# บทที่ 1
# ทฤษฎีความน่าจะเป็นเบื้องต้น
## Elementary Probability Theory

**วัตถุประสงค์**

เพื่อทบทวนและสรุปเกี่ยวกับความน่าจะเป็นเบื้องต้น ที่นักศึกษาเคยเรียนมาแล้วในสถิติ 205 และต้องการให้นักศึกษาเข้าใจเรื่องของความน่าจะเป็น ในแง่ของเซทฟังก์ชัน เพิ่มเติมในเรื่องเซทและเซทฟังก์ชันของเลขจำนวนจริง ซึ่งมีจำนวนไม่จำกัดและแจงนับไม่ได้

## 1-1 พีชคณิตของเซท (ALGEBRA OF SETS)

กำหนด S เป็นกลุ่มผลทดลอง (sample space หรือ universal set) ซึ่งหมายถึง เซทของบรรดาสิ่งทั้งหลายที่อยู่ในข่ายการพิจารณา

และ A เป็นเซทของสิ่งทั้งหลายที่เป็นสมาชิกของ S ที่มีคุณสมบัติตามที่กำหนดไว้

หาก $A_1$ และ $A_2$ เป็นเซทใด ๆ ที่อยู่ใน S แล้ว

เซทของ $A_1$ และ/หรือ $A_2$($A_1 \cup A_2$ : the union of $A_1$ and $A_2$) จะเป็นเซทของสมาชิกของ S ซึ่งอยู่ใน $A_1$ หรืออยู่ใน $A_2$ หรืออยู่ในทั้ง $A_1$ และ $A_2$

เซทของการเกิดร่วมกันของ $A_1$ และ $A_2$($A_1 \cap A_2$ or $A_1A_2$ : the intersection of $A_1$ and $A_2$) จะเป็นเซทของสมาชิกของ S ซึ่งอยู่ใน $A_1$ และอยู่ใน $A_2$

เซทของเหตุการณ์ที่ A ไม่เกิด ($A^c$ or $A'$ : complement of A) จะเป็นเซทของสมาชิกของ-S ที่ไม่ใช่สมาชิกของ A

เราเรียก $A_1$ ว่าเป็นซับเซทของ $A_2$($A_1 \subseteq A_2$) ถ้าทุก ๆ สมาชิกของ $A_1$ เป็นสมาชิกของ $A_2$ ด้วย

เซท $A_1$ และ $A_2$ เท่ากัน ($A_1 = A_2$) ก็ต่อเมื่อ $A_1 \subseteq A_2$ และ $A_2 \subseteq A_1$

เราเรียกเซทสองเซทว่าเป็นเซทที่แยกต่างหากจากกันหรือขจัดกัน (mutually exclusive set) หากทั้งสองเซทไม่มีสมาชิกร่วมกันเลย นั่นคือ การเกิดร่วมกันของเซททั้งสองเป็นเซทว่างเปล่า (empty set $\emptyset$) ซึ่งหมายถึง เซทที่ไม่มีสมาชิกอยู่เลย

**ตัวอย่างที่** 1-1.1 **กำหนด** $S = \{x : x = 1, 2, 3$ หรือ $5 \leqslant x < 10\}$

และ $A_1 = \{x : x = 1, 2, 3\}$

$A_2 = \{x : x = 2$ หรือ $5 \leqslant x < 10\}$

$A_3 = \{x : 5 < x < 10\}$

จะได้

$A_1$, $A_2$ หรือ $A_3$ ต่างเป็นซับเซทของ S และ $A_3 \subseteq A_2$

$A_1 \cup A_2 = S$, $A_1 \cap A_2 = \{x : x = 2\}$

$A_2 \cup A_3 = A_2$, $A_2 \cap A_3 = A_3$

$A_1 \cap A_3 = \emptyset$, $A_1' = \{x : 5 \leqslant x < 10\}$

$A_2' = \{x : x = 1, 3\}$, $A_3' = \{x : x = 1, 2, 3, 5\}$

**ตัวอย่างที่** 1-1.2 กำหนด $S = \{(x, y) : 0 < x < 4, 0 < y < 4\}$

และ $A_1 = \{(x, y) : 0 < x < 2, 0 < y < 3\}$,

$A_2 = \{(x, y) : 1 < x < 3, 0 < y < 3\}$

จะได้

$A_1 \subseteq S$ , $A_2 \subseteq S$

$A_1 \cup A_2 = \{(x, y) : 0 < x < 3, 0 < y < 3\}$

$A_1 \cap A_2 = \{(x, y) : 1 < x < 2, 0 < y < 3\}$

$A_1' = \{(x, y) : 2 \leqslant x < 4, 0 < y < 4; 0 < x < 2, 3 \leqslant y < 4\}$

**แบบฝึกหัดที่** 1-1

1. จงหา $A_1 \cup A_2$ และ $A_1 \cap A_2$ เมื่อกำหนดเซท $A_1$ และ $A_2$ ดังนี้
   ก) $A_1 = \{x : x = 1, 3, 5\}$, $A_2 = \{x : 0 < x \leqslant 3\}$
   ข) $A_1 = \{x : -1 < x < 1\}$, $A_2 = \{x : 0 < x < 2\}$
   ค) $A_1 = \{(x, y) : -1 < x < 2, -1 < y < 1\}$, $A_2 = \{(x, y) : 0 < x < 2, 0 < y < 2\}$
2. กำหนด A เป็นซับเซทของกลุ่มผลทดลอง S จงหา A' เมื่อกำหนด S และ A ดังนี้
   ก) $S = \{x : 0 < x < 10\}$, $A = \{x : 3 < x \leqslant 7\}$
   ข) $S = \{x : -3 < x \leqslant 5\}$, $A = \{x : 0 < x < 4\}$
   ค) $S = \{(x, y) : 0 < x < 2, 0 < y < 2\}$, $A = \{(x, y) : 0 < x + y < 2\}$
   ง) $S = \{(x, y) : |x| + |y| \leqslant 2\}$, $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant 2\}$

3. กำหนด S เป็นเซทของเลขจำนวนจริงบวกที่มีค่าน้อยกว่า หรือเท่ากับ 11 หาก $A_1 = \{x : 1 \leqslant x \leqslant 6\}$, $A_2 = \{x : 4 < x \leqslant 11\}$, $A_3 = \{x : 6 \leqslant x < 9\}$ และ $A_4 = \{x : 0 < x \leqslant 4\}$ จงหา $A_1 \cup A_2$, $A_2 \cup A_3$, $A_2 \cap A_3$, $A_1 \cap A_2$, $A_2 \cap A_4$, $A_1'$, $A_2'$, $A_1 \cap A2 \cap A3$ และ $A_1 \cup A2 \cup A3 \cup A_4$

4. จงหา $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ ถ้ากำหนด $A_k$ ดังต่อไปนี้

ก) $A_k = \{x : 0 < x \leqslant 5 - \frac{1}{k}\}$, $k = 1, 2, 3 \ldots\ldots$

ข) $A_k = \{x : \frac{10}{k+1} < x < 10\}$, $k = 1, 2, 3\ldots\ldots$

ค) $A_k = \{x : \frac{1}{k} \leqslant x \leqslant 3\}$, $k = 1, 2, 3\ldots\ldots$

5. จงหา $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ ถ้ากำหนด $A_k$ ดังต่อไปนี้

ก) $A_k = \{x : 2 - \frac{1}{k} < x \leqslant 2\}$, $k = 1, 2, 3\ldots\ldots$

ข) $A_k = \{x : 0 < x < \frac{1}{k}\}$, $k = 1, 2, 3\ldots\ldots$

ค) $A_k = \{x : 10 < x \leqslant 10 + \frac{1}{k}\}$, $k = 1, 2, 3\ldots\ldots$

ง) $A_k = \{x : \frac{8}{k+1} \leqslant x \leqslant 12\}$, $k = 1, 2, 3\ldots\ldots$

## 1-2 เซทฟังก์ชัน (SET FUNCTIONS)

เมื่อกล่าวถึงฟังก์ชันที่นักศึกษาคุ้นเคยและเข้าใจกัน จะแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร 2 ตัว เขียนแสดงโดยสูตร

$$y = f(x)$$

แสดงความหมายว่า ฟังก์ชัน f กำหนดกฎเกณฑ์หรือสูตรทางคณิตศาสตร์ ที่สามารถคำนวณค่า y สำหรับแต่ละค่า x ที่กำหนดขึ้น ค่า x ที่จะกำหนดขึ้นนี้จะต้องเป็นค่าหนึ่งหรือจะต้องอยู่ในพิสัยหนึ่งในเซท ซึ่งสูตรของฟังก์ชันจะถูกนิยามก็เฉพาะ x ในเซทนี้เท่านั้น เราเรียกเซทนี้ว่าเป็นโดเมน (Domain) ของฟังก์ชัน f

จากแต่ละค่า x ที่กำหนดขึ้นสามารถคำนวณให้ได้ค่า y เพียงค่าเดียวเท่านั้น ค่าของ y-

ที่เป็นไปได้ทั้งหมดหลังจากกำหนดค่า x แต่ละค่าในโดเมนจะรวมกันเป็นเซทของเลขจำนวนจริง เราเรียกเซทนี้ว่าเป็นพิสัย (range) ของฟังก์ชัน f

กล่าวอีกนัยหนึ่งก็คือฟังก์ชัน f ทอดภาพ (map) จากจุด x ในโดเมนไปสู่จุด y ซึ่งเป็นเลขจำนวนจริงในพิสัย ฟังก์ชัน f จะเป็นกติกาหรือกฎเกณฑ์บอกให้รู้ว่า จุดไหนหรือพิสัยใดในโดเมนจะถูกทอดภาพไปยังจุดไหนในพิสัย

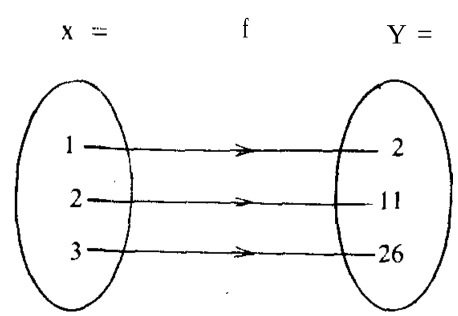
หากเราคำนวณค่าฟังก์ชันจากจุด ๆ หนึ่งในโดเมน กล่าวคือคำนวณค่า y จาก x ที่เป็นเพียงจุด ๆ หนึ่งในโดเมนเราเรียกฟังก์ชันที่ได้ว่าเป็นฟังก์ชันของจุด หรือ point function เช่นเรามี

$$y = f(x) = 3x^2 - 1 \quad , \quad x = 1, 2, 3$$

ค่าของ y ณ จุด $x = 1, 2, 3$ คือ f(1), f(2), f(3) ตามลำดับ

นั่นคือ y จะมีค่า = 2, 11, 26

สามารถเขียนแสดงได้โดยภาพ ดังนี้




โดเมนของ f พิสัยของ f

แม้ว่าโดเมนของฟังก์ชันจะเป็นเซทของตัวเลขที่นับไม่ได้ หากเราคำนวณค่าของฟังก์ชัน ณ จุดใด ๆ ในเซทนั้น ฟังก์ชันที่ได้ก็คือ point functions ตัวอย่างเช่น

$$y = \frac{1}{2}x \quad , \quad 0 < x < 2$$

ค่าของฟังก์ชัน ณ จุด $x = 1$ ก็คือ

$$y = \frac{1}{2}$$

หรือเรามี

$$y = 4x_1x_2 \quad , \quad 0 < x_1, x_2 < 1$$

**ค่าของฟังก์ชัน ณ จุด (.2, .5) ก็คือ**

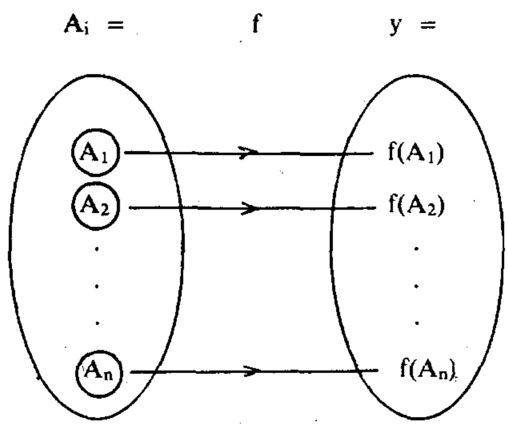
$$y = .4$$

**ฟังก์ชันเหล่านี้ล้วนเป็น** point functions

**หากเราคำนวณค่าฟังก์ชันของเซทใด ๆ ที่เป็นซับเซทของโดเมนของฟังก์ชัน นั่นคือ ฟังก์ชัน** f **ทอดภาพจากซับเซทของโดเมนของฟังก์ชันไปสู่จุด** y **ซึ่งเป็นเลขจำนวนจริง เช่น** $A_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ **เป็นซับเซทของโดเมนของฟังก์ชัน** f **ค่าของฟังก์ชันก็คือ**

$$Y = f(A_i), \; i = 1, 2, \ldots n$$

**แสดงได้โดยภาพ ดังนี้**




เราเรียกฟังก์ชันประเภทนี้ว่า ฟังก์ชันของเซทหรือเซทฟังก์ชัน (set functions)

**นิยาม** เซทฟังก์ชันก็คือ กฎเกณฑ์หรือสูตรที่ใช้ในการกำหนดเลขจำนวนจริง ให้แก่แต่ละเซท ในกลุ่มของเซทที่รวบรวมขึ้นโดยเฉพาะ

การคำนวณค่าของเซทฟังก์ชันขึ้นอยู่กับว่า เซทที่กำหนดหรือรวบรวมมานั้นเป็นเซทประเภทใด หากเป็นเซทของเลขจำนวนจริงที่มีค่านับได้ จะรู้จบหรือไม่รู้จบก็ตาม คำนวณค่าของเซทฟังก์ชัน A, f(A) ได้ดังนี้

$$f(A) = \sum_{A} f(x)$$

เมื่อ A เป็นเซทของจุดบนเส้นตรง

และ $f(A) = \sum\sum_{A} f(x_1, x_2)$

เมื่อ A เป็นเซทของจุดบนระนาบ

หาก A เป็นเซทของเลขจำนวนจริงที่มีค่าต่อเนื่อง คำนวณค่าของเซทฟังก์ชัน A, f(A) ได้ดังนี้

$$f(A) = \int_A f(x)\, dx$$

เมื่อ A เป็นเซทของจุดที่ต่อเนื่องบนเส้นตรง

$$f(A) = \iint_A f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2$$

เมื่อ A เป็นเซทของจุดต่อเนื่องบนระนาบ

**ตัวอย่างที่ 1-2.1** กำหนด A เป็นเซทของจุดบนเส้นตรงและกำหนดเซทฟังก์ชัน A ดังนี้

$$f(A) = \sum_A f(x)$$

เมื่อ $f(x) = \frac{4}{5^x}$ $x = 1, 2, 3, \ldots$

จงจำนวณค่าของเซทฟังก์ชัน A หากกำหนด A ดังนี้

ก) $A = \{x : x = 4, 5\}$

ข) $A = \{x : 0 < x < 3\}$

**วิธีทำ**

ก) $$f(A) = \sum_{x=4}^{5} \frac{4}{5^x} = \frac{4}{5^4} + \frac{4}{5^5}$$

$$= \frac{24}{3125}$$

ข) $$f(A) = \sum_{x=1}^{2} \frac{4}{5^x} = \frac{4}{5} + \frac{4}{5^2}$$

$$= \frac{24}{25}$$

**ตัวอย่างที่ 1-2.2** กำหนดเซทฟังก์ชัน A ดังนี้

$$f(A) = \int_A \frac{x^2}{9}\, dx$$

เมื่อ A เป็นเซทของจุดต่อเนื่องบนเส้นตรง

จงหาเซทฟังก์ชัน A เมื่อกำหนด A ดังต่อไปนี้

ก) $A = \{x : 0 \leqslant x \leqslant 3\}$

ข) $A = \{x : 1 < x < 3\}$

ค) $A = A_1 \cup A_2$ และ $A_1 = \{x : 0 \leqslant x \leqslant 1\}$, $A_2 = \{x : 1 < x \leqslant 2\}$

จากผลที่ได้จะแสดงว่า $f(A) = f(A_1) + f(A_2)$ หรือไม่

ง) $A = A_1 \cup A_2$ และ $A_1 = \{x : 0 < x < \frac{3}{2}\}$, $A_2 = \{x : 1 < x < 2\}$

จากผลที่ได้จะแสดงว่า $f(A) = f(A_1) + f(A_2) - f(A_1 \cap A_2)$ หรือไม่

**วิธีทำ**

ก) $f(A) = \int_0^3 \frac{x^2}{9}\, dx = \frac{1}{9} \cdot \frac{3^3}{3} = 1$

ข) $f(A) = \int_1^3 \frac{x^2}{9}\, dx = \frac{1}{9} \cdot \frac{3^3 - 1}{3} = \frac{26}{27}$

ค) $A = A_1 \cup A_2 = \{x : 0 \leqslant x \leqslant 2\}$

$\Rightarrow f(A) = \int_0^2 \frac{x^2}{9}\, dx = \frac{1}{9} \cdot \frac{2^3}{3} = \frac{8}{27}$

แต่ $\int_0^2 \frac{x^2}{9}\, dx = \int_0^1 \frac{x^2}{9}\, dx + \int_1^2 \frac{x^2}{9}\, dx$

$= f(A_1) + f(A_2)$

ดังนั้น $f(A) = f(A_1) + f(A_2)$

ง) $A = A_1 \cup A_2 = \{x : 0 < x < 2\}$

$\Rightarrow f(A) = \int_0^2 \frac{x^2}{9}\, dx = \frac{8}{27}$

$A_1 \cap A_2 = \{x : 1 < x < \frac{3}{2}\}$

$f(A_1) + f(A_2) - f(A_1 \cap A_2) = \int_0^{3/2} \frac{x^2}{9}\, dx + \int_1^2 \frac{x^2}{9}\, dx - \int_1^{3/2} \frac{x^2}{9}\, dx$

$= \frac{1}{8} + \frac{7}{27} - (\frac{1}{8} - \frac{1}{27}) = \frac{8}{27}$

แสดงว่า $f(A) = f(A_1) + f(A_2) - f(A_1 \cap A_2)$

**ตัวอย่างที่ 1-2.3** สมมติว่าเซทฟังก์ชัน A คือ

$$f(A) = \int_A e^{-x}\,dx$$

จงคำนวณค่าของ $f(\lim\limits_{k\to\infty} A_k)$ และ $\lim\limits_{k\to\infty} f(A_k)$ เมื่อกำหนด $A_k$ ดังต่อไปนี้

ก) $A_k = \{x : 4 - \frac{1}{k} < x \leqslant 4\}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$

ข) $A_k = \{x : \frac{1}{k} \leqslant x < 2 - \frac{1}{k}\}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$

ผลจาก (ก) และ (ข) จะนำมาสรุปว่า $f(\lim\limits_{k\to\infty} A_k) = \lim\limits_{k\to\infty} f(A_k)$ ได้หรือไม่

**วิธีทำ**

ก) $A_k = \{x : 4 - \frac{1}{k} < x \leqslant 4\}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} A_k = \{x : x = 4\}$$

$$f(\lim_{k\to\infty} A_k) = \int_4^4 e^{-x}\,dx = e^{-4} - e^{-4} = 0$$

$$f(A_k) = \int_{4-\frac{1}{k}}^{4} e^{-x}\,dx = e^{-4+\frac{1}{k}} - e^{-4}$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} f(A_k) = \lim_{k\to\infty} (e^{-4+\frac{1}{k}} - e^{-4}) = e^{-4} - e^{-4} = 0$$

ข) $A_k = \{x : \frac{1}{k} \leqslant x < 2 - \frac{1}{k}\}$

$$\lim_{k\to\infty} A_k = \{x : 0 < x < 2\}$$

$$f(\lim_{k\to\infty} A_k) = \int_0^2 e^{-x}\,dx = 1 - e^{-2}$$

$$f(A_k) = \int_{\frac{1}{k}}^{2-\frac{1}{k}} e^{-x}\,dx = e^{-\frac{1}{k}} - e^{-2+\frac{1}{k}}$$

$$\lim_{k\to\infty} f(A_k) = \lim_{k\to\infty} \left(e^{-\frac{1}{k}} - e^{-2+\frac{1}{k}}\right)$$

$$= e^0 - e^{-2} = 1 - e^{-2}$$

ผลที่ได้จาก (ก) และ (ข) สรุปได้ว่า

$$f(\lim_{k\to\infty} A_k) = \lim_{k\to\infty} f(A_k)$$

**ตัวอย่างที่ 1-2.4** สมมติเซทฟังก์ชัน A คือ

$$f(A) = \iint_A (x^2 + y^2)\,dxdy$$

จงคำนวณค่าของฟังก์ชันของเซทต่อไปนี้

ก) $A = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < 2\}$

ข) $A = \{(x, y) : -2 \leqslant x = y \leqslant 2\}$

ค) $A = \{(x, y) : |x| + |y| \leqslant 1\}$

**วิธีทำ**

ก) $f(A) = \int_0^2 \int_0^1 (x^2 + y^2)\,dxdy$

$$= \int_0^2 \left(\frac{1}{3} + y^2\right) dy$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{2^3}{3} = \frac{10}{3}$$

ข) $f(A) = \int_{-2}^{2} \int_y^y (x^2 + y^2)\,dxdy = 0$

ค) $f(A) = \int_0^1 \int_{-1+y}^{1-y} (x^2 + y^2)\,dxdy + \int_{-1}^0 \int_{-1-y}^{1+y} (x^2 + y^2)\,dxdy$

$$= 2\int_0^1 \int_{-1+y}^{1-y} (x^2 + y^2)\,dxdy$$

$$= 2\int_0^1 \frac{2}{3}(1 - 3y + 6y^2 - 4y^3)\,dy$$

$$= \frac{2}{3}$$

## แบบฝึกหัดที่ 1.2

1. กำหนด A เป็นเซทของจุดบนเส้นตรงและกำหนดเซทฟังก์ชัน A, f(A) เท่ากับจำนวนจุดใน A ที่มีค่าเป็นเลขจำนวนเต็มบวก

จงหาค่าของ f(A) ถ้า

ก) $A = \{ x : 0 < x \leqslant 7 \}$

ข) $A = \{ x : |x| \leqslant 10 \}$

ค) $A = \{ x : x < 5 \}$

ง) $A = \{ x : x$ เป็นผลคูณของ 3 ซึ่งมีค่าไม่เกิน 50 $\}$

2. กำหนดเซทฟังก์ชัน A, f(A) ดังนี้

$$f(A) \quad = \quad \sum_{A} \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{1}{5}\right)^{x}$$

เมื่อ $x = 0, 1, 2, \ldots$ นอกนั้นไม่กำหนดค่า

ถ้า $A_1 = \{ x : x = 0, 1, 2 \}$ และ $A_2 = \{ x : x^2 \leqslant 9 \}$ จงหาค่าของ $f(A_1)$, $f(A_2)$

3. สมมติ

$$f(A) \quad = \quad \int_{A} 6x(1 - x)\, dx$$

เมื่อ $0 < x < 1$ นอกนั้น f(A) เป็น 0 ถ้า $A_1 = \{ x : |x| \leqslant \frac{1}{2} \}$, $A_2 = \{ x : 0 < x < 2 \}$

$A_3 = \{ x : \frac{1}{2} < x < \frac{3}{4} \}$ จงหาค่าของ $f(A_1)$, $f(A_2)$, $f(A_3)$, $f(A_1 \cap A_3)$

และ $f(A_1 \cup A_3)$

4. สมมติว่าเซทฟังก์ชัน A, f(A) เป็นอัตราส่วนระหว่างความยาวของ A กับความยาวของ S ถ้า

$$S \quad = \quad \{ x : 0 < x < 20 \}$$

$$A_1 \quad = \quad \{ x : x < 8 \}$$

$$A_2 \quad = \quad \{ x : 6 < x < 9 \}$$

$$A_3 \quad = \quad \{ x : x > 7 \}$$

จงหาค่าของ $f(A_1)$, $f(A_2)$, $f(A_3)$, $f(A_1')$, $f(A_1 \cup A_2)$, $f(A_2 \cup A_3)$, $f(A_1 \cup A_3)$ $f(A_1 \cap A_2)$

และ $f(A_2 \cap A_3)$

5. กำหนดให้ $f(A)$ เป็นจำนวนจุดของคู่ลำดับทั้งหลายในรูป $(x, y)$ ที่อยู่ใน A โดยที่ทั้ง x และ y เป็นเลขจำนวนเต็มบวก ถ้า $A_1 = \{ (x, y) : x^2 + y^2 \leqslant 9 \}$
และ $A_2 = \{ (x, y) : | x + y | \leqslant 3 \}$
ก) $A_2$ เป็นซับเซทของ $A_1$ หรือไม่
ข) จงหาค่าของ $f(A_1)$ และ $f(A_2)$

6. จงหาเซทฟังก์ชันสำหรับ $A_1 = \{ (x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1 \}$
และ $A_2 = \{ (x, y) : 0 < x < y < 1 \}$ เมื่อกำหนด $f(A)$ ดังนี้

$$f(A) = \iint_A 3x^2y^7 \, dxdy, \quad 0 < x < 2,\ 0 < y < 1$$

$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

7. จงหาค่าของ $f(A_1)$ และ $f(A_2)$ ถ้า $A_1 = \{ (x, y) : x^2 + y^2 \leqslant 4 \}$,
$A_2 = \{ (x, y) : (x, y) = (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2) \}$

$$f(A) = \sum\sum_{A} (x + y)/15$$

ในเมื่อ $x = 0, 1, 2;\ y = 1, 2$ นอกนั้นไม่กำหนดค่า

## 1 - 3 เซทฟังก์ชันน่าจะเป็น (THE PROBABILITY SET FUNCTION)

เราเคยเรียนมาแล้วใน ST 205 ว่า ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย P(A) ก็คือ ความน่าจะเป็นที่ผลลัพธ์จากการทดลองเชิงสุ่ม จะเป็นสมาชิกของ A ในเมื่อเหตุการณ์ A ก็คือเซทใด ๆ ของผลลัพธ์ ซึ่งเป็นซับเซทของ S และค่าความน่าจะเป็นนี้เป็นตัวเลขที่อยู่ระหว่าง 0 กับ 1 กล่าวคือ P เป็นฟังก์ชันซึ่งมีโดเมนเป็นเซทของทุก ๆ ซับเซทของ S ซึ่งเป็นที่รู้จักกันในเทอมของ power set ของ S (บางทีก็เรียกว่า คลาส (class)) และมีพิสัยเป็นเลขจำนวนจริงระหว่าง 0 กับ 1 ดังนั้นเราให้นิยามของ P(A) ในเชิงของเซทฟังก์ชัน

**นิยาม** ความน่าจะเป็นก็คือ เซทฟังก์ชัน P ซึ่งกำหนดให้แก่แต่ละเหตุการณ์ A ในกลุ่มผลทดลอง S ตัวเลข P(A) ซึ่งเรียกว่าความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A จะมีคุณสมบัติดังนี้

1. $P(A) > 0$ สำหรับทุก ๆ A ที่อยู่ใน S
2. ถ้า $A_1, A_2, \ldots$ เป็นเหตุการณ์ที่ขจัดกัน (mutually exclusive events)
นั่นคือ $A_i \cap A_j = \phi,\ i \neq j$ แล้ว

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots$$

3. $P(S) = 1$

ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A จะมีค่าเท่ากับ $P(A)$ เราเรียก $(S, P)$ ว่าตัวแบบน่าจะเป็น (probability model) หรือ probability space

ถ้า $(S, P)$ เป็นตัวแบบน่าจะเป็น P เป็นฟังก์ชันซึ่งกำหนดให้กับทุกเหตุการณ์ $\mathcal{F}$, power set ของ S เราสามารถคำนวณค่าของ P โดยอาศัยคุณสมบัติข้อที่ (2) ได้ดังนี้

หาก $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ และมีความน่าจะเป็น $P(\{a_1\}), P(\{a_2\}), \ldots, P(\{a_n\})$ สำหรับทุก ๆ เหตุการณ์ A ที่อยู่ใน $\mathcal{F}$ จะได้

$$(2') \; P(A) = P(\{a_{i_1}\}) + P(\{a_{i_2}\}) + \ldots + P(\{a_{i_k}\})$$

ในเมื่อ $A = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}\}$

**ตัวอย่างที่ 1-3.1** กำหนด $S = \{a, b, c\}$ และฟังก์ชัน P ซึ่งมี $P(\{a\}) = \frac{1}{2}$, $P(\{b\}) = \frac{1}{2}$ และ $P(\{c\}) = 0$

พิสูจน์ว่า P เป็นฟังก์ชันน่าจะเป็น และ $(S, P)$ เป็นตัวแบบน่าจะเป็น

**วิธีทำ**

กำหนด $A = \{a, b\}$ ดังนั้น $P(A) = P(\{a\}) + P(\{b\}) = 1$

$A = \{a, c\} \Rightarrow P(A) = P(\{a\}) + P(\{c\}) = \frac{1}{2}$

$A = \{b, c\} \Rightarrow P(A) = P(\{b\}) + P(\{c\}) = \frac{1}{2}$

$A = \{a, b, c\} \Rightarrow P(A) = P(\{a\}) + P(\{b\}) + P(\{c\}) = 1 = P(S)$

แสดงว่า

$P(A) > 0$ ทุก ๆ เหตุการณ์ $A \subseteq \mathcal{F}$

และ $P(S) = 1$

กำหนด $A_1 = \{a\}$, $A_2 = \{b\}$

$A_1 \cup A_2 = \{a, b\}$ และ $A_1 \cap A_2 = \phi$

ดังนั้น $P(A_1 \cup A_2) = P(\{a, b\}) = P(\{a\}) + P(\{b\}) = P(A_1) + P(A_2)$ นั่นย่อมแสดงว่า P เป็นฟังก์ชันน่าจะเป็นและ $(S, P)$ เป็นตัวแบบน่าจะเป็น

**ทฤษฎีเกี่ยวกับเซทฟังก์ชันน่าจะเป็น**

1. สำหรับทุก ๆ A ที่เป็นซับเซทของ S

$$P(A) = 1 - P(A')$$

2. ความน่าจะเป็นของเซทว่าง เป็น 0 นั่นคือ

$$P(\phi) = 0$$

3. ถ้า A และ B เป็นซับเซทของ S โดยที่ $A \subseteq B$ แล้ว

$$P(A) \leqslant P(B)$$

4. สำหรับทุก ๆ A ที่เป็นซับเซทของ S

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$$

5. ถ้า $A_1$ และ $A_2$ เป็นซับเซทของ S แล้ว

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

6. ถ้า $\{A_n\}$ เป็นลำดับของเหตุการณ์ที่นับได้แล้ว

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

สำหรับการพิสูจน์ทฤษฎีเหล่านี้ ให้นักศึกษาดูใน ST 205

**ตัวอย่างที่** l-3.2 6-l P(A) = 0.2, P(B ıI A') = 0.4, P(C f-l A') = 0.2, $P(A' \cap B \cap C) = 0.1$ และ $P(B \cap C) = 0.1$ จงหา

n) $P(A' \cap B' \cap C')$

ข) $P(A \cap B \cap C)$

**วิธีทำ**

ก) $A \cup B \cup C = A \cup (A' \cap (B \cup C))$

แต่ $A \cap (A' \cap (B \cup C) = \phi$

$\Rightarrow$ $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(A' \cap (B \cup C))$ (คุณสมบัติข้อ 2)

$1 - P(A \cup B \cup C)' = P(A) + P((A' \cap B) \cup (A' \cap C))$ (ทฤษฎี 1)

$= P(A) + P(A' \cap B) + P(A' \cap C)$

$- P(A' \cap B \cap C)$ (อาศัยทฤษฎี 5)

ดังนั้น

$$1 - P(A' \cap B' \cap C') = 0.2 + 0.4 + 0.2 - 0.1 = 0.7$$

$$P(A' \cap B' \cap C') = 1 - 0.7 = 0.3$$

ตอบ

ข) $(A' \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C) = B \cap C$

แต่ $(A' \cap B \cap C) \cap (A \cap B \cap C) = \phi$

$$P((A' \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C)) = P(A' \cap B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

(คุณสมบัติข้อ 2)

$$\Rightarrow P(B \cap C) = 0.1 + P(A \cap B \cap C)$$

$$\Rightarrow P(A \cap B \cap C) = 0.1 \quad 0.1 = 0$$

ตอบ

เท่าที่เราได้ศึกษาเกี่ยวกับความน่าจะเป็นมาแล้วใน ST 205 จะเห็นได้ว่า กลุ่มผลทดลอง S ที่เราได้ศึกษามาเป็นกลุ่มผลทดลองที่มีจำนวนผลลัพธ์ หรือผลทดลองอยู่จำนวน m โดยที่ m มีค่าไม่เป็นอนันต์ (finite) หรือเป็นอนันต์ (infinite) ก็ได้ เช่นตัวอย่างในเรื่องการโยนเหรียญ

หากโยนเหรียญ 3 อัน กลุ่มผลทดลอง S จะมีจำนวนผลลัพธ์หรือผลทดลองอยู่จำนวน 8 นั่นคือ

$$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, TTH, THT, HTT, TTT\}$$

แต่ถ้าในการทดลองกำหนดว่า โยนเหรียญจนกว่าจะได้หัว กลุ่มผลทดลอง S จะมีจำนวนอนันต์แต่นับได้ ซึ่งผลที่ได้จากการนับก็คือ 1, 2, 3, ... นั่นคือ

$$S = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

กลุ่มผลทดลองประเภทนี้เราเรียก กลุ่มผลทดลองแบบไม่ต่อเนื่อง (discrete sample space) และการคำนวณค่าความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A, P(A), ก็คือ

$$P(A) = \sum_{0_i \varepsilon A} P(0_i) = \sum_{0_i \varepsilon A} p_i$$

มีการทดลองบางประเภทที่ให้กลุ่มผลทดลองที่มีจำนวนผลลัพธ์มากเป็นจำนวนอนันต์จนนับไม่ได้ การกำหนดลักษณะของกลุ่มผลทดลองต้องอาศัยวิธีเรขาคณิต ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์จะถูกนิยามเป็นสัดส่วนของรูปที่สมนัยกับเหตุการณ์นั้น โดยอาศัยการวัดทางเรขาคณิต เช่น ความยาว พื้นที่ หรือปริมาตร ฯลฯ ขึ้นอยู่กับมิติ (dimension) ของกลุ่มผลทดลอง

เนื่องจากกลุ่มผลทดลองประเภทนี้มีจำนวนผลลัพธ์มากจนดูต่อเนื่องเป็นเนื้อเดียวกัน เราจึงเรียกกลุ่มผลทดลองนี้ว่า กลุ่มผลทดลองต่อเนื่อง (continuous sample space)

การคำนวณค่าความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่เป็นซับเซทของกลุ่มผลทดลองต่อเนื่อง ไม่จำเป็นต้องกำหนดค่าความน่าจะเป็น $p_i$ ให้แก่แต่ละผลลัพธ์ $0_i$ เนื่องจากความน่าจะเป็นของแต่ละผลลัพธ์ $0_i$ จะต้องมีค่าเป็น 0 เสมอ (ดังตัวอย่างที่ 1-3.4) นอกจากนี้เราไม่อาจใช้วิธีการเช่น การบวกอนุกรมอนันต์ในการหาผลบวกของความน่าจะเป็นเหล่านี้ เพื่อแสดงว่า $P(S) = 1$ ได้ ดังนั้นการคำนวณความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A จาก $P(A) = \sum_{0_i \varepsilon A} p_i$ จะนำมาใช้ไม่ได้ ในกรณีนี้ วิธีการที่จะหาค่าความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่เป็นซับเซทของกลุ่มผลทดลองต่อเนื่อง จึงแตกต่างจากวิธีที่เราเคยเรียนใน ST 205 ซึ่งเราจะเห็นได้จากตัวอย่างต่อไปนี้

**ตัวอย่างที่ 1-3.3** เลือกจุดแบบสุ่มภายในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้จุดภายในวงกลมแนบในสี่เหลี่ยมจตุรัส ซึ่งมีจุดศูนย์กลางร่วมกัน

**วิธีทำ**

กำหนด a เป็นความยาวของสี่เหลี่ยมจัตุรัส

ดังนั้นวงกลมแนบในสี่เหลี่ยมจะมีเส้นผ่าศูนย์กลาง = a ด้วย

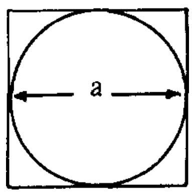
พื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัส $= a^2$

พื้นที่วงกลม $= \pi \dfrac{a^2}{4}$

ความน่าจะเป็นที่จุดภายในสี่เหลี่ยมที่ถูกเลือกจะเป็นจุดในวงกลมด้วย

$$= \frac{\pi a^2/4}{a^2}$$

$$= \frac{\pi}{4}$$




**ตอบ**

**ตัวอย่างที่ 1-3.4** ไม้ท่อนหนึ่งมีความยาว L ถูกหักที่จุดต่าง ๆ แบบสุ่ม ซึ่งเป็นลักษณะเดียวกับการเลือกจุดแบบสุ่มในช่วง $[0, L]$ ถ้า $0 < a < b < L$ แล้วรอยที่หักที่เกิดขึ้นระหว่าง a และ b จะมีความน่าจะเป็นเท่ากับ $(b - a)/L$ ความน่าจะเป็นที่รอยหักจะเกิดขึ้นที่จุด c ใด ๆ จะเป็นเท่าใด เมื่อ $\{c\} \subseteq (c - \frac{1}{n}, c + \frac{1}{n})$ สำหรับค่า n ใด ๆ และให้ $(c - \frac{1}{n}, c + \frac{1}{n})$ เป็นเหตุการณ์

**วิธีทำ** อาศัยทฤษฎี 3 จะได้

$$P(\{c\}) \leqslant P(c - \frac{1}{n}, c + \frac{1}{n}) = \frac{2/n}{L} = \frac{2}{nL}$$

$$\therefore \quad P(\{c\}) \leqslant \frac{2}{nL} \quad \text{สำหรับทุกค่าของ } n$$

$$\Rightarrow \quad P(\{c\}) = \lim_{n\to\infty} P(c - \frac{1}{n}, c + \frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} (\frac{2}{nL}) = 0$$

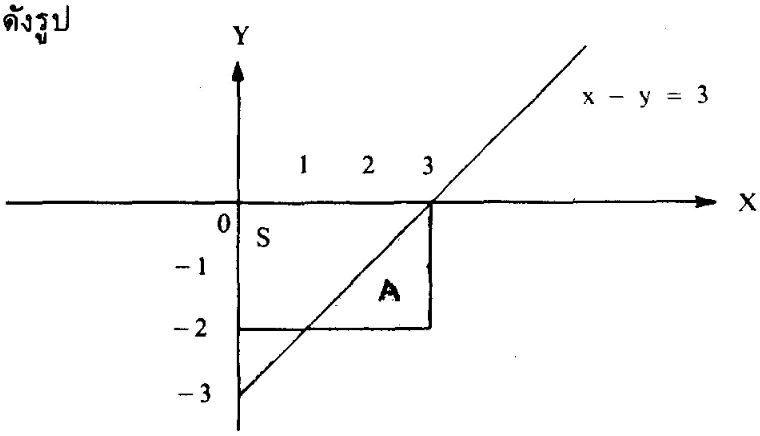
**ดังนั้น** ถึงแม้ว่าจะมีรอยหักเกิดขึ้นที่จุดนี้ ความน่าจะเป็นที่จะเกิดขึ้น = 0

**ตอบ**

**ตัวอย่างที่ 1-3.5** เลือกจุดแบบสุ่ม 2 จุดบนเส้นตรงคือ จุด a และ b โดยมีเงื่อนไขว่า $0 < a < 3, -2 < b < 0$ จงหาความน่าจะเป็นที่ระยะทางระหว่างจุด a และจุด b จะมีค่ามากกว่า 3

**วิธีทำ** เพื่อความสะดวกเราจะแก้ปัญหาในเทอมของสองมิติ นั่นคือเลือกจุดแบบสุ่มใน $\{0 < x < 3, -2 < y < 0\}$ กำหนด d เป็นผลต่างระหว่าง a กับ b

**ดังนั้น** เหตุการณ์ $A = \{d > 3\}$ จะประกอบด้วยบรรดาจุดในสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่อยู่ใต้เส้นตรง $x - y = 3$ ดังรูป



พื้นที่ของ $S = 3 \times 2 = 6$

พื้นที่ของ $A = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$

ดังนั้น $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

ความน่าจะเป็นที่ระยะทางระหว่างจุด a และ b จะมีค่ามากกว่า 3 เท่ากับ $\frac{1}{3}$

**ตอบ**

**ข้อสังเกต**

ในกรณีของกลุ่มผลทดลองอนันต์ (infinite sample spaces) หรือกลุ่มผลทดลองต่อเนื่อง เรานิยาม (S, G, P) เป็นตัวแบบน่าจะเป็น เมื่อ G ซึ่งเรียกว่า $\sigma$ -field หรือ sigma-field คือกลุ่มของเหตุการณ์ซึ่งมีสมบัติดังนี้

1. S อยู่ใน G (S เป็นสมาชิกของ G)
2. ถ้า A อยู่ใน G (A เป็นสมาชิกของ G) แล้ว $A'$ อยู่ใน G ด้วย
3. ถ้า $A_1, A_2, \ldots$ อยู่ใน G แล้ว $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ อยู่ใน G ด้วย

ดังนั้นคุณสมบัติของความน่าจะเป็นจะกำหนดไว้ดังนี้

สำหรับทุกเหตุการณ์ A ใน G จะมีตัวเลข P(A) ซึ่งมีสมบัติดังนี้

1 $0 \leqslant P(A)$

2. $P(S) = 1$

3. ถ้า $A_1, A_2, \ldots$ อยู่ใน G โดยที่ $A_i \cap A_j = \phi, i \neq j$ แล้ว

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

หาก S เป็นกลุ่มผลทดลองไม่อนันต์ (finite sample spaces) หรือกลุ่มผลทดลองแบบไม่ต่อเนื่อง และเราให้ G เป็นเหตุการณ์ทั้งหมดที่อยู่ใน S คุณสมบัติดังกล่าวข้างต้นก็คือ คุณสมบัติเดียวกันกับที่กล่าวไว้แล้วในนิยามของความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A

## แบบฝึกหัดที่ 1-3

1. จงพิจารณาความน่าจะเป็นต่อไปนี้ว่า มีข้อใดบ้างที่ไม่เป็นฟังก์ชันน่าจะเป็น โดยไม่ต้องสนใจว่าฟังก์ชัน P จะกำหนดค่าความน่าจะเป็นอะไรให้กับเหตุการณ์ที่เป็นไปได้อื่น ๆ อธิบายเหตุผลการพิจารณาของท่าน

1.1 $P(\{a, b\}) = \frac{1}{2}$, $P(\{a\}) = \frac{2}{3}$

1.2 $P(\{a, b\}) = \frac{1}{4}$, $P(\{c, d\}) = \frac{1}{2}$

1.3 $P(\{a, b\}) = \frac{1}{2}$, $P(\{b, c, d\}) = \frac{1}{2}$, $P(\{a\}) = \frac{1}{4}$

1.4 $P(\{b\}) = P(\{c\}) = P(\{d\}) = \frac{1}{3}$,

1.5 $P(\{a, b, c\}) = \frac{2}{3}$, $P(\{a, b\}) = P(\{b, c\}) = \frac{1}{4}$

2. เลือกตัวเลข 3 ตัว จากเลขโดด 1, 2, 3, 4, 5 โดยไม่ให้ซ้ำกันมาเรียงลำดับกัน กำหนดเหตุการณ์ A, B, C ดังนี้

A = { ตัวเลข 2 อยู่ในตำแหน่งที่ 2 }

B = { จำนวนเลขที่มีค่ามากกว่า 500 }

C = { จำนวนเลขที่เป็นเลขคี่ }

ถ้าเซทฟังก์ชันน่าจะเป็นกำหนดค่า $\frac{1}{60}$ ให้แก่แต่ละผลลัพธ์ในกลุ่มผลทดลอง S

จงหาค่าของ $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cap C)$, $P(AUB)$, $P(A \cup C)$ และ $P(B \cup C)$

3. จงหาค่าความน่าจะเป็นต่อไปนี้ในเทอมของ $P(A_1)$, $P(A_2)$ และ $P(A_1$ II $A_2)$

3.1 $P(A_1$ U A;), $P(A_1 \cap$ A;), $P(A_1 \cap A_2)'$, $P(A_1 \cap$ A;)', $P(A_1$ U A2)'
$P(A_1 \cup A_2')'$, $P(A_1' \cap (A$, U $A_2)$

3.2 จงคำนวณค่าความน่าจะเป็นในข้อ 3.1 ถ้า $P(A_1) = 0.5$, $P(A_2) = 0.6$ และ $P(A_1 \cap A_2) = 0.2$

4. ถ้า $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.5$, $P(C) = 0.7$, $P(A \cap B) = 0.2$, $P(B \cap C) = 0.4$, $P(A \cap C) = 0.2$ และ P(A r-l B $\cap$ C) = 0.1

จงหาค่าของ $P(A \cup B \cup C)$ และ $P(A \cup B \cup C')$

5. กำหนด $P(\{n\}) = (\frac{1}{2})^n$ สำหรับทุก ๆ ค่าของ n ที่เป็นเลขจำนวนเต็มบวก กำหนด

$A = \{n : 1 \leqslant n \leqslant 10\}$

$B = \{n : 1 \leqslant n \leqslant 20\}$

$C = \{n : 11 \leqslant n \leqslant 20\}$

จงหา

5.1 $P(A)$ **5.2** $P(B)$ **5.3** $P(A \cup B)$

**5.4** $P(A \cap B)$ **5.5** $P(C)$ **5.6** $P(B')$

6. เลือกจุดแบบสุ่มภายในวงกลมที่มีรัศมีเท่ากับ 1″ จงหาความน่าจะเป็นที่จุดนี้จะไม่อยู่ภายในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีความยาวของเส้นทะแยงมุมเท่ากับ 2″ และมีจุดศูนย์กลางร่วมกันกับวงกลม

7. รถเมล์ด่วนที่กำหนดปล่อยจากท่ารถในเวลา 7:30 มักจะออกจากท่ารถในช่วงเวลา 7:25 ถึง 7:40 เสมอ นายรามออกเดินทางจากบ้านเวลา 7:30 และใช้เวลาในการเดินทางจากบ้านถึงท่ารถ 5 นาที จงหาความน่าจะเป็นที่เขาจะไปทันรถเมล์ออก

**a.** กำหนด $S = \{(x, y) : -\infty < x, y < \infty\}$; $A_1 = \{(x, y) : x \leqslant 5, y \leqslant 7\}$

$A_2 = \{(x, y) : x \leqslant 5, y \leqslant 1\}$; $A_3 = \{(x, y) : x \leqslant 3, y \leqslant 7\}$

$A_4 = \{(x, y) : x \leqslant 3, y \leqslant 1\}$ และ $A_5 = \{(x, y) : 3 < x \leqslant 5, 1 < y \leqslant 7\}$

หาก $P(A_1) = \frac{3}{4}$, $P(A_2) = \frac{1}{2}$, $P(A_3) = \frac{1}{2}$, $P(A_4) = \frac{3}{8}$

จงหาค่าของ $P(A_5)$

## 1-4 ความน่าจะเป็นภายใต้เงื่อนไขและความเป็นอิสระกัน (CONDITIONAL PROBABILITY AND INDEPENDENCE)

A และ B ต่างเป็นซับเซทของกลุ่มผลทดลอง S หากการเกิดขึ้นของ A และ B มีความสัมพันธ์กัน โดยที่การเกิดขึ้นของ A หรือของ B ก็ตาม จะส่งผลกระทบไปถึงเหตุการณ์ที่เกิดหลังทั้งสิ้น หากเหตุการณ์ B ได้เกิดขึ้นแล้ว ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A ก็จะเปลี่ยนไปจากเดิมขึ้นอยู่กับว่าเหตุการณ์ B เป็นอย่างไร เราแทนความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A *ภายใต้เงื่อนไขของ*การเกิดของเหตุการณ์ B ด้วย $P(A/B)$ (conditional probability of A given B) และนิยาม $P(A/B)$ ดังนี้

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, P(B) \neq 0 \qquad (1\text{-}4.1)$$

ทำนองเดียวกัน หาก $P(B|A)$ เป็นความน่าจะเป็นเงื่อนไขของเหตุการณ์ B เมื่อกำหนดว่าเหตุการณ์ A ได้เกิดขึ้นแล้ว จะได้

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} P(A) \neq 0$$

หากเราพิจารณาเหตุการณ์ $A \cap B$, และ B จะเห็นได้ว่า

$A \cap B \subseteq B$ และ $P(A \cap B) \leqslant P(B) \geqslant 0$ ดังนั้นผลที่จะได้ตามมาก็คือ

1. $0 \leqslant P(A|B) \leqslant 1$

2. $P(S|B) = 1$, $P(\phi|B) = 0$ และ $P(B|B) = 1$

3. ถ้า $A_1, A_2, \ldots$ เป็นเหตุการณ์ที่ขจัดกัน หรือเหตุการณ์ที่แยกต่างหากจากกัน และ B เป็นซับเซทของ union ของ $A_1, A_2 \ldots$ แล้ว

$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B) + \ldots$ (เป็นแบบฝึกหัด ให้นักศึกษาไปพิสูจน์)

บรรดาทฤษฎีทั้งหลายของเซทฟังก์ชันน่าจะเป็น ใช้ได้เสมอกับความน่าจะเป็นภายใต้เงื่อนไขที่เกี่ยวกับเหตุการณ์ใด ๆ ที่กำหนดให้ ตัวอย่างเช่น อาศัยกฎการบวก

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

จะได้

$$P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C) - P(A \cap B|C)$$

จากนิยามของความน่าจะเป็นภายใต้เงื่อนไข สามารถเขียนเป็นกฎการคูณได้ดังนี้

$$P(A \cap B) = P(A) . P(B|A)$$

หรือ

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$$

หรือเขียนเป็นกฎการคูณทั่ว ๆ ไปว่า

$$P(\bigcap_{i=1}^{k} A_i) = P(A_1)\, P(A_2|A_1)\, P(A_3|A_1 \cap A_2) \ldots P(A_k|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{k-1})$$

(ดูตัวอย่างที่ 1-4.1 กรณีที่ $k = 4$)

หาก B เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ของการทดลองเชิงสุ่ม และ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ เป็นส่วนแบ่ง (partition) ของ S นั่นคือ

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = S \text{ และ } A_i \cap A_j = \phi,\ i \neq j$$

แล้ว $\{B \cap A_1, B \cap A_2, \ldots, B \cap A_n\}$ ก็จะเป็น partition ของ S ด้วย และสามารถเขียนเป็นกฎแห่งการรวมความน่าจะเป็น (Law of Total Probabilities) ได้ดังนี้

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\ P(B|A_i)$$

หาก $P(B) \neq 0$ จะได้กฎของเบยส์ (Bayes' rule) ดังนี้

$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k)\,P(B\,|\,A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)\ P(B|A_i)}$$

(เป็นแบบฝึกหัด ให้นักศึกษาไปพิสูจน์)

**ตัวอย่างที่ 1-4.1** จงพิสูจน์ว่า

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)P(A_4|A_4 \cap A_2 \cap A_3)$$

**วิธีทำ** อาศัยกฎการคูณ

$$\begin{aligned}
P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) &= P((A_1 \cap A_2 \cap A_3) \cap A_4) \\
&= P((A_1 \cap A_2) \cap A_3)\ P(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\
&= P(A_1 \cap A_2)\ P(A_3|A_1 \cap A_2)\ P(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\
&= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)P(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3)
\end{aligned}$$

**ตัวอย่างที่ 1-4.2** สุ่มไพ่มา 1 ใบจากสำรับไพ่ 5 ใบซึ่งมีหมายเลข 1, 2, 3, 4 และ 5 สมมติว่าสุ่มได้หมายเลข k ให้สุ่มไพ่ใบที่สองจากไพ่หมายเลข 1 ถึงไพ่หมายเลข k ถ้าสุ่มได้หมายเลข r ให้สุ่มไพ่ใบที่สามจากไพ่หมายเลข 1 ถึงหมายเลข r จงหาความน่าจะเป็นที่จะสุ่มได้ไพ่เรียงลำดับกันเป็นหมายเลข (4,3,2)

**วิธีทำ** กำหนด A = (สุ่มครั้งแรกได้ไพ่หมายเลข 4)

B = (สุ่มครั้งที่สองได้ไพ่หมายเลข 3)

C = (สุ่มครั้งที่สามได้ไพ่หมายเลข 2)

เนื่องจากไพ่ใบแรกสุ่มมาจากสำรับไพ่ที่มีอยู่ 5 ใบ $P(A) = \frac{1}{5}$

เมื่อสุ่มใบแรกได้หมายเลข 4 ก็แสดงว่าจะต้องสุ่มไพ่ใบที่สองจากไพ่ที่มีอยู่ 4 ใบ ดังนั้น $P(B|A) = \frac{1}{4}$

เมื่อสุ่มใบที่สองได้หมายเลข 3 ก็แสดงว่าจะต้องสุ่มใบที่สามจากไพ่ที่มีอยู่ 3 ใบ ดังนั้น- $P(C|A \cap B) = \frac{1}{3}$

อาศัยกฎการคูณ เมื่อ $k = 3$ จะได้

ความน่าจะเป็นที่จะสุ่มได้ไพ่เรียงลำดับกันเป็นหมายเลข $(4, 3, 2) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{60}$

**ตัวอย่างที่ 1-4.3** หยิบฉลาก 5 ใบ แบบสุ่มจากกล่องที่หนึ่ง ซึ่งบรรจุฉลากสีแดง 6 ใบ และสีน้ำเงิน 4 ใบ นำฉลากทั้ง 5 ที่ได้ใส่ลงในกล่องที่สอง ซึ่งเป็นกล่องว่าง แล้วหยิบฉลากแบบสุ่ม 1 ใบจากกล่องที่สอง ถ้าได้ฉลากสีน้ำเงิน จงหาความน่าจะเป็นภายใต้เงื่อนไขที่สุ่มได้ฉลาก 5 ใบจากกล่องที่ 1 เป็นสีแดง 2 ใบ และสีน้ำเงิน 3 ใบ

**วิธีทำ**

กำหนด $A_i$ = หยิบฉลากจากกล่องที่หนึ่งได้สีแดง $i$ ใบ และสีน้ำเงิน $5-i$ ใบ

$i = 1, 2, 3, 4, 5$

B = หยิบฉลากจากกล่องที่สองได้สีน้ำเงิน

ดังนั้น $P(A_i) = \dfrac{\binom{6}{i}\binom{4}{5-i}}{\binom{10}{5}}, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5$

และ $P(B|A_i) = \dfrac{5-i}{5}, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5$

นั่นคือ

$$P(A_2)P(B|A_2) = \frac{\binom{6}{2}\binom{4}{5-2}}{\binom{10}{5}} \cdot \frac{5-2}{5} = \frac{180}{\binom{10}{5}}$$

$$\sum_{i=1}^{5} P(A_i)P(B|A_i) = \sum_{i=1}^{5} \frac{\binom{6}{i}\binom{4}{5-i}}{\binom{10}{5}} \cdot \frac{5-i}{5} = \frac{504}{\binom{10}{5}}$$

อาศัยกฎของเบยส์

$$P(A_2|B) = \frac{\frac{180}{\binom{10}{5}}}{\frac{504}{\binom{10}{5}}} = \frac{5}{14}$$

**ตอบ**

ในบางกรณีการเกิดขึ้นของเหตุการณ์ A และ B จะไม่มีความสัมพันธ์กัน นั่นคือการเกิดขึ้นก่อนของเหตุการณ์ใด ๆ ไม่มีผลกระทบต่อเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นในภายหลัง เราเรียกการเกิดขึ้นของเหตุการณ์ A และ B ว่าเป็นอิสระกัน นั่นก็หมายความว่า หากเรารู้ว่าเหตุการณ์ B ได้เกิดขึ้นแล้วความน่าจะเป็นของ A ภายใต้เงื่อนไขของการเกิดขึ้นแล้วของ B ไม่ได้เปลี่ยนไปจากความน่าจะเป็นเดิมของ A เลย กล่าวคือ

$$P(A|B) = P(A)$$

และเนื่องจาก

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

เราจึงให้นิยามความเป็นอิสระของเหตุการณ์ได้ดังนี้

**นิยาม** ให้ A และ B เป็นสองเหตุการณ์ต่างเป็นซับเซทของกลุ่มผลทดลอง S A และ B **จะเป็นอิสระต่อกันก็ต่อเมื่อ**

$$P(A \cap B) = P(A)\ P(B) \qquad \text{..........(1-4.2)}$$

โดยทั่วไปหาก $A_1, A_2, \ldots, A_n$ เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ที่เป็นซับเซทของ S และ $P(A_i) \neq 0$ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ต่างก็เป็นอิสระต่อกันก็ต่อเมื่อ

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)\ P(A_j),\ 1 \leqslant i < j \leqslant n$$

$$P(A_i \cap A_j \cap A_k) = P(A_i)\ P(A_j)\ P(A_k),\ 1 \leqslant i < j < k \leqslant n$$

$P(A_1 \cap A_2 \cap \cap An) = P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n)$

**ตัวอย่างที่** 1-4.4 **HIfl** $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.5$ จงหา $P(A \cup B)$

ก) เมื่อ A และ B เป็นอิสระกัน

ข) เมื่อ A และ B ขจัดกัน

**วิธีทำ**

ก) A และ B เป็นอิสระกัน ดังนั้น $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$

$\Rightarrow P(A \cup B) = 0.4 + 0.5 \quad (0.4)(0.5)$

$= 0.7$

ข) A และ B ขจัดกัน ดังนั้น P(A fl B) = 0

$\Rightarrow P(A \cup B) = 0.4 + 0.5$

$= 0.9$

**ตัวอย่างที่** 1-4.5 นาย ก และนาย ข แข่งขันกันในการเรียนวิชา ST 311 โอกาสที่นาย ก จะได้เกรด G ในวิชานี้เท่ากับ 80% และโอกาสที่นาย ข จะได้เกรด G ในวิชานี้เท่ากับ 75% หาก เหตุการณ์ที่นาย ก หรือนาย ข จะได้เกรด G เป็นอิสระกัน จงหาความน่าจะเป็นที่คนทั้งสองจะได้เกรด G ในการสอบวิชานี้

**วิธีทำ**

**กำหนด** A : เหตุการณ์ที่นาย ก ได้เกรด G

**และ** B : เหตุการณ์ที่นาย ข ได้เกรด G

A และ B เป็นอิสระกัน ดังนั้น

$P(A \cap B) = P(A)\ P(B)$

$P(A \cap B) = 0.80 \times 0.75 = 0.6$

ความน่าจะเป็นที่คนทั้งสองจะได้เกรด G ในการสอบ = 0.6 **ตอบ**

**ข้อสังเกต**

1. การเป็นอิสระกันของเหตุการณ์ A และ B จะแตกต่างจากการขจัดกันของเหตุการณ์ A และ B หากเหตุการณ์ A และ B จะขจัดกัน นั่นหมายความว่าเหตุการณ์ทั้งสองไม่เกิดขึ้นร่วมกัน กล่าวคือ $A \cap B = \phi$ แต่ถ้าเหตุการณ์ A และ B เป็นอิสระกัน ย่อมหมายถึงว่าเหตุการณ์ทั้งสองเกิดขึ้นร่วมกัน แต่การเกิดขึ้นของแต่ละเหตุการณ์ไม่มีผลกระทบต่อกันเลย ซึ่งทำให้

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

2. เท่าที่กล่าวมาเราพูดถึงเหตุการณ์ในกลุ่มผลทดลอง S ซึ่งเกิดมาจากการทดลองเชิงสุ่มเพียงครั้งเดียว แต่จะแยกการทดลองเป็นกี่ขั้นตอนก็ได้ ในกรณีที่มีการทดลองมากกว่าหนึ่งครั้ง เรากล่าวว่า การทดลองเหล่านั้นจะเป็นอิสระต่อกันและกัน หากผลลัพธ์ของการทดลองแต่ละครั้งไม่มีผลกระทบซึ่งกันและกัน นั่นคือ ผลลัพธ์ของการทดลองหนึ่งจะไม่มีอิทธิพลต่อการเกิดขึ้นของผลลัพธ์ในการทดลองครั้งอื่น ๆ

## แบบฝึกหัด 1-4

1. สุ่มตัวเลข 3 ตัวจากเลขโดด 1, 4, 5, 7 โดยไม่ซ้ำกันมาสร้างเลข 3 หลัก จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้

1.1 เลขคี่

1.2 เลขที่มีค่าน้อยกว่า 500

1.3 เลขคี่ภายใต้เงื่อนไขว่าเป็นเลขที่มีค่าน้อยกว่า 500

2. ร้านขายนมสดมีนมสดวางขาย 150 ถุง เป็นนมใหม่ 100 ถุง นอกนั้นเป็นนมเก่า มีแม่บ้านมาซื้อนม 2 ถุง

2.1 จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้นมใหม่ทั้งสองถุง

2.2 จงหาความน่าจะเป็นเงื่อนไขที่จะได้นมใหม่ 2 ถุง กำหนดว่าอย่างน้อยที่สุด 1 ถุง เป็นนมใหม่

3. กล่อง $B_1$ บรรจุลูกหินสีแดง 2 ลูก ลูกหินสีขาว 5 ลูก กล่อง $B_2$ บรรจุลูกหินสีแดง 4 ลูก และลูกหินสีขาว 3 ลูก โยนลูกเต๋า ถ้าได้หมายเลขที่เป็นผลคูณของ 3 เลือกลูกหินหนึ่งลูกอย่างสุ่มจากกล่อง $B_2$ นอกนั้นเลือกจากกล่อง $B_1$

3.1 จงคำนวณความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกหินสีแดง

3.2 กำหนดว่าลูกหินที่เลือกได้เป็นสีแดง จงหาความน่าจะเป็นเงื่อนไขที่มันจะถูกสุ่มมาจากกล่อง $B_1$

4. ในจำนวนนักศึกษาสถิติ 10 คนที่จบในเทอมนี้ 4 คนเรียนวิชาโทคอมพิวเตอร์ 5 คน เรียนวิชาโทเศรษฐศาสตร์ และอีก 1 คนเรียนวิชาโทบริหารธุรกิจ ถ้าสำนักงานแห่งหนึ่งต้องการบัณฑิตที่จบสถิติ 3 คน จงหาความน่าจะเป็นเงื่อนไขที่จะได้บัณฑิตที่เรียนวิชาโทสาขาละหนึ่งคน กำหนดว่าในสามคนนี้มีที่เรียนวิชาโทคอมพิวเตอร์เพียง 1 คน

5. กล่องใบหนึ่งมีบอลล์สีแดง 3 ลูก สีน้ำเงิน 7 ลูก กล่องใบที่สองมีบอลล์สีแดง 6 ลูก สีน้ำเงิน 4 ลูก เลือกกล่องอย่างสุ่ม 1 กล่อง แล้วเลือกบอลล์ 1 ลูก จากกล่องนั้น

5.1 จงคำนวณความน่าจะเป็นที่จะได้บอลล์สีแดง

5.2 บอลล์ถูกสุ่มจากกล่องที่สองภายใต้เงื่อนไขว่าเป็นบอลล์สีแดง

6. สถาบันวิจัยแห่งหนึ่งเปิดรับสมัครนักวิจัย 5 คน มีคนมาสมัคร 10 คน เป็นนักสถิติ 6 คน นักเศรษฐศาสตร์ 4 คน ในจำนวน 5 คนที่สอบได้ จะได้รับการคัดเลือกให้ศึกษาต่อ 1 คน (ถือว่าทุกคนมีความสามารถเท่าเทียมกันหมด) จงคำนวณความน่าจะเป็นที่ 5 คน ซึ่งสอบได้เป็นนักสถิติ 2 คน และนักเศรษฐศาสตร์ 3 คน ภายใต้เงื่อนไขว่านักเศรษฐศาสตร์ได้ไปศึกษาต่อ

7. มีฉลาก 5 ใบหมายเลข 1, 2, 3, 4, 5 หยิบฉลาก 1 ใบอย่างสุ่ม บันทึกผลที่ได้แล้วใส่กลับคืนที่เดิม ต่อจากนั้นหยิบฉลากใบที่ 2 บันทึกค่าที่ได้ให้

A เป็นเหตุการณ์ที่หยิบครั้งแรกได้เลขคี่

B เป็นเหตุการณ์ที่หยิบครั้งที่สองได้ตัวเลขมีค่าไม่เกิน 3

A และ B เป็นอิสระต่อกันหรือไม่

8. ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ที่เป็นอิสระกัน จงพิสูจน์ว่าเหตุการณ์แต่ละคู่ต่อไปนี้เป็นอิสระต่อกันด้วย

8.1 $A$ และ $B'$

8.2 $A'$ และ $B$

8.3 $A'$ และ $B'$

9. A และ B เป็นเหตุการณ์ที่เป็นอิสระกัน ถ้า $P(A) = 0.7$ และ $P(B) = 0.5$ จงคำนวณค่าของ

9.1 $P(A \cup B)$

**9.2** $P(A' \cup B)$

**9.3** $P(A' \cup B')$

10. จงพิสูจน์ว่า ข้อความเหล่านี้เป็นจริง (หรือไม่จริง) เหตุการณ์ A, B, C ต่างเป็น**ซับเซท**ของกลุ่มผลทดลอง S

**10.1** ถ้า $P(A|B) > P(A)$ แล้ว $P(B|A) > P(B)$

**10.2** ถ้า $P(A) > P(B)$ แล้ว $P(A|C) > P(B|C)$

**10.3** ถ้า A และ B เป็นอิสระต่อกัน แล้ว $P(A \cap B|C) = P(A|C)\,P(B|C)$

**10.4** $P(A|B) \geqslant \dfrac{P(A) + P(B) - 1}{P(B)}$

**10.5** กำหนด $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B|A) = \frac{1}{2}$ และ $P(A|B) = \frac{1}{3}$

10.5.1 A และ B เป็นอิสระกัน

10.5.2 A และ B เป็นเหตุการณ์ที่ขจัดกัน

**10.5.3** $A \subseteq B$

**10.5.3** $P(A'|B') = \frac{2}{3}$

**คำตอบ**

**แบบฝึกหัดที่ 1.1**

4. $0 < x < 5$, $0 < x < 10$, $0 < x \leqslant 3$

5. $x = 2$, $\phi$, $\phi$, $4 \leqslant x \leqslant 12$

**แบบฝึกหัดที่ 1.2**

1. 7, 10, 4, 16

2. $\frac{124}{125}$, $1 - \frac{1}{54}$

3. $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{11}{32}$, 0, $\frac{27}{32}$

4. $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{20}$, $\frac{1}{20}$, 3, $\frac{3}{5}$, $\frac{9}{20}$, $\frac{7}{10}$, 1, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{10}$

5. 4, 3

6. $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{11}$

7. $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{5}$

**แบบฝึกหัดที่ 1.3**

2. $\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{20}, \frac{3}{20}, \frac{7}{20}, \frac{13}{20}, \frac{7}{10}$

5. $1 - 2^{-10}, 1 - 2^{-20}, 1 - 2^{-20}, 1 - 2^{-10}, 2^{-10} - 2^{-20}, 2^{-20}$

6. $1 - \frac{2}{\pi}$, 7. $\frac{1}{3}$, 8. $\frac{1}{8}$

**แบบฝึกหัดที่ 1.4**

1. $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}$
2. $\frac{198}{447}, \frac{99}{199}$
3. $\frac{8}{21}, \frac{1}{2}$
4. $\frac{1}{3}$
5. $\frac{9}{20}, \frac{2}{3}$
6. $\frac{5}{14}$