty}^{\infty} (y - \mu_{Y|x})^2 f(y|x)\, dy \\ \int_{-\infty}^{\infty} (y - \mu_{Y|x})^2\, dF(y|x) \end{cases} \quad \text{..........(5-3.2)}$$

เป็นความแปรปรวนของ $Y|X = x$ เขียนแทนด้วย $\sigma^2_{Y|x}$

เมื่อเรากระจายค่า $(Y = \mu_{Y|x})^2$ เราจะได้

$$\sigma^2_{Y|x} = \mathrm{Var}[Y|X = x] = E[Y^2|X = x] - (\mu_{Y|x})^2$$

ในเมื่อ

$$E(Y^2|X = x) = \begin{cases} \sum_{\forall y} y^2 f(y|x) \\ \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f(y|x)\, dy \end{cases}$$

(เป็นการบ้านให้นักศึกษาพิสูจน์)

ทำนองเดียวกัน เมื่อมีตัวแปรเชิงสุ่ม X ภายใต้เงื่อนไขว่า $Y = y$, $X|Y = y$, ซึ่งมีฟังก์ชันการแจกแจง $g(x|y)$ เรานิยามค่าคาดหมายและความแปรปรวนของ $X|Y = y$ โดย

$$\mu_{X|y} = E(X|Y = y) = \begin{cases} \sum_{\forall x} x g(x|y) \\ \int_{-\infty}^{\infty} x g(x|y)\, dx \\ \int_{-\infty}^{\infty} x\, dF(x|y) \end{cases} \quad \text{..........(5-3.3)}$$

$$\sigma^2_{X|y} = \mathrm{Var}(X|Y = y) = E(X^2|Y = y) - (\mu_{X|y})^2 \quad \text{..........(5-3.4)}$$

จึงกล่าวได้ว่า ค่าคาดหมายและความแปรปรวนภายใต้เงื่อนไข ก็คือค่าคาดหมายและความแปรปรวนที่คำนวณเกี่ยวกับการแจกแจงภายใต้เงื่อนไข

ตัวอย่างที่ 5-3.1 กำหนด

$$f(x, y) = 24xy,\ 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 - x$$

นอกนั้นเป็น 0 เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X และ Y จงคำนวณค่าคาดหมายและความแปรปรวนของ Y ภายใต้เงื่อนไขว่า $X = x$

วิธีทำ

$$g(x) = \int_0^{1-x} 24xy\,dy = 12x(1-x)^2,\ 0 < x < 1$$

$$f(y|x) = \frac{24xy}{12x(1-x)^2} = \frac{2y}{(1-x)^2},\ 0 < y < 1-x,\ 0 < x < 1$$

$$E(Y|X = x) = \int_0^{1-x} \frac{2y^2}{(1-x)^2}\,dy = \frac{2}{3}(1-x),\ 0 < x < 1 \qquad \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$E(Y^2|X = x) = \int_0^{1-x} \frac{2y^3}{(1-x)^2}\,dy = \frac{(1-x)^2}{2},\ 0 < x < 1$$

$$Var(Y|X = x) = \frac{(1-x)^2}{2} - \frac{4}{9}(1-x)^2 = \frac{(1-x)^2}{18},\ 0 < x < 1 \qquad \ldots\ldots\ldots(2)$$

ตัวอย่างที่ 5-3.2 $g(x|y)$ เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นของ X ภายใต้เงื่อนไขว่า $Y = y$ ซึ่งกำหนดไว้โดย

$$g(x|y) = \frac{6(x^2 + xy)}{2 + 3y},\quad 0 < x < 1,\ 0 < y < 1$$
$$= 0,\quad \text{อื่น ๆ}$$

จงหาค่าคาดหมายของ X ภายใต้เงื่อนไขว่า $Y = y,\ 0 < y < 1$ และค่าความแปรปรวนของ X ภายใต้เงื่อนไขว่า $Y = 1$

วิธีทำ

$$E(X|Y = y) = \int_0^1 x\,\frac{6(x^2 + xy)}{2 + 3y}\,dx = \frac{3 + 4y}{4 + 6y},\ 0 < y < 1 \qquad \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$E(X^2|Y = 1) = \int_0^1 x^2\,\frac{6(x^2 + xy)}{2 + 3y}\,dx\,\Big|_{y=1} = \frac{27}{50}$$

$$Var(X|Y = 1) = \frac{27}{50} - \left(\frac{3 + 4 \times 1}{4 + 6 \times 1}\right)^2 = \frac{1}{20} \qquad \ldots\ldots\ldots(2)$$

จากตัวอย่างที่ 5-3.1 จะเห็นว่า $E(Y|X = x)$ เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นของ x ซึ่งนักสถิติเรียกฟังก์ชันแบบนี้ว่า การถดถอยเชิงเส้น และให้นิยามไว้ดังนี้

นิยาม X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีการแจกแจงร่วม เรากล่าวว่า Y มีการถดถอยเชิงเส้นบน X ถ้ากราฟแสดงการถดถอยของ Y บน X เป็นกราฟเส้นตรง กล่าวคือ

$$E(Y/X = x) = \alpha + \beta X$$

ทุกค่าคงที่ α และ β

ค่าคงที่ α และ β นี้เรียกว่า ส.ป.ส.การถดถอยของ Y บน X ซึ่งเป็นพารามีเตอร์ที่ชี้บอกอย่างคร่าว ๆ ว่า Y ขึ้นอยู่กับ X อย่างไร ตัวอย่างเช่น หาก $\beta > 1$ แล้วสำหรับค่า X โต ๆ เราคาดว่า Y จะมีค่าโต ๆ โดยเฉลี่ยด้วย ในตอนต้นเราได้กล่าวถึง ส.ป.ส.สหสัมพันธ์ ρ ว่าเป็นตัววัดขนาดและชี้ให้เห็นว่า Y กับ X จะมีความสัมพันธ์กันอย่างไร นั่นก็หมายความว่า ส.ป.ส.การถดถอยและ ส.ป.ส.สหสัมพันธ์ย่อมมีความสัมพันธ์กันอย่างใกล้ชิด ซึ่งจะได้กล่าวต่อไป

เราทราบว่า ค่าคาดหมายภายใต้เงื่อนไข $\mu_{Y|x}$ ขึ้นอยู่กับค่าของ x กล่าวคือ

$$\mu_{Y|x} = E(Y|X = x) = k(x)$$

เป็นฟังก์ชันของ x

อาจมีคำถามต่อไปว่า อะไรคือค่าคาดหมายของ k(X)

กล่าวคือ

$$E[k(x)] = E[E(Y|X = x)] = ?$$

ในอีกแง่หนึ่งคำถามก็คือ อะไรเป็นค่าเฉลี่ยของค่าเฉลี่ยภายใต้เงื่อนไขของ Y คำตอบอาจจะเป็นค่าเฉลี่ยที่แท้จริงของ Y ซึ่งแสดงให้เห็นได้จากทฤษฎีต่อไปนี้

ทฤษฎี 5-3.1 สำหรับตัวแปรเชิงสุ่ม X และ Y ที่มีการแจกแจงร่วม เราจะได้

$$E[E(Y|X = x)] = E(Y)$$

และ $E[E(X|Y = y)] = E(X)$

พิสูจน์

$E(Y|X = x)$ เป็นฟังก์ชันของ x หาก X มีฟังก์ชันความหนาแน่นแบบ marginal, g(x), เราจะได้

$$E[E(Y|X = x)] = \int_{-\infty}^{\infty} E(Y|X = x)\, g(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} y f(y|x)\, dy \right] g(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y \frac{f(x, y)}{g(x)}\, dy\, g(x)\, dx \qquad \left[f(y|x) = \frac{f(x, y)}{g(x)} \right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} yf(x, y)\, dydx = E(Y)$$

ในทำนองเดียวกัน เราจะพิสูจน์ได้ว่า

$$E[\,E(X/Y = y)\,] = E(X)$$

บทแทรก หาก g(X, Y) เป็นฟังก์ชันใด ๆ ของตัวแปรเชิงสุ่ม X และ Y แล้ว

$$E[\,E(g(X, Y)/Y = y)\,] = E[\,g(X, Y)\,]$$

และ $E[\,E(g(X, Y)/X = x)\,] = E[\,g(X, Y)\,]$

(เป็นการบ้านให้นักศึกษาพิสูจน์)

ตัวอย่างที่ 5-3.3 ฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X และ Y กำหนดไว้โดย

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 2(x + y) \quad , \quad 0 < x < y < 1 \\ &= 0 \quad , \quad \text{อื่น ๆ} \end{aligned}$$

1) จงคำนวณค่าของ E(X), E(XY), E(X/Y = y) และ E(XY/Y = y)

2) จงแสดงให้เห็นจริงว่า

$$E[\,E(X/Y = y)\,] = E(X)$$

และ $E[\,E(XY/Y = y)\,] = E(XY)$

วิธีทำ

1)

$$E(X) = \int_0^1 \int_0^y x \cdot 2(x + y)\, dxdy = \int_0^1 \frac{5y^3}{3}\, dy = 5/12$$

$$E(XY) = \int_0^1 \int_0^y xy \cdot 2(x + y)\, dxdy = \int_0^1 \frac{5y^4}{3} = 1/3$$

$$h(y) = \int_0^y 2(x + y)\, dy = 3y^2 ,\ 0 < y < 1$$

$$f(x|y) = \frac{2(x + y)}{3y^2} ,\ 0 < x < y,\ 0 < y < 1$$

$$E(X|Y = y) = \int_0^y x \cdot 2(x + y)/3y^2\, dx = 5y/9 ,\ 0 < y < 1$$

$$E(XY|Y = y) = \int_0^y xy.\, 2(x + y)/3y^2\, dx = 5y^2/9 \quad < y < 1$$

2) $E[E(X|Y = y)] = \int_0^1 (5y/9)(3y^2)\, dy = 5/12$

แสดงว่า $E\,|\,E(X|Y = y)\,| = E(X)$

$$E\,|\,E(XY|Y = y)\,| = \int_0^1 (5y^2/9)(3y^2)\, dy = 1/3$$

แสดงว่า $E\,|\,E(XY|Y = y)\,| = E(XY)$

อาศัยทฤษฎี 5-3.1 เราจะได้ทฤษฎีที่แสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่าง ส.ป.ส.การถดถอยกับ ส.ป.ส.สหสัมพันธ์ ดังต่อไปนี้

ทฤษฎี 5-3.2 กำหนด X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีการแจกแจงร่วม ถ้าเส้นถดถอยของ Y บน X คือ $E(Y|X = x) = \alpha + \beta X$ แล้ว

$$\alpha = \mu_Y - \beta\mu_X$$

$$\beta = (\sigma_Y/\sigma_X)\rho$$

ในเมื่อ $\mu_X, \mu_Y, \sigma_X > 0, \sigma_Y > 0$ และ ρ เป็นค่าเฉลี่ย ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และ ส.ป.ส. สหสัมพันธ์ของ X และ Y ตามลำดับ

พิสูจน์ อาศัยทฤษฎี 5-3.1 เราจะได้

$$E\,|\,E(Y|X = x)\,| = E(Y) = \mu_Y$$

และ $E(\alpha + \beta X) = \alpha + \beta\mu_X$ (ทฤษฎี 5.1)

เราจะได้

$$\mu_Y = \alpha + \beta\mu_X \quad \text{..........(1)}$$

เนื่องจาก $E(Y|X = x) = \alpha + \beta X$ ดังนั้น

$$\int_{-\infty}^{\infty} yf(y|x)\, dy = \alpha + \beta X$$

เอา g(x) คูณทั้งสองข้าง จะได้

$$\int_{-\infty}^{\infty} yf(x, y)\, dy = \alpha g(x) + \beta X g(x) \quad (f(y|x) = f(x, y)/g(x))$$

เอา x คูณทั้งสองข้าง แล้ว integrate ตามค่าของ x จะได้

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x, y)\, dydx = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha x g(x)\, dx + \int_{-\infty}^{\infty} \beta x^2 g(x) dx$$

นั่นคือ

$$E(XY) = \alpha\mu_X + \beta E(X^2) \quad \text{..........(2)}$$

(1) คูณด้วย μ_X จะได้

$$\mu_X\mu_Y = \alpha\mu_X + \beta(\mu_X)^2 \qquad \text{..........(3)}$$

(2) − (3), $\quad \mathrm{Cov}(X, Y) = \beta\sigma_X^2$

นั่นคือ $\quad \beta = \mathrm{Cov}(X, Y)/\sigma_X^2 = (\sigma_Y/\sigma_X)\,\rho$

หากแทนค่า α และ β ในสมการการถดถอย $Y = \alpha + \beta X$ เราจะได้

$$Y = \mu_Y + \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\,\rho\,(X - \mu_X)$$

หรือ

$$Y - \mu_Y = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\,\rho\,(X - \mu_X)$$

ผลที่ตามมาก็คือ เราจะได้บทแทรกดังนี้

บทแทรก ตัวแปรเชิงสุ่ม X และ Y มี $\mu_X, \mu_Y, \sigma_X, \sigma_Y$ และ ρ เป็นค่าเฉลี่ย ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และ ส.ป.ส. สหสัมพันธ์ตามลำดับ ถ้า Y มีการถดถอยเชิงเส้นบน X แล้ว เส้นถดถอยจะผ่านจุด (μ_X, μ_Y) และมีความชัน (slope) เท่ากับ $(\sigma_Y/\sigma_X)\,\rho$

หาก Y มีการถดถอยบน X ก็ไม่ได้หมายความว่า X จะต้องมีการถดถอยบน Y เสมอไป

ตัวอย่างที่ 5-3.4 X และ Y มีฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมกำหนดไว้โดย

$$f(x, y) = \begin{cases} 3(1 - x) & , \ 0 < x < y < 1 \\ 0 & , \ \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

จงแสดงให้เห็นจริงว่า $E(Y|X = x)$ เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นของ x แต่ $E(X|Y = y)$ ไม่เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นของ y

วิธีทำ

$$g(x) = \int_x^1 3(1 - x)\,dy = 3(1 - x)^2\,,\ 0 < x < 1$$

$$E(Y|X = x) = \int_x^1 y \cdot \frac{3(1 - x)}{3(1 - x)^2}\,dy = \frac{1}{2}(1 + x)\,,\ 0 < x < 1$$

แสดงว่า $E(Y|X = x)$ เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นของ x

$$h(y) = \int_0^y 3(1 - x)\,dx = 3\left(y - \frac{y^2}{2}\right),\ 0 < y < 1$$

$$E(X|Y = y) = \int_0^y x \cdot \frac{3(1 - x)}{3(y - y^2/2)}\, dx = \frac{3y - 2y^2}{3(2 - y)}, \; 0 < y < 1$$

แสดงว่า $E(X|Y = y)$ ไม่เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นของ y

อย่างไรก็ตาม หาก X มีการถดถอยเชิงเส้นบน Y แล้วสมการเส้นถดถอยจะเป็น

$$X - \mu_X = (\sigma_X/\sigma_Y)\, \rho(Y - \mu_Y)$$

อาศัยผลที่ได้จากการพิสูจน์ทฤษฎี 5-3.2 เราทราบว่า

$$\mu_Y = \alpha + \beta\mu_X$$

มีความสำคัญในแง่ที่ว่า หาก Y มีการถดถอยบน X แล้วจะสามารถหาค่า μ_Y ได้จาก μ_X และ ส.ป.ส.การถดถอย ในทำนองเดียวกัน เราสามารถหาค่า σ_Y จาก σ_X และ ส.ป.ส. การถดถอย ซึ่งกำหนดความสัมพันธ์ไว้ดังทฤษฎีต่อไปนี้

ทฤษฎีที่ 5-3.3 กำหนดตัวแปรเชิงสุ่มที่มีการแจกแจงร่วม X และ Y หาก Y มีการถดถอยบน X กล่าวคือ

$$E(Y|X = x) = \alpha + \beta X$$

และค่าของความแปรปรวนภายใต้เงื่อนไข $Var(Y|X = x) = \sigma^2$ ทุก ๆ ค่าของ x ใน เมื่อ σ^2 เป็นค่าคงที่ แล้ว

$$\sigma_Y^2 = \beta^2 \sigma_X^2 + \sigma^2$$

พิสูจน์

$$\begin{aligned}
Var(Y|X = x) &= E[\{Y - E(Y|x)\}^2] = E[\{Y - \alpha - \beta X\}^2] = \sigma^2 \\
E[(Y - \alpha - \beta X)^2] &= E[Y^2 + \alpha^2 + \beta^2X^2 - 2\alpha Y + 2\alpha\beta X - 2\beta XY] \\
&= E(Y^2) + \alpha^2 + \beta^2E(X^2) - 2\alpha E(Y) + 2\alpha\beta E(X) - 2\beta E(XY) \\
&= (\sigma_Y^2 + \mu_Y^2) + \alpha^2 + \beta^2(\sigma_X^2 + \mu_X^2) - 2\alpha\mu_Y + 2\alpha\beta\mu_X - 2\beta(\sigma_X\sigma_Y\rho + \mu_X\mu_Y) \\
&= \sigma_Y^2 + \beta^2\sigma_X^2 - 2\beta\sigma_X\sigma_Y\rho + \mu_Y^2 + \alpha^2 + \beta^2\mu_X^2 - 2\alpha\mu_Y + 2\alpha\beta\mu_X - 2\beta\mu_X\mu_Y \\
&= \sigma_Y^2 + \beta^2\sigma_X^2 - 2\beta\sigma_X\sigma_Y\rho + (\mu_Y - \alpha - \beta\mu_X)^2 \\
&= \sigma_Y^2 + \beta^2\sigma_X^2 - 2\beta\sigma_X\sigma_Y\left(\beta\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}\right) \qquad \left[\mu_Y = \alpha + \beta\mu_X,\ \rho = \beta\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}\right] \\
\Rightarrow \quad \sigma^2 &= \sigma_Y^2 - \beta^2\sigma_X^2 \\
\Rightarrow \quad \sigma_Y^2 &= \beta^2\sigma_X^2 + \sigma^2
\end{aligned}$$

เราทราบว่า หาก Y เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นของ x และ β เป็น ส.ป.ส.การถดถอย แล้ว

$$\beta = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \cdot \rho \quad \text{หรือ } \beta^2 = \frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2} \rho^2$$

อาศัยผลที่ได้จากทฤษฎีที่ 5-3.3 จะเห็นว่า

$$\sigma_Y^2 = \left(\frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2} \rho^2 \right) \cdot \sigma_X^2 + \sigma^2 = \sigma_Y^2 \rho^2 + \sigma^2$$

ดังนั้น

$$\sigma^2 = \sigma_Y^2 (1 - \rho^2)$$

จากทฤษฎีที่ 5-3.3 เราพูดถึงในกรณีที่ ความแปรปรวนภายใต้เงื่อนไขของ Y เมื่อ X = x มีค่าคงที่คือ σ^2 ไม่ขึ้นอยู่กับฟังก์ชันของ x แต่โดยทั่ว ๆ ไป ความแปรปรวนภายใต้เงื่อนไขของ Y เมื่อ X = x ภายใต้เกณฑ์สมมติที่ว่า ค่าคาดหมายภายใต้เงื่อนไขของ Y เมื่อ X = x เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นของ x จะเป็นฟังก์ชันของ x ด้วย กล่าวคือ

$$\mathrm{Var}(Y|X = x) = k(x)$$

ผลที่ตามมาก็คือ

$$E[k(X)] = E_X[\mathrm{Var}(Y|x)] = \sigma_Y^2(1 - \rho^2) \geqslant 0$$

(เป็นการบ้านให้นักศึกษาพิสูจน์)

จากผลที่ได้ทั้ง 2 กรณี จะสนับสนุนทฤษฎีที่ว่า $\rho^2 \leqslant 1$ หรือ $-1 \leqslant \rho \leqslant 1$ นั่นเอง ถ้า $\rho = 0$ ความแปรปรวนภายใต้เงื่อนไขของ Y เมื่อรู้ว่า X = x ก็คือ σ_Y^2 ซึ่งเป็นค่าความแปรปรวนของการแจกแจงแบบ marginal ของ Y นั่นเอง

ตัวอย่างที่ 5-3.5 กำหนด

$$f(x, y) = \frac{1}{20}, \; x < y < x + 2, \; 0 < x < 10$$

นอกนั้นเป็น 0 เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X กับ Y จงแสดงให้เห็นจริงว่า

(1) $E[Y|x] = \mu_Y + \rho \dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - \mu_X)$

(2) $\sigma_Y^2 = \sigma^2/(1 - \rho^2)$

ในเมื่อ $\sigma^2 = \mathrm{Var}(Y|x), \; 0 < x < 10$

วิธีทำ

$$g(x) = \int_{x}^{x+2} \frac{1}{20}\,dy = \frac{1}{10},\ 0 < x < 10$$

$$f(y|x) = \frac{1/20}{1/10} = \frac{1}{2},\ x < y < x+2, 0 < x < 10$$

$$E(Y|x) = \int_{x}^{x+2} y \cdot \frac{1}{2}\,dy = x + 1,\ 0 < x < 10 \quad \text{......(1)}$$

$$E(Y^2|x) = \int_{x}^{x+2} y^2 \cdot \frac{1}{2}\,dy = x^2 + 2x + \frac{4}{3},\ 0, < x < 10$$

$$Var(Y|x) = x^2 + 2x + \frac{4}{3} - (x+1)^2 = \frac{1}{3} = \sigma^2$$

$$\mu_X = \int_{0}^{10} \frac{x}{10}\,dx = 5$$

$$\sigma_X^2 = \int_{0}^{10} \frac{x^2}{10}\,dx - 5^2 = \frac{25}{3}$$

$$\mu_Y = \int_{0}^{10}\int_{x}^{x+2} \frac{y}{20}\,dydx = \int_{0}^{10} \frac{x+1}{10}\,dx = 6$$

$$\sigma_Y^2 = \int_{0}^{10}\int_{x}^{x+2} \frac{y^2}{20}\,dydx - 6^2 = \frac{26}{3} \quad \text{..........(2)}$$

$$E(XY) = \int_{0}^{10}\int_{x}^{x+2} \frac{xy}{20}\,dydx = \frac{115}{3}$$

$$\rho = \frac{\frac{115}{3} - 5 \cdot 6}{\sqrt{\frac{25}{3} \cdot \frac{26}{3}}} = \frac{5}{\sqrt{26}}$$

$$\mu_Y + \rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - \mu_X) = 6 + \frac{5}{\sqrt{26}} \cdot \frac{\sqrt{26/3}}{\sqrt{25/3}}(x - 5) = x + 1 \quad \text{..........(3)}$$

(1) = (3) แสดงว่า

$$E(Y|x) = \mu_Y + \rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - \mu_X)$$

เนื่องจาก

$$\sigma^2/(1 - \rho^2) = \frac{1}{3}/(1 - \frac{25}{26}) = \frac{26}{3}$$

ดังนั้น

$$\sigma_Y^2 \quad = \quad \sigma^2/(1 - \rho^2)$$

เท่าที่กล่าวมาแล้ว เราพูดถึง การถดถอยเชิงเส้นของ Y บน X หรืออีกนัยหนึ่งก็คือ ค่าคาดหมายภายใต้เงื่อนไขของ Y เมื่อรู้ว่า X = x เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นของ x ซึ่งกำหนดได้โดย

$$E(Y|x) \quad = \quad \alpha + \beta x = \mu_Y = \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X) \qquad \text{..........(5-3.5)}$$

ในทำนองเดียวกัน หากค่าคาดหมายภายใต้เงื่อนไขของ X เมื่อรู้ว่า Y = y เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นของ y หรืออีกนัยหนึ่ง เราเรียกว่า X มีการถดถอยเชิงเส้นบน Y ค่าคาดหมายภายใต้เงื่อนไขของ X เมื่อรู้ว่า Y = y จะกำหนดได้โดย

$$E(X|y) \quad = \quad \mu_X + \rho \frac{\sigma_X}{\sigma_Y} (y - \mu_Y) \qquad \text{..........(5-3.6)}$$

และ $E_Y[\,Var(X|y)\,] \quad = \quad \sigma_X^2(1 - \rho^2) \geqslant 0$

หาก X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน การกำหนดค่าของ X หรือ Y ก็ดี จะไม่มีผลกระทบต่อค่าคาดหมายภายใต้เงื่อนไขของตัวแปรที่เหลือ กล่าวคือ ค่าคาดหมายภายใต้เงื่อนไขของ Y กำหนดว่า X = x จะไม่ขึ้นกับค่าของ x แต่จะมีค่าเดียวกันกับค่าคาดหมายของ Y นั่นคือ

$$E(Y|X = x) \quad = \quad E(Y)$$

ทำนองเดียวกัน ค่าความแปรปรวนภายใต้เงื่อนไขของ Y กำหนดว่า X = x จะไม่ขึ้นกับค่าของ x แต่จะเป็นค่าเดียวกันกับค่าความแปรปรวนของ Y กล่าวคือ

$$Var(Y|X = x) \quad = \quad Var(Y)$$

เช่นเดียวกัน เมื่อ X กับ Y เป็นอิสระต่อกัน จะเห็นว่า

$$E(X|Y = y) \quad = \quad E(X)$$

และ $Var(X|Y = y) \quad = \quad Var(X)$

อย่างไรก็ตาม การที่เรามี $E(Y|X = x) = E(Y)$ หรือ $E(X|Y = y) = E(X)$ ก็ไม่ได้หมายความว่า X และ Y จะเป็อิสระต่อกัน

ตัวอย่างที่ 5-3.6 จากฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมที่กำหนดในตัวอย่างที่ 5-2.4 จงแสดงให้เห็นจริงว่า

$$E(Y|X = x) \quad = \quad E(Y)$$

โดยที่ X กับ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่พึ่งพิงกัน

วิธีทำ อาศัยผลที่ได้จากตัวอย่างที่ 5-2.4 จะเห็นว่า

$$f(y|x) = \frac{\frac{1}{8}(x^2 - y^2)e^{-x}}{\frac{1}{6}x^3 e^{-x}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^3}, \quad -x < y < x, x > 0$$

จะได้

$$E(Y|X = x) = \int_{-x}^{x} y \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^3} dy$$

$$= \frac{3}{4x^3} \left\{ x^2 \cdot \frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4} \Big|_{y=-x}^{y=x} \right\} = 0$$

จากตัวอย่างที่ 5-2.4 จะเห็นว่า $E(Y) = 0$

แสดงว่า

$$E(Y|X = x) = E(Y)$$

โดยที่ X กับ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่พึ่งพิงกัน

สำหรับตัวแปรเชิงสุ่มแบบพหุคูณ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เมื่อมีตัวแปรเชิงสุ่ม $X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_m}$, $m \leqslant n$ เป็นซับเซทของตัวแปรเชิงสุ่ม $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ดังนั้น หาก $h(X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_m})$ เป็นฟังก์ชันใด ๆ ของตัวแปรเชิงสุ่ม m ตัวเหล่านี้ และหาก $X_{j_1}, X_{j_2}, \ldots, X_{j_r}$ เป็นซับเซทใด ๆ ของตัวแปรเชิงสุ่มที่เหลือ ค่าคาดหมายภายใต้เงื่อนไขของ $h(X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_m})$ กำหนดว่า

$$X_{j_1} = x_{j_1}, X_{j_2} = x_{j_2}, \ldots, X_{j_r} = x_{j_r}$$

จะกำหนดได้โดย

$$E\,[\,h(X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_m})\,|\,x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_r}\,]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} h(x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}) f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}|x_{j_1}, \ldots, x_{j_r})\, dx_{i_1} \ldots dx_{i_m} \quad \ldots\ldots\ldots(5\text{-}3.7)$$

เราทราบว่า หากตัวแปรเชิงสุ่ม $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นอิสระซึ่งกันและกัน การแจกแจงแบบ marginal ของ $X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_m}$ จะมีรูปเดียวกันกับการแจกแจงภายใต้เงื่อนไข ดังนั้นค่าของค่าเฉลี่ยภายใต้เงื่อนไข จะเป็นค่าเดียวกันกับค่าเฉลี่ยเมื่อไม่มีเงื่อนไข กล่าวคือ หาก $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นอิสระซึ่งกันและกันแล้ว การกำหนดค่าของตัวแปรใด ๆ จะไม่มีผลกระทบต่อค่าคาดหมายหรือค่าเฉลี่ยภายใต้เงื่อนไขของตัวแปรอื่น

ทฤษฎีที่ 5-3.4 กำหนด $U(X_{j_1}, X_{j_2}, \ldots, X_{j_r})$ เป็นค่าคาดหมายภายใต้เงื่อนไขของ $h(X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_m})$ เมื่อรู้ว่า $X_{j_1} = x_{j_1}, X_{j_2} = x_{j_2}, \ldots, X_{j_r} = x_{j_r}$ แล้ว

$$E[U(X_{j_1}, X_{j_2}, \ldots, X_{j_r})] = E[h(X_{i_1}, X_{i_2} \ldots, X_{i_m})]$$

พิสูจน์

$E[U(X_{j_1}, X_{j_2}, \ldots, X_{j_r})]$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} U(x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_r})\, f(x_{j_1}, \ldots, x_{j_r})\, dx_{j_1} \ldots dx_{j_r}$$

แต่

$U(X_{j_1}, X_{j_2}, \ldots, X_{j_r})$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} h(x_{i_1}, \ldots, x_{i_m})\, f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}/x_{j_1}, \ldots, x_{j_r})\, dx_{i_1} \ldots dx_{i_m}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} h(x_{i_1}, \ldots, x_{i_m})\, \frac{f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}, x_{j_1}, \ldots, x_{j_r})}{f(x_{j1}, \ldots, x_{j}r)}\, dx_{i_1} \ldots dx_{i_m}$$

ดังนั้น

$E[U(X_{j_1}, X_{j_2}, \ldots, X_{j_r})]$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} h(x_{i_1}, \ldots, x_{i_m})\, f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}, x_{j_1}, \ldots x_{j_r})\, dx_{i_1} \ldots dx_{j_r}$$

$$= E[h(X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_m})] \qquad \text{(นิยาม 5-2.2)}$$

แบบฝึกหัดที่ 5-3

1. กำหนด

$$h(y|x) = 1/(10 - x),\ y = x, x + 1, \ldots, 9;\ x = 0, 1, 2, \ldots, 9$$

เป็นฟังก์ชันภายใต้เงื่อนไขของ Y เมื่อ $X = x, x = 0, 1, 2, \ldots, 9$ จงแสดงให้เห็นจริงว่า

$$E(Y|x) = (x + 9)/2,\ x = 0, 1, 2, \ldots, 9$$

2. $f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของตัวแปรเชิงสุ่ม X กับ Y ซึ่งกำหนดไว้โดย

$$f(x, y) = \frac{x}{5}(3x + y),\ 0 < x < 1, 0 < y < 2$$

นอกนั้นเป็น 0 จงหาค่าคาดหมายและความแปรปรวนภายใต้เงื่อนไขของ Y กำหนดว่า $X = x, 0 < x < 1$

3. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นร่วม $f(x, y)$ ดังนี้

$$f(x, y) = \frac{3}{2}, x^2 < y < 1, 0 < x < 1$$

นอกนั้นเป็น 0 จงแสดงให้เห็นจริงว่า

3.1) $E(Y|x) = (1 + x^2)/2 \quad , 0 < x < 1$

3.2) $E(X|y) = y/2 \quad , 0 < y < 1$

3.3) $Var(Y|x) = (1 - 2x^2 + x^4)/12 \quad , 0 < x < 1$

3.4) $Var(X|Y = \frac{1}{9}) = \frac{1}{108}$

4. กำหนด

$$f(x, y) = 6xy(2 - x - y), 0 < x, y < 1$$

นอกนั้นเป็น 0 เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นร่วม จงแสดงให้เห็นจริงว่า

4.1) $E(X|y) = \frac{5 - 4y}{8 - 6y}, 0 < y < 1$

4.2) $E[E(XY|y)] = E(XY)$

5. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบต่อเนื่อง (continuous r.v.'s) ที่มีค่าคาดหมายภายใต้เงื่อนไข $E(X|y)$ เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นของ y จงแสดงให้เห็นจริงว่า

5.1) $E(X|y) = \mu_1 + \rho \cdot \frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y - \mu_2)$

5.2) $E_Y[Var(X|y)] = \sigma_1^2(1 - \rho^2)$

ในเมื่อ $\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$ และ ρ เป็นค่าคาดหมาย ความแปรปรวนและ ส.ป.ส.สหสัมพันธ์ของ X กับ Y ตามลำดับ

จงตรวจสอบผลที่ได้จาก (5.1) และ (5.2) โดยใช้ฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X กับ Y ซึ่งกำหนดโดย

$$f(x, y) = \frac{e^{-\frac{x}{y}} e^{-y}}{y}, 0 < x, y < \infty$$

นอกนั้นเป็น 0

6. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน และมีฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมกำหนดไว้โดย

$$f(x, y) = (x + 1), \quad -1 < x < 1, 1/2 < y \leq 1$$
$$= 0 \quad , \text{ อื่น ๆ}$$

จงแสดงให้เห็นจริงว่า

6.1) $E(Y|x) = E(Y)$

6.2) $E(X|y) = E(X)$

6.3) $Var(X|y) = Var(X)$

7. f(x, y)เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X กับ Y ซึ่งกำหนดไว้โดย

$$f(x, y) = 2 \quad , \quad 1 < y < 1 + x, 0 < x < 1$$
$$= 0 \quad , \text{ อื่น ๆ}$$

จงแสดงให้เห็นจริงว่า

7.1) $E(Y|x) = \mu_2 + \rho \dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}(x - \mu_1)$

7.2) $E[Var(Y|x)] = \sigma_2^2(1 - \rho^2)$

ในเมื่อ $\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$ และ ρ เป็นค่าคาดหมาย ความแปรปรวนและ ส.ป.ส.สหสัมพันธ์ ของ X กับ Y ตามลำดับ

8. กำหนดตัวแปรเชิงสุ่ม X และ Y ที่มีค่าเฉลี่ยภายใต้เงื่อนไขแบบเชิงเส้น $E(Y|x) = 4x + 3$ และ $E(X|y) = \dfrac{1}{16}y - 3$ อาศัยสูตรของค่าเฉลี่ยภายใต้เงื่อนไขแบบเชิงเส้น จงหาค่าของ $\mu_1, \mu_2, \rho, \sigma_2/\sigma_1$

9. ให้ตัวแปรเชิงสุ่ม X และ Y มีฟังก์ชันความหนาแน่นร่วม $f(x, y) = 1, -x < y < x, 0 < x < 1$ นอกนั้นเป็น 0 จงหาค่าคาดหมายภายใต้เงื่อนไขของ $y|x = x$ และของ $x|y = y$

10. กำหนด X_1, X_2 และ X_3 เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีค่าเฉลี่ย ความแปรปรวน และ ส.ป.ส.สหสัมพันธ์ กำหนดโดย $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2$ และ $\rho_{12}, \rho_{13}, \rho_{23}$ ตามลำดับ หาก

$$E(X_1 - \mu_1|x_2, x_3) = b_2(x_2 - \mu_2) + b_3(x_3 - \mu_3)$$

ในเมื่อ b_2 และ b_3 เป็นค่าคงที่ แล้ว

$$b_2 = \sigma_1(\rho_{12} - \rho_{13} \cdot \rho_{23})/[\sigma_2(1 - \rho_{23}^2)]$$
$$b_3 = \sigma_1(\rho_{13} - \rho_{12} \cdot \rho_{23})/[\sigma_3(1 - \rho_{23}^2)]$$

5.4 บทสรุป

เราสรุปการคาดหมายของตัวแปรเชิงสุ่ม ได้ดังนี้

5.4.1 นิยามของค่าคาดหมาย

1. $\mu_X = \int_{-\infty}^{\infty} x\, g(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x, y)\, dx\, dy$

2. $\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2\, g(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2\, f(x, y)\, dx\, dy$

3. $\mu_{X|y} = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x|y)\, dx$

4. $\sigma_{XY} = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]$, $\rho = \dfrac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$

5.4.2 ทฤษฎีเกี่ยวกับค่าคาดหมาย

1. $E(aX + b) = a\,E(X) + b$
2. $Var\,(aX + b) = a^2\, Var\,(X)$
3. $Var\,(aX + bY) = a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2 + 2ab\,\sigma_{XY}$, X และ Y พึ่งพิงกัน

   $= a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2$, X และ Y เป็นอิสระต่อกัน
4. ถ้า $\mu_{Y|X} = \alpha + \beta X$ แล้ว

   $\mu_Y = \alpha + \beta\mu_X$ และ $\beta = \dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}\rho$

แบบฝึกหัดระคน

1. จงแสดงให้เห็นจริงว่า

$$E[(X - c)^2] = Var(X) + (\mu - c)^2$$

ทุกค่าคงที่ c ในเมื่อ $\mu = E(X)$ และจงแสดงให้เห็นจริงว่า $E[(X - c)^2]$ จะมีค่าต่ำที่สุดเมื่อ $c = \mu$

2. X เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม ที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น f(x) กำหนดไว้โดย

$$f(x) = \frac{1}{3}, \ -1 < x < 2$$

นอกนั้นเป็น 0

2.1) จงคำนวณค่าของ $E(5X^2 + 4X - 7)$

2.2) จงแสดงให้เห็นจริงว่า

$$E(e^{tX}) = \frac{e^{2t} - e^{-t}}{3t}, \ t \neq 0$$

$$= 1, \ t = 0$$

3. อาศัยทฤษฎีเชปบีเชฟในการคำนวณค่าของ $E(5X + 10)$ และ $Var(3 - 2X)$ ในเมื่อ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม ที่มี

$$P(X \leqslant 4 \text{ หรือ } X \geqslant 12) \leqslant \frac{1}{4}$$

4. ถ้า

$$f(x) = 1/2, \ -1 < x < 0$$

$$= 1/4, \ 0 < x < 2$$

นอกนั้นเป็น 0 เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นของ X จงหา

4.1) $P(9X^2 \leqslant 1)$

4.2) $E(5X + 2)$

4.3) $Cov(X, 2X)$

5. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม ที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นกำหนดไว้โดย

$$f(x, y) = \frac{10x + 8y}{75}, \ -1 < x < 2, 2 < y < 3$$

จงคำนวณค่าของ

5.1) $E(2X + 3Y)$, $E(5 - 4Y)$

5.2) $Var(2 - X)$, $Var(Y + Y^2)$

5.3) Cov(4X, 5Y)

5.4) $\rho_{X(X-Y)}$

6. กำหนดตัวแปรเชิงสุ่มที่มีการแจกแจงร่วม X กับ Y ซึ่งมีสมบัติว่า $Y = X^n$ และการแจกแจงแบบ marginal ของ X คือ $h(x) = \frac{1}{2}, -1 < x < 1$ นอกนั้นเป็น 0 จงแสดงให้เห็นจริงว่า

   6.1) สำหรับทุกค่า n ที่เป็นเลขคู่ ความแปรปรวนร่วมระหว่าง X กับ Y จะเป็น 0 นั่นย่อมแสดงว่า X กับ X^n ไม่มีสหสัมพันธ์กัน ทั้ง ๆ ที่ตามความเป็นจริงแล้ว X กับ X^n มีความสัมพันธ์กันอย่างยิ่ง

   6.2) เมื่อ n เป็นเลขคี่

$$\rho_{X\,X^n} = \frac{3(2n + 1)}{n + 2}$$

   จากผลที่ได้นี้สรุปว่า

   หาก X กับ Y มีการพึ่งพิงเชิงเส้น กล่าวคือ Y = X แล้ว $\rho_{XY} = 1$

   สำหรับค่า n โต ๆ, $n \to \infty$, X กับ Y เกือบจะไม่มีสหสัมพันธ์กัน

7. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน และมีการแจกแจงรูปเดียวกันคือ

$$f(t) = .3\,e^{-.3t}, \; t \geqslant 0$$

   7.1) จงคำนวณค่าของ E(X + Y − XY) และ Var(4X − 5Y)

   7.2) จงแสดงให้เห็นจริงว่า Cov(X + Y, X/Y) = 0

8. ฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X กับ Y กำหนดไว้โดย

$$\begin{aligned} f(x, y) &= e^{-y} \quad , \quad 0 < x < y < \infty \\ &= 0 \quad , \quad \text{อื่น ๆ} \end{aligned}$$

   จงแสดงให้เห็นจริงว่า

   8.1) E(X) = Var(X) = Cov(X, Y) = 1

   8.2) ส.ป.ส.สหสัมพันธ์ระหว่าง X กับ Y คือ $\rho = \sqrt{2}/2$

9. h(x) เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นของ X และ g(y/x) เป็นฟังก์ชันภายใต้เงื่อนไขของ Y เมื่อรู้ค่า X ซึ่งกำหนดโดย

$$h(x) = \frac{1}{2} \quad , \quad 0 < x < 2$$

$$g(y/x) = \frac{1}{x^2} \quad , \quad 0 < y < x^2 , \; 0 < x < 2$$

   จงหา

   9.1) ฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X กับ Y

9.2) ฟังก์ชันหนาแน่นแบบ marginal ของ Y

9.3) ค่าคาดหมายภายใต้เงื่อนไขของ X กำหนดว่า Y = y

10. กำหนด

$$f(x, y) = 2, 0 < x < y < 1$$

นอกนั้นเป็น 0 เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X กับ Y จงแสดงให้เห็นจริงว่า

10.1) ค่าคาดหมายภายใต้เงื่อนไข จะเท่ากับ $\frac{1 + x}{2}, 0 < x < 1$ และ $\frac{y}{2}, 0 < y < 1$ ตามลำดับ

10.2) ค่าความแปรปรวนภายใต้เงื่อนไข จะเท่ากับ $\frac{(1 - x)^2}{12}, 0 < x < 1$ และ $y^2/12$, $0 < y < 1$ ตามลำดับ

10.3) ส.ป.ส.สหสัมพันธ์ระหว่าง X กับ Y คือ $\rho = 0.5$

11. ฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X กับ Y คือ

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi}, x^2 + y^2 \leq 1$$

คำนวณค่าคาดหมายของ $Z = X^2 + Y^2$ โดย

11.1) หาฟังก์ชันความหนาแน่นของ Z แล้วคำนวณค่าของ E(Z)

11.2) หาค่า $E(X^2 + Y^2)$

12. ฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X กับ Y คือ

$$f(x, y) = \frac{1}{x}, \quad 0 < y < x < 1$$

จงแสดงให้เห็นจริงว่า

12.1) ค่าคาดหมายภายใต้เงื่อนไข จะเท่ากับ $x/2, 0 < x < 1$ และ $(y - 1)/\ln y, 0 < y < 1$ ตามลำดับ

12.2) ความแปรปรวนภายใต้เงื่อนไขของ Y กำหนดว่า X = x จะเท่ากับ $\frac{x^2}{12}, 0 < x < 1$

12.3) ส.ป.ส.สหสัมพันธ์ระหว่าง X กับ Y คือ $\rho = \sqrt{\frac{3}{7}}$

13. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นร่วม กำหนดไว้โดย

$$f(x, y) = \frac{1}{2x}, \quad 0 < y < x < 1$$

$$= 1, \quad 0 < x < y < 1$$

นอกนั้นเป็น 0 จงแสดงให้เห็นจริงว่า

13.1) ค่าคาดหมายของ X และของ Y จะเท่ากับ $\frac{5}{12}$ และ $\frac{11}{24}$ ตามลำดับ

13.2) $P(X > 2Y) = \frac{1}{4}$, $P\left(\frac{1}{2} \leqslant Y \leqslant \frac{3}{2} \mid X = \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

13.3) ค่าคาดหมายภายใต้เงื่อนไขของ X กำหนดว่า Y = y คือ

$$E(X|y) = \frac{y^2 - y + 1}{2y - \ln y} \quad , 0 < y < 1$$

14. หยิบไพ่ 1 ใบอย่างสุ่ม จากสำรับไพ่ที่มี n ใบ หมายเลข 1, 2, ..., n หากไพ่ที่หยิบได้เป็นหมายเลข k ให้หยิบไพ่ใบที่ 2 อย่างสุ่มในจำนวนไพ่หมายเลข 1, 2, ..., k กำหนดตัวแปรเชิงสุ่ม Y เป็นหมายเลขบนไพ่ที่หยิบได้ในครั้งแรก และ X เป็นหมายเลขที่หยิบได้ในครั้งที่ 2 จงแสดงให้เห็นจริงว่า

$$E(X) = \frac{n + 3}{4}$$

14.1) โดยหาฟังก์ชันน่าจะเป็นร่วม $f(x, y)$ แล้วคำนวณค่าของ $E(X)$

14.2) โดยหาฟังก์ชันภายใต้เงื่อนไข $g(x|y = k)$ และฟังก์ชันความหนาแน่นแบบ marginal $h_Y(k)$ แล้วคำนวณค่า $E(X|Y = k)$ และ $E(X)$

15. X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบผสม ที่มีฟังก์ชันการแจกแจงสะสม $F(x)$ กำหนดไว้โดย

$$
\begin{aligned}
F(x) &= 0 &&, \ x < 0 \\
&= x^2/4 &&, \ 0 \leqslant x < 1 \\
&= 1/2 &&, \ 1 \leqslant x < 2 \\
&= x/3 &&, \ 2 \leqslant x < 3 \\
&= 1 &&, \ 3 \leqslant x
\end{aligned}
$$

จงหาค่าคาดหมายและความแปรปรวนของ X

16. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน μ_X, μ_Y, σ_X^2 และ σ_Y^2 เป็นค่าเฉลี่ยและความแปรปรวน ตามลำดับ หาก $U = XY$ และ $V = X/Y$ จงแสดงให้เห็นจริงว่า

$$\sigma_U^2 = \sigma_X^2 \cdot \sigma_Y^2 + \mu_X^2 \cdot \sigma_Y^2 + \mu_Y^2 \cdot \sigma_X^2$$

$$\sigma_{UV} = \sigma_X^2 + \mu_X^2 (1 - \mu_X \mu_{1/Y})$$

คำตอบแบบฝึกหัดที่ 5-1

(1) $\frac{1}{3}, \frac{1}{18}$ (2) $\frac{7}{3}$ (3) $\frac{1}{2}, 1, \frac{17}{9}$

(4) $\frac{7}{2}, \frac{15}{4}$ (5) 2 , 86.4 , − 160.8 (6) 1, 2, 2, 3

(8) 4/5 (10) 113/4, 167/16 (13) $\frac{4}{9}, \frac{21}{25}$,10

แบบฝึกหัดที่ 5-2

(1) 7.5 , 1 (2) 1 , − 1 , 0 (3) $7/\sqrt{804}$

(5) $\frac{89}{60}, -\frac{1}{144}, -\frac{5}{43}$ (6) $4, \frac{131}{36}$ (7) $\frac{35}{16}, \frac{1099}{46080}, \frac{7}{15}$

(9) $8, 3/\sqrt{13}$ (10) 15 , 65 , 13

แบบฝึกหัดระคน

(4) 1/4 ; 13/4 ; 37/24

(9) $1/(2x^2), 0 < x < 2, 0 < y < x^2$;

$(2 - \sqrt{y})/4\sqrt{y}, 0 < y < 4$;

$\frac{2\sqrt{y}\ln(2/\sqrt{y})}{2 - \sqrt{y}}$

(11) $f(z) = 1, 0 < z < 1$;

$E(Z) = 1/2$

(15) 19/12 ; 1/48

(5) 9.18 , 5.106 ; 0.66 , 4.28 ;

−0.16 ; 0.94

(14) $f(x, y) = \frac{1}{ny}$, $x = 1, 2, \ldots, y;\ y = 1, 2, \ldots, n$

$g(x/y = k) = 1/k, x = 1, 2, \ldots, k$

$h_Y(k) = 1/n, k = 1, 2, \ldots, n$

$E(X/Y = k) = \frac{k+1}{2}, k = 1, 2, \ldots, n$

ตัวอย่างข้อสอบและเฉลย

ชุดที่ 1

1. f เป็นฟังก์ชันซึ่งอยู่ในฟอร์ม

$$\begin{aligned} f(x) &= x \quad , \quad 0 < x \leqslant 1 \\ &= 2 - x \ , \quad 1 < x \leqslant 2 \end{aligned}$$

นอกนั้นเป็น 0 จงคำนวณค่าของ $\lim_{h \to 0} P\left(\frac{1}{2} - h < X \leqslant \frac{3}{2}\right)$

(เฉลย)

$$\lim_{h\to 0} P\left(\frac{1}{2} - h < X \leqslant \frac{3}{2}\right) = \lim_{h\to 0} \int_{\frac{1}{2}-h}^{1} x\,dx + \int_{1}^{3/2} (2 - x)dx$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[\frac{1 - (\frac{1}{2} - h)^2}{2} + 2\left(\frac{3}{2} - 1\right) - \frac{\frac{9}{4} - 1}{2} \right]$$

$$= 3/4$$

2. X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่อง ที่มีฟังก์ชันการแจกแจงสะสม $F(x)$ a และ b เป็นค่าใด ๆ ของ X

2.1) จงพิสูจน์ว่า

$$P(a < X \leqslant b) = F(b) - F(a)$$

(ดูเฉลยหน้า 52)

2.2) ถ้า

$$\begin{aligned} F(x) &= 0 &&, x < 0 \\ &= x/2 &&, 0 \leqslant x < 1 \\ &= 1/2 &&, 1 \leqslant x < 2 \\ &= x/4 &&, 2 \leqslant x < 4 \\ &= 1 &&, x \geqslant 4 \end{aligned}$$

และ $Y = 3X - 2$ จงหาค่าของ $F(y)$

(เฉลย)

$$F(y) = P(Y \leqslant y) = P(3X - 2 \leqslant y)$$

$$= P\left(X \leqslant \frac{y+2}{3}\right) = F_X\left(\frac{y+2}{3}\right)$$

$$\begin{aligned} F(y) &= 0 &&, y < -2 \\ &= (y + 2)/6 &&, -2 \leqslant y < 1 \\ &= 1/2 &&, 1 \leqslant y < 4 \\ &= (y+2)/12 &&, 4 \leqslant y < 10 \\ &= 1 &&, y \geqslant 10 \end{aligned}$$

3. ใส่ลูกบอลล์ 5 ลูกที่เหมือนกัน ลงในกล่อง 4 กล่องแบบสุ่ม กำหนด

A : กล่องแรกว่าง

B : กล่องที่สองว่าง

จงคำนวณค่าของ $P(A \cup B)$

หาก X เป็น indication random variable ของ AB กล่าวคือ

$$X = 1 \text{ ถ้า 2 กล่องแรกว่าง}$$
$$= 0 \text{ อื่น ๆ}$$

จงหาฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X

(เฉลย)

ใส่บอลล์ 5 ลูกที่เหมือนกันลงในกล่อง 4 กล่องแบบสุ่ม จำนวนผลลัพธ์จะเท่ากับ $\binom{5+4-1}{5} = 56$ จำนวนผลลัพธ์ที่กล่องแรกว่าง $= \binom{5+3-1}{5} = 21 =$ จำนวนผลลัพธ์ที่กล่องสองว่าง

ดังนั้น $P(A) = \frac{21}{56} = P(B)$

กำหนด 2 กล่องว่าง จะมีจำนวนผลลัพธ์เท่ากับ $\binom{5+2-1}{5} = 6$

ดังนั้น $P(AB) = \frac{6}{56} = \frac{3}{28}$

ค่าของ $P(A \cup B) = \frac{21}{56} + \frac{21}{56} - \frac{6}{56} = \frac{9}{14}$

X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มดัชนีของ AB ฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X จะกำหนดได้โดย

$$f(x) = 25/28 \quad , \quad x = 0$$
$$= 3/28 \quad , \quad x = 1$$
$$= 0 \quad , \quad \text{อื่น ๆ}$$

4. สุ่มตัวอย่างจากเลขจำนวนเต็มบวก ซึ่งมีค่าไม่เกิน 20 มา 4 ตัว โดยไม่ให้ซ้ำกัน กำหนดตัวแปรเชิงสุ่ม X เป็นจำนวนตัวเลขที่เป็นผลคูณของ 3 ที่ได้จากการสุ่ม
   4.1) จงเขียนสูตรการแจกแจงของ X
   4.2) จงหาค่าของ $P(X = 1)$
   4.3) ค่าคาดหมายของ X จะเป็นเท่าใด

(เฉลย)

4.1) สูตรการแจกแจงของ X คือ

$$P(X = x) = \binom{4}{x} \frac{6^{(x)}\, 14^{(4-x)}}{20^{(4)}} \quad , x = 0, 1, 2, 3, 4$$

4.2) ค่าของ $P(X = 1) = \binom{4}{1} \frac{6\ 14^{(4-1)}}{20^{(4)}} = \frac{728}{1615}$

4.3) ค่าคาดหมายของ X จะเท่ากับ $4 \cdot \frac{6}{20} = 1.2$

5. จงคำนวณค่าของ

5.1) $\sum_{j=0}^{n} j\binom{n}{j} = n \sum_{j=1}^{n} \binom{n-1}{j-1} = n \sum_{j-1=0}^{n-1} \binom{n-1}{j-1} = n \cdot 2^{n-1}$

5.2) $\sum_{k=0}^{10} (-1)^k \binom{10}{k} (10-k)^{10} = 10!$

5.3) $\sum_{k=0}^{20} \frac{20^{(k)}}{100^{(k+1)}} = \frac{1}{100} \sum_{k=0}^{20} \frac{20^{(k)}}{99^{(k)}} = \frac{1}{100} \cdot \frac{99+1}{99-20+1} = \frac{1}{80}$

5.4) $\sum_{x=2}^{20} \sum_{k=0}^{20-x} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \frac{1}{2!(x-2)!} = \frac{1}{2!} \sum_{j=0}^{18} \sum_{k=0}^{18-j} \frac{(-1)^k}{k!j!} = \frac{1}{2}$

6. กำหนดฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X กับ Y ดังนี้

$f(x, y) = xy/2 \quad , \quad 0 < y < 2, 0 < x < y$

นอกนั้นเป็น 0 จงหา

6.1) ฟังก์ชันหนาแน่นภายใต้เงื่อนไขของ X เมื่อกำหนดว่า $Y = y, 0 < y < 2$

6.2) ค่าของ $P(X < 1/2 \mid Y = 1)$

(เฉลย)

6.1) $h(y) = \int_0^y \frac{xy}{2}\, dx = \frac{y^3}{4}, 0 < y < 2$

$f(x \mid y) = \frac{xy/2}{y^3/4} = \frac{2x}{y^2}, 0 < x < y, 0 < y < 2$

6.2) $P(X < \frac{1}{2} \mid Y = 1) = \int_0^{1/2} \left\{ \frac{2x}{y^2} \Big|_{y=1} \right\} dx = \int_0^{1/2} 2x\, dx = \frac{1}{4}$

7. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันแจกแจงสะสมร่วม กำหนดไว้โดย

$F(x, y) = \frac{xy}{2}(x + y), 0 < x < 1, 0 < y < 1$

จงหาค่าของ

7.1) $P(0 < X \leqslant 1/5, 1/5 < Y \leqslant 1/2)$

7.2) $P(3X > 2)$

(เฉลย)

7.1) $P(0 < X \leqslant \frac{1}{5}, \frac{1}{5} < Y \leqslant \frac{1}{2}) = F(\frac{1}{5}, \frac{1}{2}) - F(\frac{1}{5}, \frac{1}{5})$

$$= \frac{\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2}}{2} (\frac{1}{5} + \frac{1}{2}) - \frac{\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}}{2} (\frac{1}{5} + \frac{1}{5}) = 0.27$$

7.2) $P(3X > 2) = P(X > \frac{2}{3}) = 1 - F_X(\frac{2}{3}) = 1 - F(\frac{2}{3}, 1)$

$$P(3X > 2) = 1 - \frac{\frac{2}{3} \cdot 1}{2} (\frac{2}{3} + 1) = \frac{4}{9}$$

8. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบต่อเนื่องที่เป็นอิสระต่อกัน มี $f(x, y)$, $g(x)$, $h(y)$ เป็นฟังก์ชันหนาแน่นร่วม และฟังก์ชันหนาแน่นแบบ marginal ของ X และของ Y ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า

8.1) $Cov(X, Y) = 0$

8.2) $P(a < X \leqslant b | Y = y) = P(a < X \leqslant b)$

ในเมื่อ a และ b เป็นค่าคงที่

(เฉลย)

X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน ดังนั้น

$$f(x, y) = g(x) \cdot h(y)$$

8.1)
$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyf(x, y)\, dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyg(x)\, h(y)\, dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} xg(x)\, dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} yh(y)\, dy = E(X) \cdot E(Y)$$

$$\Rightarrow \quad Cov(X, Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y) = 0$$

8.2)
$$P(a < X \leqslant b | Y = y) = \int_a^b f(x|y)\, dx$$

แต่
$$f(x|y) = \frac{f(x, y)}{h(y)} = \frac{g(x) \cdot h(y)}{h(y)} = g(x)$$

$$P(a < X \leqslant b | Y = y) = \int_a^b g(x)\, dx = P(a < X \leqslant b)$$

9.1) X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีค่าเฉลี่ย μ และความแปรปรวน σ^2 จงพิสูจน์ว่า

$$P(|X - \mu| \geqslant k\sigma) \leqslant \frac{1}{k^2}$$

ทุก ๆ ค่า $k > 0$

(ดูเฉลยหน้า 237)

9.2) หาก $Y = 5X$ จงแสดงให้เห็นจริงว่า

$$\rho_{XY} = 1$$

(เฉลย)

$$\begin{aligned} Cov(X, Y) &= E(XY) - E(X) \cdot E(Y) \\ &= E(X \cdot 5X) - E(X) \cdot E(5X) \\ &= 5E(X^2) - 5\{E(X)\}^2 = 5\sigma_X^2 \\ \sigma_Y &= \sqrt{Var(5X)} = \sqrt{25\sigma^2_X} = 5\sigma_X \end{aligned}$$

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \frac{5 \cdot \sigma_X^2}{\sigma_X \cdot 5 \cdot \sigma_X} = 1$$

10. หากค่าคาดหมายแบบมีเงื่อนไขของ Y เมื่อกำหนด X = x เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นของ x กล่าวคือ

$$E(Y|x) = a + bx$$

จงพิสูจน์ว่า

$$a = E(Y) - \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} E(X)$$

และ $b = \rho \cdot \dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}$

(เฉลย)

อาศัยนิยามของค่าคาดหมายภายใต้เงื่อนไข และของฟังก์ชันภายใต้เงื่อนไข จะเห็นว่า

$$E(Y|x) = \int_{-\infty}^{\infty} yf(y|x)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} y\frac{f(x, y)}{g(x)}\,dy = a + bx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} yf(x, y)dy = ag(x) + bxg(x) \qquad \text{..........(1)}$$

ผลจาก (1) อินทิเกรทบน x ทั้ง 2 ข้าง

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} yf(x, y)dydx = \int_{-\infty}^{\infty} ag(x)\, dx + \int_{-\infty}^{\infty} bxg(x)dx$$

$$E(Y) = a + bE(X) \qquad \text{..........(2)}$$

ผลจาก (1) คูณด้วย x แล้วอินทีเกรทบน x ทั้งสองข้าง

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)dydx = \int_{-\infty}^{\infty} axg(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} bx^2g(x)dx$$

$$E(XY) = aE(X) + bE(X^2) \qquad \text{..........(3)}$$

ผลจาก (2) คูณด้วย E(X) จะได้

$$E(X)\,E(Y) = aE(X) + b\{E(X)\}^2 \qquad \text{..........(4)}$$

ผลจาก (3) ลบด้วย (4) อาศัยนิยามของความแปรปรวน และความแปรปรวนร่วม จะได้

$$Cov(X, Y) = b\,\sigma_X^2$$

ดังนั้น

$$b = \frac{\rho\sigma_X \cdot \sigma_Y}{\sigma_X^2} = \rho\,\frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \qquad \left[\rho = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}\right]$$

แทนค่า b ใน (2) จะเห็นว่า

$$E(Y) = a + \rho \cdot \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\,E(X)$$

$$a = E(Y) - \rho\,\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\,E(X)$$

ชุดที่ 2

1. X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นกำหนดไว้โดย

$$f(x) = 2(k - x)\,,\ 0 < x < 1$$

นอกนั้นเป็น 0 จงหาค่าของ k และ $P(|X| \leqslant 1/3)$

(เฉลย)

f(x) เป็น p.d.f. ของ X ดังนั้น

$$\int_0^1 2(k - x)\,dx = 1$$

$$2(k - \frac{1}{2}) = 1$$

$$k = 1$$

$$P(|X| \leqslant \frac{1}{3}) = P(-\frac{1}{3} \leqslant X \leqslant \frac{1}{3})$$

$$= \int_0^{1/3} 2(1-x)dx = 2(\frac{1}{3} - \frac{1}{18}) = \frac{5}{9}$$

2. กำหนดฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ X โดย

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < -1 \\ \frac{1}{3}(x^3+1) & , -1 \leqslant x < 0 \\ \frac{1}{3}(2x^2+1) & , 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & , x \geqslant 1 \end{cases}$$

จงหา c.d.f. และ p.d.f. ของ $Y = X^3 + 1$

(เฉลย)

$F(y) = P(Y \leqslant y) = P(X^3 + 1 \leqslant y) = F_X((Y-1)^{1/3})$

c.d.f. ของ Y คือ

$$F(y) = \begin{cases} 0 & , y < 0 \\ y/3 & , 0 \leqslant y < 1 \\ \frac{1}{3}(2(y-1)^{2/3}+1)) & , 1 \leqslant y < 2 \\ 1 & , y \geqslant 2 \end{cases}$$

$$\frac{dF(y)}{dy} = \frac{d(\frac{y}{3})}{dy} = \frac{1}{3}, 0 \leqslant y < 1$$

$$= \frac{d}{dy}\left\{\frac{1}{3}(2(y-1)^{2/3}+1)\right\} = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\ (y-1)^{-\frac{1}{3}}, 1 \leqslant y < 2$$

นอกนั้นเป็น 0

ดังนั้น p.d.f. ของ Y จะกำหนดได้โดย

$$f(y) = \begin{cases} 1/3 & , 0 \leqslant y < 1 \\ 4/(9(y-1)^{1/3}) & , 1 \leqslant y < 2 \\ 0 & , \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

3. X เป็น indicator random variable ของ AB ถ้า $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{2}{3}$ และ $A \cup B = S$ จงหาฟังก์ชันน่าจะเป็นและค่าคาดหมายของ X

(เฉลย)

$$P(A \cup B) = P(S) = 1$$

$$P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - P(AB) = 1$$

$$P(AB) = \frac{7}{6} - 1 = \frac{1}{6}$$

X เป็น indicator random variable ของ AB ดังนั้น

$$f(x) = 5/6 \quad , \; x = 0$$
$$= 1/6 \quad , \; x = 1$$
$$= 0 \quad , \; \text{อื่น ๆ}$$

และ $E(X) = 1/6$

4. (ก) จงหาฟังก์ชันน่าจะเป็นของจำนวนที่เกิดการจับคู่กันได้ (X) ในปัญหาการจับคู่ 10 คู่

(เฉลย)

$$P(X = x) = \sum_{k=0}^{10-x} \frac{(-1)^k}{k!x!}, \; x = 0, 1, 2, \ldots, 10$$

(ข) ใส่บอลล์ที่แตกต่างกัน 10 ลูก ลงในกล่อง 12 กล่องแบบสุ่ม จงคำนวณความน่าจะเป็นที่ไม่มีกล่องว่าง

(เฉลย)

เนื่องจากจำนวนบอลล์มีน้อยกว่าจำนวนกล่อง ดังนั้นโอกาสที่กล่องไม่ว่างจะเกิดขึ้นไม่ได้ นั่นคือ ความน่าจะเป็นที่ไม่มีกล่องว่าง จะเท่ากับ 0

(ค) จงหาค่าของ

$$1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \ldots = 2^n$$

5. สุ่มตัวอย่างจากเลขจำนวนเต็มบวก ซึ่งมีค่าไม่เกิน 20

(ก) ให้ X เป็นจำนวนตัวเลขที่เป็นผลคูณของ 3 จากการสุ่ม 4 ครั้งแบบใส่กลับ (sampling-with replacement) จงหา $P(X = 0)$ และ $P(X = 6)$

(เฉลย)

$$P(X = 0) = \binom{4}{0} \frac{6^0 \, 14^{4-0}}{20^4} = (0.7)^4$$

$$P(X = 6) = 0$$

(ข) ให้ X เป็นจำนวนครั้งของการสุ่มแบบไม่ใส่กลับ (sampling without replacement) จนได้ตัวเลขที่หารด้วย 5 ลงตัว จงคำนวณค่าของ $P(X = 2)$ และ $P(X \leqslant 20)$

(เฉลย)

$$P(X = 2) = \frac{4 \cdot 16}{20^{(2)}} = \frac{16}{95}$$

$$P(X \leqslant 20) = 1$$

6. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน จงแสดงให้เห็นจริงว่า

$$F(x, y) = H(x) \cdot G(y)$$

ในเมื่อ F(x, y), H(x) และ G(y) เป็นฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วม และฟังก์ชันสะสมแบบ marginal ของ X และของ Y ตามลำดับ

(เฉลย)

อาศัยนิยามของฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วม จะเห็นว่า

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f(x, y)\, dxdy$$

เนื่องจาก X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน ดังนั้น

$$f(x, y) = g(x) \cdot h(y)$$

$$\Rightarrow \quad F(x, y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} g(x) \cdot h(y)\, dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{x} g(x)\, dx \cdot \int_{-\infty}^{y} h(y)dy = G(x) \cdot H(y)$$

7. กำหนดฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X กับ Y โดย

$$f(x, y) = 3x\ ,\ 0 < x < 1,\ 0 < y < x$$

นอกนั้นเป็น 0 จงหาฟังก์ชันหนาแน่นแบบ marginal ของ X และค่าของ $P(X > \frac{4}{5}, Y < \frac{1}{5})$

(เฉลย)

$$g(x) = \int_{0}^{x} 3x\, dy = 3x^2 \quad , 0 < x < 1$$

$$= 0 \quad , \text{ อื่น ๆ}$$

$$P(X > \frac{4}{5}, Y < \frac{1}{5}) = \int_{0}^{1/5} \int_{4/5}^{1} 3x\, dx\, dy = \int_{0}^{1/5} \frac{3}{2}(1 - \frac{16}{25})\, dy$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{9}{25} \cdot \frac{1}{5} = \frac{27}{250}$$

8. f(x, y) และ h(y) เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นร่วม และฟังก์ชันความหนาแน่นแบบ marginal-ของ X และของ Y ตามลำดับ กำหนดไว้โดย

$$f(x, y) = 24y(1 - x) \quad , \quad 0 < y < x < 1$$

และ $$h(y) = 12y(1 - y)^2 \quad , \quad 0 < y < 1$$

นอกนั้นเป็น 0 จงหาฟังก์ชันหนาแน่นภายใต้เงื่อนไขของ X กำหนดว่า $Y = y, 0 < y < 1$- และจะแสดงให้เห็นจริงว่า

$$E(X|Y = \frac{1}{5}) = \frac{7}{15}$$

(เฉลย)

$$\frac{f(x, y)}{h(y)} = \frac{24y(1 - x)}{12y(1 - y)^2} = \frac{2(1 - x)}{(1 - y)^2}$$

$$f(x|y) = \frac{2(1 - x)}{(1 - y)^2} \quad , \quad y < x < 1, 0 < y < 1$$

$$= 0 \quad , \text{ อื่น ๆ}$$

$$E(X|Y = \frac{1}{5}) = \int_{1/5}^{1} xf(x/\frac{1}{5})\, dx$$

$$= \int_{1/5}^{1} \frac{2x(1 - x)}{(1 - 1/5)^2}\, dx$$

$$= \frac{25}{8} \left(\frac{1 - 1/25}{2} - \frac{1 - 1/125}{3} \right) = \frac{7}{15}$$

9. X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่องที่มีฟังก์ชันหนาแน่น f(x)

(ก) ถ้า a และ b เป็นค่าคงที่ใด ๆ จงพิสูจน์ว่า

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

(ดูเฉลยหน้า 230)

(ข) ถ้า $E(X) = 3$ และ $E(X^2) = 13$ จงคำนวณค่าต่ำสุดของ $P(-2 < X < 8)$ โดยอาศัยทฤษฎีเชบบีเชฟ

(เฉลย)

$$P(-2 < X < 8) = P(-2 - 3 < X - E(X) < 8 - 3)$$

$$= P(|X - E(X)| < 5) = 1 - P(|X - E(X)| \geqslant 5)$$

อาศัยทฤษฎีของเชบบีเชฟ จะเห็นว่า

$$P(|X - E(X)| \geqslant 5) \leqslant \frac{1}{25/4} \quad (k\sigma = 5 \Rightarrow k^2 = \frac{25}{13 - 9})$$

$$P(-2 < X < 8) \geqslant 1 - \frac{4}{25} = \frac{21}{25}$$

10. กำหนด $U = (X - \mu_X)/\sigma_X$ และ $V = (Y - \mu_Y)/\sigma_Y$

จงแสดงให้เห็นจริงว่า

$$E(UV) = Cov(U, V) = \rho_{UV}$$

(เฉลย)

$$E(U) = E\left[\frac{X - \mu_X}{\sigma_X}\right] = \frac{1}{\sigma_X}(\mu_X - \mu_X) = 0$$

$$E(V) = E\left[\frac{Y - \mu_Y}{\sigma_Y}\right] = \frac{1}{\sigma_Y}(\mu_Y - \mu_Y) = 0$$

$$\sigma_U^2 = Var\left[\frac{X - \mu_X}{\sigma_X}\right] = \frac{1}{\sigma_X^2}\cdot\sigma_X^2 = 1$$

$$\sigma_V^2 = Var\left[\frac{Y - \mu_Y}{\sigma_Y}\right] = \frac{1}{\sigma_Y^2}\cdot\sigma_Y^2 = 1$$

$$Cov(U, V) = E(UV) - E(U)\,E(V) = E(UV)$$

$$\rho_{UV} = \frac{Cov(U, V)}{\sigma_U\ \sigma_V} = Cov(U, V)$$

$$E(UV) = Cov(U, V) = \rho_{UV}$$

ชุดที่ 3

1. กำหนดฟังก์ชันความหนาแน่นของ X โดย

$$f(x) = 1/2 \quad , \quad -1 < x < 0$$
$$= 1/4 \quad , \quad 0 < x < 2$$

นอกนั้นเป็น o จงหา $P(9X^2 \leqslant 1)$ และ $F_X(0)$

(เฉลย)

$$P(9X^2 \leqslant 1) = P(X^2 \leqslant \frac{1}{9}) = P(-\frac{1}{3} \leqslant X \leqslant \frac{1}{3})$$

$$= \int_{-1/3}^{0} \frac{1}{2}\,dx + \int_{0}^{1/3} \frac{1}{4}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{4}$$

$$F_X(0) = P(X \leqslant 0) = \int_{-1}^{0} \frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{2}$$

5. ในปัญหาการสุ่มบอลล์จนกว่าจะได้บอลล์สีขาว (แบบไม่ใส่คืน) ให้ X เป็นจำนวนครั้งของการสุ่มจะเห็นว่า

$$P(X = x) = \frac{(N - M)^{(x-1)}M}{N^{(x)}}, \quad x = 1, 2, \ldots . N - M + 1$$

จงแสดงให้เห็นจริงว่า

5.1) $P(X > x) = \dfrac{(N - M)^{(x)}}{N^{(x)}}$

5.2) $E(X) = \dfrac{N + 1}{M + 1}$

(ดูเฉลยหน้า 152)

6. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วม กำหนดไว้โดย

$$F(x, y) = \frac{xy}{30}(x^2 + y^2), \quad 0 < x < 1, 0 < y < 3$$

จงหา

6.1) ค่าของ $P(X > 1/2, 1 < Y \leqslant 2)$

6.2) ฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X กับ Y

(เฉลย)

6.1) $P(X > \frac{1}{2}, 1 < Y \leqslant 2) = F(1, 2) - F(\frac{1}{2}, 2) - F(1, 1) + F(\frac{1}{2}, 1)$

$$= \frac{1 \cdot 2}{30}(1 + 4) - \frac{\frac{1}{2} \cdot 2}{30}(\frac{1}{4} + 4)$$

$$- \frac{1 \cdot 1}{30}(1 + 1) + \frac{\frac{1}{2} \cdot 1}{30}(\frac{1}{4} + 1)$$

$$= \frac{7}{48}$$

6.2) $\dfrac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x\, \partial y} = \dfrac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} \dfrac{xy}{30}(x^2 + y^2) = \dfrac{x^2 + y^2}{10}$

ฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X กับ Y จะกำหนดได้โดย

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{10}, \quad 0 < x < 1, 0 < y < 3$$

$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

7, 7.1) ถ้า $f(y|x)$ เป็นฟังก์ชันหนาแน่นภายใต้เงื่อนไขของ Y กำหนดว่า $X = x$ จงแสดงให้เห็นจริงว่า

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y|x)\ dy = 1$$

(เฉลย)

$f(y|x)$ เป็นฟังก์ชันภายใต้เงื่อนไข ดังนั้น

$$f(y|x) = \frac{f(x, y)}{g(x)}$$

ในเมื่อ $f(x, y)$ และ $g(x)$ เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมและฟังก์ชันความหนาแน่นแบบ marginal ของ X ตามลำดับ

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y|x)\ dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x, y)}{g(x)}\ dy$$

$$= \frac{1}{g(x)} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\ dy = 1 \text{ (นิยามของ } b'(x))$$

7.2) ถ้า $f(y|x) = \frac{2(1 - x - y)}{(1-x)'}$, $0 < y < 1 - x, 0 < x < 1$

นอกนั้นเป็น 0 จงคำนวณค่าของ $P(Y \leqslant 0.21s = 0.5)$

(เฉลย)

$$P(Y \leqslant 0.2|X = 0.5) = \int_0^{.2} \left\{ \frac{2(1 - x - y)}{(1 - x)^2} \Big|_{x=0.5} \right\} dy$$

$$= \int_0^{.2} 4(1 - 2y)dy = 4 [0.2 - (0.2)^2 = 0.64$$

8. 8.1) ถ้า $f(x, y) = \frac{3x^2y + xy + 1}{5}$, $0 < x < 1, 0 < y < 2$

นอกนั้นเป็น 0 เป็น joint p.d.f. ของ X กับ Y จงหา marginal p.d.f. ของ X

(เฉลย)

$$g(x) = \int_0^2 \frac{1}{5} (3x^2y + xy + 1)dy$$

$$= \frac{1}{5} [3x^2 \cdot \frac{4}{2} + x \cdot \frac{4}{2} + 2] = \frac{2}{5} (3x^2 + x + 1), 0 < x < 1$$

นอกนั้นเป็น 0

8.2) X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มี $E(X) = 8$ และ $Var(X) = 4$ จงหาค่าสูงสุดของ $P(X \leqslant 4$ หรือ $X \geqslant 12)$

4. จงหาค่าของ

(4.1) $\sum_{j=0}^{10} j \binom{10}{j}$ (4.2) $\sum_{j=0}^{10} \binom{10}{j}^2$

(4.3) $\sum_{j=1}^{10} \frac{10^{(j)}}{20^{(j)}}$ (4.4) $\sum_{k=0}^{10} \sum_{j=0}^{10} \binom{10}{j}\binom{10}{k}\binom{20}{10-k}$

5. ใส่บอลล์ที่เหมือนกัน 10 ลูก ลงในกล่อง 6 กล่องแบบสุ่ม กำหนด

$X_i = 1$ ถ้ากล่องที่ i ว่าง, $i = 1, 2, \dots, 6$

$= 0$ อื่น ๆ

และ $X = X_1 + X_2 + \; + X_6$ = จำนวนกล่องว่าง

จงหาค่าของ

5.1) $P(X_i = 1)$

5.2) $E(5X_i)$

5.3) $E(X)$

6. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นร่วม กำหนดไว้โดย

$f(x, y) = 12xy(1 - x)$, $0 < x, y < 1$

$= 0$, อื่น ๆ

6.1) จงแสดงให้เห็นจริงว่า X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน

6.2) จงคำนวณค่าของ $P(X > Y)$

7. สมมติว่า

$F(x, y) = kxy(x^2y + p)$, $0 < x < 1, 0 < y < 1$

เป็นฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วมของ X กับ Y และ

$F(x) = kx(x^2 + 1)$, $0 < x < 1$

เป็นฟังก์ชันการแจกแจงสะสมแบบ marginal ของ X

จงหา

7.1) ค่าของ k และ p

7.2) ค่าของ $P(X \leqslant \frac{1}{10}, \frac{1}{5} \leqslant Y \leqslant \frac{1}{2})$ และ $P(7Y > 4)$

8. กำหนด

$$f(x|y) = \frac{cx}{y^2} \quad , \quad 0 < x < y, 0 < y < 1$$

$$= 0 \quad , \text{อื่น ๆ}$$

เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นภายใต้เงื่อนไขของ x กำหนดว่า $Y = y, 0 < y < 1$ จงหาค่าของ c และคำนวณค่าของ

8.1) $P(1/4 < X \leqslant 1/2 \mid Y = 5/8)$

0.2) $E(X \mid Y = y)$

9. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นร่วม กำหนดไว้โดย

$$f(x, y) = x + y \ , \ 0 < x, y < 1$$

$$= 0 \quad , \text{อื่น ๆ}$$

จงหาค่าของ

9.1) $E(5X + 4Y)$

9.2) $Var(2X - Y)$

10. จงพิสูจน์ว่า

10.1) $Cov(3X - 4, 3X + 4) = 9Var(X)$

10.2) $\rho_{(3x-4, \ 3x+4)} = 1$