บทที่ 2
ตัวแปรเชิงสุ่ม
Random Variable

วัตถุประสงค์ การศึกษาถึงตัวแปรเชิงสุ่มมุ่งอยู่ที่การวัดหรือ การนับปริมาณเชิงสุ่ม ในสถานการณ์ก่อนที่จะทำการวัดหรือการนับแล้วเสร็จ แต่เราพอคาดคะเนผลลัพธ์ (ซึ่งเป็นตัวเลข) ที่เป็นไปได้แต่ละค่าว่ามีโอกาสเกิดขึ้นด้วยความน่าจะเป็นเท่าใด และต้องการศึกษาเกี่ยวกับสมบัติทางความน่าจะเป็นของตัวแปรเชิงสุ่ม โดยการสร้างฟังก์ชันน่าจะเป็นของตัวแปรเชิงสุ่ม เพื่อแสดงการแจกแจงของตัวแปรเชิงสุ่มนั้น และเพื่ออธิบายวิธีการคำนวณความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่เกี่ยวข้อง โดยอาศัยฟังก์ชันที่แสดงถึงการแจกแจงของตัวแปรเชิงสุ่มนั้น ตลอดจนศึกษาถึงความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชัน (ทางคณิตศาสตร์) ของตัวแปรเชิงสุ่มต่าง ๆ

2.1 ตัวแปรเชิงสุ่มและชนิดของตัวแปรเชิงสุ่ม

หากเราพิจารณากลุ่มผลทดลองของการทดลองเชิงสุ่มใด ๆ จะเห็นว่าผลที่ได้อาจเป็นตัวเลข เช่น การนับจำนวนลูกค้าที่มาใช้บริการในธนาคารระหว่าง 9-10 โมง การวัดจำนวนเชื้อเพลิงที่ใช้ในโรงงานแต่ละวัน การบันทึกเวลาที่ใช้ในการรอคอยรถเมล์ที่ป้ายรถ เป็นต้น นอกจากนี้ผลลัพธ์ที่ได้จากการทดลองเชิงสุ่มอาจไม่เป็นตัวเลขก็ได้ เช่น ผลลัพธ์ของการทดลองโยนเหรียญ ผลลัพธ์จากการทดลองสุ่มบอลล์ n ลูกลงในกล่อง m กล่องเป็นต้น การที่เราจะบรรยายลักษณะของผลลัพธ์ที่ได้จากการทดลองหนึ่ง ๆ ในบางครั้งเป็นเรื่องที่ยุ่งยากสลับซับซ้อน และบางครั้งก็เป็นเรื่องที่น่าเบื่อหน่าย หรือเป็นเรื่องสุดวิสัยที่จะบอกรายละเอียดของผลลัพธ์ในการทดลองได้ และโดยทั่ว ๆ ไปแล้ว เรามักจะไม่สนใจรายละเอียดที่เกี่ยวกับผลลัพธ์แต่ละตัว แท้ที่จริงแล้วเราสนใจตัวเลขที่มาจากการนับหรือการวัด เช่น ในการโยนเหรียญ 3 ครั้ง ซึ่งมีผลลัพธ์ที่อาจเกิดขึ้นได้จำนวน 8 เราไม่ได้สนใจว่าผลลัพธ์นี้จะเป็นอย่างไรบ้าง เราสนใจแต่เพียงว่าจะมีจำนวนหัวที่เกิดขึ้นจากการทดลองนี้เท่าใดบ้าง หรือในการทดลองสุ่มบอลล์ 100 ลูก ลงในกล่อง 10 กล่อง เราต้องการนับจำนวนกล่องว่างว่าควรจะมีค่าเท่าใดบ้าง และในการดึงไพ่ 5 ใบจากสำรับที่มีไพ่ 52 ใบ เราไม่ได้สนใจว่าผลลัพธ์ควรจะเป็นอย่างไร เราสนใจการนับจำนวนไพ่บางประเภทหรืออื่น ๆ นั่นคือเราสนใจตัวเลขที่ได้จากการนับจำนวนผลลัพธ์ หรือผลทดลองของเหตุการณ์ในกลุ่มผลทดลองเท่านั้น

เพื่อความสะดวกเราจึงกำหนดค่าตัวเลขให้แก่สมาชิกของกลุ่มผลทดลอง S กฎเกณฑ์หรือกติกาที่จะกำหนดตัวเลขแก่สมาชิกของ S เราแทนด้วย X และเรียก X ว่าตัวแปรเชิงสุ่ม (random variable) X จะเป็นสัญลักษณ์หนึ่งซึ่งแปรไป ขึ้นอยู่กับว่าผลลัพธ์ของการนับหรือการจัดเชิงสุ่มจะเป็นอย่างไร และค่าของผลลัพธ์ที่ได้จะออกมาเป็นตัวเลขค่าจริงด้วยความน่าจะเป็นอันหนึ่ง นั่นคือ ถ้าในการโยนลูกเต๋า ปรากฏว่า ออกหมายเลข 5 และความน่าจะเป็นของเหตุการณ์นี้คือ $\frac{1}{5}$ แล้ว เรากล่าวได้ว่า $P(X = 5)$ ด้วยความน่าจะเป็น $\frac{1}{6}$ และ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม เท่ากับว่าเรากำหนดตัวแปรเชิงสุ่มมีค่าเป็นตัวเลขค่าใดค่าหนึ่ง โดยเฉพาะเป็นเหตุการณ์ซึ่งเรารู้ค่าความน่าจะเป็นของเหตุการณ์นี้ การที่จะทำเช่นนี้ได้ก็โดยการนิยามตัวแปรเชิงสุ่มเป็นฟังก์ชันของผลลัพธ์ในตัวแบบน่าจะเป็น นั่นคือ ถ้า X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มแล้ว สำหรับทุก ๆ ค่าจริงของ X ที่เรารู้ค่าความน่าจะเป็นของ $\{X = x\}$ เราให้ความหมายของ $\{X = x\}$ เป็นเซทของผลลัพธ์ s ที่อยู่ใน S โดยที่ $X(s) = x$ นั่นคือ

$$\{X = x\} = \{s : X(s) = x\}$$

เราสามารถนิยามความน่าจะเป็นของ

$$\{s : X(s) = x\}$$

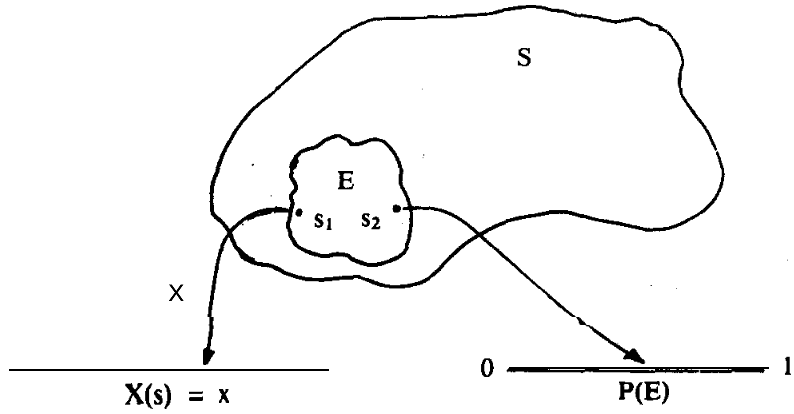
และเขียนแทนด้วยสัญญลักษณ์ $P(X = x)$ ดังนั้น

$$P(X = x) = P(s : X(s) = x)$$

ทำนองเดียวกัน เราแทนความน่าจะเป็นที่ X จะออกผลลัพธ์อยู่ในพิสัย (a, b) ด้วย $P(a < X < b)$ ดังนั้น

$$P(a < X < b) = P(\{s : a < X(s) < b\})$$

หรือแสดงให้เห็นได้โดยภาพดังนี้



เราให้นิยามของตัวแปรเชิงสุ่มดังนี้

นิยาม ตัวแปรเชิงสุ่ม X เป็นฟังก์ชันค่าจริง ซึ่งนิยามในโดเมนที่เป็นตัวแบบน่าจะเป็น (S, P) โดยการกำหนดตัวเลขค่าจริงให้แก่แต่ละผลทดลอง (sample point) ซึ่งเรียกว่าค่าของตัวแปรเชิงสุ่มนั่นคือ มีพิสัย (range) เป็นตัวเลขจำนวนจริง

ตัวอย่างที่ 2-1.1 ในจำนวนนักศึกษาที่เรียนสถิติ 311 80 คน มีอยู่ 2 คนที่เป็นนักศึกษาคณะเศรษฐศาสตร์ ในการเลือกนักศึกษามาเป็นตัวแทนกลุ่ม 3 คน อย่างสุ่ม กำหนดตัวแปรเชิงสุ่ม-X เป็นจำนวนนักศึกษาเศรษฐศาสตร์ที่ได้รับการคัดเลือก

ดังนั้น

X(s)	=	0	ถ้า s = ไม่มีนักศึกษาเศรษฐศาสตร์
	=	1	ถ้า s = มีนักศึกษาเศรษฐศาสตร์ 1 คน
	=	2	ถ้า s = มีนักศึกษาเศรษฐศาสตร์ 2 คน

ตัวอย่างที่ 2-1.2 ดึงไพ่ 1 ใบจากสำรับไพ่ กำหนดผลลัพธ์ s เป็นไพ่ 1 ใน 52 ใบนี้ กำหนดตัวแปรเชิงสุ่ม X ดังนี้

X(s)	=	4	ถ้า s เป็น A (Ace)
	=	3	ถ้า s เป็น K (King)
	=	2	ถ้า s เป็น Q (Queen)
	=	1	ถ้า s เป็น J (Jack)
	=	0	อื่น ๆ

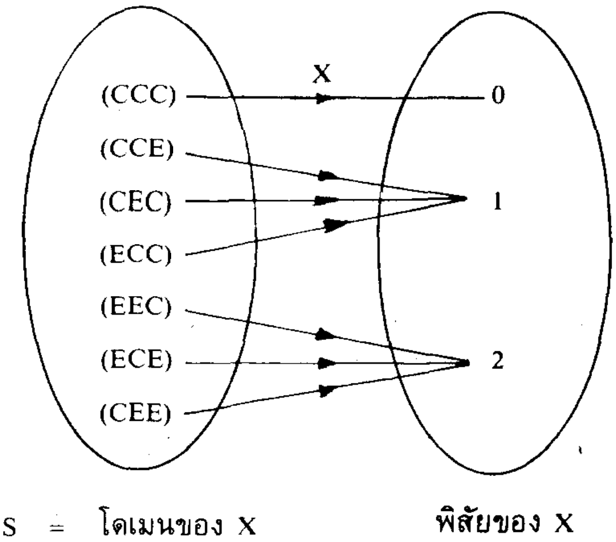
ข้อสังเกตุ

1. เราใช้อักษรตัวใหญ่ เช่น X, Y, Z แทนตัวแปรเชิงสุ่มและใช้อักษรตัวเล็ก เช่น x, y, z แทนค่าของตัวแปรเชิงสุ่ม

2. ตัวแปรเชิงสุ่ม X เป็นฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์ประเภทหนึ่ง แต่มีลักษณะแตกต่างจากฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญคือ

2.1 โดเมนของ X เป็นกลุ่มผลทดลอง S ซึ่งเป็นชุดของผลลัพธ์จากการทดลองเชิงสุ่มและไม่จำเป็นต้องเป็นตัวเลข แต่พิสัยของ X เป็นตัวเลข ซึ่งในภาษาคณิตศาสตร์กล่าวว่า X เป็นกติกาที่ทอดภาพ (map) จากจุดใน S ไปสู่จุด (เลขจำนวนจริง) ในพิสัย

ในตัวอย่างที่ 2-1.1 X จะทอดภาพจุดจาก S ไปสู่จุดในพิสัยของ X ดังนี้



เมื่อ C เป็นนักศึกษาคณะวิทยาศาสตร์

E เป็นนักศึกษาคณะเศรษฐศาสตร์

2.2 ตัวแปรอิสระของฟังก์ชัน X คือผลลัพธ์แต่ละตัว (จุดแต่ละจุด) ใน S จะถูกกำหนดออกมาโดยวิธีสุ่ม แต่รู้ว่าจะเกิดขึ้นด้วยความน่าจะเป็นเท่าใด ส่วนตัวแปรอิสระของฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์ทั่ว ๆ ไป ไม่ได้ทำโดยวิธีสุ่ม

2.3 ในการศึกษาเกี่ยวกับฟังก์ชัน X เราสนใจที่จะหาความน่าจะเป็นที่ X จะมีผลลัพธ์เป็นค่าใดค่าหนึ่ง ส่วนในฟังก์ชันธรรมดาเราสนใจแต่เพียงว่าฟังก์ชันจะมีค่าเท่าไร สำหรับแต่ละค่าในโดเมนที่กำหนดให้เท่านั้น

ในตัวอย่างที่ 2-1.2 X จะเป็นตัวแปรเชิงสุ่มและความน่าจะเป็นของ X จะเป็นดังนี้

$$P(X = 4) = \frac{1}{13}$$

$$P(X = 3) = \frac{1}{13}$$

$$P(X = 2) = \frac{1}{13}$$

$$P(X = 1) = \frac{1}{13}$$

$$P(X = 0) = \frac{9}{13}$$

เราทราบแล้วว่าผลลัพธ์ที่จะเป็นไปได้ทั้งหมดของตัวแปรเชิงสุ่ม X **รวมกันเข้าเป็นชุดของตัวเลข** เรียกว่า พิสัยของ X บางครั้งก็เรียกว่า space ของ X **หากในชุดนี้มีจำนวนตัวเลข** (ซึ่งอาจเป็นตัวเลขตัวเต็มหรือไม่เป็นเลขตัวเต็ม) มากที่สุด เป็นจำนวนที่นับได้ **เราเรียกตัวแปรเชิงสุ่ม-X** ประเภทนี้ว่า **ตัวแปรเชิงสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง** (discrete random variable) **ตัวแปรเชิงสุ่มประเภทนี้**มักจะเกิดจากการนับเชิงสุ่ม (random counting) ตัวอย่างเช่น

1. การนับจำนวนผลิตภัณฑ์คุณภาพต่ำกว่ามาตรฐาน จากการ**สุ่มผลิตภัณฑ์**ของขบวนการผลิตหนึ่งมา 4 ชิ้น กำหนด X เป็นจำนวนผลิตภัณฑ์คุณภาพต่ำกว่า**มาตรฐาน พิสัยของ X** ก็คือ

$$\{ x : x = 0, 1, 2, 3, 4 \}$$

2. **การนับจำนวนคนไข้ที่เสียชีวิตในโรงพยาบาลหนึ่งใน 1 วัน ถ้า X เป็นจำนวนคนไข้ที่เสียชีวิตใน 1 วัน พิสัยของ X ก็คือ**

$$\{ x : x = 0, 1, 2, \ldots \}$$

3. **นักกรีฑา 5 คน มีน้ำหนัก** (กิโลกรัม) ดังนี้

55.7, 57.4, 58.5, 60.2, 62.3

นักกรีฑาทั้ง 5 คนมีความสามารถเท่าเทียมกัน ในการคัดเลือกมาเป็นตัวแทน 1 คน จึงใช้วิธีจับฉลาก กำหนด X **เป็นน้ำหนักของนักกรีฑาที่ได้รับการคัดเลือก** พิสัยของ X คือ

$$\{ x : x = 55.7, 57.4, 58.5, 60.2, 62.3 \}$$

เป็นต้น

มีบางกรณีที่ชุดของตัวเลขที่เป็นพิสัยของ X มีจำนวนตัวเลขมากเป็นอนันต์จนนับไม่ได้- (uncountably infinite) **หรือ** space **ของ X เป็นแบบต่อเนื่อง** เราเรียกตัวแปรเชิงสุ่มว่า **ตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่อง** (continuous random variable) **ตัวแปรเชิงสุ่มชนิดนี้**ส่วนมากเกิดจากการวัดเชิงสุ่ม **ตัวอย่างเช่น**

1. X เป็นคะแนนการสอบวิชาสถิติ 311 ของนักศึกษาในภาคเรียนหนึ่ง X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่องที่มีพิสัยของ X ดังนี้

$$\{ x : 0 < x < 89 \}$$

2. เงินฝากของสมาชิกสหกรณ์แห่งหนึ่งเป็นตัวแปรเชิงสุ่ม X ที่มีค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดดังนี้

$\{ x : -5{,}000 < x < 10{,}000 \}$

(ค่าลบหมายความว่าเป็นหนี้)

ดังนั้น X จึงเป็นตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่อง เป็นต้น

ในการศึกษาเกี่ยวกับเรื่องของตัวแปรเชิงสุ่ม X เราต้องการคำนวณหาความน่าจะเป็นที่ X ออกผลลัพธ์เป็นค่าใดค่าหนึ่ง $P(X = x)$ หรือความน่าจะเป็นที่ X จะออกผลลัพธ์อยู่ในพิสัยหนึ่ง ๆ เช่น พิสัย (a, b), $P(a < X < b)$, นั่นคือ ความสนใจมุ่งอยู่ที่ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ E ซึ่งเป็นเซทของพิสัยของ X

กำหนด X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มซึ่งนิยามในกลุ่มผลทดลอง S และ R เป็นพิสัยของ X หาก E เป็นซับเซทของ R เราคำนวณความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ E ซึ่งเราแทนด้วยสัญญลักษณ์ $P(X \in E)$ ได้ด้วยวิธีการเดียวกันกับการคำนวณความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A นั่นคือ เรามี E เป็นซับเซทของพิสัยของ X, R, และ A เป็นซับเซทของกลุ่มผลทดลอง S ซึ่งมีสมบัติว่า

$$A = \{ s : s \in S \text{ และ } X(s) \in E \}$$

ดังนั้น สมาชิกของ A เป็นผลลัพธ์ของ S ซึ่งเป็นค่าของตัวแปรเชิงสุ่ม X และค่าเหล่านี้เป็นสมาชิกของ E อันเป็นผลให้

$$P(X \in E) = P(A) = P(\{ s : s \in S \text{ และ } X(s) \in E \})$$

เราจึงกล่าวได้ว่า $P(X \in E)$ ก็คือการกำหนดความน่าจะเป็นให้แก่เซท E ซึ่งเป็นซับเซทของ R (พิสัยของ X) ค่าที่ได้จะถูกกำหนดโดยใช้เซทฟังก์ชันน่าจะเป็น P และตัวแปรเชิงสุ่ม X และมักจะแทนด้วยสัญญลักษณ์ $P_X(E)$ นั่นคือ

$$P(X \in E) = P_X(E) = P(A)$$

ในเมื่อ $A = \{ s : s \in S \text{ และ } X(s) \in E \}$

ดังนั้น ตัวแปรเชิงสุ่ม X เป็นฟังก์ชันซึ่งทอดภาพความน่าจะเป็นจากกลุ่มผลทดลอง S ไปสู่พิสัยของ X เราเรียกความน่าจะเป็นที่ได้นี้ว่า induced probability

ฟังก์ชัน $P_X(E)$ ซึ่งเรานิยมเขียนสั้น ๆ ว่า $P(E)$ จะมีคุณสมบัติเช่นเดียวกับคุณสมบัติของเซทฟังก์ชันน่าจะเป็น กล่าวคือ

1. $P(E) = P(A) > 0$
2. $P(R) = P(S) = 1$

เมื่อ $S = \{ s : s \in S \text{ และ } X(s) \in R \}$

3. $P(E_1 \cup E_2) = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) = P(E_1) + P(E_2)$

ในเมื่อ $A_1 \cup A_2 = \{ s : s \in S$ **และ** $X(s) = E_1 \} \cup \{ s : s \in S$ **และ** $X(s) = E_2 \}$

และ $A_1 \cap A_2 = \phi$ **ดังนั้น** $E_1 \cap E_2 = \phi$ ด้วย

นั่นคือ P(E) **เป็นเซทฟังก์ชันน่าจะเป็นด้วย**

เหตุการณ์ E อาจจะเป็นค่าใดค่าหนึ่งของ X หรืออาจเป็นค่าของ X ที่อยู่ในพิสัย (a, b) **ก็ได้** โดยทั่วไปเรานิยามความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ E ดังนี้

$$P(E) = P(X = x)$$

ถ้า $E = \{ s : X(s) = x \}$

$$P(E) = P(a < X < b)$$

ถ้า $E = \{ s : X(s) \in (a, b) \}$

$$P(E) = P(a < X \leqslant b)$$

ถ้า $E = \{ X : X(s) \in (a, b] \}$

$$P(E) = P(a \leqslant X \leqslant b)$$

ถ้า $E = \{ s : X(s) \in [a, b] \}$

ตัวอย่างที่ 2-1.3 กำหนดพิสัยของตัวแปรเชิงสุ่ม X เป็น $R = \{ x : 0 < x < 1 \}$

$$E_1 = \{ x : 0 < x < \frac{1}{2} \}, E_2 = \{ x : \frac{1}{2} \leqslant x < 1 \}$$

จงหาค่า $P(E_2)$ ถ้า $P(E_1) = \frac{1}{4}$

วิธีทำ $E_1 \cup E_2 = R$ และ $E_1 \cap E_2 = \phi$

ดังนั้น $P(E_1 \cup E_2) = P(R)$

$$\Rightarrow P(E_1) + P(E_2) = 1$$

$$\frac{1}{4} + P(E_2) = 1$$

$$P(E_2) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 2-1.4 เลือกจุดอย่างสุ่มจากกลุ่มผลทดลอง $S = \{ s : 0 < s < 10 \}$ กำหนด A เป็น **ซับเซทของ** S และกำหนดเซทฟังก์ชันน่าจะเป็น คือ $P(A) = \int_A \frac{1}{10} \, d\alpha$ นิยามตัวแปรเชิงสุ่ม X **ดังนี้**

$X = X(s) = 2S - 10$

จงหาเซทฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X และ P(E) ในเมื่อ $E = \{x : -1 < x < 2\}$

วิธีทำ

เนื่องจาก $x = X(s) = 2s - 10$

และ $S = \{s : 0 < s < 10\}$

ดังนั้น $R = \{x : -10 < x < 10\}$ = พิสัยของ X

กำหนด $E = \{x : -10 < x < b\}$ เป็นซับเซทของ R

ในเมื่อ $-10 < b < 10$

ถ้า A เป็นซับเซทของ S แล้ว

$$A = \{s : 0 < s < \tfrac{1}{2}(b + 10) \text{ และ } -10 < X(s) < b\}$$

ดังนั้น

$$P_X(E) = P(E) = P(A) = \int_0^{\frac{1}{2}(b+10)} \frac{1}{iii}\, da$$

เมื่อ $x = 2a - 10$,. $dx = 2da$ เราจะได้

$$P(E) = \int_{-10}^{b} \frac{1}{20}\, dx = \int_E \frac{1}{20}\, dx$$

ดังนั้นเซทฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X ก็คือ

$$P(E) = \int_E \frac{1}{20}\, dx$$

เมื่อ E เป็นซับเซทของ $R = \{x : -10 < x c 10\}$

ตอบ

ถ้า $E = \{-1 < x < 2\}$ แล้ว

$$P(E) = \int_{-1}^{2} \frac{1}{20}\, dx = \frac{1}{20}(2 + 1) = \frac{3}{20}$$

ตอบ

แบบฝึกหัด 2-1

1. จงพิจารณาตัวแปรเชิงสุ่ม X ต่อไปนี้ว่าเป็นตัวแปรเชิงสุ่มชนิดใด
   1.1 จำนวนอุบัติเหตุที่เกิดขึ้นในโรงงานแห่งหนึ่งใน 1 วัน
   1.2 เวลาที่ใช้เดินทางจากบ้านจนถึงมหาวิทยาลัย
   1.3 จำนวนบัณฑิตที่จบในภาคการศึกษาหนึ่ง
   1.4 อัตราความเร็วของโมเลกุลของแก๊ส
   1.5 ภาษีเงินได้ที่ประชาชนคนหนึ่งต้องเสียในปีหนึ่ง
   1.6 ปริมาณน้ำฝนที่ตกใน 1 วัน ในเดือนตุลาคม
   1.7 จำนวนบ้านที่มีทั้งโทรทัศน์และรถยนต์ในหมู่บ้านหนึ่ง
   1.8 อายุการใช้งานของหลอดไฟ

2. จงหาค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดของตัวแปรเชิงสุ่ม X (พิสัยของ X) ต่อไปนี้
   2.1 X เป็นผลต่างระหว่างจำนวนหัวและก้อยที่ได้จากการโยนเหรียญ 3 ครั้ง
   2.2 X เป็นจำนวนบอลล์สีขาวที่ได้จากการสุ่มบอลล์ 3 ลูก โดยไม่ซ้ำกันจากกล่องที่มีบอลล์สีขาว 4 ลูก และสีแดง 6 ลูก
   2.3 X เป็นจำนวนกล่องว่างเมื่อสุ่มบอลล์ 10 ลูกลงในกล่อง 7 กล่อง
   2.4 X เป็นอายุ (เดือน) ใช้งานของแบตเตอรี่ ซึ่งมีอายุใช้งานไม่เกิน 12 เดือน
   2.5 X เป็นรายได้ของพนักงานคนหนึ่งในสำนักงาน ซึ่งรายได้ของพนักงานจะอยู่ระหว่าง 900 ถึง 12,000 บาท

3. X เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม ซึ่งมีพิสัยของ X เป็น $R = \{x : |x| \leq 10\}$ และ $P(E_1) = \frac{2}{7}$ ในเมื่อ $E_1 = \{x : 0 < x < 5\}$
   3.1 จงพิสูจน์ว่า $P(E_2) < \frac{5}{7}$ ในเมื่อ $E_2 = \{x : 5 \leq x \leq 10\}$
   3.2 ถ้า $P(E_3) = \frac{1}{7}$ ในเมื่อ $E_3 = \{x : -10 \leq x \leq 0\}$
   จงหาค่าของ $P(E_3')$, $P(E_1 \cup E_3)$, $P(E_1' \cap E_3')$

4. สุ่มเลข 2 ตัว โดยไม่ซ้ำกัน จากเลขจำนวนเต็มบวกที่มีค่าไม่เกิน 5 กำหนดตัวแปรเชิงสุ่ม X ดังนี้

$X(s) = 1$ ถ้า s เป็นเลขที่มีค่าน้อยกว่า 30

$X(s) = 2$ ถ้า s เป็นเลขคู่ที่มีค่ามากกว่า 30

และ $X(s) = 3$ อื่น ๆ

สมมติว่า P(E) กำหนดความน่าจะเป็น $\frac{1}{20}$ ให้แก่ผลลัพธ์ s แต่ละตัว จงหาเซทฟังก์ชัน-น่าจะเป็นของ X และจงหาค่าของ P(E) เมื่อ E เป็นเซทของค่าใดค่าหนึ่งในพิสัย R

$R = \{ x : x = 1, 2, 3 \}$

5. กำหนดเซทฟังก์ชันน่าจะเป็นของตัวแปรเชิงสุ่ม X ดังนี้

$$P(E) = \int_E \frac{3x^2}{8} dx, x \in R = \{ x : 0 < x < 2 \}$$

ถ้า $E_1 = \{ x : 0 < x < \frac{1}{2} \}$ และ $E_2 = \{ x : 1 < x < 2 \}$ ต่างเป็นซับเซทของ R จงคำนวณค่าของ $P(E_1)$, $P(E_2)$, $P(E_1 \cup E_2)$, $P(E_1' \cap E_2')$

2-2 ฟังก์ชันมวลน่าจะเป็น (PROBABILITY MASS FUNCTION)

ในการศึกษาเกี่ยวกับสมบัติทางความน่าจะเป็นของตัวแปรเชิงสุ่มไม่ต่อเนื่อง X ความสนใจจะมุ่งอยู่ที่การคำนวณค่าความน่าจะเป็นที่ X ออกผลลัพธ์เป็นค่าใดค่าหนึ่ง นั่นคือ การหาค่าของ $P(X = x)$ สำหรับทุก ๆ ค่า x ที่อยู่ในพิสัย R ของ X เพื่อแสดงให้เห็นถึงการแจกแจงของตัวแปรเชิงสุ่ม X และมักจะเขียนเป็นสูตรของการแจกแจง ซึ่งเป็นฟังก์ชันของค่า x และใช้สัญลักษณ์แทนด้วย f(x), g(x) หรือ p(x) เป็นต้น เราเรียกฟังก์ชันเช่นนี้ว่า ฟังก์ชันมวลน่าจะเป็น (probability mass function) ของ X หรือฟังก์ชันความถี่ (frequency function) หรือฟังก์ชันน่าจะเป็น (probability function) ของ X ทั่วไปจะเขียนสั้น ๆ ว่า p.f. ของ X (หรือ p.d.f. ของ X) และให้นิยามของฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X, f(x), ดังนี้

นิยาม ฟังก์ชัน f(x) ซึ่งนิยามสำหรับค่า x แต่ละค่าในพิสัย R ของตัวแปรเชิงสุ่มไม่ต่อเนื่อง X และ $f(x) = P(X = x)$ สำหรับทุก ๆ ค่า x ที่อยู่ในพิสัย R จะเป็นฟังก์ชันมวลน่าจะเป็นของ X (หรือ p.f. ของ X) ถ้า f(x) เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่มีสมบัติดังนี้

1. $f(x) \geq 0, x \in R$
2. $\sum_{x \in R} f(x) = 1$

การคำนวณความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ E หาได้จาก

$$P(X \in E) = \sum_{x \in E} f(x)$$

ฟังก์ชันมวลน่าจะเป็นของ X อาจจะนำเสนอในลักษณะของสูตรทางคณิตศาสตร์ หรือนำเสนอในลักษณะตารางแสดงค่า f(x) สำหรับแต่ละค่าของ x ก็ได้

ตัวอย่างที่ 2-2.1 สุ่มตัวเลข 1 ตัวจากเลขจำนวนเต็มบวกที่มีค่าไม่เกิน 10 กำหนดตัวแปรเชิงสุ่ม X ดังนี้

$X(s) = 0$ ถ้า s เป็นหมายเลข 1
$= 1$ ถ้า s เป็นหมายเลขที่ 5 หารลงตัว
$= 2$ ถ้า s เป็นหมายเลขที่เป็นผลคูณของ 3
$= 3$ อื่น ๆ

จงหาฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X

วิธีทำ สุ่มตัวเลข 1 ตัวจากเลขจำนวนเต็มบวกที่มีค่าไม่เกิน 10 ความน่าจะเป็นที่จะกำหนดให้แก่ผลลัพธ์แต่ละตัวจะเท่ากับ $\frac{1}{10}$ เราคำนวณความน่าจะเป็นที่ X ออกผลลัพธ์เป็นค่าใดค่าหนึ่ง-

$$P(X = 0) = P(\{ s : s = 1 \}) = \frac{1}{10}$$

$$P(X = 1) = P(\{ s : s = 5, 10 \}) = \frac{2}{10}$$

$$P(X = 2) = P(\{ s : s = 3, 6, 9 \}) = \frac{3}{10}$$

$$P(X = 3) = P(\{ s : s = 2, 4, 7, 8 \}) = \frac{4}{10}$$

กำหนด f(x) เป็นฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X
เราเขียนสูตรแสดงการแจกแจงของ X ได้ดังนี้

$$f(x) = \frac{x+1}{10}, \; x = 0, 1, 2, 3$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

หรือ อาจจะแสดงในรูปของตารางได้ดังนี้

x	0	1	2	3
f(x)	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$

ตัวอย่างที่ 2-2 2 X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มไม่ต่อเนื่องที่มีฟังก์ชันน่าจะเป็น f(x) กำหนดไว้ดังนี้

$$f(x) = k(x^2 + 1), \quad x = -2, -1, 0, 1, 2$$
$$= 0 \text{ อื่น ๆ}$$

จงหาค่าของ k, $P(X = 0)$, $P(\frac{1}{2} < X \leqslant \frac{5}{2})$ และ $P(|x| \leqslant 1)$

วิธีทำ f(x) เป็นฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X ดังนั้น

$$\sum_{x=-2}^{2} f(x) = 1$$

$$f(-2) + f(-1) + f(0) + f(1) + f(2) = 1$$

$$5k + 2k + k + 2k + 5k = 1$$

$$15k = 1$$

$$\Rightarrow \quad k = \frac{1}{15}$$

$$P(X = 0) = \frac{1}{15}(0 + 1) = \frac{1}{15}$$

$$P(\frac{1}{2} < x \leqslant \frac{5}{2}) = f(1) + f(2) = \frac{2}{15} + \frac{5}{15} = \frac{7}{15}$$

$$P(|x| \leqslant 1) = P(-1 \leqslant x \leqslant 1) = f(-1) + f(0) + f(1)$$

$$= \frac{2}{15} + \frac{1}{15} + \frac{2}{15} = \frac{1}{3}$$

แบบฝึกหัดที่ 2-2

1. **จงหาค่าของ** k **ที่ทำให้ฟังก์ชัน** $f(x)$ **ต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันน่าจะเป็นของตัวแปรเชิงสุ่ม-** X

1.1 $f(x) = k \quad , \quad x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$

$\quad\quad\quad = 0$ อื่น ๆ

1.2 $f(x) = k(|x| + 1)^2 \quad , \quad x = -1, 0, 1$

$\quad\quad\quad = 0$ อื่น ๆ

1.3 $f(x) = k\left(\frac{2}{3}\right)^x \quad , \quad x = 1, 2, 3, \ldots$

$\quad\quad\quad = 0$ อื่น ๆ

1.4 $f(x) = \frac{2}{27} \quad , \quad x = 1$

$\quad\quad\quad = \frac{x^2 - 1}{27} \quad , \quad x = k, 2k, k > 0$

$\quad\quad\quad = \frac{7}{27} \quad , \quad x = 5$

$\quad\quad\quad = 0$ อื่น ๆ

2. ถ้า

$f(x) = \frac{1}{6} \quad , \quad x = 0.3k, k = 0, 1$

$\quad\quad = \frac{1}{9} \quad , \quad x = 0.3k, k = 2, 3, 5$

$\quad\quad = \frac{1}{15} \quad , \quad x = 0.3k, k = 4.6, 7, 8, 9$

$\quad\quad = 0$ อื่น ๆ

เป็นฟังก์ชันน่าจะเป็นของตัวแปรเชิงสุ่ม X **จงคำนวณค่าของ** $P(E_1)$, $P(E_2)$, $P(E_1 \cap E_2)$ **ถ้า** $E_1 = \{x : 0 \leqslant x \leqslant 2\}$ **และ** $E_2 = \{x : 1 \leqslant x < 6\}$

3. X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มไม่ต่อเนื่อง ซึ่งมีพิสัยของ X เป็น $R = \{x : x = 0, 1, 2, 3, 4\}$ ถ้า $P(1.5 < x < 3.5) = .55$, $P(X \leqslant 1.2) = .25$, $P(X = 2) = 2P(X = 1)$ และ $P(0.7 < x \leqslant 2) = .45$

จงหาฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X และคำนวณค่าของ

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} P(2 - h < X \leq 3 + h)$$

2-3 **ฟังก์ชันหนาแน่นน่าจะเป็น** (PROBABILITY DENSITY FUNCTION)

กรณีที่ X **เป็นตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่อง ค่าที่เป็นไปได้ของ** X **เป็นจำนวนตัวเลขมากเป็นอนันต์ จนนับไม่ได้ หรือพิสัยของ** X **เป็นค่าใด ๆ ที่อยู่ในพิสัยของตัวเลขที่ต่อเนื่องกัน การศึกษาเกี่ยวกับความน่าจะเป็นของตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่อง** X **มุ่งสนใจอยู่ที่ความน่าจะเป็นที่** X **จะออกผลลัพธ์ในพิสัยหนึ่ง ๆ เช่น พิสัย** (a, b) **ซึ่งเป็นซับเซทของพิสัย** R **ของ** X **การบรรยายสมบัติความน่าจะเป็นของ** X **ทำได้โดยการสร้างฟังก์ชัน** $f(x)$ **ที่ทำให้**

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

เป็นความน่าจะเป็น $P(a < X < b)$

ถ้าช่วงระหว่าง a และ b มีค่าน้อยมาก กล่าวคือ $b - a$ มีค่าเข้าใกล้ 0 ถือว่า $f(x)$ จะมีค่าเข้าใกล้ฟังก์ชันบางประเภท ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่มีค่าเป็นบวกเสมอ ถ้าเราเขียนกราฟของฟังก์ชันนี้ พื้นที่ทั้งหมดภายใต้กราฟบนแกน X จะมีค่าเป็น 1 นอกจากนี้ความน่าจะเป็น $P(a < X < b)$ จะเป็นพื้นที่ภายใต้กราฟของฟังก์ชันบนแกน X ระหว่างจุด a กับจุด b เราเรียกฟังก์ชันเช่นนี้ว่า ฟังก์ชันหนาแน่นน่าจะเป็น (probability density function) ของ X เรียกย่อ ๆ ว่า p.d.f. ของ X หรือฟังก์ชันความหนาแน่น (density function) ของ X และให้นิยามของฟังก์ชันไว้ดังนี้

นิยาม X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่องที่มีพิสัยของ X เป็นเซทของจุดที่ต่อเนื่อง R ฟังก์ชัน $f(x)$ ของ X ซึ่งกำหนดไว้ว่า $f(x)dx = P(x < X \leq x + dx)$

จะเป็นฟังก์ชันหนาแน่นน่าจะเป็น (p.d.f.) ของ X ถ้า $f(x)$ มีคุณสมบัติดังนี้

1. $f(x) \geq 0,\ x \in R$
2. $\int_R f(x)dx = 1$

อาศัยนิยามนี้ เราสามารถคำนวณความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ E ซึ่งเป็นซับเซท ของ R ได้ดังนี้

$$P(X \in E) = \int_E f(x)dx$$

ตัวอย่างที่ 2-3.1 f เป็นฟังก์ชันซึ่งกำหนดไว้ดังนี้

$$f(x) = \frac{3}{4}(2x - x^2), \quad 0 \leqslant x \leqslant 2$$
$$= 0 \text{ อื่น ๆ}$$

จงแสดงให้เห็นจริงว่า f เป็นฟังก์ชันหนาแน่นน่าจะเป็นของตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่อง X

วิธีทำ

พิจารณา $2x - x^2$ จะเห็นว่ามีค่าเป็นบวกทุกค่า $x, 0 \leqslant x \leqslant 2$

แสดงว่า $f(x) \geqslant 0$ ทุก ๆ ค่า $x \in \{x : 0 \leqslant x \leqslant 2\}$ ... คุณสมบัติข้อ (1)

พิจารณาค่าของ

$$\int_0^2 \frac{3}{4}(2x - x^2)\,dx = \frac{3}{4}\left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2$$

$$= \frac{3}{4}(4 - 0) - \frac{1}{4}(8 - 0) = 3 - 2 = 1$$

แสดงว่า $\int_R \frac{3}{4}(2x - x^2)\,dx = 1, R = \{x : 0 \leqslant x \leqslant 2\}$ . . . คุณสมบัติข้อ (2)

เราจึงสรุปได้ว่า f(x) เป็น p.d.f. ของ X

ตัวอย่างที่ 2-3.2 สมมติว่าอายุใช้งานของหลอดอิเลคโทรนิคเท่ากับ X ชั่วโมง ถ้า X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น (density function) f(x) กำหนดไว้ดังนี้

$$f(x) = k e^{-x/1000}, x > 0$$
$$= 0 \text{ อื่น ๆ}$$

จงหาค่าของ k

วิธีทำ f(x) เป็น p.d.f. ของ X

$$\Rightarrow \int_0^\infty k\, e^{-x/1000}\, d\ x = 1$$

$$1000\, k \int_0^\infty e^{-x/1000}\, d\ \frac{x}{1000} = 1$$

$$1000\, k\, (-e^{-x/1000})\Big|_0^\infty = 1$$

$$1000\, k\, (-0 + 1) = 1$$

$$k = \frac{1}{1000}$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 2-3.3 X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่อง ซึ่งมีฟังก์ชันความหนาแน่น คือ

$$f(x) = \frac{5}{\theta}, \ -.1\theta < X < .1\theta$$

$$= 0 \text{ อื่น ๆ}$$

และ $P(|X| \leqslant 2) = 2P(|X| > 2)$ จงคำนวณค่าของ θ และ P(A), P(B) ในเมื่อ $A = \{x : |x| \leqslant 1\}$, $B = \{x : 0 < x < 4\}$

วิธีทำ

$$P(|x| \leqslant 2) = 2P(|x| > 2) = 2\{1 - P(|X I \leqslant 2)\}$$

$$3P(|x| \leqslant 2) = 2$$

หรือ $P(-2 \leqslant x \$2) = \frac{2}{3}$

แต่ $P(-2 \leqslant x \leqslant 2) = \int_{-2}^{2} \frac{5}{\theta}\, dx = \frac{5}{\theta}(2 - (-2)) = \frac{20}{\theta}$

ดังนั้น $\frac{20}{\theta} = \frac{2}{3}$

$$\theta = 30$$

ตอบ

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{6}, \ -3 < x < 3$$

$$= 0 \text{ อื่น ๆ}$$

$$P(A) = P(|X| \leqslant 1) = P(-1 \leqslant X \leqslant 1)$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{1}{6}\, dx$$

$$= \frac{1}{6}(1-(-1)) = \frac{1}{3}$$ **ตอบ**

$$P(B) = P(0 < X < 4) = \int_{0}^{4} \frac{1}{6}\, dx$$

$$= \int_{0}^{3} \frac{1}{6}\, dx + \int_{3}^{4} 0\, dx$$

$$= \frac{1}{6}\cdot 3 = \frac{1}{2}$$ **ตอบ**

แบบฝึกหัดที่ 2-3

1. จงหาค่า k ที่ทำให้ฟังก์ชัน f(x) ต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันหนาแน่นน่าจะเป็นของตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่อง X

1.1 $f(x) = \frac{k}{\sqrt{x}}, \quad 0 < x < 1$
$\quad = 0$ อื่น ๆ

1.2 $f(x) = k - |1 - x|, \quad 0 < x < 2$
$\quad = 0$ อื่น ๆ

1.3 $f(x) = x + \frac{1}{2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant k$
$\quad = 0$ อื่น ๆ

1.4 $f(x) = \frac{1}{3}(1 - x)^2, \quad k < x < 2$
$\quad = 0$ อื่น ๆ

1.5 $f(x) = \frac{1}{2}x^2, \quad 0 \leqslant x < 1$
$\quad = \frac{1}{2}\{x^2 - 3(x-1)^2\}, \quad 1 \leqslant x < 2$
$\quad = k\{x^2 - 3(x-1)^2 + 3(x-2)^2\}, \quad 2 \leqslant x < 3$
$\quad = 0$ อื่น ๆ

2. กล่าวกันว่า เวลาที่ต้องคอยรถเมล์ที่ป้ายรถหน้า มร. จะเป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันหนาแน่นน่าจะเป็น $f(x)$ ซึ่งกำหนดไว้ดังนี้

$$f(x) = 4x - 2x^2, 0 \leqslant x \leqslant 2$$
$$= 0 \text{ อื่น ๆ}$$

ท่านเห็นด้วยกับคำกล่าวนี้หรือไม่ ถ้าไม่เห็นด้วย ท่านคิดว่าฟังก์ชันที่ถูกต้องควรมีรูปอย่างไร

3. X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่องที่มี p.d.f.

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, 1 < x < \infty$$
$$= 0 \text{ อื่น ๆ}$$

ถ้า $E_1 = \{x : 1 < x < 2\}$ และ $E_2 = \{x : 4 < x < 5\}$ จงคำนวณค่าของ $P(E_1 \cup E_2)$, $P(E_1 \cap E_2)$ และ $P(E_1 | E_2)$

4. X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่องที่มี p.d.f. กำหนดไว้ดังนี้

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{9}(x+1), \quad 0 \leqslant x < c \\ &= \frac{4}{9}(x - \frac{1}{2}), \quad c \leqslant x < \frac{3}{2} \\ &= \frac{4}{9}(\frac{5}{2} - x), \quad \frac{3}{2} \leqslant x < 2 \\ &= \frac{1}{9}(4 - x), \quad 2 \leqslant x < 3 \\ &= \frac{1}{9}, \quad 3 \leqslant x < k \\ &= 0 \text{ อื่น ๆ} \end{aligned}$$

$P(E) = \frac{1}{2}$, เมื่อ $E = \{x : 0 \leqslant x \leqslant 2\}$ จงหาค่าของ c และ k

5. สมมติว่า

$$f(x) = c \sin x, 0 < x < \frac{\pi}{3}$$
$$= 0 \text{ อื่น ๆ}$$

เป็นฟังก์ชันหนาแน่นน่าจะเป็นของตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่อง X จงหา

5.1 c

5.2 $P(\cos x \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}})$

5.3 $P(X > \frac{\pi}{6} / x \leqslant \frac{\pi}{4})$

6. k ควรจะมีค่าเท่าใด จึงจะทำให้

$$f(x) = k e^{-|x|}, -\infty < x < \infty$$

มีคุณสมบัติเป็นฟังก์ชันหนาแน่นน่าจะเป็นของตัวแปรเชิงสุ่ม X แล้วคำนวณค่าของ

6.1 $\lim\limits_{h \to \infty} P(\frac{1}{h} \leqslant x \leqslant 2 - \frac{1}{h})$

6.2 $P(\lim\limits_{h \to \infty} \{\frac{1}{h} \leqslant x \leqslant 2 - \frac{1}{h}\})$

6.3 $\lim\limits_{h \to 0} P(5 < X \leqslant 5 + h)$

6.4 $P(\lim\limits_{h \to 0} \{5 < x \leqslant 5 + h\})$

6.5 จงเปรียบเทียบผลที่ได้ระหว่าง (6.1) กับ (6.2) และผลระหว่าง (6.3) กับ (6.4) ท่านจะสรุปผลอย่างไร

2-4 ฟังก์ชันการแจกแจงสะสม (CUMULATIVE DISTRIBUTION FUNCTION)

บ่อยครั้งที่เรามักจะสนใจในการคำนวณความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่เกี่ยวข้องกับตัวแปรเชิงสุ่ม โดยเฉพาะเหตุการณ์ที่กำหนดค่าสูงสุด หรือค่าต่ำสุดของตัวแปรเชิงสุ่มนั้น ๆ นั่นคือ

ถ้า X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่นิยามในกลุ่มผลทดลอง S และเหตุการณ์ E_X เป็นเซทของผลลัพธ์ (s) ที่มีสมบัติว่า $X(s) \leqslant x$ ทุก ๆ ค่าจริง x ใด ๆ ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญญลักษณ์

$$E_X = \{s : X(s) \leqslant x\}$$

หรือเขียนสั้น ๆ เพื่อความสะดวกว่า

$$E = \{X \leqslant x\}$$

ถ้าเราแสดงความน่าจะเป็นของเหตุการณ์เช่นนี้ด้วยฟังก์ชันใหม่ F นั่นคือ

$$F_X(x) = P(X \leqslant x), -\infty < x < \infty$$

เราเรียก $F_X(x)$ หรือเขียนสั้น ๆ ว่า $F(x)$ นี้ว่าฟังก์ชันการแจกแจงสะสม (cumulative distribution function) ของ X หรือเรียกสั้น ๆว่า distribution function ของ X หรือ c.d.f. ของ X เราให้นิยามของ c.d.f. ของ X ดังนี้

นิยาม X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชัน $F(x)$ แสดงถึงความน่าจะเป็นที่ X จะมีค่าไม่เกินค่าจริง x กล่าวคือ

$$F(x) = P(X \leqslant x)$$

เราเรียก F ว่าเป็นฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ X ถ้า I มีคุณสมบัติดังนี้

1. F จะเป็นฟังก์ชันซึ่งมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อ x มีค่าใหญ่ขึ้น กล่าวคือ

$$F(x+h) \geqslant F(x), \ \forall h > 0$$

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = F(-\infty) = 0$

และ $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = F(+\infty) = 1$

หรือ $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$

3. F เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องทางขวา กล่าวคือ

$\lim\limits_{h \to 0} F(x+h) = F(x), \ \forall h > 0, \ -\infty < x < \infty$

คุณสมบัติทั้ง 3 สามารถพิสูจน์ให้เห็นได้ดังนี้

พิสูจน์ เมื่อ $h > 0$, $x + h > x$

$(X \leqslant x+h) = (X \leqslant x) \cup (x < X \leqslant x+h)$

$P(X \leqslant x+h) = P((X \leqslant x) \cup (x < X \leqslant x+h)$

แต่ $(X \leqslant x) \cap (x < X \leqslant x+h) = \phi$

ดังนั้น $P(X \leqslant x+h) = P(X \leqslant x) + P(x < X \leqslant x+h)$

อาศัยนิยามของฟังก์ชันการแจกแจงสะสม เราจะได้

$F(x+h) = F(x) + P(x < X \leqslant x+h)$

อาศัยคุณสมบัติของเซทฟังก์ชันน่าจะเป็น เราจะได้

$P(x < X \leqslant x+h) \geqslant 0$

$\Rightarrow F(x+h) \geqslant F(x), \ \forall h > 0$

.........คุณสมบัติข้อ (1)

จาก $F(x+h) = F(x) + P(x < X \leqslant x+h)$

พิจารณาค่าเมื่อ $h \to 0$ จะได้

$$\lim_{h\to 0} F(x+h) = \lim_{h\to 0} \{ F(x) + P(x < X \leqslant x+h) \}$$

$$= F(x) + \lim_{h\to 0} \{ P(x < X \leqslant x+h) \}$$

$$= F(x) + P(\phi)$$

ดังนั้น $\lim_{h\to 0} F(x+h) = F(x)$

หรือ F เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องทางขวามือ

..........คุณสมบัติข้อ (3)

อาศัยนิยามของฟังก์ชันแจกแจงสะสม เราได้

$F(x) = P(X \leqslant x)$

เราพิจารณาเหตุการณ์ $(X \leqslant x)$

$(X \leqslant x)$ จะมีค่ามุ่งเข้าหา ϕ เมื่อ $x \to -\infty$

และ $(X \leqslant x)$ จะมีค่ามุ่งเข้าหา R พิสัยของ X เมื่อ $x \to +\infty$

นั่นคือ

$$\lim_{x\to -\infty} F(x) = \lim_{x\to -\infty} P(X \leqslant x) = P(\phi) = 0$$

และ $$\lim_{x\to +\infty} F(x) = \lim_{x\to +\infty} P(X \leqslant x) = P(R) = 1$$

หรือ $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$ ....คุณสมบัติข้อ (2)

หากสามารถหา $f(x)$ ของตัวแปรเชิงสุ่ม X ได้ เราสามารถนิยามฟังก์ชัน F ได้ดังนี้

$$F(x) = \sum_{a \leqslant x} f(a) \qquad \text{..........(2-4.1)}$$

เมื่อ $f(a)$ เป็นฟังก์ชันน่าจะเป็นของตัวแปรเชิงสุ่มไม่ต่อเนื่อง X

และ $$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\, dx \qquad \text{..........(2-4.2)}$$

เมื่อ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นของตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่อง X

ในทางกลับกัน หาก X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มไม่ต่อเนื่อง จากนิยาม (2-4.1)

$$f(a) = F(a) - F(a-1) \qquad \text{..........(2-4.3)}$$

หาก X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่อง จากนิยาม (2-4.2) และจากทฤษฎีคัลคูลัส

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} \qquad \text{..........(2-4.4)}$$

ตัวอย่างที่ 2-4.1 X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่องที่มีฟังก์ชันหนาแน่นน่าจะเป็น f(x) กำหนดไว้ดังนี้

$$\begin{aligned} f(x) &= 3(1-x)^2, \ 0 < x < \\ &= 0 \text{ อื่น ๆ} \end{aligned}$$

จงหาฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ X

วิธีทำ

$$\int_0^x 3(1-x)^2\,dx = -3\,\frac{(1-x)^3}{3}\Big|_0^x = 1-(1-x)^3$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} F(x) &= 0 && x < 0 \\ &= \quad -(1-x)^3 && 0 \leqslant x < \\ &= && x \geq \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 2-4.2 กำหนด

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{3} \quad 0 < x < \quad \text{หรือ } 2 < x < 4 \\ &= 0 \quad \text{อื่น ๆ} \end{aligned}$$

เป็นฟังก์ชันหนาแน่นน่าจะเป็นของ X จงหาฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ X

วิธีทำ

$$\begin{aligned} F(x) &= 0 && x < 0 \\ &= \int_0^x \frac{1}{3}\,dx = \frac{x}{3} && 0 \leqslant x < \\ &= \frac{1}{3} && \leq x < 2 \\ &= \frac{1}{3} + \int_2^x \frac{1}{3}\,dx = \frac{x}{3} - \frac{1}{3} && ,\ 2 \leqslant x < \\ &= 1 && x \geqslant 4 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 2-4.3 X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่องที่มีฟังก์ชันการแจกแจงสะสม F(x) ดังนี้

$$F(x) = x - kx^2, 0 \leqslant x \leqslant 2$$

จงหาค่าของ k และฟังก์ชันหนาแน่นน่าจะเป็นของ X

วิธีทำ F(x) เป็น c.d.f. ของ X

$$\Rightarrow \quad F(2) = 1$$

แต่ $F(2) = 2 - k2^2 = 2 - 4k$

$$\Rightarrow 2 - 4k = 1$$

$$\Rightarrow \quad k = \frac{1}{4}$$

ดังนั้น $F(x) = x - \frac{1}{4}x^2, 0 \leqslant x \leqslant 2$ เป็น c.d.f. ของ X

เนื่องจาก $\frac{dF(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(x - \frac{1}{4}x^2) = 1 - \frac{1}{2}x, 0 \leqslant x \leqslant 2$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - \frac{1}{2}x, 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ &= 0 \quad \text{อื่น ๆ} \end{aligned}$$

เป็น p.d.f. ของ X

หากเราพิจารณาคุณสมบัติข้อ (3) ของฟังก์ชันการแจกแจงสะสมจะเห็นได้ว่า ในกรณีที่ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มไม่ต่อเนื่อง ฟังก์ชัน F(x) เป็นฟังก์ชันแบบขั้นบันได (step function) มีสมบัติเป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องทางขวามือ แต่ไม่ต่อเนื่องทางซ้ายมือ เพราะ $\lim_{h \to 0} F(x - h) \neq F(x)$ แสดงว่าขั้นบันไดนั้นเกิดขึ้นที่จุด x พอดี

ในกรณีที่ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่อง F(x) จะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องโดยสมบูรณ์ (absolute continuous) เพราะ

$$\lim_{h \to 0} F(x - h) = F(x) = \lim_{h \to 0} F(x + h)$$

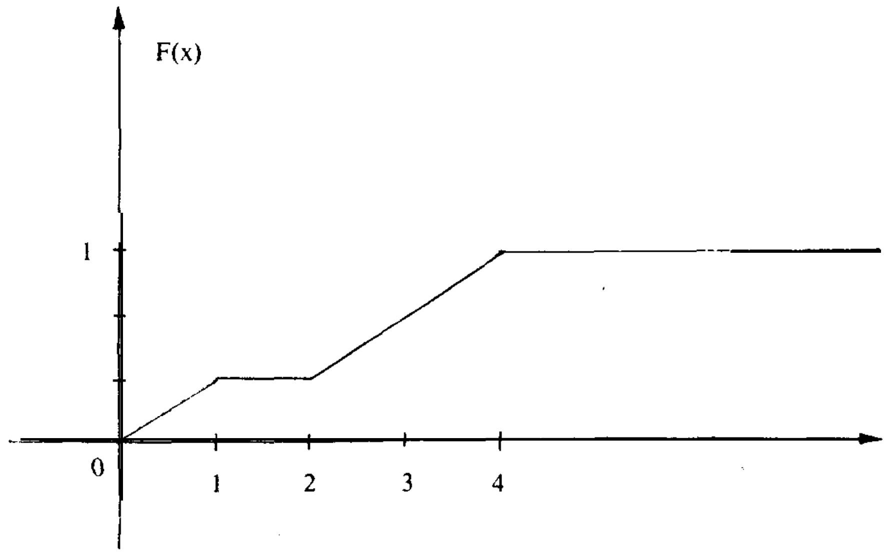
$$\lim_{h \to 0} P(X \leqslant x - h) = P(X \leqslant x) = \lim_{h \to 0} P(X \leqslant x + h)$$

แสดงว่า ในกรณีที่ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่อง เราอาจใช้นิยาม

$$F(x) = P(X < x)$$

ก็ได้ เพราะในกรณีนี้ $P(X = x) = 0$ เสมอ

จากตัวอย่างที่ 2-4.2 เราอาจจะแสดง $F(x)$ ได้ด้วยกราฟ



จากกราฟจะเห็นได้ว่า ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่อง X เป็นฟังก์ชัน ที่ต่อเนื่องโดยสมบูรณ์

ทฤษฎีที่ Z-4.1 ถ้า **a** และ **b** เป็นค่าคงที่ใด ๆ ของ X และ **b > a** แล้ว

$$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

พิสูจน์ $b > a$

$$(X \leq b) = (X \leq a) \cup (a < X \leq b)$$

$$P(X \leq b) = P((X \leq a) \cup (a < X \leq b))$$

แต่ $(X \leq a) \cap (a < X \leq b) = \phi$

$$\Rightarrow \quad P(X \leq b) = P(X \leq a) + P(a < X \leq b)$$

อาศัยนิยามของฟังก์ชันการแจกแจงสะสม

$$F_X(b) = F_X(a) + P(a < X \leq b)$$

$$\Rightarrow \quad P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

ทฤษฎีที่ 2-4.2

$$P(X < a) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} F_X(a - h)$$

พิสูจน์

เนื่องจาก $(X < a) = (X \leqslant a - h) \cup (a - h < X < a), h > 0$

และ $(X \leqslant a - h) \cap (a - h < X < a) = \phi$

ดังนั้น $P(X < a) = P(X \leqslant a - h) + P(a - h < X < a), h > 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{h\to 0} P(X < a) = \lim\limits_{h\to 0} \{ P(X \leqslant a - h) + P(a - h C X < a) \}$

$\Rightarrow P(X < a) = \lim\limits_{h\to 0} P(X \leqslant a - h) + \lim\limits_{h\to 0} P(a - h < X < a), h > 0$

$\lim\limits_{h\to 0} P(a - h < X < a) = P(\lim\limits_{h\to 0} \{ a - h < x < a\}) = P(\phi) = 0$

และ $P(X \leqslant a - h) = F_X(a - h)$ (นิยามของ c.d.f. ของ X)

$\Rightarrow P(X < a) = \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} F_X(a - h)$

ทฤษฎีที่ 2-4.3

$$P(X = a) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \{ F_X(a) - F_X(a - h) \}$$

พิสูจน์

$(X < a) \cup (X = a) = (X \leqslant a)$ และ $(X c a) \cap (X = a) = 6$

$\Rightarrow P(X < a) + P(X = a) = P(X \leqslant a) = F_X(a)$

$\Rightarrow P(X = a) = F_X(a) - P(X < a)$

แต่ $P(X < a) = \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} F_X(a - h)$ (ทฤษฎี 2-4.2)

$\Rightarrow P(X = a) = \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \{F_X(a) - F_X(a - h)\}$

เพื่อความสะดวก เราจะใช้ $F(a)$ แทน $F_X(a)$ และ $F(a^-)$ แทน $\lim\limits_{0<h\to 0} F_X(a - h)$

ทฤษฎีที่ 2-4.4 $P(X > a) = 1 - F_X(a)$

พิสูจน์

$$(X \leqslant a) \cup (X > a) = (X < \infty),\ (X \leqslant a) \cap (X > a) = \phi$$

$$\Rightarrow \quad P(X \leqslant a) + P(X > a) = P(X < \infty) = 1$$

$$P(X > a) = 1 - P(X \leqslant a) = 1 - F_X(a)$$ (นิยาม c.d.f. ของ X)

ตัวอย่างที่ 2-4.4 เวลาที่ชายผู้หนึ่งใช้ในการคอยรถเมล์ที่ ป้ายรถแห่งหนึ่งเท่ากับ X นาที ถ้า X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันการแจกแจงสะสม F(x) กำหนดไว้ดังนี้

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \frac{x}{2} & , 0 \leqslant x < 1 \\ \frac{1}{2} & , 1 \leqslant x < 2 \\ \frac{x}{4} & , 2 \leqslant x < 4 \\ 1 & , x \geqslant 4 \end{cases}$$

จงพิจารณาว่า X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่องหรือไม่ ถ้าเป็นจงหาฟังก์ชันหนาแน่นน่าจะเป็นของ X และจงคำนวณความน่าจะเป็นที่ชายผู้นี้รอรถเป็นเวลา

1. มากกว่า 3 นาที
2. น้อยกว่า 3 นาที
3. ระหว่าง 1 นาที และ 3 นาที
4. มากกว่า 3 นาที กำหนดว่าคอยมาแล้วมากกว่า 1 นาที
5. น้อยกว่า 3 นาที กำหนดว่าคอยมาแล้วมากกว่า 1 นาที

วิธีทำ

พิจารณา $P(X = 1) = F_X(1) - \lim_{h \to 0} F_X(1 - h) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$

หรือ $P(X = 2) = F_X(2) - \lim_{h \to 0} F_X(2 - h) = \frac{2}{4} - \frac{1}{2} = 0$

$\Rightarrow \quad P(X = x) = 0$

แสดงว่า X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่อง

ความน่าจะเป็นที่เขารอรถมากกว่า 3 นาที

$= P(X > 3)$

$= 1 - F_X(3)$

$= 1 - \frac{3}{4} = 0.25$ ....(1)

ความน่าจะเป็นที่เขารอรถน้อยกว่า 3 นาที

$= P(X < 3)$

$= F_X(3) = \frac{3}{4} = 0.75$ ....(2)

ความน่าจะเป็นที่เขารอรถระหว่าง 1 นาที และ 3 นาที

$= P(1 < X < 3)$

$= F_X(3) - F_X(1)$

$= \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 0.25$ ....(3)

ความน่าจะเป็นที่เขารอรถมากกว่า 3 นาที กำหนดว่าคอยมาแล้วมากกว่า 1 นาที

$= P(X > 3 | X > 1)$

$= \frac{P(X > 3)}{P(X > 1)}$

$\frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2} = 0.5$ ....(4)

ความน่าจะเป็นที่เขารอรถน้อยกว่า 3 นาที กำหนดว่าคอยมาแล้วมากกว่า 1 นาที

$= P(X < 3 | X > 1)$

$= \frac{P(1 < x < 3)}{P(X > 1)}$

$= \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2} = 0.5$ ....(5)

แบบฝึกหัดที่ 2-4

1. X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มไม่ต่อเนื่องที่มีฟังก์ชันน่าจะเป็น P_X และฟังก์ชันการแจกแจงสะสม F_X

   1.1 ถ้า $k > 0$ จงคำนวณค่าของ $P(|X| \leq k)$ และ $P(|X| \geq k)$ ในเทอมของ F_X และ P_X

   1.2 จงพิสูจน์ว่า

   1.2.1 $P(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a) - P_X(b)$

   1.2.2 $P(a \leq X \; 6 \; b) = F_X(b) - F_X(a) + P_X(a)$

2. X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มไม่ต่อเนื่องที่มีฟังก์ชันน่าจะเป็น f(x) กำหนดไว้ดังนี้

$$f(x) = \frac{x}{10}, \quad x = 1, 2, 3, 4$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

จงหาฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ X อาศัยฟังก์ชันที่ได้ จงแสดงให้เห็นจริงว่า

2.1 $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} P(2 - h < X \leq 2) = P(\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \{x : 2 - h < x \leq 2\})$

2.2 $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} P(2 < X \leq 3 + h) = P(\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \{x : 2 < x \leq 3 + h\})$

3. X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่องที่มีฟังก์ชันหนาแน่นน่าจะเป็น f(x) กำหนดไว้ดังนี้

$$f(x) = 2\sin x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{3}$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

จงหาฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ X และ $P(X = \frac{\pi}{4})$, $P(3 \tan^2 X > 1)$

4. สมมติว่า

$$f(x) = x, \quad 0 < x \leq 1$$
$$= 2 - x, \quad 1 < x \leq 2$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

เป็นฟังก์ชันหนาแน่นน่าจะเป็นของ X จงหา

4.1 ฟังก์ชันแจกแจงสะสมของ X

4.2 $P(\frac{1}{2} < X \leq \frac{3}{2})$

4.3 $P(5X \leq 8)$

5. **จงคำนวณค่าของ p และ q ที่ทำให้**

$$
\begin{aligned}
F(x) &= 0 &&, \ x < 0 \\
&= \frac{x}{4} &&, \ 0 \leq x < 1 \\
&= \frac{p + x}{12} &&, \ 1 \leq x < 2 \\
&= \frac{x}{6} &&, \ 2 \leq x < 3 \\
&= \frac{1}{2} &&, \ 3 \leq x < 4 \\
&= \frac{x}{8} &&, \ 4 \leq x < q \\
&= 1 &&, \ x \geq q
\end{aligned}
$$

เป็นฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่อง X จากผลที่ได้

5.1 **จงเขียนกราฟแสดง $F(x)$**

5.2 **จงคำนวณค่าของ $P(E_1)$, $P(E_2)$ และ $P(E_1|E_2)$ ในเมื่อ**

$E_1 = \{x : 1 < x \leq 3\}$, $E_2 \{x : 2 < x \leq 5\}$

6. **X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่องที่มีฟังก์ชันการแจกแจงสะสม $F(x)$ กำหนดไว้ดังนี้**

$$
\begin{aligned}
F(x) &= 0 &&, \ x < -3 \\
&= \frac{(x+3)^2}{18} &&, \ -3 \leq x < 0 \\
&= 1 - \frac{(3-x)^2}{18} &&, \ 0 \leq x < 3 \\
&= 1 &&, \ x \geq 3
\end{aligned}
$$

6.1 **จงเขียนกราฟแสดง** $F(x)$

6.2 **จงคำนวณค่าของ $F(-1)$, $F(1.5)$ และ** $P(|X| < 1.5)$

6.3 **จงหาฟังก์ชันหนาแน่นน่าจะเป็นของ** X **และเขียนแสดงด้วยกราฟ**

7. **กำหนด** $F(x) = a + b \tan^{-1} x, \ -\infty < x < \infty$

7.1 **จงหาค่าของ** a **และ** b **ที่ทำให้** $F(x)$ **เป็น** c.d.f. **ของ** X

7.2 จงหา p.d.f. ของ X

7.3 จงคำนวณค่าของ

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} P(-1 < X \leqslant 1 + h)$$

a. สมมติว่า X เป็นกำลังสองของค่าที่เลือกมาอย่างสุ่มจากหน่วยในพิสัย [0, 1] x เป็นตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่อง เพราะค่าของ x เป็นค่าใด ๆ ในพิสัย [0, 1] ในที่นี้

$$\{ X \leqslant a \} = \{ x \in [0, 1] : x^2 \leqslant a \} = \{ x \in [0, 1] : x \leqslant \sqrt{a} \}$$

นั่นคือ ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ X, F(x), ก็คือ

$$\begin{aligned} F(x) &= 0 \quad , \quad x < 0 \\ &= \sqrt{x} \quad , \quad 0 \leqslant x < 1 \\ &= 1 \quad , \quad x \geqslant 1 \end{aligned}$$

จงหา

8.1 $P\ X \leqslant \frac{1}{5}$), $P(\frac{1}{4} < X \leqslant \frac{1}{2})$, $P(7X > 3)$

a.2 p.d.f. ของ x

2-5 ค่าเฉลี่ย ฐานนิยมและมัธยฐาน (MEAN MODE MEDIAN)

การศึกษาเกี่ยวกับสมบัติของตัวแปรเชิงสุ่ม ในบางครั้งเรามักจะสนใจเกี่ยวกับค่าคงที่อันหนึ่งของตัวแปรเชิงสุ่มนั้น ซึ่งจะอธิบายหรือแสดงคุณลักษณะของตัวแปรเชิงสุ่มโดยค่ากลาง ๆ หรือลักษณะการแจกแจงของตัวแปรเชิงสุ่มนั้น มาตราวัดค่าที่เราสนใจในที่นี้คือ ค่าเฉลี่ย มัธยฐานและฐานนิยม

ค่าเฉลี่ย (Mean) เป็นค่าคงที่ที่ใช้บอกค่ากลาง ๆ ของตัวแปรเชิงสุ่ม X หรือบอกศูนย์กลางของการแจกแจงของ X เนื่องจากค่านี้เราหามาได้ก่อนที่จะทำการทดลองแล้วเสร็จ เราจึงเรียกอีกอย่างหนึ่งว่าเป็นค่าคาดหมายของ X และใช้แทนด้วยสัญญลักษณ์ E(X) กล่าวอีกนัยหนึ่งค่าเฉลี่ยก็คือ ค่าคาดหมายที่ชี้บอกอย่างเคร่า ๆ ว่า X จะออกค่าเป็นอย่างไร และเรานิยามค่าเฉลี่ยหรือ E(X) ไว้ดังนี้

นิยาม 2-5.1 X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันหนาแน่นน่าจะเป็น f(x) เรานิยามค่าเฉลี่ยหรือค่าคาดหมาย (Expected Value) ของ X ด้วย E(X) ซึ่งกำหนดค่าไว้ดังนี้

$$E(X) = \begin{cases} \sum\limits_{x \in R} x\, f(x) & \text{.....X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มไม่ต่อเนื่อง} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx & \text{.....X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่อง} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\, d\, F(x) & \end{cases}$$

และมักจะใช้สัญญลักษณ์ μ (มิว) แทนค่า E(X)

เราสามารถหาค่าของ E(X) ได้จากการคำนวณ หากเรารู้ f(x) และจะหาค่าได้ก็ต่อเมื่อ

$$\sum_{x \in R} |x|\, f(x) < \infty$$

หรือ $$\int_{-\infty}^{\infty} |x|\, f(x)\, dx < \infty$$

หรือ $$\int_{-\infty}^{\infty} |x|\, d\, F(x) < \infty$$

ตัวอย่างที่ 2-5.1 X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันน่าจะเป็น f(x) ดังนี้

$$f(x) = \frac{(|x| + 1)^2}{9}, \quad x = -1, 0, 1$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

จงหาค่าเฉลี่ยของ X

วิธีทำ

$$E(X) = \sum_{x=-1}^{1} x \frac{(|x| + 1)^2}{9}$$

$$= -1 \times \frac{4}{9} + 0 \times \frac{1}{9} + 1 \times \frac{4}{9}$$

➡ ค่าเฉลี่ยของ x = 0 <u>ตอบ</u>

ตัวอย่างที่ 2-5.2 กำหนดฟังก์ชันความหนาแน่น f(x) ของตัวแปรเชิงสุ่ม X ดังนี้

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad 1 < x < \infty$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

จงแสดงให้เห็นจริงว่าค่าเฉลี่ยของ X จะหาค่าไม่ได้

วิธีทำ

$$E(X) = \int_1^\infty x \cdot \frac{1}{x^2}\, dx$$

$$= \ln x \Big|_1^\infty$$

$$= \ln \infty - \ln 1 = \infty$$

$\Rightarrow$ ค่าเฉลี่ยของ X จะหาค่าไม่ได้

ตัวอย่างที่ 2-5.3 หาก

$$F(x) = 0 \quad , x < 0$$
$$= \frac{x}{8} \quad , 0 \leqslant x < 2$$
$$= \frac{x^2}{16} \quad , 2 \leqslant x < 4$$
$$= 1 \quad , x \geqslant 4$$

เป็นฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแปรเชิงสุ่ม X จงหาค่าเฉลี่ยของ X

วิธีทำ

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, d\, F(x)$$

$$= 0 + \int_0^2 x\, d\,\frac{x}{8} + \int_2^4 x\, d\,\frac{x^2}{16} + 0$$

$$= x \cdot \frac{x}{8}\Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{x}{8}\,dx + x \cdot \frac{x^2}{16}\Big|_2^4 - \int_2^4 \frac{x^2}{16}\,dx$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \cdot \frac{2^2}{2} + \frac{7}{2} - \frac{1}{16} \cdot \frac{4^3 - 2^3}{3} \quad \text{(ใช้สูตร } \int udv = uv - \int vdu\text{)}$$

$\Rightarrow$ ค่าเฉลี่ยของ X $= \frac{31}{12} = 2.58$ **ตอบ**

หมายเหตุ เราอาจจะใช้วิธีการจัดรูปใหม่ ดังนี้

$$E(X) = 8\int_0^2 \frac{x}{8}\, d\,\frac{x}{8} + 4\int_2^4 \left(\frac{x^2}{16}\right)^{1/2} d\,\frac{x^2}{16}$$

$$= 8\left(\frac{x}{8}\right)^2/2\Big|_0^2 + 4\left(\frac{x^2}{16}\right)^{3/2}/\frac{3}{2}\Big|_2^4$$

$\Rightarrow$ ค่าเฉลี่ยของ $X = \frac{31}{12} = 2.58$ **ตอบ**

เราจะศึกษารายละเอียดเกี่ยวกับค่าคาดหวังของ X ในบทที่ 5 ต่อไป

ในบางครั้งเราสนใจที่จะทราบแต่เพียงว่าเหตุการณ์ไหนหรือค่าไหนของตัวแปรเชิงสุ่มมีโอกาสเกิดขึ้นมากที่สุดเท่านั้น นั่นคือต้องการจะดูว่าฟังก์ชันจะมีค่าสูงสุดอยู่ที่ไหน กรณีเช่นนี้ เราใช้ฐานนิยม (Mode) เป็นมาตราวัดสรุป และให้นิยามไว้ดังนี้

นิยาม 2-5.2 X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันหนาแน่นน่าจะเป็น $f(x)$ ถ้า $X = x_0$ ทำให้ฟังก์ชันมีค่าสูงสุด เราเรียก x_0 ว่าเป็นฐานนิยม (Mode) ของ X และสามารถหาค่าได้ดังนี้

ก. X เป็นตัวแปรไม่ต่อเนื่อง

ฐานนิยม x_0 จะมีสมบัติดังนี้

ก.1 x_0 เป็นค่าในพิสัย R ของ X

ก.2 $f(x_0) \geqslant f\, x_0 - 1)$ และ $f(x_0) \geqslant f(x_0 + 1)$

ก.3 $f(x_0) \geqslant f(y), \forall y \in R$

ข. X เป็นตัวแปรต่อเนื่อง

เราจะหาฐานนิยมได้เสมอ ถ้า $\frac{df(x)}{dx}$ เป็นค่าของฟังก์ชัน x และเราจะได้ค่าฐานนิยม x_0 เมื่อ x_0 เป็นคำตอบของสมการ

$$\frac{df(x)}{dx} = 0$$

โดยที่ $x_0 \in R$

ตัวอย่างที่ 2-5.4 X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันน่าจะเป็น f(x) ดังนี้

$$f(x) = \frac{1}{16}(5 - 2x), \quad x = -1, 0, 1, 2$$

$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

จงหาฐานนิยมของ x

วิธีทำ

เราเขียนตารางแสดงการแจกแจงของ X ได้ดังนี้

x	-1	0	1	2
$f(x) = \frac{1}{16}(5 - 2x)$	$\frac{7}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$

จากตารางจะเห็นว่า $f(-1)$ มีค่าสูงสุด

แสดงว่าฐานนิยมของ X มีค่า $= -1$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 2-5.5 จงหาฐานนิยมของ X เมื่อ

$$f(x) = \frac{3}{4}(2x - x^2),\ 0 < x < 2$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นของ X

วิธีทำ

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left\{\frac{3}{4}(2x - x^2)\right\} = \frac{3}{4}(2 - 2x)$$

$$\frac{3}{4}(2 - 2x) = 0$$
$$x = 1$$

แสดงว่าฐานนิยมของ X มีค่าเท่ากับ 1 **ตอบ**

ฐานนิยมหาได้เสมอและไม่จำเป็นต้องมีตัวเดียว อาจมีมากกว่า 1 ตัวก็ได้ การแจกแจงใดที่มีฐานนิยมตัวเดียว เราเรียกการแจกแจงที่มียอดเดียว (unimodal) การแจกแจงที่มีจุดสูงสุดจุดเดียวซึ่งมีฐานนิยมอยู่ที่จุดสูงสุดหรือต่ำสุดของพิสัย (ตัวอย่าง 2-5.4) จะเป็น J-shaped การแจกแจงใดที่มีจุดยอด 2 จุดเรียกว่าเป็น bimodal ถ้าการแจกแจงแบบ bimodal มีฐานนิยมอยู่ที่ปลายทั้งสองข้างของพิสัยจะเรียกว่าเป็น U-shaped

กรณีที่การแจกแจงของตัวแปรเชิงสุ่ม X เป็นรูปกราฟที่มีส่วนโค้งเบ้ไปทางด้านใดด้านหนึ่ง เช่น การศึกษาการแจกแจงของรายได้ของครอบครัวในประเทศด้อยพัฒนา เรามักจะใช้มัธยฐาน

อธิบาย หรือแสดงคุณลักษณะของการแจกแจงของรายได้ เพราะว่าครอบครัวที่มีรายได้น้อยมีเป็นจำนวนมาก เมื่อเทียบกับครอบครัวที่มีรายได้มาก มัธยฐานจะเป็นค่าแบ่งการแจกแจงของ X ออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กัน

นิยาม 2-5.3 X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันหนาแน่นน่าจะเป็น f(x) และมีฟังก์ชันการแจกแจงสะสม F(x) มัธยฐาน (median) ของ X ก็คือค่า $X = x_m$ ที่ทำให้ $F(x_m) \geqslant \frac{1}{2}$ และ $\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} F(x_m - h) \leqslant \frac{1}{2}$

เราหาค่าของมัธยฐานได้ดังนี้

ก. X เป็นตัวแปรแบบไม่ต่อเนื่อง

มัธยฐานของ X คือค่า x_m ซึ่งมีคุณสมบัติดังนี้

1. $x_m \in$ พิสัย R ของ X

2. $\sum_{x < x_m} f(x) \leqslant \frac{1}{2}$ และ $\sum_{x \leqslant x_m} f(x) \geqslant \frac{1}{2}$

ข. X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่อง

มัธยฐานของ X คือ x_m ซึ่งเป็นคำตอบของสมการ

$$\int_{x \leqslant x_m} f(x)\, dx = \frac{1}{2} \text{ หรือ } \int_{x \geqslant x_m} f(x)\, dx = \frac{1}{2}$$

และ $x_m \in R$

ตัวอย่างที่ 2-5.6 กำหนด

$$f(x) = \frac{x}{15}, \; x = 1, 2, 3, 4, 5$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

เป็นฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X จงหาค่ามัธยฐานของ X

วิธีทำ อาศัยฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ X

$$F(x) = P(X \leqslant x) = \sum_{a \leqslant x} f(a)$$

$$\Rightarrow \quad F(1) = \frac{1}{15} < \frac{1}{2}$$

$$F(2) = \frac{3}{15} < \frac{1}{2}$$

$$F(3) = \frac{6}{15} < \frac{1}{2}$$

$$F(4) = \frac{10}{15} > \frac{1}{2}$$

แสดงว่า $x = 4$ เป็นมัธยฐานของ X **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 2-5.7 จงหามัธยฐานของ X ซึ่งมีฟังก์ชันความหนาแน่นกำหนดไว้ดังนี้

$$f(x) = 1 - |1 - x|, 0 < x < 2$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

วิธีทำ

$$f(x) = 1 - (1 - x) = x, 0 < x < 1$$
$$= 1 + (1 - x) = 2 - x, 1 \leqslant x < 2$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

$$F(1) = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$$

แสดงว่ามัธยฐานของ X มีค่าเท่ากับ 1 **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 2-5.8 X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันการแจกแจงสะสม $F(x) = \frac{x}{k + x}$, $x > 0$ k จะมีค่าเท่าใด ถ้ามัธยฐานของ X = 1

วิธีทำ

มัธยฐานของ X = 1 ดังนั้น $F(1) = \frac{1}{k + 1} = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow k + 1 = 2$$
$$\Rightarrow k = 1$$

แบบฝึกหัดที่ 2-5

1. สมมติว่าตัวแปรเชิงสุ่ม X มีค่าที่เป็นไปได้ 3 ค่า คือ 0, 1, 2 ถ้า $P(X = 2) = p$ และ $E(X) = m$

1.1 จงหาฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X

1.2 จากผลใน 1.1 จงแสดงให้เห็นจริงว่า

$$2p \leqslant m \leqslant 1 + p$$

2. จงหาค่าเฉลี่ยของตัวแปรเชิงสุ่ม X ถ้า X มีฟังก์ชันความหนาแน่น f(x) และฟังก์ชันการแจกแจงสะสม F(x) กำหนดไว้ดังนี้

21. $f(x) = \frac{1}{5}, -2 < x < 3$
$= 0$ อื่น ๆ

2.2 $f(x) = 5x^4 \; , \; 0 < x < 1$

$\quad = 0$ อื่น ๆ

2.3 $f(x) = x \; , \; 0 < x < 1$

$\quad = 2 - x \; , \; 1 < x < 2$

$\quad = 0$ อื่น ๆ

2.4 $F(x) = 0 \; , \; x < 0$

$$= x - \frac{1}{4}x^2 \; , \; 0 \leqslant x < 2$$

$\quad = 1 \; , \;$ x 3 2

2.5 $F(x) = 0 \; , \; x < 0$

$$= \frac{x}{2} \; , \; 0 \leqslant x < 1$$

$$= \frac{1}{2} \; , \; 1 \leqslant x < 2$$

$$= \frac{x}{4} \; , \; 2 \leqslant x < 4$$

$$= 1 \; , \; x \geqslant 4$$

3. จงหาฐานนิยมของตัวแปรเชิงสุ่ม x ซึ่งมีฟังก์ชันหนาแน่นน่าจะเป็น f(x) กำหนดไว้ดัง

3.1 $f(x) = (\frac{1}{2})^x \; , \; x =$ I, 2, 3.....

$\quad = 0$ อื่น ๆ

3.2 $f(x) = 12x^2(1 - x) \; , \; 0 < x < 1$

$\quad = 0$ อื่น ๆ

3.3 $f(x) = \frac{1}{25}(2x^2 - 1) \; , \; x = 1, 2, 3$

$\quad = 0$ อื่น ๆ

3.4 $f(x) = (\frac{1}{2})x^2e^{-x} \; , \; 0 < x < \infty$

$\quad = 0$ อื่น ๆ

4. จงหามัธยฐานของตัวแปรเชิงสุ่ม X ซึ่งมี p.d.f. f(x) กำหนดไว้ดังนี้

4.1 $f(x) = \binom{4}{x}(\frac{1}{4})^x(\frac{3}{4})^{4-x} \; , \; x = 0, 1, 2, 3, 4$

$\quad = 0$ อื่น ๆ

4.2 $f(x) = 0.2$, $x = 2, 4, 5$

$= 0.4$, $x = 7$

$= 0$ อื่น ๆ

4.3 $f(x) = 3x^2$ $0 < x < 1$

$= 0$ อื่น ๆ

4.4 $f(x) = \dfrac{1}{\pi(1 + x^2)}$, $-\infty < x < \infty$

2-6 การแจกแจงของฟังก์ชันของตัวแปรเชิงสุ่ม X

หาก X เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม ฟังก์ชันของ X, h(X) ก็จะมีสมบัติเป็นตัวแปรเชิงสุ่มด้วย หากเรารู้ p.d.f. f(x) ของ X หรือ c.d.f. ของ X เราก็สามารถหา p.d.f. หรือ c.d.f. ของ h(X) ได้เช่นกัน และบางครั้งเราอาจสนใจเรื่องความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ของ h(X) เช่น เรามี X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่องที่มี c.d.f. F(x) กำหนด $Y = h(X)$ เราจะได้ว่า Y ก็เป็นตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่องเช่นเดียวกัน หากเราทราบว่า

$$P(X \in E) = \int_E dF_X(x) \qquad \text{ทุก ๆ } E \subseteq R$$

และถ้า $F \subseteq$ พิสัยของ Y เราจะได้

$$P(Y \in F) = P(X \in h^{-1}(F)) = \int_{h^{-1}(F)} dF_X(x)$$

ในเมื่อ

$$h^{-1}(F) = \{ x : h(x) \in F \}$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้าเราต้องการหาฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ Y เราจะคำนวณได้โดยอาศัยทฤษฎีต่อไปนี้

ทฤษฎี ถ้า X เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม ซึ่งมีฟังก์ชันการแจกแจงสะสม F(x) และ $Y = h(X)$ ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ Y, F(y) จะกำหนดได้ดังนี้

$$F(y) = P(X \in h^{-1}(T_y)) = \int_{h^{-1}(T_y)} dF(x) \qquad \text{..........(2.6.1)}$$

ในเมื่อ

$$T_y = \{ y : Y \leq y \}$$

บทแทรก 1 ถ้า X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มไม่ต่อเนื่องแล้วฟังก์ชันน่าจะเป็นของ Y, f(y) จะกำหนดได้ดังนี้

$$f(y) = P(Y = y) = P(X = h^{-1}(y)) \qquad \text{..........(2.6.2)}$$

บทแทรก 2 ถ้า h(X) เป็นฟังก์ชันซึ่งมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อ x มีค่าใหญ่ขึ้นแล้ว

$$F_Y(y) = F_X(h^{-1}(y)) \qquad \text{..........(2.6.3)}$$

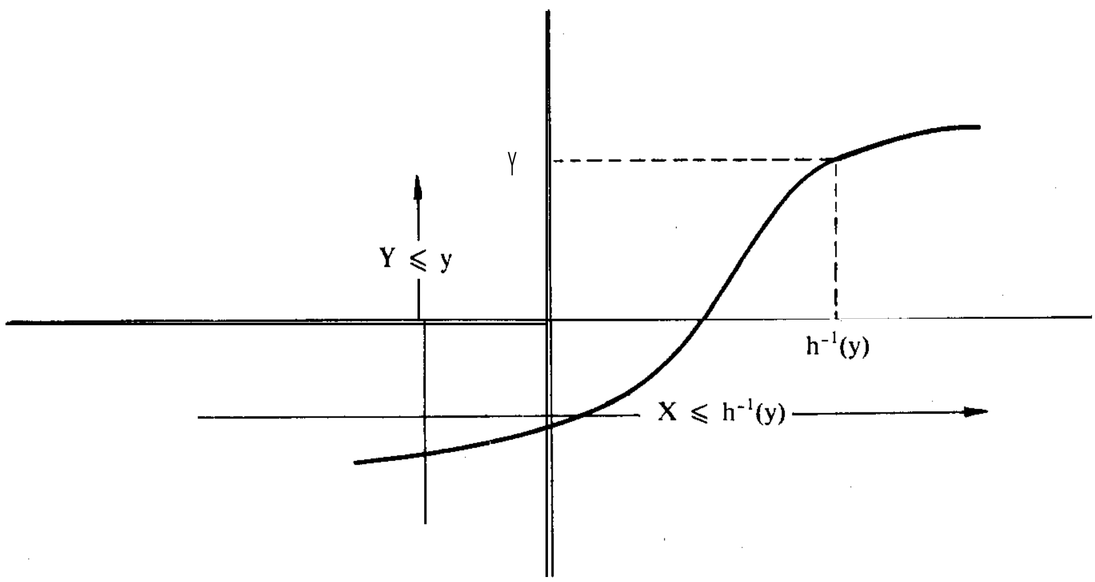
พิสูจน์

$$T_y = \{ Y : Y \leq y \} = \{ h(X) : h(X) \leq y \}$$

เนื่องจาก h(X) เป็นฟังก์ชันซึ่งมีค่าเพิ่มขึ้น เมื่อ x มีค่าใหญ่ขึ้น
ดังนั้น $h(X) \leq y$ ก็ต่อเมื่อ $X \leq h^{-1}(y)$
ดังนั้น

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{h^{-1}(y)} dF(x) = F_X(h^{-1}(y)) \qquad \text{จาก (2-6.1)}$$

สามารถแสดงได้ด้วยภาพดังนี้



บทแทรก 3 ถ้า h(X) เป็นฟังก์ชันซึ่งมีค่าลดลง เมื่อ x มีค่าใหญ่ขึ้นแล้ว

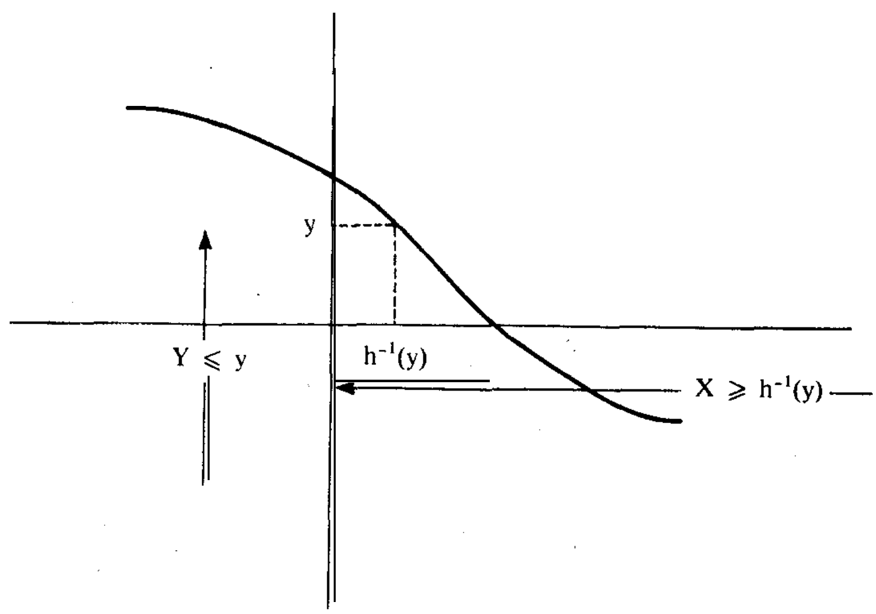
$$F_Y(y) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} F_X(h^{-1}(y) - h) \qquad \textbf{(2-6.4)}$$

พิสูจน์

h(X) เป็นฟังก์ชันซึ่งมีค่าลดลงเมื่อ x มีค่าใหญ่ขึ้น ดังนั้น $h(X) \leqslant y$ ก็ต่อเมื่อ $X \geqslant h^{-1}(y)$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(h(X) \leqslant y) \\ &= P(X \geqslant h^{-1}(y)) \\ &= 1 - P(X < h^{-1}(y)) \\ &= 1 - \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} F_X(h^{-1}(y) - h) \qquad \text{(อาศัยทฤษฎี 2-4.2)} \end{aligned}$$

สามารถแสดงให้เห็นด้วยภาพดังนี้



จากผลที่ได้ในบทแทรก 2 และ 3 เราจะได้

บทแทรก 4 ถ้า $h(X) = aX + b,\ a \neq 0$ แล้ว สำหรับทุกค่า $a > 0$ เราจะได้

$$F_Y(y) = F_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(2-6.5)}$$

สำหรับทุกค่า a < 0 เราจะได้

$$F_Y(y) = 1 - \lim_{\substack{h\to 0\\ h\to 0}} F_X\left(\frac{y-b}{a} - h\right) \qquad \text{.........(2-6.6)}$$

บทแทรก 5 ถ้า $h(X) = aX^2 + bX + c,\ a \neq 0$ แล้ว

$$F_Y(y) = F_X\left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4a(c-y)}}{2a}\right) - \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} F_X\left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4a(c-y)}}{2a} - h\right)$$

$$a > 0 \qquad \text{..........(2-6.7)}$$

และ

$$F_Y(y) = 1 - \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} F_X\left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4a(c-y)}}{2a} - h\right)$$

$$+ F_X\left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4a(c-y)}}{2a}\right),\ a < 0 \qquad \text{. . . (2-6.8)}$$

พิสูจน์ ในที่นี้

$h^{-1}(T_y) = \{ x : ax^2 + bx + c \leqslant y \}$

ดังนั้น ถ้า $a > 0$ แล้ว

$$h^{-1}(T_y) = \left\{ x : \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4a(c-y)}}{2a} \leqslant x \leqslant \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4a(c-Y)}}{2a} \right\}$$

$$= \{ x : h^{-1}(T_1) \leqslant x \leqslant h^{-1}(T_2) \}$$

เมื่อ $h^{-1}(T_1) = \left\{ x : x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4a(c-y)}}{2a} \right\}$

และ $h^{-1}(T_2) = \left\{ x : x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4a(c-y)}}{2a} \right\}$

$h^{-1}(T_y) \neq \phi$ ถ้า $b^2 - 4a(c-y) \geqslant 0$

$\Rightarrow \quad F_Y(y) = P(X \in h^{-1}(T_y)) = P(h^{-1}(T_1) \leqslant X \leqslant h^{-1}(T_2))$

$\qquad = P(X \leqslant h^{-1}(T_2)) - P(X < h^{-1}(T_1))$

อาศัยนิยามของ c.d.f. และทฤษฎี (2-4.2) เราจะได้

$$F_Y(y) = F_X\left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4a(c-y)}}{2a}\right) - \lim_{\substack{h\to 0\\ h\to 0}} F_X\left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4a(c-y)}}{2a} - h\right)$$

ถ้า $b^2 - 4a(c - y) < 0$ แล้ว $h^{-1}(T_y) = \phi$

$\Rightarrow F_Y(y) = 0$

ในทำนองเดียวกัน ถ้า $a < 0$

$$h^{-1}(T_y) = \{ x : x \leqslant \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4a(c - y)}}{2a} \text{ หรือ } x \geqslant \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4a(c \quad y)}}{2a} \}$$

$$F_Y(y) = 1 - \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} F_X\left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4a(c - y)}}{2a} - h\right) + F_X\left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4a(c - Y)}}{2a}\right)$$

กรณีที่ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่องและ $Y = h(X)$ เราสามารถหา p.d.f. ของ Y ได้จาก

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y)$$

กรณีที่ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มไม่ต่อเนื่อง เราสามารถหา p.f. ของ $y = h(X)$ ได้โดยตรงจาก

$$f_Y(y) = P(Y = y) = P(h(X) = y)$$

หรือ

$$f_Y(y) = P(X = h^{-1}(y)) = f_X(h^{-1}(y))$$

ตัวอย่างที่ 2-6.1 X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มไม่ต่อเนื่องที่มีฟังก์ชันน่าจะเป็น f(x) ดังนี้

$$f(x) = \frac{1}{25}(2x + 5), \quad x = -2, -1, 0, 1, 2$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

จงหา

ก. p.f. ของ $Y = 3X - 2$

ข. c.d.f. ของ $Y = 4X^2$

วิธีทำ

ก. $f(y) = P(Y = y)$

$= P(3X - 2 = y)$

$= P(X = \frac{1}{3}(y + 2))$

$\Rightarrow f(y) = \frac{1}{25}(\frac{2}{3}(y + 2) + 5)$, $y = -6-2, -3-2, 0-2, 3-2, 6-2$

$$f(y) = \frac{1}{75}(2y+19) \quad . \; y = -8, -5, -2, 1, 4$$

$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

ข. ในที่นี้ $a = 4, \; b = c = 0$

อาศัยสูตร (2-6.i) เราจะได้

$$F_Y(y) = F_X\left(\frac{\sqrt{y}}{2}\right) - \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} F_X\left(-\frac{\sqrt{y}}{2} - h\right) = F_X\left(\frac{\sqrt{y}}{2}\right) - F_X\left(-\frac{\sqrt{y}}{2}\right)$$

เมื่อ $x = 0, \; y = 4(0) = 0$

$$\Rightarrow \quad F_Y(0) = F_X(0) - F_X(-0^-) = \frac{1}{25}(2.0+5) = \frac{1}{5}$$

เมื่อ $x = \pm 1, \; y = 4(\pm 1)^2 = 4$

$$\Rightarrow F_Y(4) = F_X(1) - F_X(-1^-)$$

$$= f(-1) + f(0) + f(1)$$

$$= \frac{1}{25}(-2+5+0+5+2+5) = \frac{3}{5}$$

เมื่อ $x = \pm 2, \; y = 4(\pm 2)^2 = 16$

$$\Rightarrow \quad F_Y(16) = F_X(2) - F_X(-2^-) = F_X(2) = 1$$

$\Rightarrow$ c.d.f. ของ $Y = 4X^2$ ก็คือ

$$F(y) = 0 \quad , \quad y < 0$$

$$= \frac{1}{5} \quad , \quad 0 \leqslant y < 4$$

$$= \frac{3}{5} \quad , \quad 4 \leqslant y < 16$$

$$= 1 \quad , \quad y \geqslant 16$$

ตัวอย่างที่ 2-6.2 กำหนด

$$f(x) = \frac{1}{3}, \quad -1 < x < 2$$

$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

เป็น p.d.f. ของ X จงหา c.d.f. และ p.d.f. ของ Y เมื่อกำหนด Y ดังนี้

ก. $Y = 2X + 3$

ข. $Y = X^2$

วิธีทำ

$$F_X(x) = \int_{-1}^{x} \frac{1}{3}dx = \frac{x}{3}\Big|_{-1}^{x} = \frac{x}{3} + \frac{1}{3}, -1 < x < 2$$

ก. อาศัยบทแทรก 4 สูตร (2-6.5), a = 2, b = 3 จะได้

$$F(y) = F_X\left(\frac{y-3}{2}\right), 2(-1) + 3 < y < 2.2 + 3$$

$$= \frac{\frac{Y-3}{2}}{3} + \frac{1}{3}, 1 < y < 7$$

$\Rightarrow$ c.d.f. ของ Y = 2X + 3 ก็คือ

$$F(y) = 0 \quad , Y \leqslant 1$$

$$= \frac{y-1}{6} \quad , 1 < y < 7$$

$$= 1 \quad , y \geqslant 7$$

$$\frac{d}{dy}F(y) = \frac{d}{dy}\left(\frac{y-1}{6}\right) = \frac{1}{6}, 1 < y < 7$$

นอกนั้นเป็น 0 เพราะ $\frac{d}{dy}$ (ค่าคงที่) = 0

$\Rightarrow$ p.d.f. ของ Y = 2X + 3 คือ

$$f(y) = \frac{1}{6} \quad , 1 < y < 7$$

$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

ข. อาศัยสูตร (2-6.7), a = 1, b = c = 0

$$F_Y(Y) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}^-), \text{ ในที่นี้ } F_X(-\sqrt{y}^-) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} F_X(-\sqrt{y} - h)$$

ถ้า $-1 < x < 1$ แล้ว $0 \leqslant y < 1$ จะได้

$$F_Y(y) = \left(\frac{\sqrt{y}}{3} + \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{-\sqrt{y}}{3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{2\sqrt{y}}{3}$$

ถ้า $1 \leqslant x < 2$ แล้ว $1 \leqslant y < 4$ จะได้

$$F_Y(y) = \left(\frac{\sqrt{y}}{3} + \frac{1}{3}\right) - 0 = \frac{\sqrt{y}+1}{3}$$

$$F_Y(4) = \frac{\sqrt{4}+1}{3} = 1$$

ดังนั้น c.d.f. ของ $Y = X^2$ ก็คือ

$$\begin{aligned} F(y) &= 0 &&, \ y < 0 \\ &= \frac{2\sqrt{y}}{3} &&, \ 0 \leqslant y < 1 \\ &= \frac{\sqrt{y}+1}{3} &&, \ 1 \leqslant y < 4 \\ &= 1 &&, \ y \geqslant 4 \end{aligned}$$

เนื่องจาก

$$\frac{d}{dy}(0) = 0 = \frac{d}{dy}(1)$$

และ $\frac{d}{dy}\left(\frac{2\sqrt{y}}{3}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}$,

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{\sqrt{y}+1}{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

ดังนั้น p.d.f. ของ $Y = X^2$ คือ

$$\begin{aligned} f(y) &= \frac{1}{3\sqrt{y}} &&, \ 0 \leqslant y < 1 \\ &= \frac{1}{6\sqrt{y}} &&, \ 1 \leqslant y < 4 \\ &= 0 && \text{อื่น ๆ} \end{aligned}$$

แบบฝึกหัดที่ ๓.๑

1. X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น f(x) กำหนดไว้ดังนี้

$$f(x) = \frac{1}{5} \ , \quad 0 < x < 5$$

$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

จงหา p.d.f. และ c.d.f. ของ $Y = 2X - 5$

2. ฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X ถูกกำหนดไว้ดังนี้

$$f(x) = \frac{1}{2} \ , \quad x = 0$$

$$= \frac{1}{4} k e^{-x^2} \ , \ x = -1, 1$$

$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

2.1 จงหาค่าของ k

2.2 ถ้า $Y = 1 - X^2$ จงหา p.f. ของ Y

3. กำหนด

$$f(x) = x + \frac{1}{2} \ , \quad 0 < x < 1$$

$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นของ Y จงหา

3.1 c.d.f. ของ X

3.2 c.d.f. และ p.d.f. ของ $Y = X^2$

3.3 $P(4Y > 1)$

4. x เป็นตัวแปรเชิงสุ่มทีมีฟังก์ชันน่าจะเป็น f(x) ดังนี้

$$f(x) = \frac{1}{5} \ , \ x = -1, \ 0, \ 1, \ 2, \ 3$$

$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

จงหา

4.1 p.f. และ c.d.f. ของ $Y = X^2$

4.2 มัธยฐานของ $Y = X^2 + 2X - 1$

4.3 $P(3 - 2x \leqslant y)$

5. X เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม ซึ่งมีฟังก์ชันการแจกแจงสะสม F(x) ดังนี้

$$
F(x) = \begin{cases} 0 , & x < 0 \\ x , & 0 \leqslant x < 1 \\ 1 , & x \geqslant 1 \end{cases}
$$

จงหา

5.1 $P(\frac{1}{5} < X < \frac{1}{2})$, $P(\frac{X}{1-x} < \frac{1}{3})$

5.2 c.d.f. และ p.d.f. ของ $Y = \frac{1}{X}$

5.3 c.d.f. และ p.d.f. ของ $Y = -\ln X$

2-7 ตัวแปรเชิงสุ่มดัชนี (INDICATOR RANDOM VARIABLE)

ตัวแปรเชิงสุ่มที่น่าสนใจและนำไปใช้ประโยชน์ได้มากประเภทหนึ่งก็คือ ตัวแปรเชิงสุ่ม ซึ่งมีค่าที่เป็นไปได้เพียง 2 ค่าเท่านั้น คือ 0 กับ 1 นั่นคือ เรามีเหตุการณ์ A ซึ่งเป็นซับเซท ของ S และ X_A เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีสมบัติดังนี้

$$
\begin{aligned} X_A(s) &= 1 \quad \text{ถ้า } s \text{ อยู่ใน } A \\ &= 0 \quad \text{ถ้า } s \text{ ไม่อยู่ใน } A \end{aligned}
$$

เราเรียก X_A ว่าเป็นตัวแปรเชิงสุ่มดัชนี (indicator random variable) หรือบางทีก็เรียกว่า ฟังก์ชันดัชนี (indicator function) และใช้สัญญลักษณ์แทนด้วย I_A

เราให้นิยามของตัวแปรเชิงสุ่มดัชนี ดังนี้

นิยาม ตัวแปรเชิงสุ่มดัชนี (indicator random variable) ก็คือตัวแปรซึ่งมีค่าที่เป็นไปได้เพียง 2 ค่า คือ 0 กับ 1 เท่านั้น

โดยทั่วไปเมื่อเราพูดถึงตัวแปรเชิงสุ่มดัชนี เราจะหมายถึงตัวแปรเชิงสุ่มของเหตุการณ์ใด ๆ ซึ่งเป็นซับเซทของกลุ่มผลทดลอง S การหาฟังก์ชันน่าจะเป็นและฟังก์ชันการแจกแจงสะสม ของตัวแปรเชิงสุ่มดัชนีก็คือ การคำนวณค่าความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์นั้น หรือความ-น่าจะเป็น ที่เหตุการณ์นั้นจะไม่เกิดขึ้นนั่นเอง หมายความว่า ถ้าเรามี X_A เป็นตัวแปรเชิงสุ่มดัชนี ซึ่งกำหนด ไว้ดังนี้

$$X_A(s) = 1 \text{ , ถ้า } s \text{ อยู่ใน } A$$
$$\quad\quad\;\; 0 \text{ , ถ้า } s \text{ ไม่อยู่ใน } A$$

แล้ว

$$P(X_A = 1) = P(A)$$

และ $P(X_A = 0) = P(A')$

นั่นคือ เราหาฟังก์ชันน่าจะเป็น $f(x)$ ของตัวแปรเชิงสุ่มดัชนี X_A ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} f(x) &= P(A') \;,\; x = 0 \\ &= P(A) \;,\; x = 1 \\ &= 0 \text{ อื่น ๆ} \end{aligned} \quad \text{.........(2-7.1)}$$

จากผลที่ได้ สามารถคำนวณหาฟังก์ชันการแจกแจงสะสม $F(x)$ ของ X_A ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} F(x) &= 0 \;,\; x < 0 \\ &= P(A') \;,\; 0 \leqslant x < 1 \\ &= 1 \;,\; x \geqslant 1 \end{aligned} \quad \text{.........(2-7.2)}$$

ตัวอย่างที่ 2-7.1 มีลูกหิน 7 ลูก หมายเลข 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 อยู่ในกล่อง หยิบลูกหิน 1 ลูก จากกล่องอย่างสุ่ม กำหนดตัวแปรเชิงสุ่มดัชนี X_A ดังนี้

$$X_A = 1 \text{ ถ้าหยิบได้หินที่มีเลขคู่}$$
$$X_A = 0 \text{ อื่น ๆ}$$

จงหาฟังก์ชันน่าจะเป็นและฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ X_A

วิธีทำ

A เป็นเหตุการณ์ที่หยิบได้หินที่มีเลขคู่

$\Rightarrow P(A) = \frac{3}{7}$ และ $P(A') = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$

ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X_A แล้ว

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{4}{7} \;,\; x = 0 \\ &= \frac{3}{7} \;,\; x = 1 \\ &= 0 \text{ อื่น ๆ} \end{aligned}$$

และฟังก์ชันการแจกแจงสะสม F(x) ของ X_A จะกำหนดได้ดังนี้

$$F(x) = 0 \quad , \quad x < 0$$
$$= \frac{4}{7} \quad , \quad 0 \leq x < 1$$
$$= 1 \quad , \quad x \geq 1$$

ตัวอย่างที่ 2-7.2 เอาเลขโดดหมายเลข 1, 2, 3, 4, 5 มาเขียนเป็นเลข 5 หลัก **จะสามารถเขียนได้กี่จำนวน ฟังก์ชันน่าจะเป็นและฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแปรเชิงสุ่มดัชนี X_A จะเป็น**อย่างไร ในเมื่อ

X_A = 1 ถ้าเป็นจำนวนเลขที่มีเลขหลักร้อยโตกว่าเลขหลักสิบและหลักหน่วย

= 0 อื่น ๆ

วิธีทำ

เอาเลขโดด 1, 2, 3, 4, 5 มาเขียนเป็นเลข 5 หลัก

จำนวนเลขที่จะเขียนได้ = 5! = 120 จำนวน

กำหนดเลขโดด j(j = 3, 4, 5) เป็นเลขหลักร้อย

ดังนั้น เลขจำนวนที่มีเลขหลักร้อยโตกว่าเลขหลักสิบและหลักหน่วยจะมีจำนวน

$$= \sum_{j=3}^{5} (j-1)^{(2)} \times 2 = 2 \times 1 \times 2 + 3 \times 2 \times 2 + 4 \times 3 \times 2 = 40$$

$$\Rightarrow \quad P(X_A = 1) = \frac{40}{120} = \frac{1}{3}$$

$$P(X_A = 0) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$\Rightarrow$ ฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X_A ก็คือ

$$f(x) = \frac{2}{3} \quad , \quad x = 0$$
$$= \frac{1}{3} \quad , \quad x = 1$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

และฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ X_A จะกำหนดได้ดังนี้

$$F(x) = 0 \quad , \quad x < 0$$

$$= \frac{2}{3} \quad , \quad 0 \leqslant x < 1$$

$$= 1 \quad , \quad x \geqslant 1$$

คุณสมบัติขั้นมูลฐานของตัวแปรเชิงสุ่มดัชนีที่สำคัญ ๆ ได้แก่

(2-7.3) $X_{A'} = 1 - X_A$

(2-7.4) $X_{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n} = X_{A_1} . X_{A_2} \ldots . X_{A_n}$

(2-7.5) $X_{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n} = 1 - (1 - X_{A_1})(1 \quad X_{A_2}) \ldots (1 - X_{A_n})$

พิสูจน์

(2-7.3) $X_{A'}$ (s) = 1 **ก็ต่อเมื่อ** s **อยู่ใน** A' **นั่นคือ** s **ไม่อยู่ใน** A

และเมื่อ s **ไม่อยู่ใน** A X,(s) **จะเท่ากับ** 0

ดังนั้น 1 – X,(s) = 1 = X,,(s) **ก็ต่อเมื่อ** $s \in A'$

ทำนองเดียวกัน 1 – X,(s) = 0 **ก็ต่อเมื่อ** $s \in A$

แสดงว่า

$$X_{A'} = 1 - X_A$$

(2-7.4)

$X_{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n}(s)$ = 1 **ก็ต่อเมื่อ** s **อยู่ในแต่ละเหตุการณ์** AI, A2, ... An

$X_{A_i}(s)$ = 1 **ก็ต่อเมื่อ** s **อยู่ใน** A_i, $\forall i$ = 1, 2, ... n

$X_{A_1} . X_{A_2} \ldots X_{A_n}$ = 1 **ก็ต่อเมื่อ** s **อยู่ในแต่ละเหตุการณ์** A_1, Az. . . . . A,,

สรุปได้ว่า

$$X_{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n} = X_{A_1} . X_{A_2} \ldots X_{A_n}$$

(2-7.5)

$X_{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n}(s)$ = 1 **ก็ต่อเมื่อ**

s **อยู่ในเหตุการณ์** A_1 **หรือ** A_2 **หรือ** ...A_n **อย่างน้อยที่สุด 1 เหตุการณ์**

และ $1 - X_{A_i}(s) = 0$ **ถ้า** s **อยู่ในเหตุการณ์** A,, i = 1, 2, ... n

9 $(I - X_{A_1})(1 - X_{A_2}) \ldots (1 - X_{A_n}) = 0$ **ถ้ามี** $1 - X_{A_i}$ **อย่างน้อยที่สุด 1 เทอมเป็น** 0

4 $(1 - X_{A_1})(1 - X_{A_2}) \ldots (1 - X_{A_n}) = 0$ **ถ้า** s **อยู่ใน** A; **อย่างน้อยที่สุด** 1 **เหตุการณ์**

นั่นคือ

$1 - (1 - X_{A_1})(1 - X_{A_2}) \ldots (1 - X_{A_n}) = 1$ **ในกรณีที่**

s **อยู่ในเหตุการณ์** A_i **อย่างน้อยที่สุด 1 เหตุการณ์**

$$\Rightarrow \quad X_{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n}(s) = 1 - (1 - X_{A_1})(1 - X_{A_2})\ldots(1 - X_{A_n})$$

เช่นเดียวกันกับตัวแปรเชิงสุ่มอื่น ๆ การศึกษาลักษณะของตัวแปรเชิงสุ่มดัชนี X_A นอกจากคุณสมบัติทั้ง 3 ข้อ และฟังก์ชันน่าจะเป็น ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมแล้ว เราสามารถบรรยายลักษณะ X_A จากค่าคาดหมาย ซึ่งจะพบว่า **ค่าคาดหมายของ X_A ก็คือความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A** นั่นเอง กล่าวคือ

$$E(X_A) = P(A) \qquad \ldots\ldots\ldots(2\text{-}7.6)$$

(เป็นการบ้านให้นักศึกษาพิสูจน์)

จากคุณสมบัติเหล่านี้ ทำให้เราสามารถใช้ตัวแปรเชิงสุ่มดัชนีได้อย่างกว้างขวางอาทิเช่น การคำนวณความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์เพียง r เหตุการณ์จากจำนวนเหตุการณ์ที่มีอยู่ n เหตุการณ์ ($r \leq n$) หรือการคำนวณความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์อย่างน้อยที่สุด 1 เหตุการณ์ หรือแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเซทของเหตุการณ์ต่าง ๆ

ประโยชน์ที่ใช้แพร่หลายมากของ X_A ก็คือการคำนวณค่าคาดหมายของตัวแปรเชิงสุ่ม หรือการหาการแจกแจง กรณีที่วิธีตรงไม่อาจคำนวณได้หรือยุ่งยากเกินไป ทั้งนี้โดยอาศัยสูตร-

$$E(\sum_i a_i X_i) = \sum_i a_i E(X_i)$$

ถ้าเรามีเหตุการณ์ 4 เหตุการณ์คือ A_1, A_2, A_3, A_4 ที่เรารู้ความน่าจะเป็นของแต่ละเหตุการณ์ หรือของกลุ่มเหตุการณ์ที่เกิดร่วมกัน แต่เราสนใจที่จะคำนวณความน่าจะเป็นที่เกิดเหตุการณ์เพียง 2 เหตุการณ์เท่านั้น เราสามารถคำนวณได้โดยอาศัยคุณสมบัติของ X_A ดังนี้

พิจารณาการเกิดขึ้นของ 2 เหตุการณ์แรกคือ A_1 และ A_2 อาศัย(2-7.4) เราจะได้

$$\begin{aligned}
X_{A_1 \cap A_2 \cap A_3' \cap A_4'} &= X_{A_1} X_{A_2} X_{A_3'} X_{A_4'} \\
&= X_{A_1} X_{A_2} (1 - X_{A_3})(1 - X_{A_4}) && \text{(สูตร 2-7.3)} \\
&= X_{A_1} X_{A_2} - X_{A_1} X_{A_2} X_{A_3} - X_{A_1} X_{A_2} X_{A_4} \\
&\quad + X_{A_1} X_{A_2} X_{A_3} X_{A_4} \\
&= X_{A_1 \cap A_2} - X_{A_1 \cap A_2 \cap A_3} - X_{A_1 \cap A_2 \cap a_4} \\
&\quad + X_{A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4} && \text{(สูตร 2-7.4)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(X_{A_1 \cap A_2 \cap A_3' \cap A_4'}) &= E(X_{A_1 \cap A_2}) - E(X_{A_1 \cap A_2 \cap A_3}) - E(X_{A_1 \cap A_2 \cap A_4}) + \\
&\quad E(X_{A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4})
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow P(A_1 \cap A_2 \cap A_3' \cap A_4') = P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)$$

(สูตร 2-7.6)

ในทำนองเดียวกัน

$$P(A_1 \cap A_2' \cap A_3 \cap A_4') = P(A_1 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_3 \cap A_4) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)$$
$$P(A_1 \cap A_2' \cap A_3' \cap A_4) = P(A_1 \cap A_4) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_4) - P(A_1 \cap A_3 \cap A_4) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)$$
$$P(A_1' \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4') = P(A_2 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3 \cap A_4) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)$$
$$P(A_1' \cap A_2 \cap A_3' \cap A_4) = P(A_2 \cap A_4) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_4) - P(A_2 \cap A_3 \cap A_4) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)$$
$$P(A_1' \cap A_2' \cap A_3 \cap A_4) = P(A_3 \cap A_4) - P(A_1 \cap A_3 \cap A_4) - P(A_2 \cap A_3 \cap A_4) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)$$

$\Rightarrow$ ความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์เพียง 2 เหตุการณ์ในจำนวน 4 เหตุการณ์

$$= \sum_{i_1<i_2} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) - 3 \sum_{i_1<i_2<i_3} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) + 6P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)$$

หรือ

$$P_{[2]} = \binom{2}{2} \sum_{i_1<i_2} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) - \binom{3}{2} \sum_{i_1<i_2<i_3} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3})$$
$$+ \binom{4}{2} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)$$

กล่าวได้ว่า ความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์เพียง 2 เหตุการณ์จากเหตุการณ์ทั้งหมด 4 เหตุการณ์ ซึ่งมีทางเกิดขึ้นได้ $\binom{4}{2}$ หนทาง และในจำนวนนี้จะประกอบด้วย $P(A_{i_1} \cap A_{i_2})$, $i_1 < i_2$, $\binom{2}{2}$ หนทาง $P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3})$, $i_1 < i_2 < i_3$, $\binom{3}{2}$ หนทาง และ $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)$ $\binom{4}{2}$ หนทาง ดังนั้น หากเรามีเหตุการณ์ n เหตุการณ์ เราสามารถคำนวณความน่าจะเป็นที่จะมีเหตุการณ์เกิดขึ้นเพียง r เหตุการณ์ $r \leqslant n$, หรือ $P_{[r]}$ ได้ในทำนองเดียวกัน นั่นคือ

อาศัยคุณสมบัติของตัวแปรเชิงสุ่มดัชนี เราคำนวณความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์เพียง r เหตุการณ์ $(r \leqslant n)$, $P_{[r]}$ ได้ดังนี้

$$P_{[r]} = \binom{r}{r} \sum_{i_1<i_2<..<i_r} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap .. \cap A_{i_r}) - \binom{r+1}{r} \sum_{i_1<i_2<..<i_{r+1}} P(A_{i_1} A_{i_2} .. A_{i_{r+1}}) -$$
$$+ \binom{r+2}{r} \sum_{i_1<i_2<..<i_{r+2}} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap .. \cap A_{i_{r+2}}) - \ldots \pm \binom{n}{r} P(A_1 \cap A_2 \cap .. \cap A_n) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (2\text{-}7.7)$$

พิสูจน์ พิจารณาการเกิดขึ้นของ r เหตุการณ์แรกและ n – r เหตุการณ์หลังไม่เกิดขึ้น $r \leqslant n$-

$$X_{A_1 \cap A_2 \cap .. \cap A_r \cap A_{r+1}' \cap ... \cap A_n'} = X_{A_1} X_{A_2} \ldots X_{A_r} X_{A_{r+1}'} \ldots X_{A_n'} \qquad \text{(จาก 2-7.4)}$$

$$= X_{A_1}X_{A_2}\ldots X_{A_r}(1 - X_{A_{r+1}})\ldots(1 - X_{A_n})$$ (จาก 2-7.3)

$$= X_{A_1}X_{A_2}\ldots X_{A_r}\left(1 - \sum_{1\leqslant i\leqslant n-r} X_{A_{r+i}} + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n-r} X_{A_{r+i}} X_{A_{r+j}} \pm X_{A_{r+1}} X_{A_{r+2}} \ldots X_{A_n}\right)$$

$$= X_{A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_r} - \sum_{1\leqslant i\leqslant n-r} X_{A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{r+i}} +$$

$$+ \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n-r} X_{A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{r+i}\cap A_{r+j}} - \ldots\ldots$$

$$\pm X_{A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n}$$ (จาก 2-7.4)

คำนวณค่าคาดหวังของทั้งสองข้าง นั่นคือ

$$E(X_{A_1\cap A_2\ldots\cap A_r\cap A'_{r+1}\ldots\cap A'_n}) = E(X_{A_1\cap A_2\ldots\cap A_r}) - \sum_{1\leqslant i\leqslant n-r} E(X_{A_1\cap A_2\ldots\cap A_{r+i}})$$

$$+ \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n-r} E(X_{A_1\cap A_2\ldots\cap A_{r+i}\cap A_{r+j}}) - \ldots$$

$$\pm E(X_{A_1\cap A_2\ldots\cap A_n})$$

อาศัยสูตร (Z-7.6) จะได้

$$P(A_1\cap A_2\ldots\cap A_r\cap A'_{r+1}\cap\ldots A'_n) = P(A_1\cap A_2\ldots\cap A_r) - \sum_{1\leqslant i\leqslant n-r} P(A_1\cap A_2\ldots\cap A_{r+i})$$

$$+ \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n-r} P(A_1\cap A_2\ldots\cap A_{r+i}\cap A_{r+j}) \ldots\ldots$$

$$\ldots\pm P(A_1\cap A_2\ldots\cap A_n)$$

แต่การเกิดขึ้นของ r เหตุการณ์ใด ๆ ในจำนวน n เหตุการณ์มีทางเป็นไปได้ $\binom{n}{r}$ หนทาง ในจำนวน $\binom{n}{r}$ หนทางนี้จะประกอบด้วย $P(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\ldots\cap A_{i_r})$, $i_1 < i_2 < \ldots < i_r$ เท่ากับ $\binom{r}{r}$ หนทาง $P(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\ldots\cap A_{i_{r+1}})$, $i_1 < i_2, \ldots < i_{r+1}$ เท่ากับ $\binom{r+1}{r}$ หนทาง $P(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\ldots\cap A_{i_{r+2}})$ เท่ากับ $\binom{r+2}{r}$ หนทาง, ... และ $P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)$ เท่ากับ $\binom{n}{r}$ หนทาง

ดังนั้น

ความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์เพียง r เหตุการณ์

$= P_{[r]}$

$$= \binom{r}{r}\sum_{i_1<i_2<\ldots<i_r} P(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\ldots\cap A_{i_r}) - \binom{r+1}{r}\sum_{i_1<i_2<\ldots<i_{r+1}} P(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\ldots\cap A_{i_{r+1}})$$

$$+ \binom{r+2}{r}\sum_{i_1<i_2<\ldots<i_{r+2}} P(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\ldots\cap A_{i_{r+2}}) - \ldots \pm \binom{n}{r} P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)$$

กรณีที่มีเหตุการณ์ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ เกิดขึ้น และเรารู้ค่าความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์ร่วมกัน k เหตุการณ์ $k = 1, 2, 3, \ldots$, หาก S_k เป็นผลบวกของความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์ k เหตุการณ์กล่าวคือ

$$S_1 = \sum_i P(A_i)$$

$$S_2 = \sum_{i<j} P(A_i\cap A_j)$$

$$S_k = \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_k} P(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\ldots\cap A_{i_k}),\ k = 1, 2, \ldots, n$$

ความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์อย่างน้อยที่สุด 1 เหตุการณ์ หรือ $P(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n)$ สามารถกำหนดได้ดังนี้

$$P(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n) = S_1 - S_2 + \ldots + (-1)^{n-1} S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} S_k \qquad \ldots\ldots\ldots(2\text{-}7.8)$$

เราเรียกสูตรที่ได้นี้ว่า Inclusion-Exclusion Formula

พิสูจน์

$$X_{A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n} = 1 - (1 - X_{A_1})(1 - X_{A_2})\ldots(1 - X_{A_n}) \qquad \text{(จาก 2-7.5)}$$

$$= \sum_{1\leqslant i\leqslant n} X_{A_i} - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} X_{A_i}X_{A_j}$$

$$+ \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n} X_{A_i}X_{A_j}X_{A_k} - \ldots\ldots \pm X_{A_1}X_{A_2}\ldots X_{A_n}$$

$$= \sum_{1\leqslant i\leqslant n} X_{A_i} - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} X_{A_i\cap A_j} + \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n} X_{A_i\cap A_j\cap A_k} - \ldots$$

$$\pm X_{A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n} \qquad \text{(จาก 2-7.4)}$$

หาค่าคาดหมายของทั้งสองข้าง

$E(X_{A_1 \cup A_2 \cup \quad \cup A_n})$

$$= E(\sum_{1 \leq i \leq n} X_{A_i}) - E(\sum_{1 \leq i < j \leq n} X_{A_i \cap A_j}) + E(\sum_{1 \leq i < j < k \leq n} X_{A_i \cap A_j \cap A_k})$$

$$\pm E(X_{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n})$$

$$= \sum_{1 \leq i \leq n} E(X_{A_i}) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} E(X_{A_i \cap A_j}) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} E(X_{A_i \cap A_j \cap A_k})$$

$$- - + E(X_{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n})$$

ดังนั้น

$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)$

$$= \sum_{1 \leq i \leq n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < k \leq n} P(A_i \cap A_j \cap A_k)$$

$$- \pm P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$$ (จาก 2-7.6)

$$= S_1 - S_2 + s, \quad \ldots \pm S_n$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} S_k$$

ผลที่ได้จาก (2-7.7) และ (2-7.8) นี้สามารถนำไปใช้ในการหาตัวแบบความน่าจะเป็นหรือสูตรการแจกแจงของตัวแปรเชิงสุ่ม X ได้ นั่นคือ เราอาศัยคุณสมบัติของตัวแปรเชิงสุ่มดัชนีในการหาตัวแบบน่าจะเป็นหรือสูตรการแจกแจงของ X บางประเภท

หากเรากำหนดตัวแปรเชิงสุ่มดัชนี X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ ดังนี้

$X_i(s) = 1$ ถ้า s อยู่ใน A_i

$\quad\quad = 0$ ถ้า s ไม่อยู่ใน A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$

และ $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$

อาศัยสูตร (2-7.7) และ (2-7.8) เรากำหนดสูตรการแจกแจงของ X ได้ดังนี้

$$P(X = 0) = 1 - P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)$$

$$= 1 - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} S_k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k S_k \quad \ldots\ldots\ldots (2\text{-}7.9)$$

$$P(X = x) = P_{[x]} = \binom{x}{x} \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_x} P(\bigcap_{k=1}^{x} A_{i_k}) - \binom{x+1}{x} \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_{x+1}} P(\bigcap_{k=1}^{x+1} A_{i_k})$$

$$+ \binom{x+2}{x} \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_x} P(\bigcap_{k=1}^{x+2} A_{i_k}) - \ldots \pm \binom{n}{x} p(\bigcap_{k=1}^{n} A_k)$$

$$= \binom{x}{x} S_x - \binom{x+1}{x} S_{x+1} + \binom{x+2}{x} S_{x+2} \quad \ldots \pm \binom{n}{x} S_n$$

$$= \sum_{k=0}^{n-x} (-1)^k \binom{x+k}{x} S_{x+k}, \; x = 0, 1, 2, \ldots, n \quad \ldots\ldots\ldots(2\text{-}7.10)$$

เมื่อ $x = 0$ เทอมที่ 1 จะมีค่าเป็น 1 สูตร (2-7.10) ก็คือ สูตร (2-7.9) นั่นเอง

ตัวอย่างที่ 2-7.3 สมมติว่า A, B, C เป็นเหตุการณ์ และ X_A, X_B, X_C เป็นตัวแปรเชิงสุ่มดัชนีของเหตุการณ์เหล่านี้ตามลำดับ กำหนดตัวแปรเชิงสุ่ม X

$$X = X_A + X_B + X_C$$

ก. จงพิสูจน์ว่า

$$E(X) = P(A) + P(B) + P(C)$$

ข. จงหาสูตรการแจกแจงของ X ในเทอมของความน่าจะเป็นของเหตุการณ์เหล่านี้

ค. อาศัยสูตร $E(X) = \sum_{x=0}^{3} P(X = x)$ จงแสดงให้เห็นจริงว่า

$$E(X) = P(A) + P(B) + P(C)$$

วิธีทำ

ก) $\quad X = X_A + X_B + X_C$

$$E(X) = E(X_A + X_B + X_C) = E(X_A) + E(X_B) + E(X_C)$$

$\Rightarrow \quad E(X) = P(A) + P(B) + P(C)$ (จาก 2-7.6)

ข) อาศัยสูตร (2-7.9) และ (2-7.10) ในที่นี้ $n = 3, x = 0, 1, 2, 3$

$$P(X = 0) = 1 - S_1 + S_2 - S_3$$

$$= 1 - P(A) - P(B) - P(C) + P(A\cap B) + P(A\cap C) + P(B\cap C) - P(A\cap B\cap C)$$

$$P(X = 1) = \sum_i P(A_i) - \binom{2}{1} \sum_{1<j} P(A_i\cap A_j) + \binom{3}{1} P(A\cap B\cap C)$$

$$= P(A) + P(B) + P(C) - 2P(A\cap B) - 2P(A\cap C) - 2P(B\cap C)$$

$$+ 3P(A\cap B\cap C)$$

$$P(X = 2) = \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) - \binom{3}{2} P(A\cap B\cap C)$$

$$= P(A\cap B) + P(A\cap C) + P(B\cap C) - 3P(A\cap B\cap C)$$

$$P(X = 3) = \binom{3}{3} P(A\cap B\cap C) = P(A\cap B\cap C)$$

ค) จาก $E(X) = \sum_{x=0}^{3} x\,P(X = x)$

$$\Rightarrow \quad E(X) = 0\,P(X = 0) + 1.P(X = 1) + 2P(X = 2) + 3P(X = 3)$$

$$= 0 + \{P(A) + P(B) + P(C) - 2P(A\cap B) - 2P(A\cap C) - 2P(B\cap C)$$

$$+ 3P(A\cap B\cap C)\} + 2\{P(A\cap B) + P(A\cap C) + P(B\cap C) - 3P(A\cap B\cap C)\}$$

$$+ 3P(A\cap B\cap C)$$

$$E(X) = P(A) + P(B) + P(C)$$

แบบฝึกหัดที่ 2-7

1. อาศัยคุณลักษณะของตัวแปรเชิงสุ่มดัชนี (indicator random variable) จงพิสูจน์ว่า

   1.1 $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$

   1.2 $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$

   1.3 $P(A\cap B) = P(A) + P(B) - P(A\cup B)$

   1.4 $P(A\cap B\cap C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A\cup B) - P(A\cup C) - P(B\cup C) + P(A\cup B\cup C)$

   1.5 $X_A \leqslant X_B$ ก็ต่อเมื่อ $A \subseteq B$

2. กำหนด X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มดัชนีของ A ถ้า $P(A) = \frac{1}{5}$ จงหา

   2.1 ฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X

   2.2 ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ X

   2.3 ค่าคาดหมายของ $5X^2$

3. ในการทดลองโยนเหรียญ 5 ครั้ง กำหนดตัวแปรเชิงสุ่มดัชนี

   $X_i = 1$ ถ้าโยนครั้งที่ i ได้หัว, $i = 1, 2, 3, 4, 5$

   $= 0$ อื่น ๆ

   และ $X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$

จงหา

3.1 $P(X = 3)$

3.2 $E(X)$

4. มีเลขโดด 6 ตัว คือ 0, 1, 2, 3, 4 และ 5 เอาตัวเลขเหล่านี้มาสร้างเป็นเลข 3 หลัก ซึ่งมีค่าเกิน 100 โดยไม่ให้ซ้ำกัน กำหนดตัวแปรเชิงสุ่มดัชนี X_A ดังนี้

$X_A = 1$ ถ้าเป็นเลขคี่ที่มีค่าเกิน 100

$= 0$ อื่น ๆ

จงหา

4.1 ฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X_A

4.2 ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ $Y = 2X_A + 3$

4.3 ค่าคาดหมายของ X_A^r

5. สามีภรรยาคู่หนึ่งวางแผนครอบครัวไว้ว่า จะมีลูกเพียง 3 คน เขาคาดว่าโอกาสที่จะได้ลูกชายเป็นสองเท่าของที่จะได้ลูกสาว กำหนดตัวแปรเชิงสุ่มดัชนี X_i, $i = 1, 2, 3$ ดังนี้

$X_i = 1$ ถ้าลูกคนที่ i เป็นชาย, $i = 1, 2, 3$

$= 0$ อื่น ๆ

และ $X = X_1 + X_2 + X_3$

จงหาฟังก์ชันการแจกแจงของ X

2.8 การแจกแจงแบบผสม (Mixed Distributions)

เท่าที่กล่าวมาแล้ว เราได้ศึกษาถึงลักษณะของตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่อง หรือตัวแปรเชิงสุ่มไม่ต่อเนื่อง อย่างใดอย่างหนึ่ง ซึ่งในการประยุกต์ส่วนมากเราจะพบตัวแปรเชิงสุ่มทั้ง 2 แบบนี้ อย่างไรก็ตาม ในบางโอกาสเราจะพบตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นทั้งแบบไม่ต่อเนื่อง และแบบต่อเนื่องรวมกัน กล่าวคือ ในการทดลองเชิงสุ่มบางประเภท เรานิยามความน่าจะเป็นที่เป็นบวกให้กับแต่ละผลลัพธ์ และในเวลาเดียวกันได้นิยามความน่าจะเป็นให้กับผลลัพธ์ที่อยู่ในช่วงหนึ่ง โดยที่ผลลัพธ์ในตอนหลังเป็นผลที่ตามมาจากครั้งแรก และแต่ละผลลัพธ์ในช่วงนี้จะมีค่าความน่าเป็น เท่ากับ 0 ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 2-8.1 ในการทดลองเชิงสุ่มโดยการโยนเหรียญ 1 อัน ถ้าได้หัว จะโยนเหรียญซึ่งหน้าหนึ่งเป็นหมายเลข 1 ส่วนอีกหน้าหนึ่งเป็นหมายเลข 2 ในทางตรงข้าม ถ้าโยนเหรียญอันแรกได้ก้อย จะเลือกจุดอย่างสุ่มในช่วง $[0, 1]$ ให้ X เป็นค่าตัวเลขที่ปรากฏในผลการทดลองสุดท้าย จงหาฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ X

วิธีทำ

หากโยนครั้งแรกได้หัว ให้โยนเหรียญที่มีหมายเลข 1, 2 ดังนั้น

$$P(X = x) > 0 \quad \text{เมื่อ } x = 1, 2$$

หากโยนครั้งแรกได้ก้อย เลือกจุดสุ่มในช่วง $[0, 1]$ ดังนั้น

$$P(0 \leqslant X \leqslant 1) > 0$$

และ $P(X = x) = 0 \quad , \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$

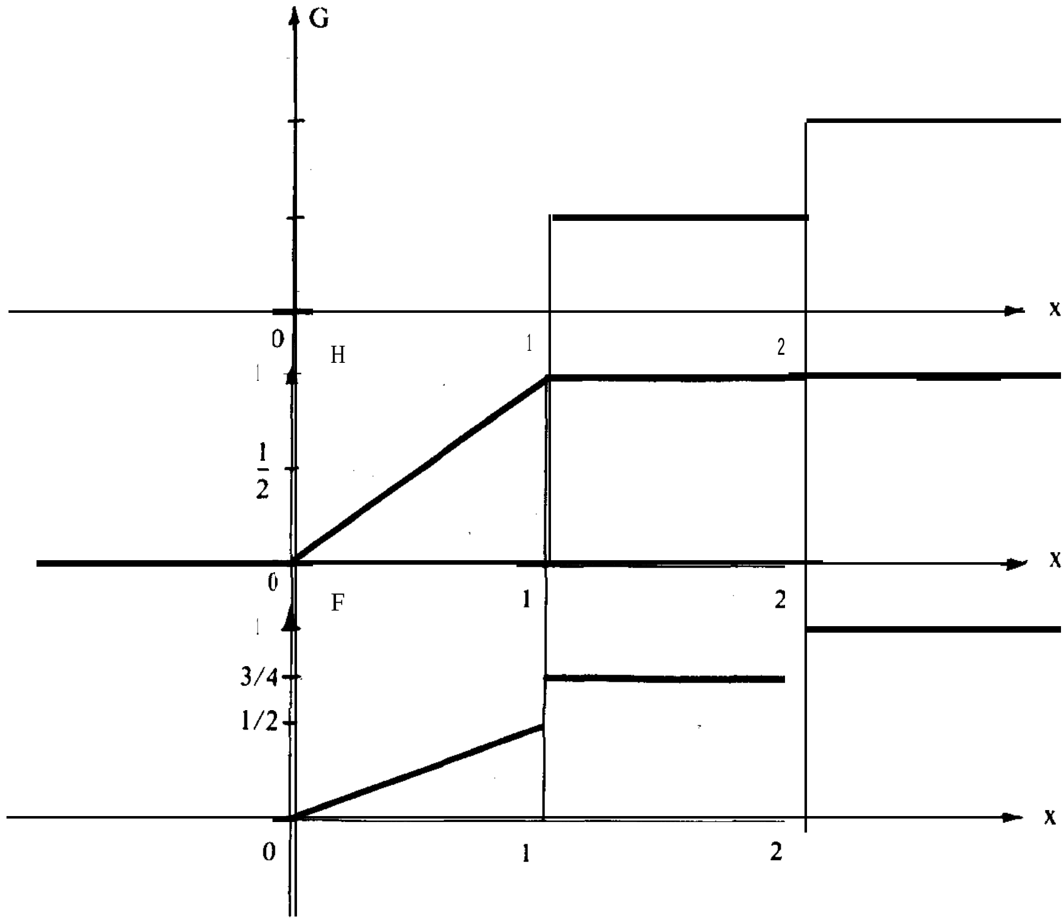
ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ X จะกำหนดได้ดังนี้

$$\begin{aligned} F(x) &= 0 &&, \ x < 0 \\ &= x/2 &&, \ 0 \leqslant x < 1 \\ &= 3/4 &&, \ 1 \leqslant x < 2 \\ &= 1 &&, \ x \geqslant 2 \end{aligned}$$

ในลักษณะเช่นนี้ จะเห็นว่า F เป็นแบบผสม (mixture) หรือ "convex combination" ของการแจกแจงสะสม G และ H ในเมื่อ G เป็นฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของค่าตัวเลขที่ได้จากการโยนเหรียญครั้งที่ 2 และ H เป็นฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวเลขที่เลือกจาก $[0, 1]$ แบบสุ่ม ดังนั้น

$$\begin{aligned} G(x) &= 0 &&, \ x < 1 \\ &= \tfrac{1}{2} &&, \ 1 \leqslant x < 2 \\ &= 1 &&, \ x \geqslant 2 \end{aligned} \qquad \text{และ} \qquad \begin{aligned} H(x) &= 0 &&, \ x < 0 \\ &= x &&, \ 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ &= 1 &&, \ x > 1 \end{aligned}$$

แสดงได้ด้วยแผนภาพดังนี้



จากผลที่ได้ แสดงว่า

$$F(x) = \frac{1}{2} \cdot G(x) + \frac{1}{2} H(x) , \quad -\infty < x < \infty$$

ในเมื่อ G เป็นฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง ฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X จะกำหนดได้ดังนี้

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{2} \quad , \quad x = 1, 2 \\ &= 0 \quad , \quad \text{อื่น ๆ} \end{aligned}$$

และ H เป็นฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแปรเชิงสุ่มแบบต่อเนื่อง ฟังก์ชันความหนาแน่นของ X จะกำหนดได้ดังนี้

$$\begin{aligned} h(x) &= 1 \quad , \quad 0 < x < 1 \\ &= 0 \quad , \quad \text{อื่น ๆ} \end{aligned}$$

สรุปได้ว่า เมื่อโยนเหรียญครั้งแรกได้หัว ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวเลขที่ได้ในผลสุดท้ายคือ G แต่ถ้าโยนครั้งแรกได้ก้อย ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมคือ H ฟังก์ชันการแจกแจงสะสม แต่ละฟังก์ชันที่ได้ ต่างมีโอกาสเกิดขึ้นได้เท่า ๆ กัน ด้วยความน่าจะเป็น $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ และฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของการทดลองเชิงประกอบ จะเป็นค่าเฉลี่ยของ G กับ H เราจึงให้นิยามของ ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมแบบผสมได้ดังต่อไปนี้

นิยาม 2-8.1 หาก $0 \leqslant p \leqslant 1$ แล้ว F ซึ่งกำหนดไว้โดย

$$F(x) = p.G(x) + (1 - p).H(x) \quad , \quad -\infty < x < \infty$$

จะเป็นฟังก์ชันการแจกแจงสะสม ซึ่งเรียกว่า การผสมกันของ G กับ H

p และ 1 − p เป็นค่าความน่าจะเป็น หรือน้ำหนักที่จะทำให้การทดลองครั้งที่ 2 มีฟังก์ชันการแจกแจงสะสมเป็น G และ H ตามลำดับ

โดยที่ฟังก์ชันการแจกแจงแบบผสมเป็นการรวมกันระหว่าง การแจกแจงแบบไม่ต่อเนื่องและแบบต่อเนื่อง กล่าวคือ ณ จุดที่มีค่าความน่าจะเป็น ฟังก์ชันการแจกแจงจะไม่ต่อเนื่อง ซึ่งจะทำให้มีความสูงของขั้นบันไดที่จุดนั้น เท่ากับ ค่าของความน่าจะเป็นที่กำหนดให้ ส่วนฟังก์ชันการแจกแจง ณ จุดอื่น ๆ จะมีลักษณะต่อเนื่อง ดังนั้นในการคำนวณค่าคาดหมายของตัวแปรแบบผสมจึงต้องอาศัยฟังก์ชันของ g และ h และนิยามไว้ดังนี้

นิยาม 2-8.2 X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบผสม ที่มีค่าเป็นไปได้เท่ากับ a_i ด้วยความน่าจะเป็น $g(a_i)$, $i = 1, 2, \ldots$ และมีค่าต่อเนื่องซึ่งมีฟังก์ชันความหนาแน่น $h(x)$ ด้วยน้ำหนัก p และ 1 − p ตามลำดับ ค่าคาดหมายของ X จะกำหนดได้ดังนี้

$$E(X) = p\sum_i a_i g(a_i) + (1 - p) \int_{-\infty}^{\infty} xh(x)dx$$

ค่าคาดหมายจะหาค่าได้ หาก

$$\sum_i |a_i| g(a_i) < \infty \quad \text{และ} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |x| h(x)dx < \infty$$

ตัวอย่างที่ 2-8.2 เลือกจุดอย่างสุ่มระหว่าง -1 กับ 2 ถ้าค่าที่เลือกได้เป็นลบ ให้ค่าตัวเลขในผลสุดท้ายเป็น 0 ถ้าค่าที่เลือกได้มากกว่า 1 ให้ค่าตัวเลขในผลสุดท้ายเป็น 1 แต่ถ้าค่าที่เลือกได้อยู่ระหว่าง 0 กับ 1 ให้ค่าตัวเลขในผลสุดท้ายเป็นค่าเดียวกันกับที่สุ่มได้ หาก X เป็นตัวเลขที่ได้ในผลสุดท้าย

(ก) จงหาฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ X

(ข) จงเขียน F ในรูปของแบบผสมระหว่าง G (การแจกแจงสะสมของแบบไม่ต่อเนื่อง) กับ H (การแจกแจงสะสมของแบบต่อเนื่อง)

(ค) จงหาค่าคาดหมายของ X

วิธีทำ (ก)

ขั้นแรก เลือกจุดระหว่าง -1 กับ 2 และแบ่งเป็น 3 กรณี คือ เลือกจุดระหว่าง -1 กับ 0, 0 กับ 1 และ 1 กับ 2 ดังนั้นฟังก์ชันการแจกแจงสะสมที่เกิดขึ้นในแต่ละกรณี จะมีโอกาสเกิดขึ้นด้วยความน่าจะเป็นเท่ากัน คือ $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$

ขั้นต่อไป หาฟังก์ชันการแจกแจงแบบผสมของ X คือ $F(x) = P(X \leqslant x)$ ดังนี้

เมื่อจุดที่เลือกได้อยู่ระหว่าง -1 กับ 0

$$F(x) = 0 \quad , \quad x < 0$$

เมื่อจุดที่เลือกได้อยู่ระหว่าง 0 กับ 1

$$F(x) = \frac{1}{3} + \frac{x}{3} \quad , \quad 0 \leqslant x < 1$$

เมื่อจุดที่เลือกได้มีมากกว่า 1

$$F(x) = 1 \quad , \quad x \geqslant 1$$

ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ X กำหนดได้โดย

$$\begin{aligned} F(x) &= 0 && , \quad x < o \\ & \frac{1+x}{3} && , \quad 0 \leqslant x < 1 \\ &= 1 && , \quad x \geqslant 1 \end{aligned}$$

(ข)

ค่าที่เป็นไปได้ของตัวแปรเชิงสุ่มไม่ต่อเนื่อง X จะมี 2 ค่าคือ 0(เลือกจุดครั้งแรกได้ค่าลบ) กับ 1 (เลือกจุดครั้งแรกได้ค่ามากกว่า 1) ดังนั้นฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแปรเชิงสุ่มไม่ต่อเนื่อง X จะกำหนดได้โดย

$$
\begin{aligned}
G(x) &= 0 \quad , \quad x < 0 \\
&= \frac{1}{2} \quad , \quad 0 \leqslant x < 1 \\
&= 1 \quad , \quad x \geqslant 1
\end{aligned}
$$

ค่าที่เป็นไปได้ของตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่อง X จะเป็นค่าในช่วง [0, 1] ดังนั้นฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ X แบบต่อเนื่อง จะกำหนดได้โดย

$$
\begin{aligned}
H(x) &= 0 \quad , \quad x < 0 \\
&= x \quad , \quad 0 \leqslant x < 1 \\
&= 1 \quad , \quad x \geqslant 1
\end{aligned}
$$

เราแสดงค่าของ F ในแบบผสมของ G กับ H ได้ดังนี้

$$F(x) = \frac{2}{3} G(x) + \frac{1}{3} H(x)$$

(ค)

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \frac{2}{3} \sum_{x=0}^{1} x.g(x) + \frac{1}{3} \int_0^1 x \; h(x) \, dx \\
&= \frac{2}{3} \sum_{x=0}^{1} x \{ G(x) - G(x-1) \} + \frac{1}{3} \int_0^1 x \; dH(x) \\
&= \frac{2}{3} \{ 0 + (1 - \frac{1}{2}) \} + \frac{1}{3} \int_0^1 x \, dx \\
&= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

แบบฝึกหัดที่ 2-8

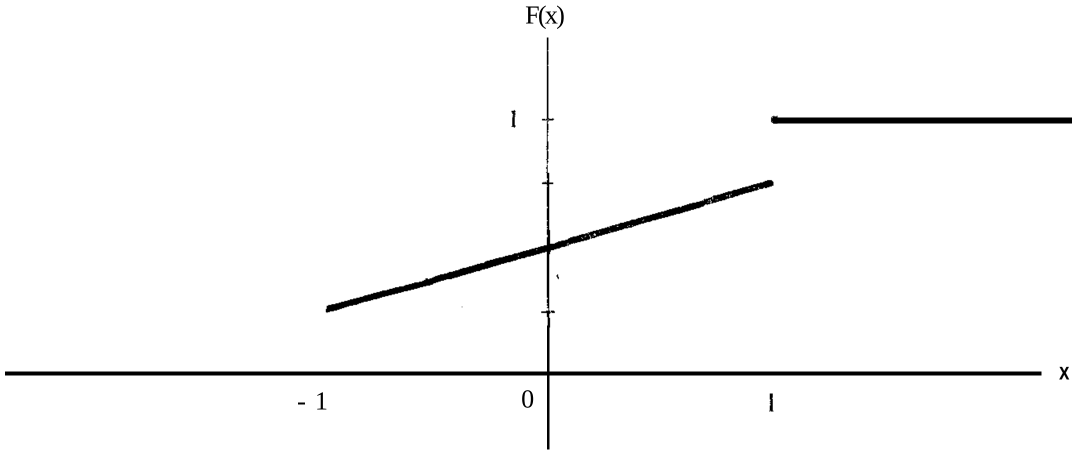
1. X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบผสมที่มีฟังก์ชันสะสม F(x) กำหนดไว้โดย

$$
\begin{aligned}
F(x) &= 0 \quad , \quad x < 0 \\
&= x^2/4 \quad , \quad 0 \leqslant x < 1 \\
&= 1/2 \quad , \quad 1 \leqslant x < 2 \\
&= x/3 \quad , \quad 2 \leqslant x < 3 \\
&= 1 \quad , \quad x \geqslant 3
\end{aligned}
$$

1.1) จงเขียนกราฟแสดง $F(x)$

1.2) จงคำนวณค่าของ $P(0 < x < 1)$, $P(0 < x \leqslant 1)$, $P(X = 1)$, $P(1 \leqslant x \leqslant 2)$

2. จากกราฟของฟังก์ชันการแจกแจงสะสม $F(x)$



จงคำนวณค่าของ $P(X < 0)$, $P(X < -1)$, $P(X \leqslant -1)$, $P(X < 1)$
และ $P(-1 \leqslant X < \frac{1}{2})$

3. X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบผสมที่มีฟังก์ชัน $F(x)$ กำหนดไว้โดย

$$
\begin{aligned}
F(x) &= 0 &&, \quad x < 0 \\
&= x^2/4 &&, \quad 0 \leqslant x < 1 \\
&= (x+1)/4 &&, \quad 1 \leqslant x < 2 \\
&= 1 &&, \quad x \geqslant 2
\end{aligned}
$$

3.1) จงเขียนกราฟแสดง $F(x)$

3.2) จงคำนวณค่าคาดหมายของ X

3.3) จงแสดงให้เห็นจริงว่าความแปรปรวนของ X คือ $E(X^2) - \{E(X)\}^2$ เท่ากับ

$$\frac{167}{576}$$

3.4) จงคำนวณค่าของ $P(\frac{1}{4} < X < 1)$, $P(X = 1)$, $P(X = \frac{1}{2})$, $P(\frac{1}{2} \leqslant X < 2)$

4. ในเกมส์การเล่นหนึ่งซึ่งมีกติกาว่า หากโยนเหรียญที่ไม่เอียงเฉแล้วได้หัว ผู้เล่นจะได้เงิน 200 บาท แต่ถ้าเหรียญออกก้อย ผู้เล่นจะต้องหมุนวงล้อที่มีเสกลจาก 0 ถึง 1 เมื่อวงล้อหยุดหมุนและเข็มชี้ที่จุดใด ผู้เล่นจะได้รับเงินเป็นจำนวน 100 เท่าของจุดนั้น กำหนดตัวแปรเชิงสุ่ม

X เป็นจำนวนเงิน (หน่วยร้อยบาท) ที่ผู้เล่นได้รับ จงหา

4.1) ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ X

4.2) จงแสดง F(x) ด้วยกราฟ

4.3) ค่าคาดหมายของ X

5. ในการทดลองเชิงประกอบ ครั้งแรกโยนลูกเต๋า 1 ลูก ถ้าออกหมายเลข 1 หรือ 2 เลือกจุดอย่างสุ่มในช่วง $[0, 1]$ ถ้าออกหมายเลข 3, 4, 5 หรือ 6 เลือกจุดอย่างสุ่มในช่วง $[1, 2]$ จงแสดงให้เห็นจริงว่าฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวเลขที่เลือกได้ (X) คือ

$$
\begin{aligned}
F(x) &= 0 &&, \; x < 0 \\
&= x/3 &&, \; 0 \leqslant x < 1 \\
&= (2x - 1)/3 &&, \; 1 \leqslant x < 2 \\
&= 1 &&, \; 2 \leqslant x
\end{aligned}
$$

จงแสดง F(x) ด้วยกราฟ F จะเป็นแบบต่อเนื่องเพียงอย่างเดียวหรือไม่ ถ้าเป็น จงหาฟังก์ชันความหนาแน่นของ X

2.9 บทสรุป

X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่อง ที่มีฟังก์ชันหนาแน่น f(x) และมีฟังก์ชันการแจกแจงสะสม F(x) รายละเอียดเกี่ยวกับตัวแปรเชิงสุ่ม X สรุปได้ดังตารางต่อไปนี้

	f(x)	F(x)
1. **คุณสมบัติ**	$0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ และ $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$	$F(-\infty) = 0,\; F(\infty) = 1$
2. **ความสัมพันธ์**	$f(x) = \dfrac{d\,F(x)}{dx}$	$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(a)\,da$
3. $P(a < X \leqslant b)$	$\int_{a}^{b} f(x)\,dx$	$F(b) - F(a)$
4. **ค่าเฉลี่ย** (E(X))	$\int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx$	$\int_{-\infty}^{\infty} x\,d\,F(x)$

	f(x)	F(x)
5. มัธยฐาน (x_m)	เป็นคำตอบที่ได้จากสมการ $\int_{-\infty}^{x_m} f(x)\,dx = \frac{1}{2} = \int_{x_m}^{\infty} f(x)\,dx$	เป็นคำตอบที่ได้จากสมการ $F(x_m) = \frac{1}{2}$
6. ฐานนิยม (x_0)	เป็นคำตอบที่ได้จากสมการ $\frac{d\,f(x)}{dx} = 0$	เป็นคำตอบที่ได้จากสมการ $\frac{d}{dx}\left[\frac{d\,F(x)}{dx}\right] = 0$
7. การแจกแจงของ $Y = h(X)$		
7.1 $F(y) = P(X \leqslant h^{-1}(y))$	$\int_{-\infty}^{h^{-1}(y)} f(x)\,dx$	$F_X(h^{-1}(y))$
7.2 $F(y) = P(X > h^{-1}(y))$	$\int_{h^{-1}(y)}^{\infty} f(n)\,dx$	$1 - F_X(h^{-1}(y))$
7.3 $F(y) = P(h_1^{-1}(y) \leqslant X \leqslant h_2^{-1}(y))$	$\int_{h_1^{-1}(y)}^{h_2^{-1}(y)} f(x)\,dx$	$F_X(h_2^{-1}(y)) - F_X(h_1^{-1}(y))$
$f(y) = \frac{dF(y)}{dy}$		

แบบฝึกหัดระคน

1. X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นกำหนดไว้ดังนี้

$$f(x) = c \sin \pi x \quad , \quad 0 < x < 1$$
$$= 0 \quad , \quad \text{อื่น ๆ}$$

จงหา

1.1 ค่าของ c และ $P(\frac{1}{3} < X < \frac{1}{2})$

1.2 ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ X

1.3 ค่าของ k ที่ทำให้

$$P(k - \frac{1}{2} < x < k + \frac{1}{2}) = 0.95$$

2. k ควรจะมีค่าเท่าใด จึงจะทำให้

$$f(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x} \quad , \quad 0 < x < k$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นของ X และจงหาฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ X , $P(0.25 < X < 0.64)$

3. อุปสงค์ของสินค้าชนิดหนึ่งเป็นตัวแปรเชิงสุ่ม X ที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นดังนี้

$$f(x) = kx \quad , \quad 0 < x < 10$$
$$= k(20 - x) \quad , \quad 10 < x < 20$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

3.1 จงหาค่าของ k และเขียนกราฟของ f(x)

3.2 จงเขียนกราฟแสดงฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ X

3.3 จงคำนวณค่าของ $P(X \geqslant 10)$ และ $P(15 < X \leqslant 20)$

4. X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่องที่มีฟังก์ชันการแจกแจงสะสม F(x) กำหนดไว้ดังนี้

$$F(x) = 1 - e^{-0.01x} \quad , \quad x > 0$$

4.1 จงหาฟังก์ชันความหนาแน่นของ X

4.2 จงคำนวณค่าของ $P(X > 100)$

4.3 จงหาฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ $Y = 2X + 5$

5. X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่องที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น f(x) และฟังก์ชันการแจกแจงสะสม F(x)

5.1 ถ้า a และ b เป็นค่าคงที่ใด ๆ ของ X, b > a จงแสดงให้เห็นจริงว่า

$$P(a < X \leqslant b) = F(b) - F(a)$$

5.2 อาศัยนิยามค่าความหมายของ X :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$$

จงแสดงให้เห็นจริงว่า

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, dF(x)$$

6. ถ้าฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ X คือ

$$F(x) = 0 \quad , \quad x < 0$$

$= x - \frac{1}{4}x^2 \quad , \ 0 \leqslant x < 2$

$= 1 \quad , \ x \geqslant 2$

6.1 จงพิสูจน์ว่า X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่อง

6.2 จงหาฟังก์ชันความหนาแน่นของ X

6.3 จงคำนวณค่าของ $P(1 < 4X^2 \leqslant 9)$

7. X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบไม่ต่อเนื่องที่มีฟังก์ชันน่าจะเป็น f(x) กำหนดไว้ว่า $f(x) > 0$ ถ้า $x = -1, 0, 1$ นอกนั้นเป็น 0

7.1 ถ้า $f(0) = \frac{1}{2}$ จงหาค่าของ $E(X^2)$

7.2 ถ้า $f(0) = \frac{1}{2}$ และ $E(X) = \frac{1}{6}$ จงหา $f(-1)$ และ $f(1)$

7.3 จงหาฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ $Y = 2X^2 - 1$

8. 8.1 จงพิสูจน์ว่า ถ้า $E(X^2) = 0$ แล้ว $P(X = 0) = 1$

8.2 สมมติว่า f เป็นฟังก์ชัน ซึ่งมีคุณสมบัติว่า $f(x) > 0$ ถ้า $x \neq 0$ และ $f(0) = 0$ จงพิสูจน์ว่า ถ้า $E\,|\,f(X - a)\,| = 0$ แล้ว $P(X = a) = 1$

9. จงหาค่าของ p และ q ที่ทำให้

$$
\begin{aligned}
F(x) &= 0 &&, \ x < 0 \\
&= px &&, \ 0 \leqslant x < 2 \\
&= qx^2 &&, \ 2 \leqslant x < 4 \\
&= 1 &&, \ x \geqslant 4
\end{aligned}
$$

เป็นฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่อง X และจงคำนวณค่าของ $P(1 < X \leqslant 4 \mid X \leqslant 3)$

10. กำหนด f(x) เป็น p.d.f. ของตัวแปรเชิงสุ่ม x จงหา

ก. ค่าคาดหมายของ x

ข. c.d.f. ของ X

ค. median ของ X

เมื่อ

10.1 $f(x) = \frac{x}{15} \quad , \ x = 1, 2, 3, 4, 5$

10.2 $f(x) = 3(1 - x)^2 \;,\; 0 < x < 1$

$\quad\quad = 0 \quad$ อื่น ๆ

10.3 $f(x) = \frac{1}{3} \;,\; 0 < x < 1$ หรือ $2 < x < 4$

$\quad\quad = 0 \quad$ อื่น ๆ

11. กำหนดฟังก์ชันความหนาแน่นของ x ดังนี้

$$\begin{aligned} f(x) &= x + 1 \;, & -1 < x < 0 \\ &= x - 3 \;, & 3 < x < c, c > 3 \\ &= 0 \;, & \text{อื่น ๆ} \end{aligned}$$

จงหาค่าของ c และ

11.1 ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ X

11.2 $P(X > 2)$, $P(-\frac{1}{2} < x \leqslant \frac{5}{2})$

11.3 มัธยฐานของ X

12. กำหนดฟังก์ชันความหนาแน่นของ X ดังนี้

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^2 \;, & 0 < x < 1 \\ &= 0 \;, & \text{อื่น ๆ} \end{aligned}$$

จงหา

12.1 $\lim\limits_{h \to 0} P(0.1 - h < X \leqslant 0.1)$

12.2 $P(\lim\limits_{h\to 0} \{0.1 - h < x \leqslant 0.1\})$

12.3 $\lim\limits_{h\to 0} P(0.2 < X \leqslant 0.5 + h)$

12.4 $P(\lim\limits_{h\to 0} \{0.2 < x \leqslant 0.5 + h\})$

12.5 p.d.f. และ c.d.f. ของ $Y = X^3$

13. $A_1 = \{x : 1 \leqslant x < 15\}$, $A_2 = \{x : 15 \leqslant x \leqslant 30\}$

ถ้า $P(A_1) = \frac{2}{7}$, $P(A_2) = \frac{4}{7}$ และ $A = A_1 \cup A_2$

13.1 จงคำนวณค่าของ P(A)

13.2 ถ้า X เป็น indicator r.v. ของ set A

13.2.1 จงหาฟังก์ชันการแจกแจงของ X

13.2.2 ค่าคาดหมายของ X จะเป็นเท่าใด

13.2.3 จงหาฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ $Y = 2X^2 - 1$

13.2.4 จงหาค่าคาดหมายและค่าความแปรปรวนของ Y

14. X_A และ X_B เป็นตัวแปรเชิงสุ่มดัชนี (indicator r.v.) ของ A และ B ตามลำดับ กำหนด $X = X_A + X_B$ ถ้า $E(X) = \frac{5}{6}$ และ $P(A) = \frac{1}{2}$ จงหา

14.1 ค่าของ P(B)

14.2 ค่าของ $P(A \cup B)$ ถ้า $P(X = 2) = \frac{1}{5}$

14.3 ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ X

15. กล่องใบหนึ่งบรรจุหลอดไฟ 10 หลอด เป็นหลอดชำรุด 3 หลอด สุ่มหลอดไฟมาทดสอบ 3 หลอด

15.1 จงคำนวณค่าของความน่าจะเป็นที่จะได้

1) ไม่มีหลอดใดชำรุด

2) หลอดชำรุด 1 หลอด

3) หลอดชำรุด 2 หลอด

4) หลอดชำรุดทั้ง 3 หลอด

15.2 กำหนด A_i เป็นเหตุการณ์ที่สุ่มครั้งที่ i ได้หลอดชำรุด $i = 1, 2, 3$ และ กำหนด ตัวแปรเชิงสุ่มดัชนีดังนี้

$$X_i(s) = 1 \quad \text{ถ้า } s \text{ อยู่ใน } A_i,\ i = 1, 2, 3$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

ถ้า $X = X_1 + X_2 + X_3$

จงหาฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X

15.3 เปรียบเทียบผลที่ได้จาก (14.1) และ (14.2)

16. X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น f(x) กำหนดไว้ดังนี้

$$f(x) = \frac{1}{(1 + x)^2}, \quad 0 \leqslant x$$
$$= 0, \quad x < 0$$

จงหา

16.1 ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมและฟังก์ชันความหนาแน่นของ $Y = \frac{1}{X}$

16.2 $P(Y \geq 5)$, $P(Y \leq 10/ Y > 7)$

17. X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น f(x) กำหนดไว้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2} &&, \quad 0 < x < 1 \\
&= \frac{1}{2x^2} &&, \quad 1 < x \\
&= 0 &&, \quad x < 0
\end{aligned}
$$

จงหา

17.1 c.d.f. ของ X

17.2 $P(1 < \frac{1}{X} \leq 10)$

17.3 มัธยฐานของ x

18. กำหนดฟังก์ชันความหนาแน่นของ x ดังนี้

$$
\begin{aligned}
f(x) &= e^{-x} &&, \quad 0 \leq x \\
&= 0 &&, \quad x < 0
\end{aligned}
$$

จงหา

18.1 $P(10 < x \leq 100)$

18.2 ค่าคาดหมายของ X

18.3 ฟังก์ชันความหนาแน่นของ $Y = X_{|} (1 + X)$

19. X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันการแจกแจงสะสม F(x) กำหนดไว้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
F(x) &= 0 &&, \quad x < -1 \\
&= \frac{1}{9}(x+1)^2 &&, \quad -1 \leq x < 2 \\
&= 1 &&, \quad x \geq 2
\end{aligned}
$$

จงหา p.d.f. และ c.d.f. ของ $Y = X^2$

20. ร้านขายขนมปังแห่งหนึ่งขายขนมปังในแต่ละวันได้เป็นจำนวน X ร้อยปอนด์ ถ้า X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น f(x) กำหนดไว้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x/25 &&, \quad 0 < x < 5\\
&= (10-x)/25 &&, \quad 5 \leqslant x < 10\\
&= 0 && \text{อื่น ๆ}
\end{aligned}
$$

20.1) จงคำนวณความน่าจะเป็นที่ร้านนี้จะขายขนมปังในวันต่อไปได้

1) uinnii 500 ปอนด์

2) น้อยกว่า 500 ปอนด์

3) ระหว่าง 250 ถึง 750 ปอนด์

20.2 กำหนด A, B และ C เป็นเหตุการณ์ที่ขายขนมปังในแต่ละวันได้ uinnii 500 ปอนด์ น้อยกว่า 500 ปอนด์ และระหว่าง 250 ถึง 750 ปอนด์ ตามลำดับ

1) จงคำนวณค่าของ $P(A|B)$, $P(A|C)$

2) A และ B เป็นเหตุการณ์ที่เป็นอิสระต่อกันหรือไม่

3) A และ C เป็นเหตุการณ์ที่เป็นอิสระต่อกันหรือไม่

21. กำหนดฟังก์ชันการแจกแจงสะสมโดย

$$
\begin{aligned}
F(x) &= 0 &&, \quad x < -1\\
&= (2+x)/4 &&, \quad -1 \leqslant x < 1\\
&= 1 &&, \quad x \geqslant 1
\end{aligned}
$$

จงแสดง $F(x)$ ด้วยกราฟ และคำนวณค่าของ $P(-1/2 < X \leqslant 1/2)$, $P(X = 0)$, $P(X = 1)$, $P(2 < x \leqslant 3)$

22. x เป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบผสม ที่มีฟังก์ชันการแจกแจงสะสมกำหนดไว้โดย

$$
\begin{aligned}
F(x) &= 0 && x < -1\\
&= (1+x)/4 &&, \quad -1 \leqslant x < 0\\
&= 1/4 &&, \quad 0 \leqslant x < 1\\
&= (1+x)/4 &&, \quad 1 \leqslant x < 2\\
&= 3/4 &&, \quad 2 \leqslant x < 3\\
&= 1 && x \geqslant 3
\end{aligned}
$$

22.1) จงเขียนกราฟแสดง $F(x)$

22.2) จงคำนวณค่าคาดหมายของ x

22.3) จงคำนวณค่าของ $P(|x| \leqslant 1/2)$, $P(1/2 < X < 1)$, $P(X > 1)$, $P(3/4 < x < 2)$, $P(2 < x < 3)$

คำตอบแบบฝึกหัดที่ 2-2

(1) $\frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 2$

(2) $\frac{4}{5}, \frac{4}{9}, \frac{11}{45}$

(3) .10, .15, .30, .25, .20; .55

คำตอบแบบฝึกหัดที่ 2-3

(1) $\frac{1}{2}, 1, 1, -1, \frac{1}{2}$ (2) $f(x) = \frac{3}{4}(2x - x^2),\ 0 \leqslant x < 2$

(3) $\frac{11}{20}$, 0, 0 (4) 1, 6 (5) 2, 0.414, 0.54

แบบฝึกหัดที่ 2-4

(2) $\frac{1}{5}, \frac{3}{10}$ (4) $F(x) = \frac{x^2}{2},\ 0 \leqslant x < 1;\ \frac{4x - x^2 - 2}{2},\ 1 \leqslant x < 2;\ 1,\ x\ 32;$

(5.2) $\frac{1}{4}, \frac{7}{24}, \frac{4}{7}$ $\frac{3}{4}, \frac{23}{25}$

(6) $\frac{2}{9}, \frac{7}{8}, \frac{3}{4}.\ \frac{3 - |x}{9},\ |x| \leqslant 3$

(7) $\frac{1}{2}, \frac{1}{\pi};\ \frac{1}{\pi(1 + x^2)};\ \frac{1}{2}$

(8) $1/\sqrt{5}$, $(\sqrt{2} - 1)/2$, $1 - \sqrt{3}/7$; $1/(2\sqrt{x})$

แบบฝึกหัดที่ 2-5

(1) $1 - m + p,\ m - 2p,\ p$

(2) $\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, 1, \frac{5}{6}, \frac{7}{4}$

(3) $1, \frac{2}{3}, 3, 2$

(4) $1, 5, \sqrt[3]{2}, 0$

แบบฝึกหัดที่ 2-6

(1) $f(x) = \frac{1}{10},\ -5 < y < 5;\ F(x) = 0,\ y < -5;\ \frac{y+5}{10},\ -5 \leqslant y < 5;\ 1,\ y \geqslant 5$

(3) $F(x) = 0,\ x < 0;\ \frac{x^2 + x}{2},\ 0 \leqslant x < 1;\ 1,\ x \geqslant 1;\ f(y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4\sqrt{y}}\ \ 0 < y < 1;\ \frac{5}{8}$

(5) $\frac{3}{10}$, $\frac{1}{4}$; $F(y) = \frac{y-1}{y}$; $f(y) = \frac{1}{y^2}$, $y \geqslant 1$; $F(y) = 1 - e^{-y}$, $f(y) = e^{-y}$

คำตอบแบบฝึกหัดที่ 2-7

(2.1)

x	0	1
f(x)	4/5	1/5

(2.2) $F(x) = 0 \quad , x < 0$

$= 4/5 \quad , 0 \leqslant x < 1$

$= 1 \quad , x \geqslant 1$

(2.3) 1

(3) 5/16, 5/2

(4)

x	0	1
f(x)	13/25	12/25

(5)

x	0	1	2	3
f(x)	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$

คำตอบแบบฝึกหัดที่ 2-8

(1.2) $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{12}$

(2) $\frac{1}{2}$, 0 , $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$

(3) $\frac{31}{24}$, $\frac{15}{64}$, $\frac{1}{4}$, 0 , $\frac{11}{16}$

(4) $x/2,\ 0 \leqslant x < 1$; $1/2,\ 1 \leqslant x < 2$; $1,\ 2 \leqslant x$; 125

คำตอบแบบฝึกหัดระคน

(1) $\pi/2$, 1/4 (2) 1, .387 (3.1) 1/100

$F(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos \pi x)$, $0 \leqslant x < 1$ (6.2) $f(x) = 1 - \frac{x}{2}$, $0 \leqslant x < 2$ (3.3) 1/2 , 1/8

$k = \frac{1}{\pi} \sin^{-1} .95$ (6.3) 1/2 (7) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$,

(4) $f(x) = .01e^{-.01}$, $x \geqslant 0$; (11) $c = 4$; $F(y) = 0 \quad , 1 > y$

e^{-1} ; 1/2 , 3/8 ; $= 1/2 \quad , -1 \leqslant y < 1$

$F(y) = 1 - e^{-.005(y-5)}, y \geqslant 5$ 0 $= 1 \quad , 1 \leqslant y$

(9) 1/8, 1/16; 7/9

(12) 0 ; .117:

(13) 6/7 ;

x	0	1
f(x)	1/7	6/7

$E(X) = 6/7$

$$F(y) = 0,\ -1 > y$$
$$= \frac{1}{7},\ -1 \leqslant y < 1$$
$$= 1,\ y \geqslant 1;$$

$\frac{5}{7}, \frac{24}{49}$

(14) 1/3 ; 19/30 ; $f(Y) = 1,\ 0 < y < 1$

$$F(x) = \frac{11}{30},\ 0 \leqslant x < 1$$
$$= \frac{4}{5},\ 1 \leqslant x < 2$$
$$= 1,\ x \geqslant 2$$

(15) $\frac{7}{24}, \frac{21}{40}, \frac{7}{40},$ 1/120

(16) $F(y) = \frac{y}{y+1},\ y \geqslant 0;$

$\frac{1}{6}, \frac{3}{ii}$

(17) $F(x) = 0,\ x < 0$
$$= \frac{x}{2},\ 0 \leqslant x < 1$$
$$= 1 - \frac{1}{\ },\ x \geqslant 2x$$

$\frac{9}{20}, 1$

(18) $e^{-10} - e^{-100}$; 1 ;

$$f(y) = \frac{e^{\frac{y}{1-y}}}{1(1-y)^2},\ 0 \leqslant y < 1$$

(19) $f(y) = \frac{-}{9\sqrt{y}},\ 0 < y < \frac{2}{1}$
$$= \frac{\sqrt{y}+1}{9\sqrt{y}},\ 1 \leqslant y < 4$$

(20) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$

(21) $\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, 0$

(22) $\frac{5}{4}, \frac{1}{8}, 0, \frac{1}{8}, \frac{1}{2}, 0$