บทที่ 3
ตัวแบบน่าจะเป็น
Probability Models

วัตถุประสงค์ การศึกษาเกี่ยวกับตัวแบบน่าจะเป็น มุ่งที่จะชี้ให้เห็นถึงการนำเอาเทคนิคเกี่ยวกับการนับ อาทิเช่น

ทฤษฎีการนับมูลฐาน ซึ่งกล่าวว่า ถ้าในการทดลองใด ๆ สามารถแยกการกระทำออกได้เป็น k ขั้นตอน ขั้นแรกมีทางเกิดขึ้นได้ n_1 หนทาง ขั้นที่สองมีทางที่จะเกิดขึ้นได้ n_2 หนทาง .... และขั้นที่ k มีทางที่จะเกิดขึ้นได้ n_k หนทาง จำนวนหนทางที่เป็นไปได้ของการทดลองนี้ จะเท่ากับ

$$n_1 . n_2 ..... n_k \qquad \text{หนทาง}$$

ทฤษฎีว่าด้วยการจัดลำดับ ซึ่งกล่าวว่า หากมีของอยู่ n สิ่ง ซึ่งมีลักษณะแตกต่างกัน เมื่อเอาของ n สิ่งมาจัดลำดับ จำนวนหนทางที่จะจัดลำดับได้ จะเท่ากับ

$$n.(n-1).(n-2)...321 \qquad \text{หนทาง}$$

ทฤษฎีว่าด้วยการจัดหมู่ ซึ่งกล่าวว่า เลือกของ r สิ่ง จากสิ่งของที่มีลักษณะแตกต่างกัน n สิ่ง มาจัดเป็นลำดับ จำนวนหมู่ที่จะจัดได้ จะเท่ากับ

$$\binom{n}{r} \text{ หรือ } \frac{n!}{r!(n-r)!} \qquad \text{หนทาง}$$

เป็นต้น และนำเอาคุณสมบัติของตัวแปรเชิงสุ่มดัชนี มาใช้ในการสร้างตัวแบบน่าจะเป็นหรือฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์ของเหตุการณ์ที่เกี่ยวกับการทดลองประเภทหนึ่ง ซึ่งผลลัพธ์ของการทดลองนี้มีโอกาสเกิดขึ้นเท่า ๆ กัน เช่นเหตุการณ์เกี่ยวกับการจับคู่หรือปัญหาในการจับคู่ เหตุการณ์เกี่ยวกับการใส่บอลล์ลงในกล่องแบบสุ่ม เหตุการณ์ที่เกี่ยวกับการสุ่มตัวอย่างจากประชากรที่มี 2 จำพวก ตัวแบบของเหตุการณ์เหล่านี้สามารถนำไปประยุกต์ในปัญหาต่าง ๆ ได้ เช่นปัญหาในทางธุรกิจ ทางจิตวิทยา ทางสังคมวิทยา ทางสัตวศาสตร์และทางการแพทย์ เป็นต้น นอกจากนี้รายังอาศัยตัวแบบเหล่านี้ในการหาผลบวกของอนุกรมบางประเภทได้

3-1 ปัญหาการจับคู่ (MATCHING PROBLEM)

มีไพ่ n ใบ หมายเลข 1, 2, ..., n วางเรียงกันเป็นแถวใน n ตำแหน่ง ซึ่งมีหมายเลข 1, 2, ..., n เช่นเดียวกัน ถ้าเรียงได้หมายเลขบนไพ่ตรงกับหมายเลขบนตำแหน่งที่กำหนดไว้ เรียกว่าเกิดจากการจับคู่กันได้ในตำแหน่งนั้น เช่น วางไพ่หมายเลข 5 ตรงตำแหน่งที่ 5 เรียกว่าเกิดการจับคู่กันได้ในตำแหน่งที่ 5

ถ้าเราให้มีการจับคู่กัน 4 ตำแหน่ง และกำหนดตัวแปรเชิงสุ่ม X เป็นจำนวนคู่ที่เกิดการจับคู่กันได้ แสดงว่า ถ้าผลลัพธ์เป็น (1, 2, 4, 3) แล้ว X (1, 2, 4, 3) = 2 และถ้าผลลัพธ์เป็น (2, 3, 1, 4) แล้ว X(2, 3, 1, 4) = 1 เป็นต้น กรณีของการจับคู่กันใน 4 ตำแหน่ง จะมีจำนวนผลลัพธ์ทั้งหมด เท่ากับ 4! หรือ 24 และค่าของ X ที่ได้จากผลลัพธ์แต่ละตัว จะกำหนดได้ดังตารางต่อไปนี้

	ผลลัพธ์	ค่าของ X
1.	1234	4
2.	1243	2
3.	1324	2
4.	1342	1
5.	1423	1
6.	1432	2
7.	2134	2
8.	2143	0

	ผลลัพธ์	ค่าของ X
9.	2314	1
10.	2341	0
11.	2413	0
12.	2431	1
13.	3124	1
14.	3142	0
15.	3214	2
16.	3241	1

	ผลลัพธ์	ค่าของ X
17.	3412	0
18.	3421	0
19.	4123	0
20.	4132	1
21.	4213	1
22.	4231	2
23.	4312	0
24.	4321	0

ถ้ากำหนด A_i เป็นเหตุการณ์ที่เกิดการจับคู่กันได้ในตำแหน่งที่ i, i = 1, 2, 3, 4

ผลลัพธ์ที่ 1 - 6 คือกรณีของ A_1 ดังนั้น $P(A_1) = 6/24 = 1/4$

ในทำนองเดียวกัน $P(A_2) = P(A_3) = P(A_4) = 6/24 = 1/4$

ดังนั้น

$$S_1 = \binom{4}{1} \cdot \frac{1}{4} = 1$$

A_iA_j เป็นเหตุการณ์ที่เกิดการจับคู่กันได้ในตำแหน่งที่ i และ j, $1 \leqslant i < j \leqslant 4$

ในที่นี้ A_1A_2 ก็คือผลลัพธ์ 1 - 2 และ A_1A_3 ก็คือผลลัพธ์ 1 และ 6 เป็นต้น เราจะได้

$P(A_1A_2) = P(A_1A_3) = P(A_1A_4) = P(A_2A_3) = P(A_2A_4) = P(A_3A_4) = 2/24$
ดังนั้น

$$S_2 = \binom{4}{2} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{2!}$$

$A_iA_jA_k$ เป็นเหตุการณ์ที่เกิดการจับคู่กันได้ในตำแหน่งที่ i, j และ k, $1 \leq i < j < k \leq 4$
ในที่นี้ ผลลัพธ์ที่ 1 ก็คือกรณีของ $A_iA_jA_k$
ดังนั้น

$P(A_1A_2A_3) = P(A_1A_2A_4) = P(A_1A_3A_4) = P(A_2A_3A_4) = 1/24$

และ $$S_3 = \binom{4}{3} \cdot \frac{1}{24} = \frac{1}{3!}$$

ขณะเดียวกันผลลัพธ์ที่ 1 จะเป็นเหตุการณ์ของ $A_1A_2A_3A_4$ ด้วย

ดังนั้น $P(A_1A_2A_3A_4) = 1/24$

และ $S_4 = 1/4!$

อาศัย INCLUSION - EXCLUSION FORMULA จะได้

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!}$$

$$P(X = 0) = 1 - (1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!}) = \frac{9}{24}$$

ถ้าพิจารณาจำนวนที่จับคู่กันได้ ซึ่งในที่นี้คือค่าของ X จะเห็นได้ว่าค่าที่เป็นไปได้ของ X คือ 0, 1, 2, 4 จำนวนที่จับคู่กันได้เพียง 3 คู่ไม่มี เช่นเดียวกันในปัญหาการจับคู่ n คู่ จำนวนคู่ที่เกิดการจับคู่กันได้มีได้สูงสุด n คู่ แต่ไม่มีการจับคู่กันได้เพียง n − 1 คู่ ทั้งนี้เนื่องจากว่า ถ้ามีการจับคู่กันได้ n − 1 คู่แล้ว คู่ที่ n ย่อมเกิดการจับคู่กันได้แน่ ๆ ในการจับคู่อาจมีกรณีที่จับคู่กันไม่ได้เลยก็ได้เมื่อเป็นเช่นนี้เราจึงสนใจในการคำนวณความน่าจะเป็นที่จะไม่มีการจับคู่กันเลย และความน่าจะเป็นที่จะมีการจับคู่กันได้ x คู่ (x = 1, 2, ..., n) นั่นคือหาสูตรการแจกแจงของจำนวนคู่ที่เกิดการจับคู่กันได้ หรือหาฟังก์ชันความน่าจะเป็นของ X, P(X = x), ตลอดจนหาค่าคาดหมายของ X ดังต่อไปนี้

3-1.1 ความน่าจะเป็นที่จะจับคู่กันไม่ได้เลย

เรียงไพ่ n ใบหมายเลข 1, 2, ..., n ใน n ตำแหน่ง หมายเลข 1, 2, ..., n เช่นเดียวกัน จะเกิดการจับคู่กันได้ในตำแหน่งที่ i, (i = 1, 2, ..., n) ถ้าไพ่หมายเลข i อยู่ในตำแหน่งที่ i ถ้า p_n = ความน่าจะเป็นที่จะจับคู่กันไม่ได้เลย แล้ว

$$p_n = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{n!} \qquad \text{..........(3-1.1)}$$

พิสูจน์

กำหนด A_i เป็นเหตุการณ์ที่เรียงได้ไพ่หมายเลข i อยู่ในตำแหน่งที่ i, i = 1, 2, ..., n
และ S_k เป็นผลบวกของความน่าจะเป็นของการเกิดร่วมกันของ k เหตุการณ์ k = 1, 2, ..., n
จำนวนผลลัพธ์ของการเรียงไพ่ n ใบใน n ตำแหน่ง จะเท่ากับ n!
เหตุการณ์ A_i ก็คือการเรียงไพ่ n − 1 ใบที่เหลือใน n − 1 ตำแหน่ง ดังนั้น
จำนวนผลลัพธ์ของ A_i จะเท่ากับ (n − 1)!
เนื่องจากแต่ละผลลัพธ์มีโอกาสที่จะเกิดขึ้นได้เท่า ๆ กัน ดังนั้น

$$P(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n} \quad \forall A_i \qquad \text{..........(3-1.2)}$$

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$$

ให้ $A_i \cap A_j$ เป็นเหตุการณ์ที่เรียงได้ไพ่หมายเลข i อยู่ในตำแหน่งที่ i และ j อยู่ในตำแหน่งที่ j นั่นคือมีการจับคู่กันได้ในตำแหน่งที่ i และ j, $i \neq j$
เหตุการณ์ $A_i \cap A_j$ ก็คือการเรียงไพ่ n − 2 ใบที่เหลือใน n − 2 ตำแหน่งนั่นเอง
จำนวนผลลัพธ์ของ $A_i \cap A_j$ จะเท่ากับ (n − 2)! และ

$$P(A_i \cap A_j) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}, \; 1 \leqslant i < j \leqslant n$$

$$S_2 = \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) = \frac{1}{2!}$$

ในทำนองเดียวกัน ให้ $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}$ เป็นเหตุการณ์ที่เรียงไพ่หมายเลข $i_1, i_2, \ldots, i_k$ อยู่ในตำแหน่งที่ $i_1, i_2, \ldots, i_k$ ตามลำดับ นั่นคือ เกิดการจับคู่กันได้ในตำแหน่งที่ $i_1, i_2, \ldots, i_k$, $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n$, k = 3, 4, 5, ..., n

เหตุการณ์ $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}$ ก็คือการเรียงไพ่ n − k ใบที่เหลือใน n − k ตำแหน่ง

จำนวนผลลัพธ์ของ $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}$ จะเท่ากับ $(n-k)!$
ดังนั้น

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \frac{(n-k)!}{n!} \qquad \ldots\ldots\ldots(3\text{-}1.3)$$

$$S_k = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_k} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k})$$

$$= \binom{n}{k} \frac{(n-k)!}{n!} = \frac{1}{k!}, \ k > 2$$

ความน่าจะเป็นที่จะจับคู่กันได้อย่างน้อยที่สุด 1 คู่ จะเท่ากับ $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)$
อาศัย INCLUSION - EXCLUSION FORMULA เราจะได้

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \ldots \pm \frac{1}{n!}$$

แต่ความน่าจะเป็นที่จะจับคู่กันไม่ได้เลย $= 1 - P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(X = 0)$
ดังนั้น

$$P(X = 0) = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots \pm \frac{1}{n!}$$

$$= \sum_{k=2}^{n} (-1)^k/k! = p_n$$

3-1.2 การแจกแจงของจำนวนคู่ที่เกิดการจับคู่กันได้

$$P(X = x) = \frac{p_{n-x}}{x!}, \ x = 0, 1, \ldots, n \qquad \ldots\ldots\ldots(3\text{-}1.4)$$

ในเมื่อ p_{n-x} คือความน่าจะเป็นที่จะจับคู่กันไม่ได้เลยใน $n - x$ ตำแหน่ง และ

$$p_{n-x} = \sum_{k=0}^{n-x} \frac{(-1)^k}{k!}, \ x = 0, 1, 2, \ldots, n$$

พิสูจน์

กำหนดให้มีการจับคู่กันได้ใน x ตำแหน่งแรก $(x = 0, 1, 2, \ldots, n)$
จำนวนผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ของเหตุการณ์นี้ จะเท่ากับ $(n-x)!$

ให้ N_{n-x} เป็นจำนวนผลลัพธ์ที่จับคู่กันไม่ได้เลยใน $n - x$ ตำแหน่งหลัง ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะจับคู่กันไม่ได้เลยใน $n - x$ ตำแหน่ง

$$p_{n-x} = \frac{N_{n-x}}{(n - x)!}$$

แต่การจับคู่กันได้ใน x ตำแหน่งใด ๆ $(x = 0, 1, 2, \ldots, n)$ มีทางเป็นไปได้ $\binom{n}{x}$ หนทาง
ดังนั้นจำนวนผลลัพธ์ของการจับคู่กันได้เพียง x คู่ จะเท่ากับ $\binom{n}{x} N_{n-x}$
และจำนวนผลลัพธ์ของการจับคู่กันใน n ตำแหน่ง เท่ากับ $n!$
แต่ละผลลัพธ์มีโอกาสเกิดขึ้นเท่า ๆ กัน ดังนั้น

$$P(X = x) = \frac{\binom{n}{x} N_{n-x}}{n!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, n$$

$$= \frac{n!}{x!(n - x)!} \cdot \frac{N_{n-x}}{n!}$$

$$= \frac{1}{x!} \cdot \frac{N_{n-x}}{(n - x)!}$$

หรือ $$P(X = x) = \frac{1}{x!} p_{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, n$$

เนื่องจาก $P(X = x)$ เป็นฟังก์ชันน่าจะเป็นของตัวแปรเชิงสุ่ม X อาศัยคุณสมบัติของฟังก์ชันน่าจะเป็น

เราจะได้

$$\sum_{x=0}^{n} \frac{p_{n-x}}{x!} = 1$$

หรือ $$\sum_{x=0}^{n} \sum_{k=0}^{n-x} \frac{(-1)^k}{k!\, x!} = 1 \qquad \ldots\ldots\ldots(3\text{-}1.5)$$

การหาฟังก์ชันการแจกแจงของจำนวนคู่ที่เกิดการจับคู่กันได้ (X) อาจทำได้โดยใช้ indicator random variable ดังนี้ ให้ X_i เป็น indicator random variable ของ A_i

และ $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n,\ x = 0, 1, 2, \ldots, n$

จาก (2-7.10) เรามี

$$P(X = x) = \binom{x}{x} S_x - \binom{x+1}{x} S_{x+1} + \binom{x+2}{x} S_{x+2} - \ldots \pm \binom{n}{x} S_n$$

และ (3-1.3) เรามี

$$S_k = \frac{1}{k!}, k = 1, 2, \ldots, n$$

ดังนั้น

$$P(X = x) = \binom{x}{x}\frac{1}{x!} - \binom{x+1}{x}\frac{1}{(x+1)!} + \binom{x+2}{x}\frac{1}{(x+2)!} - \ldots \pm \binom{n}{x}\frac{1}{n!}$$

$$= \frac{1}{x!} - \frac{1}{x!} + \frac{1}{x!}\cdot\frac{1}{2!} - \ldots \pm \frac{1}{x!}\cdot\frac{1}{(n-x)!}$$

$$= \frac{1}{x!}\sum_{k=0}^{n-x}\frac{(-1)^k}{k!}$$

$$P(X = x) = \frac{p_{n-x}}{x!} \quad , \quad x = 0, 1, 2, \ldots, n$$

3-1.3 ค่าคาดหมายของจำนวนคู่ที่จะจับคู่กันได้เท่ากับ 1 เสมอ

นั่นคือ

$E(X) = 1$ สำหรับทุก ๆ ค่าของ n

พิสูจน์ การพิสูจน์ทำได้ 2 วิธี ดังนี้

วิธีที่ 1 อาศัยนิยามของค่าคาดหมาย เราได้

$$E(X) = \sum_{\forall x} xP(X = x)$$

$$= \sum_{x=0}^{n} x \cdot \frac{p_{n-x}}{x!}$$

$$= \sum_{x=1}^{n}\sum_{k=0}^{n-x}\frac{(-1)^k}{k!(x-1)!}$$

$$= \sum_{x-1=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{(n-1)-(x-1)}\frac{(-1)^k}{k!(x-1)!} = 1 \qquad \text{(สูตร 3-1.5)}$$

วิธีที่ 2 อาศัยคุณสมบัติของตัวแปรเชิงสุ่มดัชนี

กำหนด $X_i = 1$ เมื่อเกิดการจับคู่กันได้ในตำแหน่งที่ $i, i = 1, 2, \ldots, n$
$= 0$ อื่น ๆ

และ $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$

เมื่อกำหนดให้มีการจับคู่กันได้ในตำแหน่งที่ $i, i = 1, 2, \ldots, n$ ย่อมหมายถึงการเรียงไพ่ $n - 1$ ใบ ที่เหลือใน $n - 1$ ตำแหน่ง จำนวนผลลัพธ์ที่ได้ จะเท่ากับ $(n - 1)!$

แต่จำนวนผลลัพธ์ทั้งหมด เท่ากับ $n!$ ดังนั้น

ความน่าจะเป็นที่จะเกิดการจับคู่กันได้ในตำแหน่งที่ $i, i = 1, 2, \ldots, n$

$$= \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n} = P(X_i = 1)$$

นั่นคือ $E(X_i) = P(X_i = 1) = \frac{1}{n}$, $\forall i$

$$E(X) = E(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = 1$$

ตัวอย่างที่ 3-1.1 ในปัญหาการจับคู่ที่มี $n = 6$ จงเขียนตารางแสดงฟังก์ชันน่าจะเป็นของจำนวนคู่ที่เกิดการจับคู่กันได้ และอาศัยฟังก์ชันที่ได้ จงแสดงให้เห็นจริงว่า ค่าคาดหมายของจำนวนคู่ที่จะจับคู่กันได้จะเท่ากับ 1

วิธีทำ

กำหนดตัวแปรเชิงสุ่ม X เป็นจำนวนคู่ที่จับคู่กันได้

อาศัยสูตร (3-1.4) เราได้ฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X ดังนี้

$$P(X = x) = \sum^{6-x}$$

x	P(X = x)	x P(X = x)
0	$1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6} = \frac{265}{720}$	0
1	$1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} = \frac{264}{720}$	$\frac{264}{720}$
2	$\frac{1}{2!}(1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}) = \frac{135}{720}$	$\frac{270}{720}$
3	$\frac{1}{3!}(1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}) = \frac{40}{720}$	$\frac{120}{720}$
4	$\frac{1}{4!}(1 - 1 + \frac{1}{2!}) = \frac{15}{720}$	$\frac{60}{720}$
6	$\frac{1}{6!} = \frac{1}{720}$	$\frac{6}{720}$

ค่าคาดหมายของ $X = \sum_{\forall x} x\,P(X = x)$

$$= \frac{1}{720}(0 + 264 + 270 + 120 + 60 + 6) = 1$$

แสดงว่า ค่าคาดหมายของจำนวนคู่ที่จะจับคู่กันได้เท่ากับ 1 จริง

ตัวอย่างที่ 3-1.2 ในปัญหาการจับคู่ที่มี $n > 2$ กำหนดตัวแปรเชิงสุ่ม X เป็นจำนวนคู่ที่จับคู่กันได้ใน 2 ตำแหน่งแรก จงคำนวณค่าคาดหมายและฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X

วิธีทำ

กำหนดตัวแปรเชิงสุ่มดัชนี X_i, $i = 1, 2$ ดังนี้

$X_i = 1$ ถ้าเกิดการจับคู่กันได้ในตำแหน่งที่ i, $i = 1, 2$

$= 0$ อื่น ๆ

และ $X = X_1 + X_2$

$P(X_i = 1)$ = ความน่าจะเป็นที่จะเกิดการจับคู่กันได้ในตำแหน่งที่ i, $i = 1, 2$

$$= \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

$$
\begin{aligned}
E(X) &= E(X_1) + E(X_2) \\
&= P(X_1 = 1) + P(X_2 = 1) \\
&= \frac{1}{n} + \frac{1}{n}
\end{aligned}
$$

ค่าคาดหมายของ $X = \frac{2}{n}$

ความน่าจะเป็นที่จะเกิดการจับคู่กันได้ใน 2 คู่แรก

$$= \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)} = P(X_1 = 1, X_2 = 1)$$

อาศัยสูตร (2-7.10) เราจะได้

$$P(X = 0) = 1 - P(X_1 = 1) - P(X_2 = 1) + P(X_1 = 1, X_2 = 1)$$

$$P(X = 0) = 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n-1)} = \frac{n^2 - 3n + 3}{n(n-1)}$$

$$
\begin{aligned}
P(X = 1) &= P(X_1 = 1) + P(X_2 = 1) - \binom{2}{1} P(X_1 = 1, X_2 = 1) \\
&= \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{2}{n(n-1)} = \frac{2n-4}{n(n-1)}
\end{aligned}
$$

$$P(X = 2) = P(X_1 = 1, X_2 = 1) = \frac{1}{n(n-1)}$$

ฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X สามารถแสดงได้ดังตาราง

x	0	1	2
$P(X = x)$	$\frac{n^2 - 3n + 3}{n(n-1)}$	$\frac{2(n-2)}{n(n-1)}$	$\frac{1}{n(n-1)}$

ตัวอย่างที่ 3-1.3 อาศัยสูตร (3-1.5) จงคำนวณค่าของ

$$\sum_{x=0}^{18} \sum_{k=0}^{20-x} \frac{(-1)^k}{k!\,x!}, \quad \sum_{x=2}^{30} \sum_{k=0}^{30-x} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \frac{2!}{(x-2)!}$$

วิธีทำ

$$\sum_{x=0}^{18} \sum_{k=0}^{20-x} \frac{(-1)^k}{k!\,x!} = \sum_{x=0}^{20} \sum_{k=0}^{20-x} \frac{(-1)^k}{k!\,x!} - \sum_{x=19}^{20} \sum_{k=0}^{20-x} \frac{(-1)^k}{k!\cdot x!}$$

$$= 1 - \frac{1}{20!}$$

$$\sum_{x=2}^{30} \sum_{k=0}^{30-x} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{2!}{(x-2)!} = 2! \sum_{j=0}^{28} \sum_{k=0}^{28-j} \frac{(-1)^k}{k!\,j!} = 2 \text{ (เมื่อ } j = x-2)$$

แบบฝึกหัดที่ 3-1

1. มีลูกบอลล์ 10 ลูก หมายเลข 1, 2, ..., 10 เอาลูกบอลลใส่กล่องหมายเลข 1, 2, ..., 10 กล่องละ 1 ลูก โดยไม่สนใจว่าหมายเลขบนลูกบอลล์กับหมายเลขกล่องจะตรงกันหรือไม่ แต่ถ้าใส่ได้หมายเลขตรงกัน แสดงว่าเกิดการจับคู่กันได้ตรงหมายเลขนั้น

   1.1 จำนวนผลลัพธ์ของการจับคู่ = ...

   จำนวนผลลัพธ์ที่เกิดการจับคู่ตรงหมายเลข 2 = ...

   จำนวนผลลัพธ์ที่เกิดการจับคู่กันตรงหมายเลข 1, 3 และ 9 = ...

   1.2) กำหนด A_i เป็นเหตุการณ์ที่การจับคู่กันได้เกิดขึ้นในตำแหน่ง i

   $P(A_1)$ = ...

   $P(A_1 \cup A_2)$ = ...

   $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ = ...

   $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$ = ...

   1.3) ความน่าจะเป็นที่จะจับคู่กันไม่ได้เลย = ...

   ความน่าจะเป็นที่จะจับคู่กันได้เพียง 5 คู่ = ...

   ความน่าจะเป็นที่จะจับคู่กันได้เพียง 9 คู่ = ...

   ค่าคาดหมายของจำนวนคู่ที่จับคู่กันได้ = ...

2. ใส่ลูกหิน 5 ลูกหมายเลข 1, 2, 3, 4, 5 ลงในกล่อง 5 กล่องหมายเลข 1, 2, 3, 4, 5 อย่างสุ่ม กล่องละ 1 ลูก

   2.1) จงคำนวณความน่าจะเป็นที่จะเกิดการจับคู่กันได้ 0, 1, 2, 3, 4 และ 5 คู่

   2.2) จงหาจำนวนคู่ที่มีค่าความน่าจะเป็นมากที่สุด

3. ในการคำนวณค่าความน่าจะเป็นที่จะเกิดการจับคู่กันได้ x คู่ ตามสูตร (3-1.4) ค่าที่จะคำนวณได้ย่อมขึ้นอยู่กับค่าของ x และ n

   3.1) จงคำนวณค่า $P(X = 2)$ เมื่อ $n = 2, 3, \ldots, 8$ เราจะสรุปว่า $P(X = 2)$ มีค่าเพิ่มขึ้นในเมื่อค่าของ n สูงขึ้น ได้หรือไม่

   3.2) จงแสดงให้เห็นจริงว่า ความน่าจะเป็นที่จะเกิดการจับคู่กันได้เพียง $n - 1$ คู่ จะเท่ากับ 0 สำหรับทุก ๆ ค่าของ n

   3.3) จงพิสูจน์ว่า

   $$\lim_{n\to\infty} P(X = 0) = e^{-1}, \qquad \lim_{n\to\infty} P(X = x) = \frac{e^{-1}}{x!}, x = 0, 1, 2, \ldots$$

4. **กำหนดตัวแปรเชิงสุ่ม** X เป็นจำนวนคู่ที่เกิดการจับคู่กันได้ ในการเรียงไพ่ n ใบ หมายเลข 1, 2, ..., n ให้อยู่ใน n ตำแหน่งหมายเลข 1, 2, ..., n จงพิสูจน์ว่า

4.1) $P(X = x + 1) = \frac{1}{(x+1)!}\left[x!\, P(X = x) - \frac{(-1)^{n-x}}{(n-x)!} \right]$

4.2) $| P(X = 0) - P(X = 1) | = \frac{1}{n!}$

4.3) $E(X^{(r)}) = 1, r = 1, 2, \ldots, n$

5. **นางสาวสุดาพิมพ์จดหมาย** 6 ฉบับ พร้อมด้วยจ่าหน้าซอง 6 ซอง ก่อนที่สุดาจะสอดจดหมายลงในซอง มีโทรศัพท์เรียกเข้ามา ในขณะที่กำลังพูดโทรศัพท์ สุดาก็สอดจดหมายใส่ซองด้วยโดยไม่ได้ดูว่าจดหมายกับจ่าหน้าซองจะตรงกันหรือไม่ กำหนดตัวแปรเชิงสุ่ม X เป็นจำนวนจดหมายที่สอดถูกซอง จงหาฟังก์ชันน่าจะเป็นและค่าคาดหมายของ X

6. **สามีภรรยา** 7 คู่จัดงานปาร์ตี้ขึ้น ในขณะที่มีการเต้นรำกัน จงคำนวณค่าความน่าจะเป็นที่

6.1) สามีภรรยาแต่ละคู่ไม่ได้เต้นรำด้วยกัน

6.2) มีสามีภรรยา 3 คู่เท่านั้นที่เต้นรำด้วยกัน

6.3) ทุก ๆ คู่ต่างเต้นรำกับคู่ของตนเอง

6.4) มีสามีภรรยาอย่างน้อยที่สุด 2 คู่ ที่จับคู่เต้นรำด้วยกัน

7. **ภายหลังการศึกษาเกี่ยวกับเรื่องราวของนักประดิษฐ์** 10 คน อาจารย์ได้ทดสอบความรู้โดยเขียนสรุปเรื่องราวของสิ่งประดิษฐ์ต่าง ๆ 10 สิ่ง ซึ่งนักประดิษฐ์แต่ละคนเป็นผู้คิดค้นกระทำขึ้น พร้อมด้วยรายชื่อนักประดิษฐ์ทั้ง 10 นั้น ให้นักศึกษาทำข้อทดสอบโดยเขียนรายชื่อนักประดิษฐ์ให้ตรงกับเรื่องราวของสิ่งที่เขาประดิษฐ์ มีนักศึกษาคนหนึ่งเลือกได้ถูกต้อง 5 ราย จากผลที่ได้จะแสดงว่า นักศึกษาผู้นั้นได้ศึกษาเรื่องราวของนักประดิษฐ์ทั้ง 10 หรือว่าเขาทำถูก 5 รายโดยการเดา

3-2 ปัญหาการใส่บอลล์ในกล่องอย่างสุ่ม

ถ้าใส่บอลล์ n ลูกในกล่อง m กล่องแบบสุ่ม ๆ จำนวนผลลัพธ์ที่จะเกิดขึ้นจะแตกต่างกันไปขึ้นอยู่กับว่าบอลล์แต่ละลูกเหมือนกันหรือไม่เหมือนกัน กรณีที่บอลล์แต่ละลูกแตกต่างกัน จำนวนผลลัพธ์ที่จะเกิดขึ้น จะเท่ากับ m^n และแต่ละผลลัพธ์จะมีค่าความน่าจะเป็น เท่ากับ $1/m^n$ ส่วนในกรณีของบอลล์เหมือนกัน จำนวนผลลัพธ์ที่จะเกิดขึ้น จะเท่ากับ $\binom{m+n-1}{n}$ และความน่าจะเป็นของแต่ละผลลัพธ์ เท่ากับ $1/\binom{m+n-1}{n}$ ในการสุ่มบอลล์แต่ละกรณี เราสนใจเกี่ยวกับจำนวนบอลล์ที่อยู่ในกล่องใดกล่องหนึ่ง แต่ที่สนใจมากที่สุดก็คือกรณีของจำนวนกล่องว่าง

เรามาพิจารณากรณีของการใส่บอลล์ที่แตกต่างกันในกล่องแบบสุ่ม ๆ สมมติว่าเรามีบอลล์ 3 ลูก หมายเลข 1, 2 และ 3 มีกล่อง 3 กล่อง ใส่บอลล์ 3 ลูกนี้ลงในกล่องแบบสุ่ม ๆ จะมีลักษณะการกระจายดังต่อไปนี้

1.	123	—	—	8.	23	1	—	15.	3	—	12	22.	1	2	3
2.	—	123	—	9.	23	—	1	16.	—	1	23	23.	1	3	2
3.	—	—	123	10.	1	23	—	17.	—	2	13	24.	2	1	3
4.	12	3	—	11.	1	—	23	18.	—	3	12	25.	2	3	1
5.	12	—	3	12.	2	—	13	19.	—	12	3	26.	3	1	2
6.	13	2	—	13.	2	13	—	20.	—	13	2	27.	3	2	1
7.	13	—	2	14.	3	12	—	21.	—	23	1				

จำนวนผลลัพธ์ที่เกิดขึ้น เท่ากับ 3^3 หรือ 27

ถ้าเราพิจารณาจำนวนบอลล์ที่อยู่ในกล่องที่หนึ่ง จะเห็นได้ว่า

ผลลัพธ์ที่ 2, 3 และ 16 - 21 : กล่องแรกว่าง

ผลลัพธ์ที่ 10 - 15 และ 22 - 27 : กล่องแรกบรรจุบอลล์ 1 ลูก

ผลลัพธ์ที่ 4 - 9 : กล่องแรกบรรจุบอลล์ 2 ลูก

ผลลัพธ์ที่ 1 : กล่องแรกบรรจุบอลล์ 3 ลูก

ถ้ากำหนดตัวแปรเชิงสุ่ม X เป็นจำนวนบอลล์ในกล่องแรก ฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X กำหนดได้ดังต่อไปนี้

x	0	1	2	3
P(X = x)	8/27	12/27	6/27	1/27

ถ้าเราพิจารณาจำนวนกล่องที่ว่าง จะเห็นได้ว่า

ผลลัพธ์ที่ 1 - 3 : กล่องว่าง 2 กล่อง

ผลลัพธ์ที่ 4 - 21 : กล่องว่าง 1 กล่อง

ผลลัพธ์ที่ 22 - 27 : ไม่มีกล่องว่าง

นั่นคือจำนวนกล่องว่างจะมี 0, 1, 2 กล่อง ถ้าให้ X เป็นจำนวนกล่องว่าง ฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X จะกำหนดได้ดังนี้

x	0	1	2
P(X = x)	6/27	18/27	3/27

ถ้าเรากำหนด A_i เป็นเหตุการณ์ที่กล่อง i ว่าง, i = 1, 2, 3,

A_1 คือผลลัพธ์ที่ 2, 3 และ 16 - 21

A_2 คือผลลัพธ์ที่ 1, 3, 5, 7, 9, 11, 12 และ 15

A_3 คือผลลัพธ์ที่ 1, 2, 4, 6, 8, 10, 13 และ 14

ดังนั้น $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 8/27$

$A_1 \cap A_3$ (กล่องที่ 1 และ 2 ว่าง) คือผลลัพธ์ที่ 3

$A_1 \cap A_3$ (กล่องที่ 1 และ 3 ว่าง) คือผลลัพธ์ที่ 2

$A_2 \cap A_3$ (กล่องที่ 2 และ 3 ว่าง) คือผลลัพธ์ที่ 1

ดังนั้น $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1 \cap A_3) = P(A_2 \cap A_3) = 1/27$

กรณีของกล่องว่างทั้ง 3 กล่องไม่มี นั่นคือ $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 0$

ให้ X_i เป็นตัวแปรเชิงสุ่มดัชนีของ A_i, $i = 1, 2, 3$ และ $X = X_1 + X_2 + X_3$ ดังนั้น

$$P(X = 0) = 1 - P(A_1) - P(A_2) - P(A_3) + P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_3) + P(A_2 \cap A_3)$$

$$= 1 - \frac{8}{27} - \frac{8}{27} - \frac{8}{27} + \frac{1}{27} + \frac{1}{27} + \frac{1}{27} = \frac{6}{27}$$

$$P(X = 1) = P({}_1) + P(A_2) + P(A_3) - \binom{2}{1}\{P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_3) + P(A_2 \cap A_3)\}$$

$$= \frac{8}{27} + \frac{8}{27} + \frac{8}{27} - \frac{2}{27} - \frac{2}{27} - \frac{2}{27} = \frac{18}{27}$$

$$P(X = 2) = P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_3) + P(A_2 \cap A_3)$$

$$= \frac{1}{27} + \frac{1}{27} + \frac{1}{27} = \frac{3}{27}$$

จะเห็นได้ว่า ผลที่ได้เป็นชุดเดียวกันกับฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X (จำนวนกล่องว่าง) ซึ่งคำนวณได้โดยการนับจำนวนผลลัพธ์ของจำนวนกล่องว่างเปรียบเทียบกับจำนวนผลลัพธ์ทั้งหมด

เท่าที่กล่าวมาแล้วข้างต้น เป็นเรื่องเกี่ยวกับการใส่บอลล์ที่แตกต่างกันในกล่องแบบสุ่ม ๆ ในกรณีที่มีบอลล์แต่ละลูกเหมือนกัน ลักษณะของแต่ละผลลัพธ์จะแตกต่างออกไป กรณีนี้เราไม่สนใจว่าบอลล์ลูกใดจะตกอยู่ในกล่องใด อย่างไร แต่จะสนใจว่ามีบอลล์กี่ลูกตกอยู่ในกล่องใด การแจกแจงของจำนวนกล่องว่างจะเป็นอย่างไร ให้เราพิจารณาผลลัพธ์ที่ได้จากการใส่บอลล์ 3 ลูกที่เหมือนกันลงในกล่อง 3 กล่อง ดังตารางต่อไปนี้

1.	XXX	—	—
2.	—	XXX	—
3.	—	—	XXX
4.	XX	X	—
5.	XX	—	X
6.	X	XX	—
7.	X	—	XX
8.	—	XX	X
9.	—	X	XX
10.	X	X	X

จะเห็นได้ว่า ลักษณะของแต่ละผลลัพธ์จะอยู่ในรูป (k_1, k_2, k_3) เมื่อ k_i คือจำนวนบอลล์ที่ตกในกล่อง $i, i = 1, 2, 3$ และถ้าเราพิจารณาจำนวนผลลัพธ์ที่ได้ จะเห็นว่าเป็นลักษณะเดียวกันกับการหาจำนวนผลลัพธ์ของการจัดเรียงของสองพวก แต่ละพวกมีลักษณะเหมือนกัน ซึ่งในที่นี้คือพวกลูกบอลล์ 3 ลูก XXX และฝากั้นกล่อง 3-1 หรือ 2 ด้าน (ถือว่าฝากั้นด้านแรกและด้านสุดท้ายตรึงอยู่กับที่) // ดังนั้นจำนวนผลลัพธ์ที่ได้ จะเท่ากับ $\binom{3+3-1}{3}$ ซึ่งเท่ากับ 10

ให้ X เป็นจำนวนบอลล์ในกล่องแรก

ผลลัพธ์ที่ 1 เป็นกรณีที่ $X = 3$

ผลลัพธ์ที่ 4, 5 เป็นกรณีที่ $X = 2$

ผลลัพธ์ที่ 6, 7 และ 10 เป็นกรณีที่ $X = 1$

ผลลัพธ์ที่ 2, 3, 8 และ 9 เป็นกรณีที่ $X = 0$

ดังนั้นฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X หรือการแจกแจงของจำนวนบอลล์ในกล่องใดกล่องหนึ่งจะกำหนดได้ดังนี้

x	0	1	2	3
P(X = x)	0.4	0.3	0.2	0.1

ถ้ากำหนด A_i เป็นเหตุการณ์ที่กล่อง i ว่าง, i = 1, 2, 3

A_1 คือผลลัพธ์ที่ 2,3,8 และ 9 $P(A_1) = 4/10 = .4$

A_2 คือผลลัพธ์ที่ 1,3,5 และ 7 $P(A_2) = 4/10 = .4$

A_3 คือผลลัพธ์ที่ 1,2,4 และ 6 $P(A_3) = 4/10 = .4$

$A_1 \cap A_2$ (กล่องที่ 1 และ 2 ว่าง) คือผลลัพธ์ที่ 3 $P(A_1 \cap A_2) = 1/10 = .1$

$A_1 \cap A_3$ (กล่องที่ 1 และ 3 ว่าง) คือผลลัพธ์ที่ 2 $P(A_1 \cap A_3) = 1/10 = .1$

$A_2 \cap A_3$ (กล่องที่ 2 และ 3 ว่าง) คือผลลัพธ์ที่ 1 $P(A_2 \cap A_3) = 1/10 = .1$

กรณีที่กล่องว่างทั้ง 3 กล่องไม่มี ดังนั้น $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 0$

ให้ X_i เป็นตัวแปรเชิงสุ่มดัชนีของ A_i, i = 1, 2, 3 และ $X = X_1 + X_2 + X_3$ ดังนั้น

$P(X = 0) = 1 - .4 - .4 - .4 + .1 + .1 + .1 = .1$

= ความน่าจะเป็นที่ไม่มีกล่องใดว่าง

$P(X = 1) = .4 + .4 + .4 - \binom{2}{1} \cdot (.1 + .1 + .1) = .6$

= ความน่าจะเป็นที่จะมีกล่องว่าง 1 กล่อง

$P(X = 2) = .1 + .1 + .1 = .3$

= ความน่าจะเป็นที่จะมีกล่องว่าง 2 กล่อง

ผลที่ได้จะเป็นคำตอบเดียวกันกับการคำนวณความน่าจะเป็นของจำนวนกล่องว่าง ซึ่งคำนวณได้จากการหาจำนวนผลลัพธ์ของจำนวนกล่องที่ว่าง หารด้วยจำนวนผลลัพธ์ทั้งหมด นั่นย่อมแสดงว่า การหาสูตรการแจกแจงของจำนวนกล่องว่าง อาจหาได้โดยอาศัยสูตร

$$P(A) = \frac{\text{จำนวนผลลัพธ์ของ A}}{\text{จำนวนผลลัพธ์ทั้งหมด}}$$

หรือจากคุณสมบัติของตัวแปรเชิงสุ่มดัชนี ก็ได้

หากพิจารณาปัญหาให้กว้างออกไปอีก ดังเช่นการสุ่มบอลล์ n ลูกใส่ในกล่อง m กล่อง ความน่าจะเป็นของจำนวนกล่องที่ว่าง หรือสูตรการแจกแจงของจำนวนกล่องที่ว่าง และการแจกแจงของจำนวนบอลล์ในกล่องหนึ่ง จะหาได้ดังต่อไปนี้

3-2.1 การแจกแจงของจำนวนบอลล์ที่แตกต่างกันในกล่องหนึ่ง

ใส่บอลล์ n ลูกหมายเลข 1, 2, ..., n ในกล่อง m กล่องแบบสุ่ม ๆ ให้ตัวแปรเชิงสุ่ม X เป็นจำนวนบอลล์ที่อยู่ในกล่องหนึ่ง จะได้สูตรการแจกแจงของ X ดังนี้

$$P(X = x) = \binom{n}{x}\frac{(m-1)^{n-x}}{m^n}, \; x = 0, 1, 2, \ldots, n \qquad \text{..........(3-2.1)}$$

พิสูจน์

ใส่บอลล์ n ลูกในกล่อง m กล่องจะมีจำนวนผลลัพธ์เกิดขึ้น เท่ากับ m^n

ให้บอลล์ x ($x = 0, 1, 2, \ldots, n$) ลูกแรกตกอยู่ในกล่องแรก ซึ่งเท่ากับการใส่บอลล์ $n - x$ ที่เหลือในกล่อง $m - 1$ กล่อง จำนวนผลลัพธ์ที่อาจจะเกิดขึ้น จะเท่ากับ $(m-1)^{n-x}$

แต่การที่จะให้บอลล์ x ลูกใด ๆ ตกอยู่ในกล่องแรก มีทางเป็นไปได้ $\binom{n}{x}$ หนทาง

ดังนั้น จำนวนผลลัพธ์ที่บอลล์ x ลูกจะอยู่ในกล่องแรก จะเท่ากับ $\binom{n}{x}\cdot(m-1)^{n-x}$, $x = 0, 1, 2, \ldots, n$

เนื่องจากแต่ละผลลัพธ์ต่างมีโอกาสเกิดขึ้นได้เท่า ๆ กัน ดังนั้น

$$P(X = x) = \binom{n}{x}\frac{(m-1)^{n-x}}{m^n}, \; x = 0, 1, 2, \ldots, n$$

จาก (3-2.1) $P(X = x)$ เป็นฟังก์ชันน่าจะเป็นของตัวแปรเชิงสุ่ม X และค่าที่เป็นไปได้ของ X คือ 0, 1, 2, ..., n อาศัยคุณสมบัติของฟังก์ชันน่าจะเป็น เราจะได้

$$\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}\cdot\frac{(m-1)^{n-x}}{m^n} = 1$$

หรือ

$$\sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} \cdot (m-1)^{n-x} \quad = \quad m^n \qquad \text{..........(3-2.3)}$$

ซึ่งเป็นกรณีหนึ่งของการกระจายทวินาม (binomial expansion) นั่นเอง

ค่าคาดหมายของจำนวนบอลล์ในกล่องหนึ่ง จะเท่ากับ อัตราส่วนระหว่างจำนวนบอลล์กับจำนวนกล่อง นั่นคือ

$$E(X) \quad = \quad \sum_{x=0}^{n} x\binom{n}{x} \cdot \frac{(m-1)^{n-x}}{m^n} \quad = \quad \frac{n}{m} \qquad \text{..........(3 2.3)}$$

เป็นแบบฝึกหัด 3-2 ข้อ 5 ให้นักศึกษาไปพิสูจน์

ตัวอย่างที่ 3-2.1 สมมติว่ามีพัสดุ 10 ชิ้น ที่จะต้องนำไปเก็บไว้ที่ช่องเก็บของซึ่งมีอยู่ 3 ช่อง โดยไม่ได้กำหนดว่าจะเก็บอย่างไร จงหา

1) ฟังก์ชันการแจกแจงของจำนวนพัสดุที่จะเก็บไว้ในช่องแรก
2) ความน่าจะเป็นที่จะเก็บพัสดุไว้ในช่องแรกเพียง 2 ชิ้นเท่านั้น
3) ความน่าจะเป็นที่จะเก็บพัสดุในช่องแรกไม่เกิน 8 ชิ้น
4) ค่าคาดหมายของจำนวนพัสดุที่จะเก็บไว้ในช่องแรก

วิธีทำ

ให้ X เป็นจำนวนพัสดุที่จะเก็บไว้ในช่องแรก

ฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X จะกำหนดได้ดังนี้

$$P(X = x) \quad = \quad \binom{10}{x} \cdot \frac{2^{10-x}}{3^{10}} \quad , \; x = 0, 1, 2, \ldots, 10$$

$$= \quad 0 \qquad , \; \text{อื่น ๆ} \qquad \text{..........(1)}$$

ความน่าจะเป็นที่จะเก็บพัสดุในช่องแรก 2 ชิ้น $= P(X = 2)$

$$= \binom{10}{2} \cdot \frac{2^8}{3^{10}} = 0.195 \text{..........(2)}$$

ความน่าจะเป็นที่จะเก็บพัสดุไว้ในช่องแรกไม่เกิน 8 ชิ้น

$$= P(X \leqslant 8)$$

$$= 1 - 10 \cdot \frac{2}{3^{10}} - \frac{1}{3^{10}} \quad ,$$

$= .9996$ ....(3)

ค่าคาดหมายของจำนวนพัสดุในช่องแรก $= 10/3 = 3.3$ ชิ้น ....(4)

3-2.2 การแจกแจงของจำนวนกล่องที่ว่าง

ใส่บอลล์หมายเลข 1, 2, ..., n ในกล่อง m กล่องแบบสุ่ม ๆ ความน่าจะเป็นที่จะไม่มีกล่องใดว่าง และฟังก์ชันน่าจะเป็นของจำนวนกล่องว่าง กำหนดได้ดังต่อไปนี้

ให้ X เป็นจำนวนกล่องที่ว่าง

$p_{n,m}$ เป็นความน่าจะเป็นที่ไม่มีกล่องใดว่าง

$$p_{n,m} = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} \cdot \frac{(m-k)^n}{m^n} \qquad \text{..........(3-2.4)}$$

$$P(X = x) = \binom{m}{x} \frac{(m-x)^n}{m^n} p_{n,m-x}, \; x = 0, 1, 2, \ldots, m-1 \qquad \text{..........(3-2.5)}$$

ในเมื่อ

$$p_{n,m-x} = \sum_{k=0}^{m-x} (-1)^k \binom{m-x}{k} \frac{(m-x-k)^n}{(m-x)^n}$$

= ความน่าจะเป็นที่จะไม่มีกล่องใดว่างจากการใส่บอลล์ n ลูกใน m−x กล่อง

พิสูจน์ (3-2.4)

ใส่บอลล์ n ลูกที่แตกต่างกันในกล่อง m กล่องแบบสุ่ม ๆ จำนวนผลลัพธ์ที่อาจเกิดขึ้นจะเท่ากับ m^n

กำหนด A_i เป็นเหตุการณ์ที่กล่อง i ว่าง, $i = 1, 2, \ldots, m$

และ S_k เป็นผลบวกของความน่าจะเป็นของการเกิดร่วมกันของ k เหตุการณ์, $k = 1, 2, \ldots, m$

เหตุการณ์ A_i ก็คือการใส่บอลล์ n ลูกใน $m - 1$ กล่องที่เหลือ จะมีจำนวนผลลัพธ์เท่ากับ $(m-1)^n$

เนื่องจากแต่ละผลลัพธ์มีโอกาสเกิดขึ้นเท่า ๆ กัน ดังนั้น

$$P(A_i) = \frac{(m-1)^n}{m^n}, \; \forall A_i$$

$$S_1 = \binom{m}{1} \frac{(m-1)^n}{m^n}$$

$A_i \cap A_j$ เป็นเหตุการณ์ที่กล่อง i และ j ว่าง, $1 \leq i < j \leq m$
เหตุการณ์ $A_i \cap A_j$ ก็คือการใส่บอลล์ n ลูกใน m – 2 กล่องที่เหลือ ดังนั้น
จำนวนผลลัพธ์ของ $A_i \cap A_j$ จะเท่ากับ $(m-2)^n$

$$P(A_i \cap A_j) = \frac{(m-2)^n}{m^n}, 1 \leq i < j \leq m$$

$$S_2 = \binom{m}{2} \frac{(m-2)^n}{m^n}$$

ทำนองเดียวกัน $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}$, $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq m$, $k = 3, 4, 5, \ldots, m$
เป็นเหตุการณ์ที่กล่อง $i_1, i_2, \ldots, i_k$ ว่าง ซึ่งเท่ากับการใส่บอลล์ n ลูกใน m – k กล่องที่เหลือ
จำนวนผลลัพธ์ของ $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}$ จะเท่ากับ $(m-k)^n$
ดังนั้น $P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = (m-k)^n/m^n$

$$S_k = \binom{m}{k} \frac{(m-k)^n}{m^n}$$

อาศัย INCLUSION-EXCLUSION FORMULA จะได้
ความน่าจะเป็นที่จะมีกล่องว่างอย่างน้อยที่สุด 1 กล่อง

$$= P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m)$$

$$= S_1 - S_2 + \ldots \pm S_m$$

$$= \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} \binom{m}{k} \cdot \frac{(m-k)^n}{m^n}$$

ความน่าจะเป็นที่จะไม่มีกล่องใดว่าง $= 1 - P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m)$
นั่นคือ

$$p_{n,m} = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{k} \binom{m}{k} \cdot \frac{(m-k)^n}{m^n} = P(X = 0)$$

พิสูจน์ (3-2.5)

ใส่บอลล์ n ลูกในกล่อง m – x กล่อง จะมีจำนวนผลลัพธ์เท่ากับ $(m-x)^n$, $x = 0, 1, 2, \ldots m-1$
ให้ $N_{n,m-x}$ เป็นจำนวนผลลัพธ์ที่ m – x กล่องนี้ไม่ว่าง ดังนั้น

$$P_{n,m-x} = N_{n,m-x}/(m-x)^n , x = 0, 1, 2, \ldots, m-1$$

กำหนดให้ x กล่องแรกว่าง ส่วน m − x กล่องที่เหลือไม่ว่าง, x = 0, 1, 2, ..., m − 1 ซึ่งเท่ากับการใส่บอลล์ n ลูกใน m − x กล่องโดยไม่มีกล่องใดว่าง ดังนั้น

จำนวนผลลัพธ์ที่อาจเกิดขึ้น จะเท่ากับ $N_{n,m-x}$

แต่การกำหนดกล่องว่าง x กล่องใด ๆ มีทางเป็นไปได้ $\binom{m}{x}$ หนทาง แสดงว่า จำนวนผลลัพธ์ของเหตุการณ์ที่มีกล่องว่างเพียง x กล่อง (x = 0, 1, 2, ..., m − 1) จะเท่ากับ

$$\binom{m}{x} \cdot N_{n,m-x}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะมีกล่องว่างเพียง x กล่อง

$$= \binom{m}{x} \cdot N_{n,m-x}/m^n, \; x = 0, 1, 2, \ldots, m-1$$

$$= \binom{m}{x} \frac{(m-x)^n}{m^n} \cdot \frac{N_{n,m-x}}{(m-x)^n}$$

นั่นคือ

$$P(X = x) = \binom{m}{x} \cdot \frac{(m-x)^n}{m^n} p_{n,m-x}, \; x = 0, 1, 2, \ldots, m-1$$

ข้อสังเกตุ

1) กรณีที่กล่องจะว่างทั้ง m กล่องย่อมเป็นไปไม่ได้ แสดงว่า $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m) = 0$ สูตร (3-2.4) และ (3-2.5) อาจเขียนได้ใหม่เป็น

$$p_{n,m} = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{m}{k} \frac{(m-k)^n}{m^n}$$

$$P(x = x) = \binom{m}{x} \cdot \frac{(m-x)^n}{m^n} \sum_{k=0}^{m-x-1} (-1)^k \cdot \binom{m-x}{k} \cdot \frac{(m-x-k)^n}{(m-x)^n}$$

2) กรณีที่จำนวนกล่องเท่ากับจำนวนบอลล์ กล่าวคือ m = n เหตุการณ์ที่ไม่มีกล่องใดว่าง ก็คือการใส่บอลล์ n ลูกใน m กล่อง กล่องละลูกโดยไม่ซ้ำกัน ดังนั้นจำนวนผลลัพธ์ของเหตุการณ์ที่ไม่มีกล่องว่าง จะเท่ากับ m! ความน่าจะเป็นที่จะไม่มีกล่องใดว่าง เท่ากับ $m!/m^n$

แสดงว่า $$\sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{m}{k} \frac{(m-k)^n}{m^n} = \frac{m!}{m^n}$$

หรือ $$\sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{m}{k} (m-k)^n = m! \qquad \text{..........(3-2.6)}$$

3) กรณีที่มีจำนวนกล่องมากกว่าจำนวนบอลล์ กล่าวคือ $m > n$ เหตุการณ์ที่ไม่มีกล่องว่างย่อมเป็นไปไม่ได้ ทั้งนี้เมื่อเราใส่บอลล์ n ลูกในกล่อง m กล่อง ๆ ละลูกโดยไม่ซ้ำกัน โอกาสที่จะมีกล่องว่างจะเกิดขึ้นแน่ ๆ ดังนั้น

ความน่าจะเป็นที่จะไม่มีกล่องใดว่าง เท่ากับ 0

แสดงว่า $$\sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{m}{k} \frac{(m-k)^n}{m^n} = 0$$

หรือ $$\sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{m}{k} (m-k)^n = 0 \qquad \text{..........(3-2.7)}$$

4) หากในการสุ่มบอลล์ n ลูกใน m กล่อง กำหนดว่าแต่ละกล่องจะต้องไม่มีบอลล์อยู่ซ้ำกันเลย จำนวนผลลัพธ์ของเหตุการณ์นี้ จะเท่ากับ $m^{(n)}$

ความน่าจะเป็นที่จะไม่มีกล่องใดมีบอลล์อยู่ซ้ำกัน $= m^{(n)}/m^n$

นั่นคือความน่าจะเป็นที่จะมีบางกล่องมีบอลล์อยู่มากกว่า 1 ลูก $= 1 - m^{(n)}/m^n$ .....(3-2.8)

จากสูตร (3-2.5) $P(X = x)$ เป็นฟังก์ชันน่าจะเป็นของตัวแปรเชิงสุ่ม X อาศัยคุณสมบัติของฟังก์ชันน่าจะเป็น เราจะได้

$$\sum_{x=0}^{m-1} \binom{m}{x} \frac{(m-x)^n}{m^n} p_{n,m-x} = 1 \qquad \text{..........(3-2.9)}$$

หรือ $$\sum_{x=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{m-x} (-1)^k \cdot \binom{m-x}{k} \cdot \frac{(m-x-k)^n}{(m-x)^n} \cdot \binom{m}{x} \cdot \frac{(m-x)^n}{m^n} = 1 \qquad \text{......(3-2.9a)}$$

นั่นคือ $$\sum_{x=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{m-x} (-1)^k \cdot \binom{m-x}{k} \binom{m}{x} \cdot (m-x-k)^n = m^n$$

..........(3-2.9b)

อาศัยสูตร (3-2.9) เราสามารถหาค่าคาดหมายของจำนวนกล่องว่าง ซึ่งจะกำหนดค่าได้ดังนี้

$$E(X) = \frac{(m-1)^n}{m^{n-1}} \qquad \text{..........(3-2.10)}$$

พิสูจน์

$$E(X) = \sum_{x=0}^{m-1} x \cdot \binom{m}{x} \cdot \frac{(m-x)^n}{m^n} \cdot p_{n,m-x}$$

$$= \sum_{x=1}^{m-1} x \cdot \binom{m}{x} \cdot \frac{(m-x)^n}{m^n} \cdot p_{n,m-x}$$

$$= \sum_{x=1}^{m-1} m \cdot \binom{m-1}{x-1} \cdot \frac{(m-x)^n}{(m-1)^n} \cdot \frac{(m-1)^n}{m^n} \cdot p_{n,m-x}$$

ให้ $j = x - 1, r = m - 1 \Rightarrow r - j = m - x$

$$\Rightarrow \quad E(X) = \frac{(m-1)^n}{m^{n-1}} \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} \cdot \frac{(r-j)^n}{r^n} \cdot p_{n,r-j} = \frac{(m-1)^n}{m^{n-1}}$$

การหาค่าคาดหมายของจำนวนกล่องว่างดังสูตร (3-2.10) นี้ อาจหาได้โดยอาศัยคุณสมบัติของตัวแปรเชิงสุ่มดัชนี ดังแบบฝึกหัดที่ 3-2 ข้อ 6.1

ตัวอย่างที่ 3-2.2 ใส่บอลล์ n ลูกในกล่อง 4 กล่องแบบสุ่ม ๆ ให้ X เป็นจำนวนกล่องว่าง จงหา ฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X แล้วนำผลที่ได้ไปใช้หาค่าคาดหมายของ X เปรียบเทียบผลลัพธ์นี้กับผล ที่ได้จากการใช้สูตร (3-2.10) และคำนวณค่าของ $E(X^{(2)})$ เมื่อ $n = 5$

วิธีทำ

ให้ X เป็นจำนวนกล่องว่าง ฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X จะกำหนดได้ดังนี้

$$P(X = x) = \binom{4}{x} \cdot \frac{(4-x)^n}{4^n} \sum_{k=0}^{4-x} (-1)^k \cdot \binom{4-x}{k} \cdot \frac{(4-x-k)^n}{(4-x)^n}, \quad x = 0, 1, 2, 3$$

$$\text{ค่าคาดหมายของ } X = E(X) = \sum_{x=0}^{3} x\, P(X = x)$$

เราสามารถหาค่า $P(X = x)$ และ $x\,P(X = x)$ ได้ดังตารางต่อไปนี้

x	P(X = x)		x P(X = x)
0	$1 - \binom{4}{1}\frac{3^n}{4^n} + \binom{4}{2}\frac{2^n}{4^n} - \binom{4}{3}\frac{1}{4^n}$	$= 1 - \frac{3^n - 3\,2^{n-1} + 1}{4^{n-1}}$	0
1	$\binom{4}{1}\frac{3^n}{4^n}\left[1 - \binom{3}{1}\frac{2^n}{3^n} + \binom{3}{2}\frac{1}{3^n}\right]$	$= \frac{3^n - 3\,2^n + 3}{4^{n-1}}$	$\frac{3^n - 3 \cdot 2^n + 3}{4^{n-1}}$
2	$\binom{4}{2}\frac{2^n}{4^n}\left[1 - \binom{2}{1} \cdot \frac{1}{2^n}\right]$	$= \frac{3\,2^{n-1} - 3}{4^{n-1}}$	$\frac{3 \cdot 2^n - 6}{4^{n-1}}$
3	$\binom{4}{3}\frac{1}{4^n}$	$= 1/4^{n-1}$	$3/4^{n-1}$

นั่นคือค่าคาดหมายของ X จะเท่ากับ $\Sigma\, x\, P(X = x) = 3^n/4^{n-1}$

อาศัยสูตร (3-2.10) เมื่อ m = 4, m = n เราจะได้

$$E(X) = \frac{(m-1)^n}{m^{n-1}} = \frac{(4-1)^n}{4^{n-1}} = \frac{3^n}{4^{n-1}}$$

แสดงว่าค่าที่ได้จากการคำนวณทั้งสองแบบเป็นค่าเดียวกัน

$$E[X^{(2)}] = \sum_{x=0}^{3} x\,(x-1)\,P(X = x)$$

$$= 0 - 0 - 2 \cdot \frac{3 \cdot 2^4 - 3}{4^4} - 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4^4} = \frac{3}{8} \text{ (แทนค่า } n = 5)$$

ตัวอย่างที่ 3-2.3 ใส่บอลล์ n ลูกใน m กล่องแบบสุ่ม ให้ X เป็นจำนวนกล่องที่มีบอลล์มากกว่า 1 ลูก

ก) จงพิสูจน์ว่า $P(X = 1) = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \frac{m^{(n-k+1)}}{m^n}$

ข) จงเขียนตารางแสดงฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X เมื่อ m = 12, n = 4

ค) จงพิสูจน์ว่า $E(X) = [m^n - (m-1)^n - n(m-1)^{n-1}]/m^{n-1}$

วิธีทำ

จำนวนผลลัพธ์ของการใส่บอลล์ n ลูก ในกล่อง m กล่องแบบสุ่ม ๆ เท่ากับ m^n กำหนดให้บอลล์ k(k = 2, 3, ..., n) ลูกแรกอยู่ในกล่องแรกและกล่องที่เหลือมีบอลล์ไม่เกิน

1 ลูก ซึ่งเท่ากับการใส่บอลล์ที่เหลือ $n - k$ ลูกในกล่อง $m - 1$ กล่อง โดยแต่ละกล่องไม่มีบอลล์อยู่ซ้ำกัน ดังนั้น จำนวนผลลัพธ์ของเหตุการณ์นี้ จะเท่ากับ $(m - 1)^{(n-k)}$, $k = 2, 3, \ldots, n$

แต่การกำหนดบอลล์ k ลูก $(k = 2, 3, \ldots, n)$ ใด ๆ ให้อยู่ในกล่องแรกมีทางทำได้ $\binom{n}{k}$ หนทาง

ดังนั้น จำนวนผลลัพธ์ของเหตุการณ์ที่กล่องแรกมีบอลล์อย่างน้อยที่สุด 2 ลูก

$$= \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} (m-1)^{(n-k)}$$

จำนวนผลลัพธ์ที่กล่องใดกล่องหนึ่งเพียงกล่องเดียวมีบอลล์อย่างน้อยที่สุด 2 ลูก จะเท่ากับ

$$m \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} (m-1)^{(n-k)}$$

ดังนั้น

$$P(X = 1) = m \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \frac{(m-1)^{(n-k)}}{m^n} = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \cdot \frac{m^{(n-k+1)}}{m^n} \qquad \text{..........(ก)}$$

เมื่อ $m = 12$, $n = 4$ ค่าที่เป็นไปได้ของ X คือ 0, 1, 2 อาศัยผลจาก (ก) จะได้

$$P(X = 1) = \binom{4}{2} \cdot \frac{12^{(3)}}{12^4} + \binom{4}{3} \cdot \frac{12^{(2)}}{12^4} + \binom{4}{4} \cdot \frac{12}{12^4}$$

$$= \frac{705}{1728}$$

$P(X = 0)$ = ความน่าจะเป็นที่จะไม่มีกล่องใดมีบอลล์อยู่ซ้ำกัน

$$= \frac{12^{(4)}}{12^4} = \frac{990}{1728}$$

อาศัยคุณสมบัติของฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X จะได้

$$P(X = 2) = 1 - P(X = 1) - P(X = 0)$$

$$= 1 - \frac{705}{1728} - \frac{990}{1728} = \frac{33}{1728}$$

ฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X จะกำหนดได้ดังตารางนี้

x	0	1	2
$P(X = x)$	$\frac{990}{1728}$	$\frac{705}{1728}$	$\frac{33}{1728}$

..........(ข)

กำหนด X_i = 1 ถ้ากล่อง i มีบอลล์มากกว่า 1 ลูก, $i = 1, 2, \ldots, m$
= 0 อื่น ๆ

และ $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_m$

จำนวนผลลัพธ์ที่กล่อง i ว่าง $= (m-1)^n$

ถ้ากล่อง i มีบอลล์ลูกใด ๆ อยู่ 1 ลูก จำนวนผลลัพธ์ที่เป็นไปได้จะเท่ากับ $n(m-1)^{n-1}$

ดังนั้น จำนวนผลลัพธ์ของเหตุการณ์ที่กล่อง i มีบอลล์มากกว่า 1 ลูก

$$= m^n - (m-1)^n - n(m-1)^{n-1}$$

$$\Rightarrow \quad P(X_i = 1) = \frac{m^n - (m-1)^n - n(m-1)^{n-1}}{m^n}$$

$$E(X) = E(X_1 + X_2 + \ldots + X_m) = \sum_{i=1}^{m} E(X_i) = \sum_{i=1}^{m} P(X_i = 1)$$

$$= \{m^n - (m-1)^n - n(m-1)^{n-1}\} / m^{n-1} \quad \ldots..(ค)$$

3-2.3 การแจกแจงของจำนวนกล่องว่างตามแบบของ BOSE-EINSTEIN

ใส่บอลล์ n ลูกที่มีลักษณะเหมือนกันในกล่อง m กล่องแบบสุ่ม ผลลัพธ์ที่ได้จะอยู่ในรูป $(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ เมื่อ k_i เป็นจำนวนบอลล์ที่อยู่ในกล่อง i, $\sum_{i=1}^{m} k_i = n$ จำนวนผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นจะเท่ากับ $\binom{n+m-1}{n}$ แต่ละผลลัพธ์มีโอกาสเกิดขึ้นเท่า ๆ กัน เราเรียกการใส่บอลล์ในกล่องแบบนี้ว่า การสุ่มตามแบบของ BOSE EINSTEIN

กำหนดตัวแปรเชิงสุ่ม X คือจำนวนกล่องว่าง

$p_{n,m}$ คือความน่าจะเป็นที่ไม่มีกล่องใดว่างจากการใส่บอลล์ n ลูกใน m กล่อง

$p_{n,m-x}$ คือความน่าจะเป็นที่ไม่มีกล่องใดว่างจากการใส่บอลล์ n ลูกใน m − x กล่อง

จะได้

$$p_{n,m} = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{m}{k} \cdot \frac{\binom{m+n-k-1}{n}}{\binom{m+n-1}{n}} \qquad \text{..........(3-2.11)}$$

และ

$$P(X = x) = \binom{m}{x}\binom{m+n-x-1}{n} p_{n,m-x} \Big/ \binom{m+n-1}{n}, \; x = 0, 1, 2, \ldots, m-1$$

ในเมื่อ ....(3 – 2.12)

$$p_{n,m-x} = \sum_{k=1}^{m-x} (-1)^{k-1} \binom{m-x}{k-1} \binom{m+n-x-k}{n} \Big/ \binom{m+n-x-1}{n}$$

การพิสูจน์อาจจะใช้วิธีการทำนองเดียวกันกับกรณีของบอลล์ที่แตกต่างกัน หรือพิสูจน์โดยอาศัยคุณสมบัติของตัวแปรเชิงสุ่มดัชนี ดังต่อไปนี้

พิสูจน์

กำหนด A_i เป็นเหตุการณ์ที่กล่อง i ว่าง $i = 1, 2, \ldots, m$

เหตุการณ์ A_i ก็คือการใส่บอลล์ n ลูกที่เหมือนกันใน $m - 1$ กล่องที่เหลือ ดังนั้น

จำนวนผลลัพธ์ของ $A_i = \binom{m+n-2}{n}$

แต่จำนวนผลลัพธ์ของการใส่บอลล์ n ลูกใน m กล่อง $= \binom{m+n-1}{n}$

ดังนั้น

$$P(A_i) = \frac{\binom{m+n-2}{n}}{\binom{m+n-1}{n}}, \quad \forall A_i, \; i = 1, 2, \ldots, m-1$$

$A_i \cap A_j$ เป็นเหตุการณ์ที่กล่อง i และ j ว่าง, $1 \leqslant i < j \leqslant m$

จำนวนผลลัพธ์ของ $A_i \cap A_j = \binom{m+n-3}{n}$

ดังนั้น $P(A_i \cap A_j) = \binom{m+n-3}{n} \Big/ \binom{m+n-1}{n}, \; 1 \leqslant i < j \leqslant m$

ในทำนองเดียวกัน $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}$, $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant m$ เป็นเหตุการณ์ที่กล่อง $i_1, i_2, \ldots, i_k$ ว่าง ซึ่งเท่ากับการใส่บอลล์ n ลูกใน $m - k$ กล่องที่เหลือ

จำนวนผลลัพธ์ของ $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k} = \binom{m+n-k-1}{n}$

ดังนั้น $P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \binom{m+n-k-1}{n} \Big/ \binom{m+n-1}{n}$, $k = 2, 3, \ldots, m$

เราจะได้ $S_k = \binom{m}{k} \dfrac{\binom{m+n-k-1}{n}}{\binom{m+n-1}{n}}$, $k = 1, 2, 3, \ldots, m$

กำหนด X_i เป็นตัวแปรเชิงสุ่มดัชนีของเหตุการณ์ A_i, $i = 1, 2, \ldots, m$

และ $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_m$

อาศัยคุณสมบัติของตัวแปรเชิงสุ่มดัชนี เราทราบว่า

$$P(X = x) = \binom{x}{x} S_x - \binom{x+1}{x} S_{x+1} + \binom{x+2}{x} S_{x+2} - \ldots \pm \binom{m-1}{x} S_{m-1}$$

$$\Rightarrow \quad P(X = x) = \binom{x}{x}\binom{m}{x} \frac{\binom{m+n-x-1}{n}}{\binom{m+n-1}{n}} - \binom{x+1}{x}\binom{m}{x+1} \frac{\binom{m+n-x-2}{n}}{\binom{m+n-1}{n}}$$

$$+ \ldots \pm \binom{m-1}{x}\binom{m}{m-1} \frac{1}{\binom{m+n-1}{n}}$$

$$= \sum_{j=0}^{m-x-1} (-1)^j \binom{x+j}{x}\binom{m}{x+j} \frac{\binom{m+n-x-j-1}{n}}{\binom{m+n-1}{n}}$$

$$= \sum_{j=0}^{m-x-1} (-1)^j \frac{1}{x!\, j!} \cdot \frac{m!}{(m-x-j)!} \cdot \frac{(m-x)!}{(m-x)!} \cdot \frac{\binom{m+n-x-j-1}{n}}{\binom{m+n-1}{n}}$$

$$= \binom{m}{x} \frac{\binom{m+n-x-1}{n}}{\binom{m+n-1}{n}} \sum_{j=0}^{m-x-1} (-1)^j \binom{m-x}{j} \frac{\binom{m+n-x-j-1}{n}}{\binom{m+n-x-1}{n}}$$

$$= \binom{m}{x} \frac{\binom{m+n-x-1}{n}}{\binom{m+n-1}{n}} p_{n,m-x}$$

ในเมื่อ

$$p_{n,m-x} = \sum_{j=0}^{m-x-1} (-1)^j \binom{m-x}{j} \frac{\binom{m+n-x-j-1}{n}}{\binom{m+n-x-1}{n}}$$

$$= \sum_{k=1}^{m-x} (-1)^{k-1} \binom{m-x}{k-1} \cdot \frac{\binom{m+n-x-k}{n}}{\binom{m+n-x-1}{n}}$$

$(k = j + 1)$

แทนค่า $x = 0$ จะได้ว่า

$$P(X = 0) = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} \binom{m}{k-1} \frac{\binom{m+n-k}{n}}{\binom{m+n-1}{n}} = p_{n,m}$$

กรณีที่เราต้องการหาค่าคาดหมายของจำนวนกล่องที่ว่าง เราสามารถหาได้โดยอาศัยคุณสมบัติของตัวแปรเชิงสุ่มดัชนี และกฎของค่าคาดหมายซึ่งกำหนดว่า

$$E(X) = E(X_1 + X_2 + \ldots + X_m) = \sum_i E(X_i)$$

ดังนั้น เราจะกำหนดค่าคาดหมายของจำนวนกล่องที่ว่างได้ดังนี้

$$E(X) = \frac{m(m-1)}{m+n-1} \qquad \text{..........(3-2.13)}$$

การพิสูจน์เป็นแบบฝึกหัดที่ 3-2 ข้อ 6.2

ตัวอย่างที่ 3-2.4 ใส่บอลล์ 4 ลูกที่เหมือนกันในกล่อง 3 กล่องแบบสุ่ม กำหนด X เป็นจำนวนกล่องว่าง จงหา

ก) ฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X

ข) จงเขียนตารางแสดงค่าความน่าจะเป็นของ X และคำนวณค่าของ E(X)

ค) เปรียบเทียบค่า E(X) จาก (ข) กับค่าที่ได้จากสูตร (3-2.13)

วิธีทำ

ก) X เป็นจำนวนกล่องว่างจากการใส่บอลล์ 4 ลูกใน 3 กล่อง ดังนั้น

$$P(X = x) = \binom{3}{x} \frac{\binom{6-x}{4}}{\binom{6}{4}} \sum_{k=1}^{3-x} (-1)^{k-1} \binom{3-x}{k-1} \frac{\binom{7-x-k}{4}}{\binom{6-x}{4}}, \quad x = 0, 1, 2$$

ข) ผลจากข้อ (ก) แสดงค่า P(X = x) และ x P(X = x) ดังนี้

x	P(X = x)	x P(X = x)
0	$1 - 3 \cdot \frac{5}{15} - 3 \cdot \frac{1}{15} = \frac{1}{5}$	0
1	$\frac{3}{15} \cdot (5 - 2 \cdot 1) = \frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$
2	$\frac{3}{15} = \frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$

ดังนั้น $E(X) = 0 + \frac{3}{5} + \frac{2}{5} = 1$

ค) อาศัยสูตร (3-2.13)

$$E(X) = \frac{3(3-1)}{3+4-1} = 1$$

แสดงว่าค่าของ E(X) ที่ได้ทั้งสองวิธีเป็นค่าเดียวกัน

แบบฝึกหัดที่ 3-2

1. ใส่บอลล์ 5 ลูกหมายเลข 1, 2, 3, 4 และ 5 ลงในกล่อง 5 กล่อง
   1.1) จงคำนวณความน่าจะเป็นที่กล่องใบแรกว่าง
   1.2) จงคำนวณความน่าจะเป็นที่กล่องที่ 1 และกล่องที่ 2 จะไม่ว่าง
   1.3) ให้ X เป็นจำนวนกล่องว่าง จงหา
      1.3.1) ฟังก์ชันการแจกแจงของ X
      1.3.2) ความน่าจะเป็นที่จะมีกล่องว่าง 3 กล่อง

2. ใส่บอลล์หมายเลข 1, 2, 3, ..., 20 ลงในกล่อง 12 กล่องแบบสุ่ม
   2.1) ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่กล่องแรกว่าง
   และ B เป็นเหตุการณ์ที่กล่องที่สองว่าง
   จงคำนวณค่าของ $P(A \cup B)$
   2.2) จงหาฟังก์ชันน่าจะเป็นและค่าคาดหมายของจำนวนกล่องที่ว่าง
   2.3) จงคำนวณความน่าจะเป็นที่จะมีกล่องว่าง 10 กล่อง

3. ใส่บอลล์ n ลูกที่แตกต่างกันลงในกล่อง m กล่องแบบสุ่ม จงเขียนตารางแสดงการแจกแจงของ X ในเมื่อ $m = 2, n = 3$; $m = 3, n = 1$; $m = 3, n = 2$; $m = 4, n = 2$; $m = 4, n = 3$; $m = 4, n = 5$ และ $m = 5, n = 5$
   3.1) อาศัยผลที่ได้ จงแสดงให้เห็นจริงว่า

$$E(X) = (m-1)^n/m^{n-1}$$

   ทุก ๆ ค่าของ m และ n
   3.2) จงพิสูจน์ว่า

$$E[X(X-1)] = \sum_{\forall x} x(x-1)\,P(X=x) = \frac{m(m-1)(m-2)^n}{m^n}$$

   และโดยทั่ว ๆ ไป

$$E(X^{(r)}) = \sum_{\forall x} x(x-1)\ldots(x-r+1)\,P(X=x) = \frac{m^{(r)}(m-r)^n}{m^n}, \; r = 1,2,\ldots$$

   3.3) อาศัยผลที่ได้จากตารางแสดงการแจกแจงของ X จงแสดงให้เห็นจริงว่า

$$E(X^{(2)}) = m(m-1)(m-2)^n/m^n$$

   ทุกค่า m และ n

4. แผนกการขายของบริษัทที่ รายงานว่าจะส่งพนักงานขาย 4 คน ไปโฆษณาสินค้าของบริษัท ในเขตต่าง ๆ 3 เขตด้วยกัน ในอีก 3 เดือนข้างหน้า

4.1) จงคำนวณความน่าจะเป็นที่

4.1.1) จะมีพนักงานขายไปที่เขตหนึ่ง 2 คน

4.1.2) พนักงานขายทั้ง 4 ไปเพียง 2 เขตเท่านั้น

4.2) จงคำนวณค่าคาดหมายของ

4.2.1) จำนวนเขตที่พนักงานขายไม่ได้ไปโฆษณาสินค้า

4.2.2) จำนวนพนักงานขายที่ไปโฆษณาสินค้าในเขตหนึ่ง

5. จากปัญหาการใส่บอลล์ n ลูกใน m กล่องแบบสุ่ม ให้ X เป็นจำนวนบอลล์ในกล่องหนึ่ง

5.1) ถ้าบอลล์แต่ละลูกแตกต่างกัน จงพิสูจน์ว่า

5.1.1) $P(X = x + 1) = \frac{1}{m - 1} \cdot \frac{n - x}{x + 1} P(x = x)$, $x = 0, 1, 2, \ldots, n$

5.1.2) $E(X) = n/m$

5.2) ถ้าบอลล์ทุกลูกเหมือนกัน จงพิสูจน์ว่า

$$P(X = x) = \binom{m+n-x-2}{n-x} \Big/ \binom{m+n-1}{n}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, n$$

6. ใส่บอลล์ n ลูกลงในกล่อง m แบบสุ่ม กำหนดตัวแปรเชิงสุ่มดัชนี X_i ดังนี้

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{ถ้ากล่องที่ } i \text{ ว่าง} \\ 0 & \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

ให้ X เป็นจำนวนกล่องว่าง กล่าวคือ

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_m$$

6.1) หากบอลล์แต่ละลูกแตกต่างกัน จงพิสูจน์ว่า

$$E(X) = \frac{(m - 1)^n}{m^{n-1}}$$

6.2) หากบอลล์แต่ละลูกเหมือนกัน จงพิสูจน์ว่า

$$E(X) = \frac{m(m - 1)}{m + n - 1}$$

6.3) ในกรณีที่บอลล์ทุกลูกเหมือนกัน จงเขียนตารางแสดงฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X ในเมื่อ $m = 2, n = 4$; $m = 4, n = 4$ และ $m = 5, n = 3$

6.4) อาศัยผลที่ได้จากข้อ (6.3) จงหาฐานนิยมของ X และจงแสดงให้เห็นจริงว่า

$$E(X) = \frac{m(m-1)}{m+n-1}$$

ทุกค่าของ m และ n

7. หัวหน้าคนงานมีลูกน้อง 6 คนซึ่งเขาจะต้องแบ่งงาน 3 ชิ้นให้ทำ เขาได้เขียนชื่องานแต่ละชิ้นในบัตรแต่ละใบ แล้วใส่บัตรทั้งสามในหมวกให้ลูกน้องแต่ละคนมาหยิบบัตร 1 ใบจากหมวกทีละคน เมื่อคนที่ 1 หยิบได้บัตรใดให้บันทึกผลที่ได้เอาไว้ แล้วคืนบัตรลงในหมวกตามเดิม คนอื่น ๆอีก 5 คนต่างก็ได้งานทำในวิธีการเดียวกัน ถือว่าลูกน้องทุกคนเหมือนกันเมื่อเทียบกับงานแต่ละชิ้น

7.1) จงคำนวณความน่าจะเป็นที่จะแบ่งงานให้ 2 คนทำชิ้นแรก 3 คนทำงานชิ้นที่สองส่วนงานชิ้นที่สามมีคนทำ 1 คน

7.2) ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่งานชิ้นแรกไม่มีใครทำ และ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มดัชนีของ $_A$ จงหาฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ X

8. สมมุติว่ามีบอลล์ n ลูกใส่ในกล่อง m กล่องแบบสุ่ม และ r เป็นเลขจำนวนเต็มบวก $r \leq m$ ให้ X เป็นจำนวนบอลล์ที่อยู่ใน r กล่อง ที่กำหนดไว้ให้

8.1) จงพิสูจน์ว่า

(1) $P(X = x) = \binom{n}{x} \dfrac{r^x (m-r)^{n-x}}{m^n}$, $x = 0, 1, 2, \ldots, n$

(2) $E(X) = rn/m$

8.2) จงเขียนตารางแสดงฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X เมื่อ $m = 5, n = 5, r = 2$

8.3) อาศัยผลที่ได้จากข้อ (8.2) จงคำนวณค่าของ $P(A|B)$ เมื่อ $A = \{x : x = 0, 1, 2\}$ และ $B = \{x : 1 \leq x < 4\}$

8.4) เมื่อ $m = 6, n = 4$ และ $r = 3$ จงหาค่าของมัธยฐานของ X และจงแสดงให้เห็นจริงว่า

$$E(X) = rn/m$$

3-3 การสุ่มตัวอย่างจากประชากรที่มีสองจำพวก (Sampling from Dichotomous population)

มีปัญหาจำนวนมากในทฤษฎีความน่าจะเป็นและสถิติ ที่มักจะเกี่ยวข้องกับเรื่องของการสุ่มตัวอย่างจากประชากรที่มีอยู่สองจำพวก แบบที่นิยมใช้กันคือ การสุ่มบอลล์ n ลูกจากกล่องที่มีบอลล์สีขาว M ลูก และมีบอลล์สีดำ N − M ลูก โดยกำหนดว่า บอลล์หมายเลข 1, 2, ..., M เป็นบอลล์สีขาว และบอลล์หมายเลข M + 1, M + 2, ..., N เป็นบอลล์สีดำ การสุ่มแยกออกเป็น 2 แบบคือ

ก) การสุ่มแบบใส่กลับ (sampling with replacement) ลักษณะการสุ่มแบบนี้ก็คือ การหยิบบอลล์จากกล่องทีละลูก โดยให้ทุกลูกมีโอกาสที่จะถูกหยิบเท่า ๆ กัน แต่ละครั้งที่หยิบได้จะบันทึกไว้ว่าเป็นบอลล์สีอะไร แล้วใส่กลับคืนในกล่อง กวนให้เข้ากันดีแล้วจึงจะหยิบลูกต่อไป ทำเช่นนี้เรื่อย ๆ จนครบตามจำนวนที่ต้องการคือ n ลูก ดังนั้นในการสุ่มตัวอย่างบอลล์ n ลูกแบบใส่กลับจากกล่องที่มีบอลล์ N ลูก จะมีจำนวนผลลัพธ์เท่ากับ N^n และความน่าจะเป็นของแต่ละผลลัพธ์จะเท่ากับ $1/N^n$

ตัวอย่างของการสุ่มแบบนี้ก็คือ สมมติเรามีบอลล์ 5 ลูกในกล่อง บอลล์หมายเลข 1 และ 2 เป็นสีขาว บอลล์หมายเลข 3, 4 และ 5 เป็นสีดำ สุ่มบอลล์จากกล่องนี้ 2 ลูกแบบใส่กลับ จำนวนผลลัพธ์ที่ได้ จะเท่ากับ $5^2 = 25$ ซึ่งแสดงไว้ดังนี้

W_1W_1	W_1W_2	W_1B_3	W_1B_4	W_1B_5
W_2W_1	W_2W_2	W_2B_3	W_2B_4	W_2B_5
B_3W_1	B_3W_2	B_3B_3	B_3B_4	B_3B_5
B_4W_1	B_4W_2	B_4B_3	B_4B_4	B_4B_5
B_5W_1	B_5W_2	B_5B_3	B_5B_4	B_5B_5

ข) การสุ่มแบบไม่ใส่กลับ (sampling without replacement) ลักษณะของการสุ่มแบบนี้คือ หยิบบอลล์จากกล่องทีละลูก โดยให้แต่ละลูกมีโอกาสที่จะถูกหยิบเท่า ๆ กัน ทุกครั้งที่หยิบได้ไม่มีการใส่กลับคืนลงไป แต่จะหยิบลูกอื่น ๆ ที่เหลือต่อไปจนกว่าจะครบตามจำนวนที่ต้องการคือ n ลูก จำนวนผลลัพธ์ที่จะได้จากการหยิบวิธีนี้ จะเท่ากับ $N(N-1)\ldots(N-n+1) = N^{(n)}$ ดังนั้นความน่าจะเป็นของแต่ละผลลัพธ์ จะเท่ากับ $1/N^{(n)}$

ตัวอย่างเช่น เรามีบอลล์ 5 ลูก หมายเลข 1 และ 2 เป็นสีขาว ส่วนหมายเลข 3, 4, 5 เป็นสีดำ หยิบบอลล์แบบไม่ใส่กลับ 2 ลูกจากกล่องนี้ จำนวนผลลัพธ์ที่จะได้จะเท่ากับ $5^{(2)} = 20$ ซึ่งแสดงได้ดังนี้

W_1W_2	W_1B_3	W_1B_4	W_1B_5
W_2W_1	W_2B_3	W_2B_4	W_2B_5
B_3W_1	B_3W_2	B_3B_4	B_3B_5
B_4W_1	B_4W_2	B_4B_3	B_4B_5
B_5W_1	B_5W_2	B_5B_3	B_5B_4

ในการสุ่มตัวอย่างแต่ละกรณี เราสนใจในเรื่องเกี่ยวกับการแจกแจงของจำนวนบอลล์สีขาวที่ได้จากการสุ่ม ค่าคาดหมายของจำนวนบอลล์สีขาว และการแจกแจงของจำนวนครั้งของการสุ่มจนกว่าจะได้บอลล์สีขาว ตลอดจนการหาค่าคาดหมายของจำนวนครั้งการสุ่มจนได้บอลล์สีขาว ซึ่งจะได้กล่าวต่อไป

3-3.1 การแจกแจงของจำนวนบอลล์สีขาวที่ได้จากการสุ่ม

การหาสูตรการแจกแจงของจำนวนบอลล์สีขาว ก็คือการพิจารณาว่า เมื่อสุ่มบอลล์มา n ลูกแล้ว จำนวนบอลล์สีขาวที่จะได้จากการสุ่มควรจะมีจำนวนเท่าใดบ้าง ความน่าจะเป็นของจำนวนบอลล์สีขาวที่จะได้สามารถเขียนในรูปทั่ว ๆ ไปได้อย่างไร กล่าวคือ ถ้าเรามีตัวแปรเชิงสุ่ม X เป็นจำนวนบอลล์สีขาวที่ได้จากการสุ่ม ฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X จะเป็นอย่างไร ซึ่งเราจะแยกได้เป็น 2 กรณีดังนี้

3-3.1.1 การแจกแจงของจำนวนบอลล์สีขาวที่ได้จากการสุ่มแบบใส่กลับ

ในการสุ่มบอลล์ n ลูก จากกล่องที่มีบอลล์หมายเลข 1, 2, ..., M เป็นสีขาว และบอลล์หมายเลข M + 1, M + 2, ..., N เป็นสีดำ ด้วยวิธีสุ่มแบบใส่กลับ ให้ X เป็นจำนวนบอลล์สีขาวที่ได้จากการสุ่ม จะได้สูตรการแจกแจงของ X หรือฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X ดังนี้

$$P(X = x) = \binom{n}{x} \frac{M^x (N - M)^{n-x}}{N^n} \quad , x = 0, 1, 2, \ldots, n \qquad \ldots\ldots\ldots.(3\text{-}3.1)$$

พิสูจน์

สุ่มบอลล์ n ลูกแบบใส่กลับจากกล่องที่มีบอลล์ N ลูก จำนวนผลลัพธ์ที่ได้จะเท่ากับ N^n
สมมุติว่าสุ่มได้บอลล์ x ลูกแรกเป็นสีขาวตามด้วยบอลล์สีดำ n − x ลูก, x = 0, 1, 2, ..., n
จำนวนผลลัพธ์ที่จะได้ จะเท่ากับ $M^x(N - M)^{n-x}$
การสุ่มบอลล์ n ลูกให้ได้บอลล์สีขาว x ลูก (x = 0, 1, 2, ..., n) มีทางเกิดขึ้นได้ $\binom{n}{x}$ หนทาง
ดังนั้น จำนวนผลลัพธ์ของการสุ่มบอลล์ n ลูกให้ได้สีขาว x ลูก = $\binom{n}{x} M^x (N - M)^{n-x}$
เนื่องจากแต่ละผลลัพธ์มีโอกาสเกิดขึ้นได้เท่า ๆ กัน ดังนั้น

$$P(X = x) = \binom{n}{x} \frac{M^x (N - M)^{n-x}}{N^n} \quad , x = 0, 1, 2, \ldots, n$$

สูตร (3-3.1) นี้ เป็นกรณีหนึ่งของการแจกแจงที่เรียกว่า การแจกแจงแบบทวินาม ซึ่งจะได้ศึกษารายละเอียดใน ST 312

เนื่องจาก P(X = x) เป็นฟังก์ชันน่าจะเป็นของตัวแปรเชิงสุ่ม X ดังนั้น อาศัยคุณสมบัติของฟังก์ชันน่าจะเป็น เราจะได้

$$\sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} \frac{M^x (N - M)^{n-x}}{N^n} = 1$$

หรือ

$$\sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} M^x (N - M)^{n-x} = N^n \qquad \text{..........(3-3.2)}$$

หากเรากำหนดให้ N = m และ M = 1 สูตร (3-3.2) จะเป็นสูตรเดียวกันกับสูตร (3-2.2) นั่นคือ

$$\sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} (m - 1)^{n-x} = m^n$$

หากเรากำหนดให้ M = N − M = 1 สูตร (3-3.2) จะกลายเป็น

$$\sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} = 2^n \qquad \text{..........(3-3.3)}$$

และถ้าเรากำหนด M = −1, N − M = 1 สูตร (3-3.2) จะกลายเป็น

$$\sum_{x=0}^{n} (-1)^x \binom{n}{x} = 0 \qquad \text{..........(3-3.4)}$$

ตัวอย่างที่ 3-3.1 สุ่มบอลล์ 3 ลูกแบบใส่กลับ จากกล่องที่มีบอลล์สีขาว 4 ลูกและบอลล์สีดำ 3 ลูก ให้ X เป็นจำนวนบอลล์สีขาวที่ได้จากการสุ่ม

(ก) จงหาฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X

(ข) จงคำนวณค่าของความน่าจะเป็นที่จะได้บอลล์สีขาวไม่เกิน 1 ลูก

(ค) จงหาฐานนิยมของ X

วิธีทำ

(ก) X เป็นจำนวนบอลล์สีขาวที่ได้จากการสุ่มบอลล์แบบใส่กลับ 3 ลูกจากกล่องที่มีบอลล์ 7 ลูก ฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X จะกำหนดได้ดังนี้

$$P(X = x) = \binom{3}{x} \frac{4^x 3^{3-x}}{7^3} \quad , \; x = 0, 1, 2, 3$$

(ข)
$$P(X \leqslant 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$$
$$= \binom{3}{0} \frac{3^3}{7^3} + \binom{3}{1} \frac{4 \cdot 3^2}{7^3} = \frac{135}{343}$$

(ค) เราเขียนตารางแสดงฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X ในข้อ (ก) ได้ดังนี้

x	0	1	2	3
P(X = x)	$\frac{27}{343}$	$\frac{108}{343}$	$\frac{144}{343}$	$\frac{64}{343}$

จะเห็นได้ว่า f(2) = 144/343 **มีค่าสูงสุด** แสดงว่า **ฐานนิยมของ X คือ 2**

ตัวอย่างที่ 3-3.2 จงคำนวณค่าของ

$$\sum_{k=1}^{20} (-1)^{k-1} k \binom{20}{k} \quad \text{และ} \quad \sum_{k=2}^{10} k(k-1)\binom{10}{k}$$

วิธีทำ ค่าของ

$$\sum_{k=1}^{20} (-1)^{k-1} k \binom{20}{k} = \sum_{k-1=0}^{19} (-1)^{k-1} k \frac{20}{k} \binom{19}{k-1}$$

$$= 20 \sum_{j=0}^{19} (-1)^j \binom{19}{j} = 0 \text{ อาศัยสูตร (3-3.4)}$$

$$\sum_{k=2}^{10} k(k-1) \binom{10}{k} = \sum_{k-2=0}^{8} k(k-1) \frac{10 \cdot 9}{k(k-1)} \binom{8}{k-2}$$

$$= 90 \sum_{x=0}^{8} \binom{8}{x} = 90 \cdot 2^8 \quad \text{จากสูตร (3-3.3)}$$

$$= 23{,}040$$

3-3.1.2 การแจกแจงของจำนวนบอลล์สีขาวที่ได้จากการสุ่มแบบไม่ใส่กลับ

สุ่มบอลล์ n ลูกแบบไม่ใส่กลับ จากกล่องที่มีบอลล์หมายเลข $1, 2, \ldots, M$ เป็นสีขาว และบอลล์หมายเลข $M + 1, M + 2, \ldots, N$ เป็นสีดำ สมมุติว่า M และ $N - M$ ต่างมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ n ให้ X เป็นจำนวนบอลล์สีขาวที่ได้จากการสุ่ม ฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X จะกำหนดได้ดังนี้

$$P(X = x) = \binom{n}{x} \frac{M^{(x)} (N - M)^{(n-x)}}{N^{(n)}}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, n \quad \text{..........(3-3.5)}$$

โดยทั่ว ๆ ไป ค่าที่เป็นไปได้ของ X จะเป็นเลขจำนวนเต็มบวกที่อยู่ระหว่างค่าสูงสุด $(0, n - N + M)$ กับค่าต่ำสุด (n, M)

พิสูจน์

สุ่มบอลล์ n ลูกแบบไม่ใส่กลับจากบอลล์ N ลูก จะมีจำนวนผลลัพธ์เท่ากับ $N^{(n)}$

ให้สุ่มได้บอลล์ x ลูกแรกเป็นสีขาวตามด้วยบอลล์สีดำ $n - x$ ลูก $x = 0, 1, 2, \ldots, n$

ผลลัพธ์ที่จะเกิดขึ้นจะมีจำนวนเท่ากับ $M^{(x)} (N - M)^{(n-x)}$

แต่การสุ่มให้ได้บอลล์สีขาว x ลูกจากจำนวน n ลูก มีทางเกิดขึ้นได้ $\binom{n}{x}$ หนทาง

ดังนั้น การสุ่มบอลล์ n ลูกได้เป็นสีขาว x ลูก จะมีจำนวนผลลัพธ์เกิดขึ้นเท่ากับ

$$\binom{n}{x} M^{(x)} (N - M)^{(n-x)}$$

เนื่องจากแต่ละผลลัพธ์มีโอกาสที่จะเกิดขึ้นเท่า ๆ กัน ดังนั้น ฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X จะกำหนดได้ดังนี้

$$P(X = x) = \binom{n}{x} \frac{M^{(x)} (N - M)^{(n-x)}}{N^{(n)}}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, n$$

สูตร (3-3.5) นี้ เป็นกรณีหนึ่งของการแจกแจงที่เรียกว่า การแจกแจงแบบไฮเปอร์ยีออเมตริค ซึ่งจะได้ศึกษารายละเอียดใน ST 312

จากสูตร (3-3.5) อาศัยคุณสมบัติของฟังก์ชันน่าจะเป็นของตัวแปรเชิงสุ่ม เราจะได้

$$\sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} \frac{M^{(x)} (N-M)^{(n-x)}}{N^{(n)}} = \sum_{x=0}^{n} \frac{M^{(x)}}{x!} \cdot \frac{(N-M)^{(n-x)}}{(n-x)!} \Big/ \frac{N^{(n)}}{n!} = 1$$

ดังนั้น

$$\sum_{x=0}^{n} \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} = 1$$

หรือ

$$\sum_{x=0}^{n} \binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x} = \binom{N}{n} \qquad \text{..........(3-3.7)}$$

ตัวอย่างที่ 3-3.3 กล่องใบหนึ่งบรรจุหลอดไฟ 12 หลอด เป็นหลอดเสีย 3 หลอด หยิบหลอดไฟจากกล่องนี้มาตรวจ 3 หลอด ให้ X เป็นจำนวนหลอดที่เสีย จงหาฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X และคำนวณความน่าจะเป็นที่จะได้หลอดเสียอย่างน้อยที่สุด 2 หลอด

วิธีทำ

X เป็นจำนวนหลอดเสียที่ได้จากการสุ่มซึ่งถือว่าเป็นการสุ่มแบบไม่ใส่กลับ ฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X จะกำหนดได้ดังนี้

$$P(X = x) = \binom{3}{x} \frac{3^{(x)} \cdot 9^{(3-x)}}{12^{(3)}} , \quad x = 0, 1, 2, 3$$

หรือเขียนแสดงในตารางดังนี้

x	P(X = x)		
0	$\binom{3}{0} 9^{(3)} / 12^{(3)}$	=	84/220
1	$\binom{3}{1} 3 \cdot 9^{(2)} / 12^{(3)}$	=	108/220
2	$\binom{3}{2} 3^{(2)} \cdot 9/12^{(3)}$	=	27/220
3	$\binom{3}{3} 3^{(3)} / 12^{(3)}$	=	1/220

ความน่าจะเป็นที่จะได้หลอดเสียอย่างน้อยที่สุด 2 หลอด $= P(X \geqslant 2)$

$$= P(X = 2) + P(X = 3) = 7/55$$

8-8.1.8 ค่าคาดหมายของจำนวนบอลล์สีขาว

ไม่ว่าจะเป็นการสุ่มแบบใส่กลับ หรือสุ่มแบบไม่ใส่กลับ ค่าคาดหมายของจำนวนบอลล์สีขาว จะเท่ากับอัตราส่วนระหว่าง ผลคูณของจำนวนบอลล์สีขาวและจำนวนครั้งการสุ่ม กับจำนวนประชากร เสมอ กล่าวคือ

$$E(X) = \frac{nM}{N}$$

พิสูจน์

กำหนด A_i เป็นเหตุการณ์ที่สุ่มครั้งที่ i ได้บอลล์สีขาว $i = 1, 2, \ldots, n$

X_i เป็นตัวแปรเชิงสุ่มดัชนีของเหตุการณ์ A_i

และ X เป็นจำนวนบอลล์สีขาวที่ได้จากการสุ่ม นั่นคือ $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$

เหตุการณ์ที่สุ่มครั้งที่ i เป็นสีขาว ซึ่งอาจเป็นหมายเลขใดเลขหนึ่งในบรรดาหมายเลข- 1, 2, ..., M จะเท่ากับการสุ่มบอลล์ $n - 1$ ลูกจากกล่องที่มีบอลล์ N ลูก

หากเป็นการสุ่มแบบใส่กลับ จำนวนผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นจะเท่ากับ $M \cdot N^{n-1}$ ดังนั้น

$$P(X_i = 1) = \frac{M \cdot N^{n-1}}{N^n} = \frac{M}{N}$$

หากเป็นการสุ่มแบบไม่ใส่กลับ จำนวนผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นจะเท่ากับ $M(N-1)^{(n-1)}$ ดังนั้น

$$P(X_i = 1) = \frac{M(N-1)^{(n-1)}}{N^{(n)}} = \frac{M}{N}$$

จะเห็นได้ว่า ไม่ว่าจะเป็นการสุ่มแบบใด $P(X_i = 1) = M/N$ เหมือนกัน

อาศัยคุณสมบัติของตัวแปรเชิงสุ่มดัชนี จะได้

$$E(X_i) = P(X_i = 1) = M/N, \; i = 1, 2, \ldots, n$$

ดังนั้น

$$E(X) = E(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{M}{N} = n\frac{M}{N}$$

ตัวอย่างที่ 3-3.4 สุ่มบอลล์ 3 ลูกจากกล่องที่มีบอลล์สีขาว 4 ลูก สีดำ 5 ลูก โดยการสุ่มแบบ

ก) ใส่กลับ

ข) ไม่ใส่กลับ

จงเขียนฟังก์ชันการแจกแจงของจำนวนบอลล์สีขาว อาศัยผลที่ได้ จงแสดงให้เห็นจริงว่าค่าคาดหมายของจำนวนบอลล์สีขาว เท่ากับ nM/N

วิธีทำ

ให้ X เป็นจำนวนบอลล์สีขาวที่ได้จากการสุ่ม ดังนั้น $E(X) = nM/N = 3 \cdot 4/9 = 4/3$

ก) สุ่มแบบใส่กลับ ฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X จะกำหนดได้ดังนี้

$$P(X = x) = \binom{3}{x} \frac{4^x \cdot 5^{3-x}}{9^3}, \quad x = 0, 1, 2, 3$$

เขียนตารางแสดง $P(X = x)$ และ $x\,P(X = x)$ ได้ดังนี้

x	P(X = x)	x P(X = x)
0	$\binom{3}{0} 5^3/9^3 = 125/729$	0
1	$\binom{3}{1} 4 \cdot 5^2/9^3 = 300/729$	300/729
2	$\binom{3}{2} 4^2 \cdot 5/9^3 = 240/729$	480/729
3	$\binom{3}{3} 4^3/9^3 = 64/729$	192/729

$$E(X) = 0 + 300/729 + 480/729 + 192/729 = 972/729 = 4/3$$

แสดงว่า ค่าคาดหมายของจำนวนบอลล์สีขาว เท่ากับ nM/N

ข) สุ่มแบบไม่ใส่กลับ ฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X จะกำหนดได้ดังนี้

$$P(X = x) = \binom{3}{x} \frac{4^{(x)} 5^{(3-x)}}{9^{(3)}} , \quad x = 0, 1, 2, 3$$

เขียนตารางแสดง P(X = x) และ x P(X = x) ได้ดังนี้

x	P(X = x)	x P(X = x)
0	$\binom{3}{0} 5^{(3)}/9^{(3)} = 5/42$	0
1	$\binom{3}{1} 4 \cdot 5^{(2)}/9^{(3)} = 20/42$	20/42
2	$\binom{3}{2} 4^{(2)} \cdot 5/9^{(3)} = 15/42$	30/42
3	$\binom{3}{3} 4^{(3)}/9^{(3)} = 2/42$	6/42

$$E(X) = 0 + 20/42 + 30/42 + 6/42 = 56/42 = 4/3$$

แสดงว่า ค่าคาดหมายของจำนวนบอลล์สีขาว เท่ากับ nM/N

3-3.2 การรอคอยจนได้บอลล์สีขาว (WAITING FOR A WHITE)

บ่อยครั้งที่เราสนใจในการแจกแจงของจำนวนครั้งที่จะต้องสุ่มหรือทดลอง จนกว่าจะได้บอลล์สีขาว กรณีของการสุ่มแบบใส่กลับ จำนวนครั้งของการสุ่มจะไม่มีขอบเขตที่แน่นอน ตรงข้ามกับการสุ่มแบบไม่ใส่กลับ จำนวนครั้งที่จะสุ่มจะไม่เกิน N – M + 1 ครั้ง ในการสุ่มแต่ละแบบจะได้การแจกแจงของจำนวนครั้งการสุ่มจนได้บอลล์สีขาว ซึ่งหมายถึงสิ่งที่เรากำลังสนใจหรือต้องการศึกษา ดังต่อไปนี้

3-3.2.1 การรอคอยจนได้บอลล์สีขาวกรณีการสุ่มแบบใส่กลับ

ให้ X เป็นจำนวนครั้งของการสุ่มแบบใส่กลับจนได้บอลล์สีขาว

ฟังก์ชันการแจกแจงของ X จะกำหนดได้ดังนี้

$$P(X = x) = \frac{(N - M)^{x-1} M}{N^x} , \quad x = 1, 2, 3, \ldots \qquad \ldots\ldots\ldots(3\text{-}3.8)$$

การแจกแจงที่ได้นี้ เป็นกรณีหนึ่งของการแจกแจงแบบเรขาคณิต

พิสูจน์

สุ่มบอลล์จากกล่อง x ครั้งแบบใส่กลับจะมีผลลัพธ์เกิดขึ้น เท่ากับ N^x, $x = 1, 2, 3, \ldots$

หากในการสุ่ม $x - 1$ ครั้งแรกเป็นสีดำแล้วตามด้วยบอลล์สีขาวลูกใดลูกหนึ่งใน M ลูก, จำนวนผลลัพธ์ที่จะเกิดขึ้น จะเท่ากับ $(N - M)^{x-1} M$, $x = 1, 2, \ldots$

เนื่องจากแต่ละผลลัพธ์มีโอกาสเกิดขึ้นเท่า ๆ กัน

ดังนั้น ฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X จะกำหนดได้ดังนี้

$$P(X = x) = \frac{(N - M)^{x-1}M}{N^x}, \quad x = 1, 2, \ldots$$

จาก (3-3.8) อาศัยคุณสมบัติของฟังก์ชันน่าจะเป็นของตัวแปรเชิงสุ่ม จะได้

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{(N - M)^{x-1}M}{N^x} = 1$$

หรือ
$$\sum_{x=1}^{\infty} \left(\frac{N - M}{N}\right)^{x-1} = \frac{N}{M}$$

ให้ $a = N - M$, $b = N$, $k = x - 1$ ดังนั้น

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^k = \frac{b}{b - a} \qquad \ldots\ldots\ldots(3\text{-}3.9)$$

ในบางครั้งเราสนใจการแจกแจงของ X ในรูปของ $P(X > x)$ หรือความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่สุ่มได้ x ครั้งแรกเป็นสีดำทั้งหมด ซึ่งเรียกว่า Tail Probabilities และกำหนดไว้โดย

$$P(X > x) = \frac{(N - M)^x}{N^x}, \quad x = 1, 2, \ldots \qquad \ldots\ldots\ldots(3\text{-}3.10)$$

พิสูจน์

$$\begin{aligned}
P(X > x) &= P(X = x + 1) + P(X = x + 2) + P(X = x + 3) + \ldots\ldots\ldots \\
&= \frac{(N - M)^x M}{N^{x+1}} + \frac{(N - M)^{x+1}M}{N^{x+2}} + \frac{(N - M)^{x+2}M}{N^{x+3}} + \ldots\ldots\ldots \\
&= \frac{(N - M)^x M}{N^{x+1}} \left\{1 + \frac{N - M}{N} + \left(\frac{N - M}{N}\right)^2 + \ldots\ldots\ldots\right\} \\
&= \frac{(N - M)^x M}{N^{x+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{N - M}{N}\right)^x
\end{aligned}$$

$$= \frac{(N-M)^x M}{N^{x+1}} \cdot \frac{N}{N-(N-M)} \qquad \text{(อาศัยสูตร3-3.9)}$$

$$= \left(\frac{N-M}{N}\right)^x$$

ค่าคาดหมายของการรอคอยจนได้บอลล์สีขาว จะเท่ากับ อัตราส่วนระหว่าง จำนวนบอลล์ทั้งหมด กับ จำนวนบอลล์สีขาว กล่าวคือ

$$E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{(N-M)^{x-1} M}{N^x} = \frac{N}{M} \qquad \text{..........(3-3.11)}$$

พิสูจน์

$$E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{(N-M)^{x-1} M}{N^x} \qquad \text{........ ...(1)}$$

$$\frac{N-M}{N} E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{(N-M)^x M}{N^{x+1}} \qquad \text{..........(2)}$$

(1) − (2) จะได้

$$\frac{M}{N} E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{(N-M)^{x-1} M}{N^x}$$

$$E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{(N-M)}{N} \qquad (k = x - 1)$$

$$= \frac{N}{N-(N-M)} = \frac{N}{M} \qquad \text{(อาศัยสูตร 3-3.9)}$$

การพิสูจน์สูตรนี้ นอกจากพิสูจน์ได้โดยตรงจากฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X แล้วเราอาจพิสูจน์โดยอาศัย $P(X > x)$ ก็ได้ กล่าวคือ หาก $P(X = x)$ เป็นฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X ที่มีค่ามากกว่า 0 ในเมื่อ $x = 1, 2, \ldots, n$ นอกนั้นเป็น 0 เราทราบว่า

$$E(X) = \sum_{x=1} x\, P(X = x)$$

$$= P(x = 1) + 2P(X = 2) + 3P(X = 3) + \ldots + nP(X = n)$$

$$= P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + \ldots + P(X = n)$$
$$+ P(X = 2) + P(X = 3) + \ldots + P(X = n)$$
$$+ P(X = 3) + \ldots + P(X = n)$$
$$+ P(X = n)$$

แสดงว่า เราสามารถคำนวณค่าคาดหมายของ X โดยอาศัย P(X > x) ดังนี้

$$E(X) = P(X > 0) + P(X > 1) + \ldots + P(X > n - 1) = \sum_{x=0}^{n-1} P(X > x)$$

พิสูจน์ สูตร 3-3.11 โดยอาศัย P(X > x)

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} P(X > x)$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(N - M)^x}{N^x} = \frac{N}{N - (N - M)} \quad \text{(อาศัยสูตร 3-3.9)}$$

$$= N/M$$

ตัวอย่างที่ 3-3.5 กล่าวกันว่าขบวนการผลิตหนึ่ง จะผลิตของที่ชำรุด 5% เสมอ หากในการผลิตแต่ละครั้งผลิตของ 100 ชิ้น ให้ X เป็นจำนวนของที่สุ่มมาตรวจจนพบของที่ชำรุด โดยในการสุ่มจะสุ่มมาทีละชิ้น ถ้าพบว่าเป็นของดีจะใส่กลับไปใหม่ ทำเช่นนี้เรื่อย ๆ จนกว่าจะพบของที่ชำรุด จงหา

ก) ฟังก์ชันน่าจะเป็นและค่าคาดหมายของ X

ข) ความน่าจะเป็นที่จะต้องตรวจอย่างน้อยที่สุด 5 ชิ้น

ค) ความน่าจะเป็นที่จะต้องตรวจไม่เกิน 5 ชิ้น ภายใต้เงื่อนไขว่าได้ตรวจมาแล้วอย่างน้อยที่สุด 5 ชิ้น

วิธีทำ ในที่นี้ N = 100, M = 5 และ N − M = 95

ก) ฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X กำหนดไว้โดย

$$P(X = x) = \frac{95^{x-1}\,5}{100^x}, \quad x = 1, 2, \ldots$$

ค่าคาดหมายของ X จะเท่ากับ 100/5 = 20 ชิ้น

ข) ความน่าจะเป็นที่จะต้องตรวจอย่างน้อยที่สุด 5 ชิ้น $= P(X \geq 5)$

$= 95^4/100^4 = 0.8145$

ค) ความน่าจะเป็นที่จะต้องตรวจไม่เกิน 5 ชิ้นภายใต้เงื่อนไขว่าตรวจมาแล้วอย่างน้อยที่สุด 5 ชิ้น

$$= P(X = 5)/P(X \geq 5)$$

$$= \frac{95^4 \cdot 5}{100^5} \Big/ \frac{95^4}{100^4} = .05$$

3-3.2.2 การคอยจนได้บอลล์สีขาวกรณีการสุ่มแบบไม่ใส่กลับ

สุ่มบอลล์จากกล่องทีละลูกแบบไม่ใส่กลับจนกว่าจะได้บอลล์สีขาว **ให้ X เป็นจำนวนครั้ง**ของการสุ่มฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X กำหนดได้โดย

$$P(X = x) = \frac{(N - M)^{(x-1)} M}{N^{(x)}}, \; x = 1, 2, \ldots, N - M + 1 \quad \ldots\ldots\ldots.(3\text{-}3.12)$$

เป็นแบบฝึกหัดให้นักศึกษาไปพิสูจน์

จากสูตร 3-3.12 อาศัยคุณสมบัติของฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X จะได้

$$\sum_{x=1}^{N-M+1} \frac{(N - M)^{(x-1)} M}{N^{(x)}} = 1$$

หรือ

$$\sum_{x=1}^{N-M+1} (N - M)^{(x-1)} / (N - 1)^{(x-1)} = N/M$$

ให้ $k = x - 1, a = N - M, b = N - 1$

$$\sum_{k=0}^{a} \frac{a^{(k)}}{b^{(k)}} = \frac{b + 1}{b - a + 1} \quad \ldots\ldots\ldots.(3\text{-}3.13)$$

Tail probabilities ของ X จะกำหนดได้โดย

$$P(X > x) = \frac{(N - M)^{(x)}}{N^{(x)}}, \; x = 1, 2, \ldots, N - M + 1 \quad \ldots\ldots\ldots.(3\text{-}3.14)$$

พิสูจน์

$$
\begin{aligned}
P(X > x) &= P(X = x+1) + P(X = x+2) + P(X = x+3) + \ldots + P(X = N-M+1) \\
&= \frac{(N-M)^{(x)}M}{N^{(x+1)}} + \frac{(N-M)^{(x+1)}M}{N^{(x+2)}} + \frac{(N-M)^{(x+2)}M}{N^{(x+3)}} + \ldots + \frac{(N-M)^{(N-M)}M}{N^{(N-M+1)}} \\
&= \frac{(N-M)^{(x)}M}{N^{(x+1)}}\left[1 + \frac{N-M-x}{N-x-1} + \frac{(N-M-x)^{(2)}}{(N-x-1)^{(2)}} + \ldots + \frac{(N-M-x)^{(N-M-x)}}{(N-x-1)^{(N-M-x)}}\right] \\
&= \frac{(N-M)^{(x)}M}{N^{(x+1)}} \cdot \frac{(N-x-1)+1}{(N-x-1)-(N-M-x)+1} \qquad \text{(อาศัยสูตร 3-3.13)} \\
&= \frac{(N-M)^{(x)}}{N^{(x)}}
\end{aligned}
$$

ค่าคาดหมายของจำนวนครั้งการสุ่มจนได้บอลล์สีขาว, $E(X)$, กำหนดได้โดย

$$E(X) = \frac{N+1}{M+1}$$

เป็นแบบฝึกหัดให้นักศึกษาไปพิสูจน์

ตัวอย่างที่ 3-3.6 ในการตรวจรับผลิตภัณฑ์ 60 ชิ้น ซึ่งพ่อค้าระบุว่ามีผลิตภัณฑ์คุณภาพได้มาตรฐาน 40 ชิ้น เจ้าหน้าที่ฝ่ายตรวจรับได้สุ่มผลิตภัณฑ์มาตรวจทีละชิ้น และจะหยุดตรวจถ้าพบผลิตภัณฑ์ได้มาตรฐาน ให้ X เป็นจำนวนผลิตภัณฑ์ที่นำมาตรวจสอบจนกว่าจะได้ผลิตภัณฑ์ได้มาตรฐาน จงหา

ก) ฟังก์ชันน่าจะเป็นและค่าคาดหมายของ X

ข) ความน่าจะเป็นที่จะต้องตรวจ 5 ชิ้น

ค) จงแสดงให้เห็นจริงว่า

$$P(X > x) = 20^{(x)}/60^{(x)}$$

วิธีทำ

ในที่นี้ $N = 60, M = 40, N - M = 20$

ก) ฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X จะกำหนดได้ดังนี้

$$P(X = x) = \frac{20^{(x-1)}40}{60^{(x)}}, \; x = 1, 2, \ldots, 21$$

ค่าคาดหมายของ X = 61/21 = 2.9 หรือ 3 ชิ้น โดยประมาณ

ข) ความน่าจะเป็นที่จะต้องตรวจ 5 ชิ้น $= P(X = 5)$

$$= 20^{(4)}\, 40/60^{(5)} = 0.007$$

ค) $P(X > x) = P(X = x + 1) + P(X = x + 2) + P(X = x + 3) + \ldots + P(x = 21)$

$$= \frac{20^{(x)}40}{60^{(x+1)}} + \frac{20^{(x+1)}40}{60^{(x+2)}} + \frac{20^{(x+2)}40}{60^{(x+3)}} + \ldots + \frac{20^{(20)}40}{60^{(21)}}$$

$$= \frac{20^{(x)}40}{60^{(x+1)}} \left[1 + \frac{20-x}{59-x} + \frac{(20-x)^{(2)}}{(59-x)^{(2)}} + \ldots + \frac{(20-x)^{(20-x)}}{(59-x)^{(20-x)}}\right]$$

$$= \frac{20^{(x)}40}{60^{(x+1)}} \cdot \frac{(59 - x) + 1}{(59 - x) - (20 - x) + 1} \qquad \text{(อาศัยสูตร 3-3.13)}$$

$$= \frac{20^{(x)}}{60^{(x)}}$$

แบบฝึกหัดที่ 3-3

1. สุ่มบอลล์ n ลูกจากกล่องที่มีบอลล์สีขาว M ลูกและสีดำ $N - M$ ลูก

   ก) แบบใส่กลับ

   ข) แบบไม่ใส่กลับ

   กำหนด A_i เป็นเหตุการณ์ที่สุ่มครั้งที่ i ได้สีขาว, $i = 1, 2, \ldots, n$
   และ X เป็นจำนวนบอลล์สีขาวที่ได้จากการสุ่มสองครั้งแรก
   จงหา

   1.1) $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)$

   1.2) ฟังก์ชันน่าจะเป็นและค่าคาดหมายของ X

2. สร้างเลข 3 หลักจากเลขจำนวนเต็มบวกที่มีค่าไม่เกิน 9 โดยให้เลขแต่ละหลัก

   ก) ซ้ำกันได้

   ข) แตกต่างกัน

   2.1) ให้ A_i เป็นเหตุการณ์ที่เลขหลัก i เป็นเลขคู่, $i = 1, 2, 3$ ($i = 1, 2, 3$ หมายถึงหลักร้อย หลักสิบ และหลักหน่วย ตามลำดับ) และ X เป็นจำนวนเลขคู่ในเลข 3 หลัก กล่าวคือ- $X = X_1 + X_2 + X_3$ จงหา

   2.1.1) ฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X

   2.1.2) ความน่าจะเป็นที่ผลบวกของตัวเลขทั้งสามเป็นเลขคู่

   2.1.3) ความน่าจะเป็นที่ผลคูณของเลข 3 หลักเป็นจำนวนคู่

   2.1.4) ความน่าจะเป็นของเลขคู่

   2.2) ให้ X เป็นจำนวนตัวเลขที่เป็นผลคูณของ 4 จงหาฟังก์ชันน่าจะเป็น และค่าคาดหมายของ X

3. กล่องใบหนึ่งบรรจุบอลล์สีขาว 24 ลูกและสีดำ 8 ลูก สุ่มบอลล์จากกล่องนี้แบบใส่กลับ n ลูก, $n \leqslant 8$ ให้ X เป็นจำนวนบอลล์สีขาวที่ได้จากการสุ่ม

   3.1) จงพิสูจน์ว่า $P(X = x + 1) = \dfrac{3 \cdot (n - x)}{(x + 1)} \cdot P(X = x)$

   3.2) จงหาฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ X

4. ในรายการทายปัญหาชิงรางวัล เลือกผู้เข้าแข่งขัน 5 คน จากจำนวนผู้เข้าชมซึ่งเป็นเด็ก 20 คน และผู้ใหญ่ 10 คน โดยวิธีจับฉลาก จงคำนวณหา

   4.1) ความน่าจะเป็นที่จะได้ผู้เข้าแข่งขันเป็นเด็ก 3 คน

   4.2) ความน่าจะเป็นที่จะได้ผู้เข้าแข่งขันคนที่ 3 เป็นเด็ก ภายใต้เงื่อนไขว่ามีเด็กแข่งขัน 3 คน

   4.3) ความน่าจะเป็นที่จะได้ผู้เข้าแข่งขันเป็นเด็ก 3 คน กำหนดว่าจะต้องมีเด็กอย่างน้อยที่สุด 2 คน

   4.4) ค่าคาดหมายของจำนวนเด็กที่เข้าแข่งขัน

5. โรงงานผลิตลูกขนไก่ในแต่ละครั้ง 100 ลูก พบว่าทุกครั้งที่ผลิตจะมีเสีย 8% เสมอ สุ่มลูกขนไก่มาตรวจสอบแบบใส่กลับ 5 ลูก จงหา

   5.1) ค่าคาดหมายของจำนวนลูกขนไก่ที่เสีย

   5.2) ความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกเสีย 1 ลูก กำหนดว่ามีลูกเสียอย่างน้อยที่สุด 2 ลูก

   5.3) ความน่าจะเป็นที่ได้ลูกที่ 4 เสียเป็นลูกแรก

   5.4) ให้ X เป็นจำนวนครั้งของการสุ่มจนได้ลูกขนไก่เสียเป็นลูกแรก จงหาฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X

6. องค์การแห่งหนึ่งมีคนงาน 50 คน ในจำนวนนี้เป็นคนงานที่มีทักษะ 10 คน เลือกคนงานมาโดยวิธีสุ่ม จงหาความน่าจะเป็นที่จะสุ่มคนงานมา

   6.1) อย่างน้อยที่สุด 4 คน

   6.2) ไม่เกิน 5 คน กำหนดว่าสุ่มมาแล้วอย่างน้อยที่สุด 4 คน

   6.3) อย่างน้อยที่สุด 4 คน กำหนดว่าสุ่มมาแล้วไม่เกิน 5 คน

   จึงจะได้คนงานที่มีทักษะเป็นคนแรก

7. ในการจับฉลากชิงโชค มีฉลาก 500 ใบในจำนวนนี้เป็นฉลากที่ได้รางวัล 5 ใบ หยิบฉลากมา

   ก) โดยวิธีสุ่มแบบใส่กลับ

   ข) โดยวิธีสุ่มแบบไม่ใส่กลับ

   ให้ X เป็นจำนวนคนที่มาหยิบฉลากทีละใบจนได้ฉลากที่มีรางวัลเป็นคนแรก จงหา

   7.1) ฟังก์ชันน่าจะเป็นและค่าคาดหมายของ X

   7.2) ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ X

   7.3) ความน่าจะเป็นที่มีคนหยิบฉลากเพียง 3 คน

   7.4) ความน่าจะเป็นที่มีคนมาหยิบฉลากอย่างน้อยที่สุด 3 คน

   7.5) อาศัยผลจาก (7.1) จงหาค่าของ $\sum_{j=0}^{\infty} j\left(\frac{495}{500}\right)^j$ และ $\sum_{j=1}^{496} j\,\frac{(495)^{(j-1)}}{(500)^{(j)}}$

ประโยชน์ของตัวแบบการสุ่มตัวอย่างจากประชากรที่มี 2 จำพวก

ในปัญหาการสุ่มตัวอย่าง จำนวนบอลล์ทั้งหมดที่อยู่ในกล่องจะแทนประชากรหรือจักรวาล ส่วนจำนวนบอลล์สีขาวจะแทนอะไรก็ได้ที่เราต้องการศึกษาหรือกำลังสนใจอยู่ เช่นบอลล์สีขาวอาจจะแทนจำนวนผลิตภัณฑ์ที่ชำรุดหรือไม่ได้มาตรฐาน บอลล์สีดำแทนผลิตภัณฑ์ที่ได้มาตรฐาน หรือบอลล์สีขาวแทนคนที่มีรายได้ต่อเดือนมากกว่า 4,000 บาท ส่วนบอลล์สีดำแทนคนที่มีรายได้ต่อเดือนน้อยกว่า 4,000 บาท เป็นต้น การประยุกต์แบบหนึ่งของปัญหาการสุ่มตัวอย่าง จะแสดงให้เห็นการใช้ข้อมูลจากตัวอย่าง มาประกอบการตัดสินใจเกี่ยวกับตัวแบบของประชากรหรือจักรวาล ดังเช่น ในการซื้อของปริมาณมาก ๆ ที่เป็นผลผลิตทางอุตสาหกรรม จะต้องมีการตกลงกันก่อนระหว่างผู้ซื้อและผู้ผลิต ว่าจะยอมให้มีของชำรุดหรือของไม่ได้มาตรฐานเป็นจำนวนเท่าไรหรือกี่เปอร์เซนต์ ทั้งฝ่ายซื้อและฝ่ายผลิตตระหนักดีว่า การที่จะตรวจสอบของทุก ๆ ชิ้นย่อมเป็นไปไม่ได้ เพราะนอกจากจะเสียเวลาและค่าใช้จ่ายจำนวนมากแล้ว ในบางครั้งการตรวจสอบอาจจะทำให้ของเสียได้ จึงต้องอาศัยการสุ่มตัวอย่างมาจำนวนหนึ่ง คือ n และผู้ซื้อจะต้องตรวจดูว่าในจำนวนของที่สุ่มมา n ชิ้นนี้ มีของที่ชำรุดหรือไม่ได้มาตรฐานกี่ชิ้น ภายหลังการตรวจสอบคุณภาพของทั้ง n ชิ้นและทราบจำนวนของที่ชำรุดหรือไม่ได้มาตรฐาน (สมมติว่ามี k ชิ้น) ผู้ซื้อจะต้องตัดสินใจว่าคำอ้างของผู้ผลิตเป็นจริงหรือไม่ เพื่อจะได้ตัดสินใจซื้อหรือไม่ซื้อ โดยการพิจารณาว่า หากคำอ้างของผู้ผลิตเป็นจริง จำนวนของชำรุดที่นับได้จากตัวอย่าง (k) จะมีทางเกิดขึ้นได้ด้วยความน่าจะเป็นเท่าไร เช่นผู้ผลิตอ้างว่าจำนวนของชำรุดมี M ชิ้น ผู้ซื้อสามารถคำนวณความน่าจะเป็นที่จะมีของชำรุด k ชิ้นหรือมากกว่า k ชิ้น ได้จากสมการ

$$P(X \geq k) = \sum_{x=k}^{n} \binom{n}{x} \frac{M^{x}(M - M)^{n-x}}{N^{x}} \qquad \text{..........(1)}$$

หรือ

$$P(X \geq k) = \sum_{x=k}^{n} \binom{n}{x} \frac{M^{(x)}(N - M)^{(n-x)}}{N^{(x)}} \qquad \text{..........(2)}$$

หากผลลัพธ์ที่ได้จาก (1) หรือ (2) แล้วแต่กรณี มีค่าน้อยมากหรือเกือบจะเป็นไปไม่ได้ ผู้ซื้ออาจสรุปได้ว่า ข้อเสนอหรือคำอ้างของผู้ผลิตไม่เป็นจริง และตัดสินใจไม่ซื้อ

ปัญหาดังกล่าวจะนำไปใช้ในการควบคุมคุณภาพทางสถิติ ในเรื่องเกี่ยวกับ การใช้แผนการสุ่มตัวอย่างในการตรวจรับ (acceptance sampling plan) ซึ่งนักศึกษาจะศึกษารายละเอียดเกี่ยวกับเรื่องนี้ได้ใน ST 435 (Statistical Quality Control)

จากปัญหาการสุ่มตัวอย่าง ถ้าในแต่ละครั้งที่สุ่มบอลล์มา 1 ลูก แล้วใส่กลับคืนไป พร้อมกับใส่บอลล์สีเดียวกันกับที่สุ่มได้ลงในกล่อง i ลูก และใส่บอลล์สีอื่นลงในกล่องอีก j ลูก นี่ก็หมายความว่า หากในการสุ่มบอลล์ลูกแรกเป็นสีขาว ใส่กลับคืนในกล่อง พร้อมกับเพิ่มบอลล์สีขาว-i ลูก สีดำ j ลูก ลงไปในกล่อง ดังนั้น จำนวนลูกบอลล์ในกล่อง จะเท่ากับ $N + i + j$ ลูก สุ่มบอลล์ลูกที่ 2 จากกล่อง ใส่กลับคืน พร้อมกับเพิ่มลูกบอลล์ เช่นเดียวกับครั้งแรก ทำซ้ำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จนกว่าจะมีเหตุการณ์ที่ทำให้การสุ่มสิ้นสุดลง จะสังเกตุเห็นได้ว่า i และ j เป็นจำนวนที่คงที่และอาจจะมีค่าเป็นลบก็ได้ ถ้า i หรือ j เป็นลบ การสุ่มจะสิ้นสุดลงเมื่อบอลล์ถูกหยิบออกมาหมดกล่อง ให้เราดูกรณีพิเศษของการสุ่มบอลล์จากกล่องดังต่อไปนี้

1) $i = -1$ และ $j = 0$ มีความหมายว่า แต่ละครั้งของการสุ่ม บอลล์สีเดียวกันกับที่สุ่มได้จะถูกหยิบออกไป ซึ่งก็เป็นกรณีเดียวกันกับการสุ่มตัวอย่างแบบไม่ใส่กลับนั่นเอง

2) $i = 0$ และ $j = 0$ เมื่อใส่บอลล์ที่สุ่มมาได้กลับคืน จะไม่มีการเพิ่มบอลล์สีใดลงในกล่อง กรณีนี้จะเป็นกรณีเดียวกันกับการสุ่มตัวอย่างแบบใส่กลับ

3) $i > 0$ และ $j = 0$ กรณีนี้เป็นที่รู้จักกันดีในชื่อ "Polya's urn scheme" ซึ่ง George Polya ได้เสนอขึ้นมาในรูปของตัวแบบทางคณิตศาสตร์ ใช้ในปัญหาของการแพร่เชื้อโรค ภายหลังการเกิดเชื้อโรค (การสุ่มแต่ละครั้ง) จำนวนของเชื้อโรค (จำนวนของบอลล์ที่มีสีเดียวกันกับที่สุ่มได้) จะเพิ่มขึ้น ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะเกิดขึ้นของเชื้อโรคนี้ (สุ่มได้บอลล์สีเดียวกัน) ในครั้งต่อไปจะเพิ่มขึ้น Polya's urn scheme เป็นตัวแบบน่าจะเป็นของปัญหาการแพร่เชื้อโรค แม้จะไม่ใช่ตัวแบบที่สมบูรณ์ แต่ก็ใช้ในการศึกษา การแพร่ของเชื้อโรคชนิดหนึ่ง เนื่องจากการเกิดขึ้นในแต่ละครั้งของเชื้อโรคนี้ จะเพิ่มความน่าจะเป็นของการเกิดขึ้นในครั้งต่อไป

4) $i = 0$ และ $j > 0$ เป็นโมเดลที่เสนอขึ้นมาโดย B. Friedman ใช้ในการศึกษาเรื่องความปลอดภัยในอุตสาหกรรม อุบัทวเหตุที่เกิดขึ้นในโรงงานอุตสาหกรรม จะเป็นไปตามช่วงของการเน้นในเรื่องความปลอดภัย เมื่อมีอุบัทวเหตุเกิดขึ้น ก็ย่อมจะมีการระมัดระวังและสนใจในเรื่องความปลอดภัยมาก ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะเกิดอุบัทวเหตุจะลดน้อยลง แต่ถ้าช่วงใดไม่มีอุบัทวเหตุเกิดขึ้น ก็มักจะละเลย ไม่สนใจในเรื่องของความปลอดภัย จึงเป็นผลให้ ความน่าจะเป็นที่จะเกิดอุบัทวเหตุสูงขึ้น

5) $i = -1$ และ $j = 0$ เป็นตัวแบบที่นำไปใช้ในการศึกษาทางด้านฟิสิคส์สถิติ เช่น ตัวแบบ Ehrenfest ของการเปลี่ยนความร้อนระหว่างของที่แยกกัน เป็นต้น

3.4 บทสรุป

หากเราพิจารณาปัญหาการจับคู่ และปัญหาการใส่บอลล์ในกล่องแบบสุ่ม จะเห็นว่าใช้วิธีการแบบเดียวกัน การหาสูตรการแจกแจงของจำนวนที่จับคู่กันได้ หรือของจำนวนกล่องว่างทำได้ 2 วิธีการด้วยกัน ในแต่ละวิธีการจะต้องหา S_k ให้ได้เสียก่อน

วิธีการแรก มี 2 ขั้นตอน

ขั้นตอนที่ 1 หา $P(X = 0)$ ซึ่งจะได้

$$P(X = 0) = 1 - P(\bigcup_{k=1}^{a} A_k) = \sum_{k=0}^{a} (-1)^k S_k$$

เมื่อ a เป็นจำนวนของเหตุการณ์ A_i

ขั้นตอนที่ 2 หา $P(X = x)$ จาก

$$P(X = x) = \frac{\#(X - x)}{\#(S)}$$

การหาจำนวนของ $(X = x)$ อาศัยผลจาก $P(X = 0)$

วิธีการที่สอง ใช้ตัวแปรดัชนี X_i โดยที่ X_i เป็นตัวแปรดัชนีของ A_i และ $X = \sum_i X_i$ แล้วใช้สูตร

$$P(X = x) = \sum_{k=0}^{a-x} (-1)^k \binom{x+k}{x} S_k$$

เมื่อ a เป็นจำนวนของเหตุการณ์ A_i

สำหรับการหาค่าคาดหมาย อาจหาได้โดยใช้สูตร

$$E(X) = \sum_{\forall x} x\, P(X = x)$$

หรือ $$E(X) = \sum_{\forall i} E(X_i)$$

ก็ได้

เปรียบเทียบรายละเอียดที่เกี่ยวกับปัญหาทั้งสองได้ดังตารางต่อไปนี้

	ปัญหาการจับคู่ n คู่ X = จำนวนคู่ที่จับคู่กันได้	ปัญหาการใส่บอลล์ n ลูกลงใน m กล่องแบบสุ่ม X = จำนวนกล่องที่ว่าง บอลล์แตกต่างกัน	 บอลล์เหมือนกัน
จำนวนผลลัพธ์	$n!$	m^n	$\binom{m+n-1}{n}$
จำนวนผลลัพธ์ของ A_i	$(n-1)!$	$(m-1)^n$	$\binom{m+n-2}{n}$
$P(A_i)$	$\frac{1}{n}$	$\frac{(m-1)^n}{m^n}$	$\frac{m-1}{m+n-1}$
จำนวนผลลัพธ์ของ $\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}$	$\frac{1}{n^{(k)}}$	$\frac{(m-k)^n}{m^n}$	$\frac{\binom{m+n-k-1}{n}}{\binom{m+n-1}{n}}$
S_k	$\frac{1}{k!}$	$\binom{m}{k}\frac{(m-k)^n}{m^n}$	$\binom{m}{k}\frac{\binom{m+n-k-1}{n}}{\binom{m+n-1}{n}}$
$P(X = x)$	$P_{n-x}/x!$ $x = 0, 1, 2, \ldots, n$ $p_{n-x} = \sum_{k=0}^{n-x}\frac{(-1)^k}{k!}$	$\binom{m}{x}\frac{(m-x)^n}{m^n}\cdot p_{n,m-x}$ $x = 0, 1, 2, \ldots, m-1$ $p_{n,m-x}$ $= \sum_{k=0}^{m-x-1}(-1)^k\binom{m-x}{k}\cdot\frac{(m-x-k)^n}{(m-x)^n}$	$\binom{m}{x}\frac{\binom{m+n-x-1}{n}}{\binom{m+n-1}{n}}\, p_{n,m-x}$ $x = 0, 1, 2, \ldots, m-1$ $p_{n,m-x}$ $= \sum_{k=0}^{m-x-1}(-1)^k\binom{m-x}{k}\cdot\frac{\binom{m+n-x-k-1}{n}}{\binom{m+n-x-1}{n}}$
$E(X)$	1	$\frac{(m-1)^n}{m^{n-1}}$	$\frac{m(m-1)}{m+n-1}$

ผลที่ได้ตามมาจากปัญหาการใส่บอลล์ลงในกล่อง มีดังนี้

1. ถ้า $m = n$ เราจะได้ว่า

$$\sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{m}{k} (m-k)^m = m! \quad \text{และ} \quad \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{m}{k} \binom{2m-k-1}{m} = 1$$

2. ถ้า $m > n$ เราจะได้ว่า

$$\sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{m}{k} (m-k)^n = 0 \quad \text{และ} \quad \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{m}{k} \binom{m+n-k-1}{n} = 0$$

3. กรณีของบอลล์เหมือนกัน ฟังก์ชันการแจกแจงของ X เขียนได้อีกรูปแบบหนึ่งคือ

$$P(X = x) = \binom{m}{x} \frac{\binom{n-1}{m-x-1}}{\binom{m+n-1}{n}}$$

ผลที่ตามมาก็คือ เราจะได้

$$\sum_{k=0}^{m-x-1} (-1)^k \binom{m-x}{k} \binom{m+n-x-k-1}{n} = \binom{n-1}{m-x-1}$$

ในปัญหาการสุ่มตัวอย่าง เรากำหนดตัวแปรเชิงสุ่ม X 2 แบบด้วยกัน เปรียบเทียบการแจกแจง และผลที่ตามมาของตัวแปรทั้ง 2 แบบได้ ดังตารางต่อไปนี้

	X = จำนวนบอลลสีขาวที่ได้จากการสุ่ม n ครั้ง		X = จำนวนครั้งของการสุ่มจนได้บอลล์สีขาว	
	ใส่กลับคืน	**ไม่ใส่กลับคืน**	**ใส่กลับคืน**	**ไม่ใส่กลับคืน**
P(X = x)	$\binom{n}{x} \frac{M^x (N-M)^{n-x}}{N^n}$ $x = 0, 1, 2, \ldots, n$	$\binom{n}{x} \frac{M^{(x)} (N-M)^{(n-x)}}{N^{(n)}}$ $x = 0, 1, 2, \ldots, n \; (n \leqslant M)$	$\frac{M(N-M)^{x-1}}{N^x}$ $x = 1, 2, 3, \ldots$	$\frac{M(N-M)^{(x-1)}}{N^{(x)}}$ $x = 1, 2, \ldots, N-M+1$
E(X)	$\frac{nM}{N}$	$\frac{nM}{N}$	$\frac{N}{M}$	$\frac{N+1}{M+1}$
ผลที่ตามมา	$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n$	$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{(k)} b^{(n-k)} = (a+b)^{(n)}$ **หรือ** $\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$	$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^k = \frac{b}{b-a}$	$\sum_{k=0}^{a} \frac{a^{(k)}}{b^{(k)}} = \frac{b+1}{b-a+1}$

ข้อสังเกต การหาค่าคาดหมายของจำนวนครั้งการสุ่มจนได้บอลล์สีขาว จะทำได้ง่ายกว่าถ้าใช้สูตร $E(X) = \sum_{\forall x} P(X > x)$ นั่นก็หมายความว่าในการหา E(X) เราควรจะหา $P(X > x)$ ให้ได้เสียก่อน แล้วจึงจะหา E(X)

แบบฝึกหัดระคน

1. จงคำนวณค่าของผลบวกต่อไปนี้

1) $\sum_{x=1}^{10} \binom{10}{x} 2^{10-x}$ 2) $\sum_{x=0}^{15} x \binom{15}{x} 4^{15-x}/5^{15}$

3) $\sum_{k=0}^{10} (-1)^k \binom{10}{k} (10-k)^{10}$ 4) $\sum_{k=0}^{12} (-1)^k \binom{12}{k} (12-k)^{10}$

5) $\sum_{j=0}^{18} \sum_{k=2}^{20-j} \frac{(-1)^k \, 20!}{k! \cdot j!}$ 6) $\sum_{x=5}^{20} \sum_{y=0}^{20-x} (-1)^y \frac{5!}{(x-5)!\, y!}$

2. ในปัญหาการจับคู่ที่มี $n = 5$ ให้ X เป็นจำนวนคู่ที่เกิดการจับคู่กันได้

2.1) จงเขียนฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X และเขียนกราฟเส้นแสดงฟังก์ชันของ X ฐานนิยมของ X จะมีค่าเท่าไร

2.2) จงหาฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ X และเขียนแสดงด้วยกราฟ มัธยฐานจะมีค่าเท่าไร

2.3) จงคำนวณค่าของ $P(1 \leqslant X < 3 | X \leqslant 3)$

2.4) ถ้า $A \{ x : x = 1, 2, 3 \}$ และ $B = \{ x : x = 3, 4, 5 \}$ จงคำนวณค่าของ $P(A \cup B)$

3) มีรองเท้า n คู่ เลือกมาอย่างสุ่ม 2r ข้าง ($2r \leqslant n$) ให้ X เป็นจำนวนคู่ของรองเท้าที่เข้าคู่กัน จงแสดงให้เห็นจริงว่า

$$P(X = x) = \binom{n}{x} \cdot \binom{n-x}{2r-2x} 2^{2r-2x} \Big/ \binom{2n}{2r}$$

อาศัยผลที่ได้ จงคำนวณค่าของความน่าจะเป็นที่ไม่มีรองเท้าเข้าคู่กันเลย ที่จะมีรองเท้าเข้าคู่กันเพียง 1 คู่ ที่จะมีรองเท้าเข้าคู่กันเพียง 2 คู่

4) ในงานเลี้ยงอาหารค่ำซึ่งจัดที่นั่งตามจำนวนแขกผู้รับเชิญ และติดชื่อแขกประจำที่นั่งทุกตัว ถ้ามีแขกผู้รับเชิญ 10 คน แต่ละคนต่างเข้านั่งประจำที่ โดยไม่ได้ดูชื่อที่ติดไว้ จงคำนวณความน่าจะเป็น

4.1) ที่ทุกคนนั่งถูกที่พอดี

4.2) มีเพียง 2 คน เท่านั้นที่นั่งถูกที่

4.3) มีอย่างน้อยที่สุด 7 คนที่นั่งถูกที่ ถ้ามีคนนั่งตรงที่ของตนเองอยู่แล้วอย่างน้อยที่สุด 5 คน

5. ในงานแสดงสินค้าพื้นเมือง มีท้องถิ่นที่มาจากภาคต่าง ๆ มาออกร้านแสดงสินค้าของตน 20 แห่ง

5.1) ถ้ามีคนมาในงานนี้ 800 คน จงเขียนฟังก์ชันน่าจะเป็นและหาค่าคาดหมายของ

5.1.1) จำนวนคนที่เข้าร้านศรีพิมาย

5.1.2) จำนวนร้านที่ไม่มีคนเข้า

5.2) ถ้ามีของส่งในงานนี้ 25 กล่อง ทุกกล่องเหมือนกันหมด จงเขียนฟังก์ชันการแจกแจงและหาค่าคาดหมายของจำนวนร้านที่ไม่ได้รับของ

6. 1) จงพิสูจน์ (by induction on n)

1.1) $(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$

1.2) $(x + y)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{(k)} y^{(n-k)}$

2) จงใช้ผลจากข้อ (1) แสดงให้เห็นจริงว่า

2.1) $\sum_{j=0}^{n} j \binom{n}{j} = n\, 2^{n-1}$

2.2) $\sum_{j=0}^{n} (-1)^j j \binom{n}{j} = 0$

2.3) $\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2 = \binom{2n}{n}$

2.4) $\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{n}{j} \binom{n-j}{k-j} = 0$

2.5) $\sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} \binom{n-j}{k-j} = 2^k \binom{n}{k}$

เมื่อ n และ k เป็นเลขจำนวนเต็มบวก

7. ในจำนวนหลอดไฟ 50 หลอดมีหลอดเสีย 2 หลอด เจ้าหน้าที่ตรวจสอบได้สุ่มหลอดไฟมาตรวจ 5 หลอด แบบไม่ใส่กลับ

7.1) จงคำนวณความน่าจะเป็นที่จะได้หลอดเสียอย่างน้อยที่สุด 1 หลอด

7.2) ควรจะสุ่มหลอดไฟมาตรวจกี่หลอด จึงจะทำให้ความน่าจะเป็นที่จะมีหลอดเสียอย่างน้อยที่สุด 1 หลอดมีค่าเกิน 0.5

7.3) ถ้า X เป็นจำนวนหลอดไฟที่จะต้องนำมาตรวจจนกว่าจะพบหลอดเสีย จงหาฟังก์ชันการแจกแจงและค่าคาดหมายของ X

8. จากการสำรวจหมู่บ้านจัดสรรแพน ซึ่งมีอยู่ 100 ครอบครัว แยกออกเป็น

	มีรถยนต์	ไม่มีรถยนต์
ไม่มีทีวี	40	30
ไม่มีทีวี	16	14

8.1) เลือกพ่อบ้าน 5 คนมาเป็นคณะกรรมการหมู่บ้าน โดยวิธีสุ่มแบบไม่ใส่กลับ จงคำนวณความน่าจะเป็นที่

(1) จะได้คนที่มีทั้งทีวีและรถยนต์ 3 คน

(2) จะได้คนที่มีทีวีเพียงอย่างเดียว 2 คน

(3) จะได้คนที่มีรถยนต์เพียงอย่างเดียว อย่างน้อยที่สุด 4 คน

8.2) นายพิชัยต้องการสัมภาษณ์พ่อบ้านในหมู่บ้านนี้ โดยใช้วิธีเจอะใครก็สัมภาษณ์คนนั้น แต่จะไม่สัมภาษณ์คนซ้ำกัน และจะสัมภาษณ์พ่อบ้านที่มีทั้งรถยนต์และทีวีคนใดคนหนึ่งเพียงคนเดียวปิดท้ายรายการสัมภาษณ์ จงคำนวณความน่าจะเป็นที่

(1) จะต้องสัมภาษณ์เป็นจำนวน 5 คน

(2) จะต้องสัมภาษณ์อย่างน้อยที่สุด 5 คน

จึงจะหยุดรายการสัมภาษณ์

9. กล่องใบหนึ่งบรรจุบอลล์ n ลูก หมายเลข 1, 2, ..., n สุ่มบอลล์ m ลูกจากกล่องนี้ ให้ X เป็นบอลล์ที่มีหมายเลขสูงสุด

ก) การสุ่มแบบใส่กลับ จงพิสูจน์

ก.1) $P(X = x) \quad = \quad \dfrac{x^m - (x-1)^m}{n^m}, \; x = 1, 2, \ldots, n$

ก.2) $E(X) \quad = \quad n - \sum_{x=0}^{n-1} \dfrac{x^m}{n^m}$

ข) การสุ่มแบบไม่ใส่กลับ จงพิสูจน์ว่า

ข.1) $P(X = x) \quad = \quad \binom{x-1}{m-1} \Big/ \binom{n}{m}, \; x = m, m+1, \ldots, n$

ข.2) อาศัยผลจากข้อ ข.1 และคุณสมบัติของฟังก์ชันน่าจะเป็น จงแสดงให้เห็นว่า

$$\binom{a}{a} + \binom{a+1}{a} + \ldots + \binom{r}{a} = \binom{r+1}{a+1}$$

ข.3) $E(X) = \dfrac{m(n+1)}{m+1}$

10. สุ่มตัวอย่างจากเลขจำนวนเต็มบวก ซึ่งมีค่าไม่เกิน 20 ด้วยวิธี

ก) สุ่มแบบใส่กลับ

ก.1) ให้ X เป็นจำนวนตัวเลขที่เป็นผลคูณของ 3 ที่ได้จากการสุ่ม 4 ครั้ง

ก.1.1) จงเขียนตารางแสดงฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X

ก.1.2) อาศัยผลจากข้อ (ก.1.1) จงแสดงให้เห็นจริงว่า $E(X) = nM/N$

ก.2) ให้ X เป็นจำนวนครั้งของการสุ่มจนได้ตัวเลขที่หารด้วย 5 ลงตัว

ก.2.1) จงเขียนตารางแสดงฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X

ก.2.2) อาศัยผลจากข้อ (ก.2.1) จงแสดงให้เห็นจริงว่า $E(X) = N/M$

ก.2.3) จงหาฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ X และคำนวณค่าของมัธยฐานของ X และ $P(1 < X \leq 3 \mid X \leq 5)$

ข) สุ่มแบบไม่ใส่กลับ

ข.1) ให้ X เป็นค่าต่ำสุดถัดไปในจำนวนตัวเลขที่สุ่มมา 4 ตัว จงหาฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X

ข.2) ทำเช่นเดียวกับข้อ (ก.2) และแสดงให้เห็นจริงว่า $\lim\limits_{h \to 0} P(2 - h < X \leq 2) = \dfrac{16}{95}$

11. มีกล่อง 2 กล่อง แต่ละกล่องมีฉลาก 10 ใบ หมายเลข 1, 2, 3, ..., 10

ก) หยิบฉลากจากกล่องทั้งสองกล่องละใบ โดยไม่ให้ซ้ำกัน บันทึกค่าของผลบวกของหมายเลขบนฉลากที่สุ่มได้ ทำซ้ำวิธีการเดิมจนฉลากหมดกล่องทั้งสอง จงคำนวณความน่าจะเป็นที่

ก.1) ไม่มีฉลากคู่ใดมีผลบวกเท่ากับ 11

ก.2) ฉลากทุกคู่ที่หยิบได้ต่างมีผลบวกเท่ากับ 11

ก.3) มีฉลากอย่างน้อยที่สุด 8 คู่ที่มีผลบวกเท่ากับ 11

ข) สุ่มฉลากจากกล่องใบแรกทีละใบ โดยไม่ให้ซ้ำกัน จนกว่าจะได้ฉลากที่มีหมายเลขคู่ ให้ X เป็นจำนวนครั้งที่สุ่ม

ข.1) จงพิสจน์ว่า

$$P(X = x) = \frac{5^{(x-1)}\,5}{10^{(x)}} \quad , \; x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

ข.2) จงคำนวณค่าของ $P(X \leqslant 4)$ และ $P(X \geqslant 2 | X \leqslant 4)$

ข.3) อาศัยผลจาก (ข.1) จงพิสูจน์ว่า

$$F(x) \quad = \quad 1 - \frac{5^{(k)}}{10^{(k)}} \quad , \ k \leqslant x < k + 1, k = 0, 1, 2, \ldots, 6$$

12. พนักงานขายของหยิบตุ๊กตา 12 ตัว ซึ่งมีขนาดต่างกัน บรรจุในกล่องอย่างสุ่ม

ก) ถ้ามีกล่อง 12 กล่องแต่ละกล่องมีเบอร์บอกขนาดตุ๊กตาที่จะบรรจุติดไว้ข้างกล่อง ให้ X เป็นจำนวนที่บรรจุได้ถูกต้อง

ก.1) จงแสดงให้เห็นจริงว่า

$$P(X = x - 1) = \frac{1}{(x - 1)!} \cdot \left[x!\,P(X = x) + \frac{(-1)^{13-x}}{(13 - x)!} \right], x = 1,2,\ldots,12$$

ก.2) จงคำนวณค่าของ $F_X(10)$

ข) มีกล่องบรรจุตุ๊กตา 4 กล่อง แต่ละกล่องสามารถ บรรจุตุ๊กตาได้ทุกขนาดและมีจำนวนไม่เกิน 12 ตัว ให้ X เป็นจำนวนกล่องว่าง

ข.1) จงแสดงให้เห็นจริงว่า

$$\lim_{h \to 0} \{ P(1 - h < X \leqslant 2 + h) \} = P(\lim_{h \to 0} \{ x : 1 - h < x \leqslant 2 + h \})$$

และ $E(X) \quad = \quad 3^{12}/4^{11}$

ข.2) ถ้า $Y = 4 - X$ จงเขียนสูตรการแจกแจงของ Y

13. จงแสดงให้เห็นจริงว่า สำหรับ $j = 1, 2, \ldots, n$ ความน่าจะเป็นภายใต้เงื่อนไขของการจับคู่กันได้ในตำแหน่งที่ j กำหนดว่าเกิดการจับคู่กันได้ m คู่ จะเท่ากับ

$$n/m$$

และสำหรับ j และ k ใด ๆที่ไม่เท่ากัน $j, k = 1, .., n$ ความน่าจะเป็นภายใต้เงื่อนไขที่ไพ่ใบที่ j อยู่ในตำแหน่งที่ k กำหนดว่ามีการจับคู่กันได้ m คู่ จะเท่ากับ

$$(n - m)/n(n - 1)$$

14. ใส่บอลล์ n ลูกที่เหมือนกันในกล่อง m กล่องแบบสุ่ม

ก) จงแสดงให้เห็นจริงว่า ความน่าจะเป็นที่จะมีกล่องว่างเพียง X กล่องก็คือ

$$\frac{\binom{m}{x}\binom{n-1}{m-x-1}}{\binom{m+n-1}{n}}$$

ข) จงแสดงให้เห็นจริงว่า ความน่าจะเป็นที่จะมีกล่องว่างอย่างน้อยที่สุด k กล่อง คือ

$$\sum_{j=k}^{m} \frac{\binom{m}{j}\binom{n-1}{m-j-1}}{\binom{m+n-1}{n}}$$

ค) จงแสดงให้เห็นจริงว่า ความน่าจะเป็นที่กล่อง ๆ หนึ่งจะมีบอลล์ i ลูก คือ

$$\frac{\binom{m+n-i-2}{n-i}}{\binom{m+n-1}{n}}$$

ง) ถ้า $n = 5, m = 3$ จงคำนวณค่าของความน่าจะเป็นที่

ง.1) จะมีกล่องว่างเพียง 1 กล่อง

ง.2) จะมีกล่องว่างอย่างน้อยที่สุด 1 กล่อง

ง.3) กล่องแรกมีบอลล์เพียง 1 ลูก, เพียง 3 ลูก, เพียง 5 ลูก

จ) ถ้า $n = 8, m = 5$ จงคำนวณความน่าจะเป็นที่

จ.1) จะมีกล่องว่างเพียง 2 กล่อง

จ.2) จะมีกล่องว่างอย่างน้อยที่สุด 2 กล่อง

จ.3) กล่องที่ 4 มีบอลล์เพียง 1 ลูก, เพียง 4 ลูก, เพียง 8 ลูก

15. จงคำนวณค่าของความน่าจะเป็นที่

15.1) คน 6 คน จะมีวันเกิดใน 2 เดือนเท่านั้น

15.2) คน 12 คนจะไม่มีใครเกิดเดือนเดียวกัน

15.3) อย่างน้อย 2 คน (ในระหว่างคน 56 คน) ที่มีวันเกิดร่วมกัน (กำหนด 1 ปีมี 365 วัน)

16. ในปัญหาการสุ่มตัวอย่าง

16.1) แบบใส่กลับ หาก x_m เป็นฐานนิยมของ X จงแสดงให้เห็นจริงว่า

$$\frac{M}{N}(n+1) - 1 \leqslant x_m \leqslant \frac{M}{N}(n+1)$$

16.2) แบบไม่ใส่กลับ จงแสดงให้เห็นจริงว่า

$$p_k(N-1) < p_k(N) \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad N < \frac{nM}{k}$$

$$p_k(N-1) > p_k(N) \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad N > \frac{nM}{k}$$

ในเมื่อ $p_k(N)$ = ความน่าจะเป็นที่มีค่าสูงสุดซึ่งคำนวณได้จากประชากรขนาด N

คำตอบ

แบบฝึกหัดที่ 3-1

(1) 1.1) 10!, 9!, 7!,

1.2) $\frac{1}{10}$, $\frac{17}{90}$, $\frac{1}{720}$, $\frac{193}{720}$

1.3 $\sum_{k=2}^{10} (-1)^k/k!$, $\frac{11}{3600}$, 0, 1

(2) 2.1) $\frac{11}{30}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$, 0, $\frac{1}{120}$

2.2) 1

(3) 3.1) $\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{3}{16}$, $\frac{11}{60}$, $\frac{53}{288}$

แบบฝึกหัดที่ 3-2

(1) $\frac{1024}{3125}$; $\frac{361}{625}$; $\binom{5}{x}\frac{1}{3125}\sum_{k=0}^{5-x}(-1)^k\binom{5-x}{k}(5-x-k)^5$, x = 0, 1, 2, 3, 4 ; $\frac{12}{125}$

(3) เมื่อ $m = 5, n = 5$

$$f(x) = \frac{24}{625}, \frac{48}{125}, \frac{12}{25}, \frac{12}{125}, \frac{1}{625}$$ เมื่อ $x = 0, 1, 2, 3, 4$ ตามลำดับ

3.1) $E(X) = 0 + \frac{48}{125} + \frac{24}{25} + \frac{36}{125} + \frac{4}{625} = \frac{1024}{625}$

$(m - 1)^n/m^{n-1} = (5 - 1)^5/5^{5-1} = \frac{1024}{625}$

แสดงว่า $E(X) = (m - 1)^n/m^{n-1}$

3.3) $E(X^{(2)}) = 0 + 0 + \frac{24}{25} + \frac{72}{125} + \frac{12}{625} = \frac{972}{625}$

$m(m - 1)(m - 2)^n/m^n = 5 \cdot 4 \cdot 3^5/5^5 = \frac{972}{625}$

แสดงว่า $E(X^{(2)}) = m(m - 1)(m - 2)^n/m^n$

(4) $\frac{8}{27}, \frac{1}{27}; \frac{16}{27}, \frac{4}{3}$

(6) เมื่อ $m = 5, n = 3$

$f(x) = \frac{2}{7}, \frac{4}{7}, \frac{1}{7}$ เมื่อ $x = 2, 3, 4$ ตามลำดับ

ฐานนิยมของ X คือ 3

$E(X) = \frac{4}{7} + \frac{12}{7} + \frac{4}{7} = \frac{20}{7}$

$\frac{m \cdot (m - 1)}{m + n - 1} = \frac{5 \cdot (5 - 1)}{5 + 3 - 1} = \frac{20}{7}$

แสดงว่า $E(X) = \frac{m \cdot (m - 1)}{m + n - 1}$

(7) $\frac{1}{28}$; $F(X) = 0, x < 0$

$= \frac{3}{4}, 0 \leqslant x < 1$

$= 1, x \geqslant 1$

(8)

x	0	1	2	3	4	5
f(x)	$\frac{243}{3125}$	$\frac{162}{625}$	$\frac{216}{625}$	$\frac{144}{625}$	$\frac{48}{625}$	$\frac{32}{3125}$

$P(A/B) = 21/29$

แบบฝึกหัดที่ 3-3

(2) ก. 2.1) $\binom{3}{x}/8$, $x = 0, 1, 2, 3,$

$\frac{1}{2}, \frac{7}{8}, \frac{1}{2}$

2.2) $\binom{3}{x} \frac{3^{3-x}}{64}$, $x = 0, 1, 2, 3,$;

ข. 2.1) $\binom{3}{x} \frac{10^{(x)}\, 10^{(3-x)}}{20^{(3)}}$, $x = 0, 1, 2, 3$

$\frac{1}{2}, \frac{17}{19}, \frac{1}{2}$

2.2) $\binom{3}{x} \frac{5^{(x)}\, 15^{(3-x)}}{20^{(3)}}$, $x = 0, 1, 2, 3$

(4) 0.356, 0.6, 0.368, 3.33

(6) $\frac{40^{(3)}}{50^{(3)}}, \frac{415}{1081}, \frac{415 \cdot 40^{(3)}}{50^{(5)} - 40^{(5)}}$

(7) (7.3 ก, ข) 0.0098

(7.5) 1.01, 457.5

แบบฝึกหัดระคน

(1) $3^{10} - 2^{10}$, 3, 10! , 0 , 20! − 1 , 120

(2) 1 , 1 , $\frac{65}{119}$, $\frac{19}{30}$

(4) $\frac{1}{10!}$, $\frac{2119}{5760}$, $\frac{143}{6632}$

(7) $\frac{47}{245}$, 15 , 17

(8) 1) $\frac{354\ 40^{(3)}}{99^{(4)}}$, $\frac{87\ 70^{(3)}}{99^{(4)}}$, $\frac{432\ 16^{(4)}}{100^{(5)}}$

2) $\frac{40\ 60^{(4)}}{100^{(5)}}$, $\frac{60^{(4)}}{100^{(4)}}$

(10) ก.1)

x	0	1	2	3	4
f(x)	.2401	.4116	.2646	.0756	.0081

ก.2) $f(x) = 4^{x-1}/5^{x}$, $x = 1, 2, 3, \ldots\ldots$

ข.1) $f(x) = \frac{(x-1)(20-x)(19-x)}{30 \cdot 19 \cdot 17}$, $x = 2, 3, \ldots, 18$

ข.2) $f(x) = 4 \cdot 16^{(x-1)}/20^{(x)}$, $x = 1, 2, \ldots, 17$

(11) ก) $\sum_{k=2}^{10} \frac{(-1)^k}{k!}$, $\frac{1}{10!}$, $\frac{46}{10!}$

ข.2) $\frac{41}{42}$, $\frac{20}{41}$

(14) ง) $\frac{5}{7}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{21}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{21}$

จ) $\frac{411}{495}$, $\frac{14}{33}$, $\frac{8}{33}$, $\frac{7}{99}$, $\frac{1}{495}$

(15) $\frac{\binom{12}{2}(2^6 - 2)}{12^6}$, $\frac{12!}{12^{12}}$, $1 - \frac{365^{(56)}}{365^{56}}$