บทที่ 4
ตัวแปรเชิงสุ่มแบบทวิคูณ
Bivariate Random Variables

วัตถุประสงค์ เพื่อศึกษาถึงสมบัติและคุณลักษณะของตัวแปรเชิงสุ่มแบบทวิคูณ ฟังก์ชันน่าจะเป็นร่วมหรือฟังก์ชันความหนาแน่นร่วม และฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วม ศึกษาถึงการแจกแจงของตัวแปรเชิงสุ่มเฉพาะตัวที่เราสนใจ โดยไม่สนใจว่าตัวแปรตัวอื่นจะมีผลลัพธ์อย่างไร ศึกษาถึงการแจกแจงภายใต้เงื่อนไข วิธีการคำนวณค่าของความน่าจะเป็นร่วมของตัวแปรเชิงสุ่มแบบทวิคูณ การคำนวณค่าความน่าจะเป็นภายใต้เงื่อนไข ความน่าจะเป็นที่เกี่ยวกับตัวแปรที่เราสนใจ

เท่าที่บรรยายมาแล้วในบทที่ 2 เป็นเรื่องของการแจกแจงของตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นฟังก์ชันเลขจำนวนจริงฟังก์ชันเดียว นิยามไว้ในกลุ่มผลทดลอง S ในปัญหาทั่ว ๆ ไป เราสนใจการแจกแจงของตัวแปร n ตัว ที่เป็นฟังก์ชันเลขจำนวนจริง n ฟังก์ชัน นิยามในกลุ่มผลทดลอง S โดยมีพิสัยเป็นชุดที่ประกอบด้วยค่าที่เป็นเลขจำนวนจริง n ตัว เราเรียกการแจกแจงนี้ว่า "การแจกแจงแบบพหุคูณ" (multivariate distributions) แต่ที่สนใจมากที่สุดในที่นี้ก็คือ กรณีที่ $n = 2$ ซึ่งเรียกว่า "การแจกแจงแบบทวิคูณ" (bivariate distributions) อันเป็นเรื่องเกี่ยวกับคุณลักษณะของตัวแปรเชิงสุ่มแบบทวิคูณนั่นเอง หากเรามี (X, Y) เป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบทวิคูณ ทั้ง X และ Y ต่างเป็นฟังก์ชันเลขจำนวนจริง นิยามในกลุ่มผลทดลอง S นั่นหมายความว่า เรากำหนดกฎเกณฑ์หรือกติกา 2 อย่างคือ X กับ Y ให้กับแต่ละผลลัพธ์ในกลุ่มผลทดลอง S กล่าวคือ ถ้า S เป็นกลุ่มผลทดลองที่ประกอบด้วยผลลัพธ์ s_i ตัวแปรเชิงสุ่ม X จะเป็นฟังก์ชันซึ่งทอดภาพจากผลลัพธ์ s_i ใน S ไปสู่เลขจำนวนจริง $X(s_i)$ ในขณะที่ตัวแปรเชิงสุ่ม Y จะเป็นฟังก์ชัน ซึ่งทอดภาพจากผลลัพธ์ s_i ใน S ไปสู่เลขจำนวนจริง $Y(s_i)$ ทั้ง $X(s_i)$ และ $Y(s_i)$ ต่างเป็นค่าของฟังก์ชันทั้งสอง ซึ่งจะประกอบเป็นชุดของเลขจำนวนจริง เรียกว่าพิสัยของ X และ Y เขียนแทนด้วยสัญญลักษณ์ R ดังนี้

$$x = X(s_i),\ y = Y(s_i)$$

$$R = \{(x, y) : ,\ s_i \in S\}$$

การบรรยายลักษณะของตัวแปรเชิงสุ่มทวิคูณ X, Y จะทำได้เช่นเดียวกันกับการบรรยายลักษณะของตัวแปรเชิงสุ่มตัวเดียว

4-1 ฟังก์ชันน่าจะเป็นร่วม (JOINT PROBABILITY FUNCTION)

นิยาม 4-1.1 ให้ (X, Y) เป็นตัวแปรเชิงสุ่มทวิคูณหรือตัวแปรเชิงสุ่มสองมิติ (two-dimensional random variable) (X, Y) **จะเป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่ไม่ต่อเนื่อง** (discrete random variables) ถ้า (X, Y) มีค่า (x_i, y_k) ซึ่งนับได้หรือเป็นตัวเลขที่มีค่าแตกต่างกัน สำหรับทุก ๆ ค่า i และ k และทำให้ $P(X = x_i, Y = y_k)$ มีค่ามากกว่า 0

เราเรียก (x_i, y_k) ว่าจุดกระโดด (jump point) และมักจะนิยมเขียน (x, y) แทนที่ (x_i, y_k) จากนิยามข้างบน แสดงให้เห็นว่า ค่าของตัวแปรเชิงสุ่มไม่ต่อเนื่อง อาจเป็นเลขจำนวนเต็ม เช่น (x, y) = (1, 2), (1, 3), (2, 3) หรืออาจเป็นเลขที่ไม่เป็นจำนวนเต็ม แต่ค่าของมันในแต่ละจุดไม่ต่อเนื่องกัน เช่น (x, y) = (.5, .5), (1.5, 2.5), (2.5, 1.5) ก็ได้ สำหรับการบรรยายลักษณะของตัวแปรเชิงสุ่ม ก็พูดในแบบของความน่าจะเป็นเพียงอย่างเดียว

นิยาม 4-1.2 ถ้าเราให้ $f(x, y) = P(X = x, Y = y)$ เราเรียก f(x, y) นี้ว่า เป็นฟังก์ชันน่าจะเป็นร่วม (joint probability function) ของ X และ Y ถ้า f(x, y) มีคุณสมบัติดังนี้

1. $0 \leqslant f(x, y) \leqslant 1$ สำหรับทุกค่า (x, y) ที่เป็นไปได้
2. $\sum_{\forall y} \sum_{\forall x} f(x, y) = 1$

เราสามารถแสดงฟังก์ชัน f(x, y) ได้ด้วยกราฟเส้น ซึ่งจะเป็นเส้นยื่นตั้งฉากกับระนาบระดับ X, Y โดยมีความสูงที่จุด (x, y) เท่ากับ f(x, y) ในกรณีที่เราต้องการคำนวณความน่าจะเป็นร่วมที่ X และ Y ออกค่าในพิสัยใด เช่น ต้องการคำนวณ $P(a < X \leqslant b, c < Y \leqslant d)$ เราสามารถคำนวณได้จาก f(x, y) ดังนี้

$$P(a < X \leqslant b, c < Y \leqslant d) = \sum_{\substack{a < x \leqslant b \\ c < y \leqslant d}} \sum f(x, y)$$

หรือต้องการคำนวณความน่าจะเป็นที่ (X, Y) อยู่ใน A ได้ดังนี้

$$P\{(X, Y) \in A\} = \sum_{\substack{\forall (x, y) \in A \\ \ni f(x, y) > 0}} f(x, y)$$

กรณีของตัวแปรเชิงสุ่ม n มิติ (ตัวแปรเชิงสุ่มแบบพหุคูณ) $(X_1, X_2, ..., X_n)$ จะเป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง ถ้าค่าที่เป็นไปได้ของ $X_1, X_2, ..., X_n$ มีจำนวนนับได้ การบรรยายลักษณะของตัวแปรพหุคูณ ทำได้เช่นเดียวกับกรณีของตัวแปรเชิงสุ่มมิติเดียว หรือสองมิติ

นิยาม 4-1.3 ให้ $(X_1, X_2, ..., X_n)$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่มพหุคูณแบบไม่ต่อเนื่อง และมีฟังก์ชัน f กำหนดไว้ดังนี้

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, ..., X_n = x_n)$$

เราเรียก f นี้ว่า ฟังก์ชันน่าจะเป็นร่วมของ $X_1, X_2, ..., X_n$ และมีสมบัติดังนี้

1. $f(x_1, x_2, ..., x_n) > 0$ สำหรับทุกค่า $(x_1, x_2, ..., x_n)$ ที่จะเป็นไปได้
2. $\sum\limits_{\forall x_1} \sum\limits_{\forall x_2} \cdots \sum\limits_{\forall x_2} f(x_1, x_2, ..., x_n) = 1$

ตัวอย่างที่ 4-1.1 สุ่มไพ่มา 13 ใบจากสำรับไพ่ซึ่งมีอยู่ 52 ใบ โดยวิธีสุ่มแล้วไม่ใส่กลับ กำหนดตัวแปรเชิงสุ่ม X เป็นจำนวนไพ่โพดำที่ได้จากการสุ่มและ Y เป็นจำนวนไพ่โพแดงที่ได้จากการสุ่มนี้ จงหาฟังก์ชันน่าจะเป็นร่วมของ X และ Y

วิธีทำ สุ่มไพ่ 13 ใบแบบไม่ใส่กลับจากสำรับไพ่ที่มี 52 ใบ จะมีจำนวนผลลัพธ์ $= 52^{(13)}$ กำหนดให้สุ่มไพ่ x ใบแรกเป็นโพดำตามด้วยไพ่โพแดง y ใบ แล้วสิ้นสุดด้วยไพ่อื่น ๆ $13 - x - y$ ใบ โดยที่ $x + y = 0, 1, 2, ..., 13$

จำนวนผลลัพธ์ที่จะเป็นไปได้ $= 13^{(x)} . 13^{(y)} . 26^{(13-x-y)}$

แต่วิธีการที่สุ่มไพ่ 13 ใบเป็นโพดำ x ใบ โพแดง y ใบ และอื่น ๆ $13 - x - y$ ใบ โดยที่ $x + y = 0, 1, 2, ..., 13$ มีทางเป็นไปได้ $\frac{13!}{x!\, y!\, (13-x-y)!}$ หนทาง

ดังนั้น จำนวนผลลัพธ์ของเหตุการณ์

$$(X = x, Y = y) = \frac{13!}{x!\, y!\, (13-x-y)!} . 13^{(x)} . 13^{(y)} . 26^{(13-x-y)}, x + y = 0, 1, 2, ..., 13$$

ฟังก์ชันน่าจะเป็นร่วมของ X และ Y จะกำหนดไว้ดังนี้

$$f(x, y) = \frac{13!}{x!\, y!\, (13-x-y)!} \cdot \frac{13^{(x)} . 13^{(y)} . 26^{(13-x-y)}}{52^{(13)}}, x + y = 0, 1, 2, ..., 13$$

$$\text{หรือ } f(x, y) = \frac{\binom{13}{x}\binom{13}{y}\binom{26}{13-x-y}}{\binom{52}{13}}, x + y = 0, 1, 2, ..., 13$$

ตัวอย่างที่ 4-1.2 X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มไม่ต่อเนื่องที่มีฟังก์ชันน่าจะเป็นร่วม f(x, y) กำหนดไว้ในตารางต่อไปนี้

f(x, y)

x \ y	0	1	2	3
−1	k	k	2k	3k
0	2k	2k	k	k
1	k	2k	3k	k

จงหาค่าของ k และคำนวณค่าของ $P(-1 < X \leqslant 0, 1 < Y \leqslant 3)$, $P(X + Y \leqslant 1)$ $P(X^2 + Y^2 > 4)$

วิธีทำ

f(x, y) เป็นฟังก์ชันน่าจะเป็นร่วมของ X และ Y ดังนั้น

$$k + k + 2k + 3k + 2k + 2k + k + k + k + 2k + 3k + k = 1$$

$$20k = 1$$

$$k = \frac{1}{20}$$

$$P(-1 < X \leqslant 0, 1 < Y \leqslant 3) = f(0, 2) + f(0, 3)$$

$$= \frac{1}{20} + \frac{1}{20} = 0.1$$

$$P(X + Y \leqslant 1) = f(-1, 0) + f(-1, 1) + f(-1, 2) + f(0, 0) + f(0, 1) + f(1, 0)$$

$$= \frac{1}{20} + \frac{1}{20} + \frac{2}{20} + \frac{2}{20} + \frac{2}{20} + \frac{1}{20} = 0.45$$

$$P(X^2 + Y^2 > 4) = f(-1, 2) + f(-1, 3) + f(0, 3) + f(1, 2) + f(1, 3)$$

$$= \frac{2}{20} + \frac{3}{20} + \frac{1}{20} + \frac{3}{20} + \frac{1}{20} = 0.5$$

แบบฝึกหัดที่ 4-1

1. สมมติว่าฟังก์ชันน่าจะเป็นร่วมของตัวแปรเชิงสุ่ม X และ Y คือ f(x, y) ซึ่งมีค่ามากกว่า 0 เมื่อ $(x, y) \in R = \{(x, y) : (x, y) = (2, 1), (2, 2), (3, 2), (3, 3)\}$ นอกนั้นเป็น 0 ถ้า $f(3, 2) = f(3, 3) = \frac{1}{8}$ และ $P(X \geqslant 2, Y \geqslant 2) = \frac{3}{4}$ จงหา f(x, y) และ $P(X = 2, Y = 1)$

2. จงคำนวณค่าของ k ที่ทำให้

$$f(x, y) = k(x^2 + 3xy + 1), x = 0, 1, y = 1, 2, 3$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

เป็นฟังก์ชันน่าจะเป็นร่วมของตัวแปรเชิงสุ่ม X และ Y และคำนวณค่าของ $P(X \leqslant \frac{1}{2}, Y > \frac{3}{2})$, $P(X + Y \geqslant 4)$, $P(X^2 = Y^2)$

3. $f(x, y) = \dfrac{20!}{x!(y-x)!\,(20-y)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{20+y}$, $x = 0, 1, 2, \ldots, y$
$y = 0, 1, 2, \ldots n$

$= 0$ อื่น ๆ

เป็นฟังก์ชันน่าจะเป็นร่วมของตัวแปรเชิงสุ่ม X และ Y จงหาค่าของ n

4. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันน่าจะเป็นร่วม f(x, y) กำหนดไว้ดังนี้

$$f(x, y) = k, (x, y) = (-1, 1), (-1, 2), (0, 1), (0, 2), (1, 3)$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

จงหาค่าของ k และคำนวณค่าของ $P(-1 < X \leqslant 1, 1 < Y \leqslant 3)$, $P(2X < Y)$ $P\{(X, Y) \in A\}$ เมื่อ $A = \{(x, y) : |x + y| \leqslant 1\}$

5. กล่องใบหนึ่งบรรจุบอลล์สีขาว 8 ลูก สีดำ 2 ลูก สุ่มบอลล์จากกล่องนี้ 3 ลูก

ก. แบบใส่กลับ

ข. แบบไม่ใส่กลับ

กำหนดตัวแปรเชิงสุ่ม X และ Y ดังนี้

X = 0 ถ้าสุ่มครั้งแรกเป็นสีขาว

= 1 ถ้าสุ่มครั้งแรกได้สีดำ

Y = จำนวนบอลล์สีขาวที่ได้จากการสุ่ม

จงเขียนตารางแสดงฟังก์ชันน่าจะเป็นร่วมของ X และ Y

6. ไพ่สำรับหนึ่งมีอยู่ $m + n$ ใบ หมายเลข $1, 2, \ldots, m, m + 1, \ldots, m + n$ เรียงไพ่สำรับนี้เป็นแถวแบบสุ่ม ใน $m + n$ ตำแหน่งหมายเลข $1, 2, \ldots, m + n$ เช่นเดียวกัน กำหนดตัวแปรเชิงสุ่ม X และ Y ดังนี้

X = จำนวนคู่ที่จับคู่กันได้ใน m ตำแหน่งแรก

Y = จำนวนคู่ที่จับคู่กันได้ใน n ตำแหน่งถัดไป

6.1 จงพิสูจน์ว่า

$$P(X = x, Y = y) = \binom{m}{x}\binom{n}{y}\frac{(m + n - x - y)!}{(m+n)!} \quad P_{m+n-x-y}$$

$$x = 0, 1, 2, \ldots, m$$

$$y = 0, 1, 2, \ldots, n$$

ในเมื่อ $p_{m+n-x-y}$ = ความน่าจะเป็นที่จะไม่มีการจับคู่กันเลยใน $m+n-x-y$ ตำแหน่ง

6.2 กำหนด $m = 1, n = 2$ จงเขียนตารางแสดงฟังก์ชันน่าจะเป็นร่วมของ X และ Y

4-2 ฟังก์ชันความหนาแน่นร่วม (JOINT DENSITY FUNCTION)

นิยาม 4-2.1 ให้ (X, Y) เป็นตัวแปรแบบทวิคูณ (X, Y) เป็นตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่อง (continuous random variables) ถ้าค่าที่เป็นไปได้ของ X และ Y มีจำนวนอนันต์นับไม่ได้ บอกได้แต่เพียงค่าต่ำสุด และ/หรือค่าสูงสุดเท่านั้น

นิยาม 4-2.2 ให้ X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่อง ซึ่งมีฟังก์ชัน $f(x, y)$ กำหนดไว้ว่า

$$f(x, y)\,dxdy = P(x < X \leqslant x + dx, y < Y \leqslant y + dy)$$

เราเรียกฟังก์ชัน $f(x, y)$ นี้ว่า **ฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X และ Y** $f(x, y)$ **จะมี**คุณสมบัติ ดังนี้

1. $f(x, y) > 0$ สำหรับทุกค่า x, y ที่จะเป็นไปได้
2. $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dxdy = 1$

จากนิยาม (4-2.2) แสดงว่า $f(x, y)$ จะเป็นผิวโค้งต่อเนื่องยื่นออกมาจากระนาบระดับ $f(x, y)$ จะเป็นความสูงที่วัดจากผิวโค้งมายังจุด (x, y) บนระนาบระดับนั้นเอง การหาค่าความน่าจะเป็นร่วมที่ X และ Y ออกค่าในพิสัยใด ก็คือการหาปริมาตรภายใต้ผิวโค้ง $f(x, y)$ เฉพาะส่วนที่

อยู่เบื้องบนของอาณาบริเวณนั้น ซึ่งจากคุณสมบัติข้อ (2) จะแสดงให้เห็นว่าปริมาตรภายใต้ผิวโค้ง f(x, y) ที่อยู่บนพิสัยของ X และ Y จะเท่ากับ 1

กรณีที่เราต้องการคำนวณค่า $P(a < X \leqslant b, c < Y \leqslant d)$ ในเมื่อ a, b และ c, d เป็นค่าที่เป็นไปได้ของ X และ Y ตามลำดับ สามารถคำนวณได้จาก

$$P(a < X \leqslant b, c \leqslant Y < d) = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dxdy$$

เช่นเดียวกันกับตัวแปรเชิงสุ่มมิติเดียว หรือตัวแปรเชิงสุ่ม 2 มิติ (แบบทวิคูณ) การบรรยายลักษณะของตัวแปรเชิงสุ่ม n มิติ (ตัวแปรเชิงสุ่มพหุคูณ) แบบต่อเนื่องจะเป็นแบบเดียวกันดังนิยาม

นิยาม 4-2.3 ให้ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่มพหุคูณ (multiple random variables) แบบต่อเนื่องที่มีฟังก์ชัน $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ กำหนดไว้ดังนี้

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

$$= P(x_1 < X_1 \leqslant x_1 + dx_1, x_2 < X_2 \leqslant x_2 + dx_2, \ldots, x_n < X_n \leqslant x_n + dx_n)$$

เราเรียกฟังก์ชัน $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ว่าฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ซึ่งมีสมบัติดังนี้

1. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant 0$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n = 1$

ตัวอย่างที่ 4-2.1 X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่องที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นร่วม f(x, y) ดังนี้

$$f(x, y) = kx(x + y), 0 < x < 1, 0 < y < 2$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

จงหาค่าของ k และคำนวณค่าของ $P(0 < X < \frac{1}{5}, \frac{1}{5} < Y < 1)$

วิธีทำ f(x, y) เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X และ Y ดังนั้น

$$\int_0^2 \int_0^1 kx(x + y)\, dxdy = 1$$

$$\int_0^2 k \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2 y}{2} \right) \Big|_0^1 dy = 1$$

$$\frac{k}{6}\int_0^2 (2 + 3y)\,dy = 1$$

$$k(2y + 3\,\frac{y^2}{2}\Big|_0^2) = 6$$

$$k(4 + 6) = 6$$

$$\Rightarrow k = \frac{3}{5}$$

$$P(0 < X < \frac{1}{5}, \frac{1}{5} < Y < 1) = \frac{3}{5}\int_{1/5}^{1}\int_0^{1/5} (x^2 + xy)\,dxdy$$

$$= \frac{1}{10}\int_{1/5}^{1} (\frac{2}{125} + \frac{3y}{25})\,dy$$

$$= \frac{1}{1250}\left\{2(1 - \frac{1}{5}) + \frac{15}{2}(1 - \frac{1}{25})\right\}$$

$$= \frac{22}{3125}$$

ตัวอย่างที่ 4-2.2 ฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของตัวแปรเชิงสุ่ม X, Y และ Z กำหนดไว้ดังนี้

$$f(x, y, z) = \frac{4xyz^2}{9},\ 0 < x < 1, 0 < y < 1, 0 < z < k$$

$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

จงหาค่าของ k และ $P(\frac{1}{4} < X < \frac{1}{2}, Y > \frac{1}{3}, 1 < Z < 2)$

f(x, y, z) เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X, Y และ Z ดังนั้น

$$\int_0^k\int_0^1\int_0^1 \frac{4xyz^2}{9}\,dxdydz = 1$$

$$\frac{4}{9}\int_0^k\int_0^1 (\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 yz^2\,dydz = 1$$

$$\frac{2}{9}\int_0^k (\frac{y^2}{2}\Big|_0^1)\,z^2dz = 1$$

$$\frac{1}{9}\left(\frac{z^3}{3}\Big|_0^k\right) = 1$$

$$\frac{1}{27}k^3 = 1$$

$$k = \sqrt[3]{27} = 3$$

$$P\left(\frac{1}{4} < X < \frac{1}{2}, Y > \frac{1}{3}, 1 < Z < 2\right)$$

$$= \int_1^2 \int_{1/3}^1 \int_{1/4}^{1/2} \frac{4xyz^2}{9}\, dxdydz$$

$$= \int_1^2 \int_{1/3}^1 \frac{4}{9}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{16}\right) yz^2 dydz$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{24}\cdot\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{9}\right) z^2 dz$$

$$= \frac{1}{54}\cdot\frac{1}{3}(8 - 1)$$

$$= \frac{7}{162}$$

ตัวอย่างที่ 4-2.3 X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นร่วม f(x, y) กำหนดไว้ดังนี้

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{50}, \quad 0 < x < 2,\ 1 < y < 4$$

$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

จงคำนวณค่าของ

ก) $P(1 < X < 2, 2 < Y < 3)$

ข) $P(X + Y > 4)$

วิธีทำ

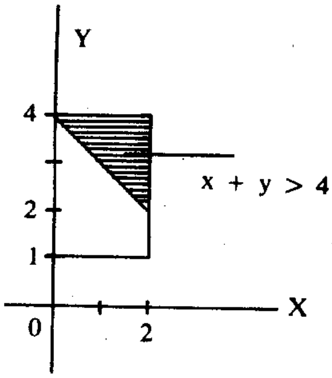
ก) $P(1 < X < 2, 2 < Y < 3) = \frac{1}{50}\int_2^3 \int_1^2 (x^2 + y^2)\, dxdy$

$$= \frac{1}{50} \int_2^3 \left(\frac{x^3}{3} + xy^2 \right) \Big|_{x=1}^{x=2} dy$$

$$= \frac{1}{50} \int_2^3 \left(\frac{7}{3} + y^2 \right) dy$$

$$= \frac{1}{50} \left(\frac{7}{3} y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_2^3 = \frac{13}{75}$$

ข) $P(X + Y > 4) = \int_0^2 \int_{4-x}^4 \frac{1}{50} (x^2 + y^2)\, dydx$



$$= \frac{1}{50} \int_0^2 \left(x^2y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{y=4-x}^{y=4} dx$$

$$= \frac{1}{150} \int_0^2 (3x^3 + 4^3 - (4 - x)^3)\, dx$$

$$= \frac{1}{150} \int_0^2 (4x^3 - 12x^2 + 48x)\, dx$$

$$= \frac{1}{150} (x^4 - 4x^3 + 24x^2) \Big|_0^2$$

$$= \frac{1}{150} (16 - 32 + 96) = \frac{8}{15}$$

แบบฝึกหัดที่ 4-2

1. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นร่วม f(x, y) กำหนดไว้ดังนี้

$$f(x, y) = \frac{1}{8}(6 - x - y),\ 0 < x < 2,\ k < y < 4$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

จงหาค่าของ k และคำนวณค่าของ $P(1 < X < 2, 2 < Y < 3)$

2. ให้ $f(x, y) = kx,\ 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 - x$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X และ Y จงหาค่าของ k และคำนวณค่าของ

$P(X < \frac{1}{2}, Y < \frac{1}{5})$

3. จงหาค่าของ k ที่ทำให้

$$f(x, y, z) = kxy^2z,\ 0 < x < 1,\ 0 < y < 1,\ 0 < z < 2$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X, Y และ Z และคำนวณค่าของ

$P(X < \frac{1}{4}, Y > \frac{1}{2}, 1 < Z < 2)$

4. f(x, y) เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของตัวแปรเชิงสุ่ม X และ Y ซึ่งกำหนดไว้ดังนี้

$$f(x, y) = 1,\ 0 < x < 1,\ 0 < y < 1$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

จงคำนวณค่าของ

4.1 $P(X < \frac{1}{2}, Y < \frac{1}{2})$

4.2 $P(X > Y)$

4.3 $P(X^2 + Y^2 < 1)$

5. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม ที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมกำหนดไว้ดังนี้

$$f(x, y) = \frac{1}{y},\ 0 < x < y,\ 0 < y < 1$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

จงคำนวณค่าของ $P(\frac{1}{5} < X < \frac{1}{2}, Y > \frac{4}{5})$ และ $P(X + Y > \frac{1}{2})$

4-3 ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วม (JOINT DISTRIBUTION FUNCTION)

ถ้า X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีเซทฟังก์ชันน่าจะเป็น P(A) ในเมื่อ A เป็นเซทของเลขจำนวนจริงในสองมิติและกำหนดไว้ดังนี้

$$A = \{(u, v) : u \leqslant x, v \leqslant y\}$$

ดังนั้น

$$P(A) = P[(x, y) \in A] = P(X \leqslant x, Y \leqslant y)$$

เราเรียกฟังก์ชัน ณ จุด (x, y) นี้ว่า ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วม (joint cumulative distribution function หรือ joint distribution function) ของ X และ Y เขียนแทนด้วยสัญญลักษณ์ $F_{X,Y}(x, y)$ หรือเขียนสั้น ๆ ว่า F(x, y)

นิยาม ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วมของตัวแปรเชิงสุ่ม (X, Y) ณ จุด (x, y) ก็คือความน่าจะเป็นที่ X มีค่าไม่เกิน x และ Y มีค่าไม่เกิน y กล่าวคือ

$$F(x, y) = P(X \leqslant x, Y \leqslant y), \; -\infty < x, y < \infty$$

ทฤษฎี ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วมของ X และ Y มีคุณสมบัติต่อไปนี้

1. F(x, y) เป็นฟังก์ชันซึ่งมีค่าเพิ่มขึ้น เมื่อตัวแปรแต่ละตัวมีค่าสูงขึ้น กล่าวคือ

$$F(x + h_1, y) \geqslant F(x, y), \; h_1 > 0$$

หรือ $$F(x, y + h_2) \geqslant F(x, y), \; h_2 > 0$$

หรือ $$F(x + h, y + h) \geqslant F(x, y), \; h > 0$$

2. $F(x, -\infty) = F(-\infty, y) = F(-\infty, -\infty) = 0$

$$F(+\infty, +\infty) = 1$$

3. F(x, y) มีสมบัติเป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องทางขวามือ (right continuous) เมื่อพิจารณาเปรียบเทียบกับตัวแปรแต่ละตัว กล่าวคือ

$$\lim_{h \to 0} F(x + h_1, y) = F(x, y)$$

$$\lim_{h_2 \to 0} F(x, y + h_2) = F(x, y)$$

หรือเขียนรวมได้ว่า

$$\lim_{h \to 0} F(x + h, y + h) = F(x, y)$$

4. ถ้า a, b และ c, d เป็นค่าของ X และ Y โดยที่ $a < b, c < d$ แล้ว

$$P(a < X \leqslant b, c < Y \leqslant d) = F(b, d) - F(b, c) - F(a, d) + F(a, c)$$
$$\geqslant 0$$

พิสูจน์ 1

เนื่องจากเหตุการณ์ $(X \leqslant x + h_1, Y \leqslant y) = (X \leqslant x, Y \leqslant y) \cup (x < X \leqslant x + h_1, Y \leqslant y)$

และ $(X \leqslant x, Y \leqslant y) \cap (x < X \leqslant x + h_1, Y \leqslant y) = \phi$

ดังนั้น $P(X \leqslant x + h_1, Y \leqslant y) = P(X \leqslant x, Y \leqslant y) + P(x < X \leqslant x + h_1, Y \leqslant y)$ (สัจจพจน์ 2)

แต่ $P(x < X \leqslant x + h_1, Y \leqslant y) \geqslant 0$ (สัจจพจน์ 1)

และจากนิยามของฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วมของ X และ Y จะได้ว่า

$$F(x + h_1, y) \geqslant F(x, y)$$

ทำนองเดียวกัน เราจะพิสูจน์ได้ว่า

$$F(x, y + h_2) \geqslant F(x, y)$$

และ $F(x + h, y + h) \geqslant F(x, y)$

พิสูจน์ 2

เมื่อ $x \to -\infty$ และ/หรือ $y \to -\infty$ เหตุการณ์ $(X \leqslant x, Y \leqslant y) = \phi$

ดังนั้น

$$\lim_{x \to -\infty} P(X \leqslant x, Y \leqslant y) = P(\phi)$$

$$\Rightarrow F(-\infty, y) = 0$$

ทำนองเดียวกัน $F(x, -\infty) = 0 = F(-\infty, -\infty)$

เมื่อ $x \to +\infty$ และ $y \to +\infty$ เหตุการณ์ $(X \leqslant x, Y \leqslant y) = S$

ดังนั้น

$$\lim_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} P(X \leqslant x, Y \leqslant y) = P(S)$$

$$\Rightarrow F(\infty, \infty) = 1$$

พิสูจน์ 3

จาก 1 เราทราบว่า

$$P(X \leqslant x + h_1, Y \leqslant y) = P(X \leqslant x, Y \leqslant y) + (P(x < X \leqslant x + h_1, Y \leqslant y)$$

อาศัยนิยามของฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วมของ X และ Y และ take limit $h_1 \to 0$ ทั้งสองข้างจะได้

$$\lim_{h_1 \to 0} F(x + h_1, y) = F(x, y) + \lim_{h_1 \to 0} P(x < X \leqslant x + h_1, Y \leqslant y)$$

แต่ $$\lim_{h_1 \to 0} P(x < X \leqslant x + h_1, Y \leqslant y) = P(\lim_{\substack{h_1 \to 0 \\ h_1 > 0}} \{x < X \leqslant x + h_1, Y \leqslant y\})$$

$$= P(\phi) = 0$$

ดังนั้น

$$\lim_{h_1 \to 0} F(x + h_1, y) = F(x, y)$$

ทำนองเดียวกัน เราจะพิสูจน์ได้ว่า

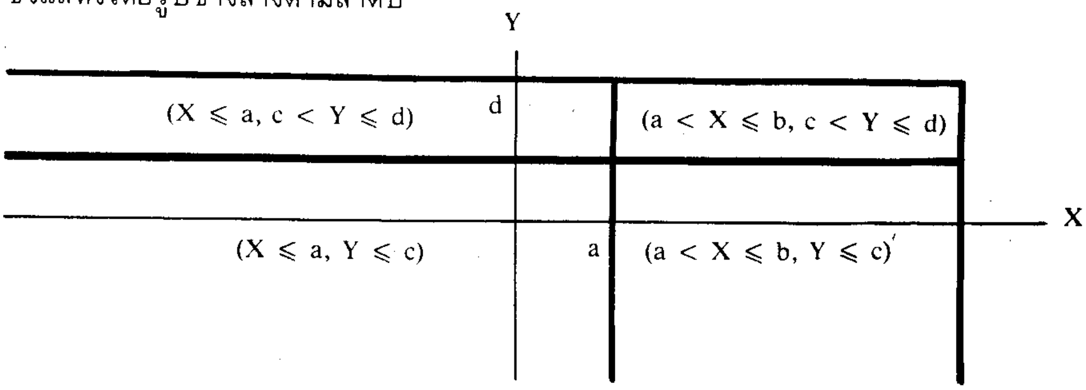
$$\lim_{h_2 \to 0} F(x, y + h_2) = F(x, y)$$

$$\lim_{h \to 0} F(x + h, y + h) = F(x, y)$$

ซึ่งแสดงว่า $F(x, y)$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องทางด้านขวา

พิสูจน์ 4

เราแยกเหตุการณ์ $(X \leqslant b, Y \leqslant d)$ เป็น union ของ 4 เหตุการณ์ที่เป็นเหตุการณ์ขจัดกัน คือ $(X \leqslant a, Y \leqslant c)$, $(X \leqslant a, c < y \leqslant d)$, $(a < X \leqslant b, Y \leqslant c)$ และ $(a < X \leqslant b, c < Y \leqslant d)$ ซึ่งแสดงโดยรูปข้างล่างตามลำดับ



ดังนั้น จากสัจจพจน์ที่ 2 เราจะได้

$$P(X \leqslant b, Y \leqslant d) = P(X \leqslant a, Y \leqslant c) + P(X \leqslant a, c < Y \leqslant d) + P(a < X \leqslant b, Y \leqslant c) + P(a < X \leqslant b, c < Y \leqslant d) \quad \text{..........(1)}$$

แต่ $(X \leqslant a, Y \leqslant d) = (X \leqslant a, Y \leqslant c) \cup (X \leqslant a, c < Y \leqslant d)$

$\Rightarrow$ $P(X \leqslant a, Y \leqslant d) = P(X \leqslant a, Y \leqslant c) + P(X \leqslant a, c < Y \leqslant d)$ ....(2)

และ $(X \leqslant b, Y \leqslant c) = (X \leqslant a, Y \leqslant c) \cup (a < X \leqslant b, Y \leqslant c)$

$P(X \leqslant b, Y \leqslant c) = P(X \leqslant a, Y \leqslant c) + P(a < X \leqslant b, Y \leqslant c)$ ....(3)

(1) - (2) - (3) อาศัยนิยามของฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วมของ X และ Y เราจะได้

$$F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) = -F(a, c) + P(a < X \leqslant b, c < Y \leqslant d)$$

$$\Rightarrow \quad P(a < X \leqslant b, c < Y \leqslant d) = F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c)$$

และอาศัยสัจจพจน์ที่ 1

$$P(a < X \leqslant b, c < Y \leqslant d) \geqslant 0$$

$$\Rightarrow \quad F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c) \geqslant 0$$

ตัวอย่างที่ 4-3.1 X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วม F(x, y) กำหนดไว้ดังนี้

$$F(x, y) = kx(x^2y - x^2 + y^3 - 1), 0 < x < 2, 1 < y < 4$$

จงหาค่าของ k และคำนวณค่าของ $P(X \leqslant 1, Y \leqslant 2)$, $P(1 < X \leqslant 2, 2 < Y \leqslant 3)$

วิธีทำ

F(x, y) เป็นฟังก์ชันแจกแจงสะสมร่วมของ X กับ Y ดังนั้น

$$F(2, 4) = 1$$

แต่ $F(2, 4) = k \times 2(2^2 \times 4 - 2^2 + 4^3 - 1) = 150k$

$$\Rightarrow \quad 150k = 1$$

$$k = \frac{1}{150}$$

$$P(X \leqslant 1, Y \leqslant 2) = F(1, 2) = \frac{1}{150} \times 1(1^2 \times 2 - 1^2 + 2^3 - 1) = \frac{8}{150}$$

$$P(1 < X \leqslant 2, 2 < Y \leqslant 3) = F(2, 3) - F(2, 2) - F(1, 3) + F(1, 2)$$

$$= \frac{1}{150}\{2(12 - 4 + 27 - 1) - 2(8 - 4 + 8 - 1) - (3 - 1 + 27 - 1) + (2 - 1 + 8 - 1)\}$$

$$= \frac{13}{75}$$

ตัวอย่างที่ 4-3.2 จงแสดงให้เห็นจริงว่าฟังก์ชัน F(x, y) ซึ่งกำหนดไว้ว่า

$$F(x, y) = 1 \ , \ x + 2y \geqslant 1$$
$$= 0 \ , \ x + 2y < 1$$

ไม่เป็นฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วมของตัวแปรเชิงสุ่ม X และ Y

วิธีทำ พิจารณา $P(0 < X \leqslant 1, 0 < Y \leqslant 1)$ ถ้า F(x, y) เป็นฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วม ของ X และ Y อาศัยคุณสมบัติ (4) เราจะได้

$$P(0 < X \leqslant 1, 0 < Y \leqslant 1) = F(1, 1) - F(0, 1) - F(1, 0) + F(0, 0)$$

เนื่องจาก

$$1 + 2 \cdot 1 = 3 > 1 \Rightarrow F(1, 1) = 1$$
$$0 + 2 \cdot 1 = 2 > 1 \Rightarrow F(0, 1) = 1$$
$$0 + 2 \cdot 0 = 1 \Rightarrow F(1, 0) = 1$$
$$0 + 2 \cdot 0 = 0 < 1 \Rightarrow F(0, 0) = 0$$

ดังนั้น

$$P(0 < X \leqslant 1, 0 < Y \leqslant 1) = 1 - 1 - 1 + 0 = -1 < 0$$

แสดงว่า F(x, y) ไม่เป็นฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วมของ X และ Y

จากนิยามของฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วมของ X และ Y ถ้า X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชัน f(x, y) เราสามารถหาฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วมของ X และ Y, F(x, y) ได้ดังนี้

$$F(x, y) = \sum_{b \leqslant y} \sum_{a \leqslant x} f(a, b) \qquad \text{..........(4-3.1)}$$

ในเมื่อ X และ Y เป็นตัวแปรแบบไม่ต่อเนื่อง และ

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f(x, y)\,dxdy \qquad \text{..........(4-3.2)}$$

ในเมื่อ X และ Y เป็นตัวแปรแบบต่อเนื่อง

ตัวอย่างที่ 4-3.3 X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่อง**ที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นร่วม** $f(x, y)$ กำหนดไว้ดังนี้

$$f(x, y) = x + 6y \quad , \quad 0 < x < 1, 0 < y < \frac{1}{2}$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

จงหาฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วมของ X และ Y และคำนวณค่าของ

$$P(\frac{1}{5} < X \leqslant \frac{1}{2}, Y \leqslant \frac{1}{5})$$

วิธีทำ

$$F(x, y) = \int_0^y \int_0^x (x + 6y)\,dxdy \;,\; 0 < x < 1, 0 < y < \frac{1}{2}$$

$$= \int_0^y (\frac{x^2}{2} + 6xy) \Big|_{x=0}^{x=x} dy$$

$$= \int_0^y (\frac{x^2}{2} + 6xy)\,dy$$

$$= \frac{x^2y}{2} + 6x \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_{y=0}^{y=y} = \frac{xy}{2}(x + 6y)$$

$$\Rightarrow F(x, y) = 0 \quad , \quad x < 0 \text{ และ/หรือ } y < 0$$
$$= \frac{xy}{2}(x + 6y) \quad , \quad 0 \leqslant x < 1, 0 \leqslant y < \frac{1}{2}$$
$$= \frac{x}{4}(x + 3) \quad , \quad 0 \leqslant x < 1, y \geqslant \frac{1}{2}$$
$$= \frac{y}{2}(1 + 6y) \quad , \quad x \geqslant 1, 0 \leqslant y < \frac{1}{2}$$
$$= 1 \quad , \quad x \geqslant 1, y \geqslant \frac{1}{2}$$

$$P(\frac{1}{5} < X \leqslant \frac{1}{2}, Y \leqslant \frac{1}{5}) = F(\frac{1}{2}, \frac{1}{5}) - F(\frac{1}{5}, \frac{1}{5})$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}}{2}(\frac{1}{2} + 6 \cdot \frac{1}{5}) - \frac{\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}}{2}(\frac{1}{5} + 6 \cdot \frac{1}{5})$$

$$= 0.079$$

เราสามารถหา f(x, y) ได้ในกรณีที่เรารู้ F(x, y) ของตัวแปรเชิงสุ่ม X และ Y ดังต่อไปนี้

หาก X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มไม่ต่อเนื่อง ที่มีฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วม F(x, y) ฟังก์ชันน่าจะเป็นร่วมของ X และ Y, f(x, y) จะกำหนดได้ดังนี้

$$f(x, y) = F(x, y) - F(x, y - h) - F(x - h, y) + F(x - h, y - h), h > 0, h \to 0$$

ในเมื่อ $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} F(x - h, y - h) = P(X < x, Y < y)$ ....(4-3.3)

พิสูจน์ X และ Y เป็นตัวแปรแบบไม่ต่อเนื่อง

$$\begin{aligned} f(x, y) &= P(X = x, Y = y) \\ &= P(\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \{x - h < X \leqslant x, y - h < Y \leqslant y\}) \\ &= \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} P(x - h < X \leqslant x, y - h < Y \leqslant y) \\ &= \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \left\{ F(x, y) - F(x, y - h) - F(x - h, y) + F(x - h, y - h) \right\} \quad \text{(คุณสมบัติ 4)} \\ &= F(x, y) - F(x, y - h) - F(x - h, y) + F(x - h, y - h), 0 < h \to 0 \end{aligned}$$

หาก X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่อง ที่มีฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วม F(x, y) ฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X และ Y, f(x, y) จะกำหนดได้ดังนี้

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x\, \partial y} \qquad \text{..........(4-3.4)}$$

พิสูจน์

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left\{ \lim_{\Delta y\to 0} \frac{F(x, y + \Delta y) - F(x, y)}{\Delta y} \right\} \\ &= \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y + \Delta y) - F(x + \Delta x, y) + F(x, y)}{\Delta x.\Delta y} \\ &= \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{P(x < X \leqslant x + \Delta x, y < Y \leqslant y + \Delta y)}{\Delta x.\Delta y} \quad \text{(คุณสมบัติ (4))} \end{aligned}$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \int_{y}^{y+\Delta y} \int_{x}^{x+\Delta x} f(x, y)\, dxdy$$

$$= f(x, y)$$

ตัวอย่างที่ 4-3.4 X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มไม่ต่อเนื่องที่มีฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วม กำหนดไว้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
f(x, y) &= 0 \quad , \quad x < 0 \text{ และ/หรือ } y < 1 \\
&= \frac{1}{5} \quad , \quad 0 \leqslant x < 1,\ 1 \leqslant y < 2 \text{ หรือ } 0 \leqslant x < 1,\ y \geqslant 2 \\
&= \frac{3}{5} \quad , \quad x \geqslant 1,\ 1 \leqslant y < 2 \\
&= 1 \quad , \quad x \geqslant 1,\ y \geqslant 2
\end{aligned}
$$

จงหาฟังก์ชันน่าจะเป็นร่วมของ X และ Y

วิธีทำ จาก (4-3.3)

$$f(x, y) = F(x, y) - F(x - h, y) - F(x, y - h) + F(x - h, y - h),\ h \to 0,\ h > 0$$

$$\Rightarrow \quad f(0, 1) = F(0, 1) - F(-h, 1) - F(0, 1 - h) + F(-h, 1 - h),\ h \to 0,\ h > 0$$

$$= \frac{1}{5} - 0 - 0 - 0 = \frac{1}{5}$$

$$f(0, 2) = F(0, 2) - F(-h, 2) - F(0, 2 - h) + F(-h, 2 - h),\ h \to 0,\ h > 0$$

$$= \frac{1}{5} - 0 - \frac{1}{5} + 0 = 0$$

$$F(1, 1) = F(1, 1) - F(1 - h, 1) - F(1, 1 - h) + F(1 - h, 1 - h),\ h \to 0,\ h > 0$$

$$= \frac{3}{5} - \frac{1}{5} - 0 + 0 = \frac{2}{5}$$

$\Rightarrow$ **ฟังก์ชันน่าจะเป็นร่วมของ X และ Y จะกำหนดได้ดังนี้**

$$
\begin{aligned}
f(x, y) &= \frac{1}{5} \quad , \quad (x, y) = (0, 1) \\
&= \frac{2}{5} \quad , \quad (x, y) = (1, 1), (1, 2) \\
&= 0 \quad \text{อื่น ๆ}
\end{aligned}
$$

ตัวอย่างที่ 4-3.5 X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วม F(x, y) กำหนดไว้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
F(x, y) &= 0 \quad , \quad x < 0 \text{ และ/หรือ } y < 0 \\
&= \frac{1}{40}(2x^3y + 5x^2y^2 + 2xy^3) \quad , \quad 0 \leqslant x < 1, 0 \leqslant y < 2 \\
&= \frac{1}{10}(x^3 + 5x^2 + 4x) \quad , \quad 0 \leqslant x < 1, y \geqslant 2 \\
&= \frac{1}{40}(2y + 5y^2 + 2y^3) \quad , \quad x \geqslant 1, 0 \leqslant y < 2 \\
&= 1 \quad , \quad x \geqslant 1, y \geqslant 2
\end{aligned}
$$

จงหาฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X และ Y

$$
\frac{\partial^2 \{ \frac{1}{40}(2y + 5y^2 + 2y^3) \}}{\partial x \partial y} = 0 = \frac{\partial^2 \{ \frac{1}{10}(x^3 + 5x^2 + 4x) \}}{\partial x \partial y}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \{ \frac{1}{40}(2x^3y + 5x^2y^2 + 2xy^3) \}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial \{ \frac{1}{40}(6x^2y + 10xy^2 + 2y^3) \}}{\partial y} \\
&= \frac{1}{40}(6x^2 + 20xy + 6y^2)
\end{aligned}
$$

จาก (4-3.4) เราทราบว่า

$$
\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y)
$$

ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
f(x, y) &= \frac{1}{20}(3x^2 + 10xy + 3y^2), 0 < x < 1, 0 < y < 2 \\
&= 0 \quad \text{อื่น ๆ}
\end{aligned}
$$

โดยทั่ว ๆ ไป หาก $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบพหุคูณ เรากำหนดฟังก์ชัน $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ดังนี้

$$
F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(X_1 \leqslant x_1, X_2 \leqslant x_2, \ldots, X_n \leqslant x_n)
$$

เราเรียก $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ นี้ว่าฟังก์ชันการแจกแจงสะสมพหุคูณหรือฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วม (multivariate or joint cumulative distribution function) ของ $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $n \geqslant 2$ และ $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ จะมีสมบัติดังนี้

1. $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ เป็นฟังก์ชันที่มีค่าเพิ่มขึ้น ถ้ามี X_i อย่างน้อยที่สุด 1 ตัว มีค่าสูงขึ้น
2. $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ ถ้ามี X_i อย่างน้อยที่สุด 1 ตัว มีค่าเข้าใกล้ $-\infty$ และ $F(\infty, \infty, \ldots, \infty) = 1$
3. $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องทางขวา เมื่อพิจารณาเปรียบเทียบกับ X_i แต่ละตัว
4. สำหรับทุกค่า $a_1 < b_1, a_2 < b_2, \ldots, a_n < b_n$

$$
\begin{aligned}
P(a_1 < X_1 \leqslant b_1, a_2 < X_2 \leqslant b_2, \ldots, a_n < X_n \leqslant b_n) \\
= \; & F(b_1, b_2, \ldots, b_n) \\
& - F(a_1, b_2, \ldots, b_n) - F(b_1, a_2, b_3, \ldots, b_n) \ldots \\
& - F(b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, a_n) + \text{ผลบวกของ } F(2a\text{'s และ } n-2b\text{'s}) \\
& - \text{ผลบวกของ } F(3a\text{'s และ } n-3b\text{'s}) + \ldots + (-1)^n F(a_1, a_2, \ldots, a_n) \\
\geqslant \; & 0
\end{aligned}
$$

กรณีที่ $X_1 . X_2, \ldots, X_n$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่อง เราจะได้ความสัมพันธ์ของ $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ กับ $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ดังนี้

$$
f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_1 \, \partial x_2 \ldots \partial x_n}
$$

และ

$$
F(x_1, x_2 \ \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_n} \ldots \int_{-\infty}^{x_2} \int_{-\infty}^{x_1} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \, dx_1 dx_2 \ldots dx_n
$$

ตัวอย่างที่ 4-3.6 $F(x, y, z)$ เป็นฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วมของตัวแปรเชิงสุ่ม X, Y, Z ซึ่งกำหนดไว้ดังนี้

$F(x. y, z) \quad kxyz(x + y + z), 0 < x < 2, 0 < y < 3, 0 < z < 4$

จงหา

1. ค่าของ k
2. ค่าของ $P(X \leqslant 1, 2 < Y \leqslant 3, 3 < Z \leqslant 4)$
3. ฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X, Y และ Z

วิธีทำ

1. $F(x, y, z)$ เป็นฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วมของ X, Y และ Z ดังนั้น $F(2, 3, 4) = 1$

แต่ $F(2, 3, 4) = k \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4(2 + 3 + 4) = 216k$

ดังนั้น $216k = 1$

$k = 1/216$

2. $P(X \leqslant 1, 2 < Y \leqslant 3, 3 < Z \leqslant 4)$

$$= P(0 < X \leqslant 1, 2 < Y \leqslant 3, 3 < Y \leqslant 4)$$

$$= P(1, 3, 4) - F(0, 3, 4) - F(1, 2, 4) - F(1, 3, 3) + F(0, 2, 4)$$
$$+ F(0, 3, 3) + F(1, 2, 3) - F(0, 2, 3)$$

$$= \frac{1}{126} \{ 1 \cdot 3 \cdot 4(1 + 3 + 4) - 0 - 1 \cdot 2 \cdot 4(1 + 2 + 4)$$
$$+ 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot (1 + 3 + 3) + 0 + 0$$
$$+ 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (1 + 2 + 3) - 0 \}$$

$$= \frac{13}{216}$$

3. $$\frac{\partial^3 F(x, y, z)}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\frac{1}{216}\, \partial^3 \{ (x^2yz + xy^2z + xyz^2) \}}{\partial x \partial y \partial z}$$

$$= \frac{\frac{1}{216}\, \partial^2 \{ (2xyz + y^2z + yz^2) \}}{\partial y \partial z}$$

$$= \frac{\frac{1}{216}\, \partial \{ (2xz + 2yz + z^2) \}}{\partial z}$$

$$= \frac{1}{216} (2x + 2y + 2z)$$

$$f(x, y, z) = \frac{1}{108} (x + y + z), \; 0 < x < 2, \; 0 < y < 3, \; 0 < z < 4$$

แบบฝึกหัดที่ 4-3

1. กำหนดฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วมของ X และ Y ดังนี้

   $F(x, y) = \frac{1}{2}(xy - x - y + c), 1 < x < 3, 1 < y < k$

   จงหาค่าของ c และ k และคำนวณค่าของ

   $P(X \leqslant 2, Y \leqslant 2)$

   $P(1.2 < X \leqslant 2.2, Y \leqslant 2.2)$

   $P(1.5 < X \leqslant 2.5, 1.5 < Y \leqslant 2.5)$

2. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วม F(x, y) ดังนี้

   $F(x, y) = kxy(x + y), 0 < x < 1, 0 < y < 1$

   จงหาค่าของ k และ $P(X > \frac{1}{5}, Y > \frac{4}{5})$

3. กำหนด f(x, y) เป็นฟังก์ชันน่าจะเป็นร่วมของตัวแปรเชิงสุ่ม X และ Y $f(x, y) > 0$ ในเมื่อ $(x, y) = (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)$ นอกนั้นเป็น 0 ถ้า $f(1, 1) = f(2, 2)$, $F(2, 2) = 2F(1, 2) = \frac{6}{9}$, $P(X + Y \geqslant 4) = \frac{4}{9}$ และ $P(X \leqslant 1, Y \leqslant 3) = \frac{5}{9}$ จงเขียนตารางแสดงฟังก์ชันน่าจะเป็นร่วมของ X และ Y

4. ให้ $f(x, y) = \frac{1}{8}(6 - x - y), 0 < x < 2, 2 < y < 4$

   $= 0$ อื่น ๆ

   จงหาฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วมของ X และ Y และคำนวณค่าของ

   $P(X > 1, Y \leqslant 3)$

5. ให้ f(x, y) เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X และ Y ซึ่งกำหนดไว้ดังนี้

   $f(x, y) = \frac{xy + 1}{32}, 0 < x < 2, 1 < y < 5$

   $= 0$ อื่น ๆ

   จงหาฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วมของ X และ Y และคำนวณค่าของ

   $P(X \leqslant 1, 2 < Y \leqslant 4)$

6. X, Y, Z เป็นตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่อง ที่มีฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วม F(x, y, z) กำหนดไว้ดังนี้

   $F(x, y, z) = \frac{x^2yz}{8}(2y + z), 0 < x < 1, 0 < y < 1, 0 < z < 2$

จงหา

6.1 $P(X \leqslant 0.1, Y \leqslant 0.2, Z \leqslant 1)$

6.2 $P(0.2 < X \leqslant 0.5, Y > 0.5, 1 < Z \leqslant 2)$

6.3 ฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X, Y และ Z

7. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วม $F(x, y)$ กำหนดไว้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
F(x, y) &= 0 && , \; x < 0 \text{ และ/หรือ } y < 0 \\
&= \frac{x^2y}{12}(4x + y) && , \; 0 \leqslant x < 1, 0 \leqslant y < 2 \\
&= \frac{y}{12}(y + 4) && , \; x \geqslant 1, 0 < y \leqslant 2 \\
&= \frac{x^2}{3}(2x + 1) && , \; 0 < x \leqslant 1, y \geqslant 2 \\
&= 1 && , \; x \geqslant 1, y \geqslant 2
\end{aligned}
$$

จงหา

7.1 $P(2X < 1, Y \leqslant 2)$

7.2 $P(X \leqslant 1, Y \leqslant 1)$

7.3 $P\left(\frac{1}{2} < X \leqslant \frac{3}{2}, \frac{3}{2} < Y \leqslant \frac{5}{2}\right)$

7.4 ฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X และ Y

8. ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วมของ X และ Y กำหนดไว้

$$
\begin{aligned}
F(x, y) &= 0 && , \; x < 2 \text{ และ/หรือ } y < 0 \\
&= \frac{1}{8x^2}(7x^2y + x^2y^2 - 4y^2 - 28y) && , \; 2 \leqslant x < \infty, 0 \leqslant y < 1 \\
&= 1 - \frac{4}{x^2} && , \; 2 \leqslant x < \infty, y \geqslant 1 \\
&= \frac{1}{8}(7y + y^2) && , \; x > \infty, 0 \leqslant y < 1 \\
&= 1 && , \; x > \infty, y \geqslant 1
\end{aligned}
$$

จงคำนวณค่าของ $P(5 < X \leqslant 10, .2 < Y \leqslant .5)$ และจงหาฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X และ Y

4-4 การแจกแจงแบบ marginal ของตัวแปรเชิงสุ่มและการแจกแจงภายใต้เงื่อนไข

เมื่อมีตัวแปรเชิงสุ่มทวิคูณ X และ Y ที่มีฟังก์ชันน่าจะเป็นร่วมหรือฟังก์ชันความหนาแน่นร่วม f(x, y) และเราสนใจจะพิจารณาดูการแจกแจงของตัวแปรเชิงสุ่ม X (หรือ Y) เพียงตัวเดียว โดยไม่คำนึงว่าตัวแปรอีกตัวหนึ่งจะมีผลลัพธ์เป็นอย่างไร เราเรียกการแจกแจงที่ได้นี้ว่าการแจกแจงแบบ marginal ของ X (หรือของ Y) ซึ่งนิยามโดย

$$g(x) = \sum_{\forall y} f(x, y) \qquad \text{..........(4-4.1)}$$

$$h(y) = \sum_{\forall x} f(x, y)$$

เมื่อ X และ Y เป็นตัวแปรแบบไม่ต่อเนื่อง

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy \qquad \text{..........(4-4.2)}$$

$$h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx$$

ในเมื่อ X และ Y ต่างเป็นตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่อง

ทั้ง g(x) และ h(y) ต่างมีคุณสมบัติที่จะเป็นฟังก์ชันน่าจะเป็นหรือฟังก์ชันความหนาแน่นแล้วแต่ว่า X และ Y จะเป็นตัวแปรไม่ต่อเนื่องหรือต่อเนื่อง เราจึงเรียก g(x) และ h(y) นี้ว่าฟังก์ชันน่าจะเป็นหรือฟังก์ชันความหนาแน่นแบบ marginal (marginal p.d.f.) ของ X และของ Y ตามลำดับ

เราสามารถแสดงให้เห็นได้ว่า g(x) และ h(y) มีคุณสมบัติที่จะเป็นฟังก์ชันความหนาแน่นได้ดังนี้

ค่าของ $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dy \right\} dx = 1$ ตามคุณสมบัติข้อ 2 ของฟังก์ชันความหนาแน่นของ X

การคำนวณความน่าจะเป็นที่ตัวแปร X (หรือ Y) เพียงตัวเดียวจะมีผลลัพธ์ในช่วง (a, b) ก็คำนวณได้วิธีเดียวกัน กล่าวคือ

$$P(a < X \leqslant b) = \int_{a}^{b} g(x)\,dx$$

$$= \int_{a}^{b} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dydx$$

$$= P(a < X \leqslant b, Y \leqslant \infty)$$

ทำนองเดียวกัน

$$P(a < Y \leqslant b) = \int_{a}^{b} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dxdy = P(X \leqslant \infty, a < Y \leqslant b)$$

กรณีที่ X และ Y เป็นตัวแปรไม่ต่อเนื่อง นักศึกษาเคยเรียนมาแล้วใน ST 205 ในที่นี้จึงไม่กล่าวมากนัก

ในเมื่อ $g(x)$ และ $h(y)$ ต่างมีสมบัติเป็นฟังก์ชันความหนาแน่นหรือฟังก์ชันน่าจะเป็น เรากำหนด $G(x)$ และ $H(y)$ ซึ่งเรียกว่าฟังก์ชันการแจกแจงสะสม marginal (marginal c.d.f.) ของ X และของ Y ตามลำดับ ได้ดังนี้

$$G(x) = \int_{-\infty}^{x} g(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dydx$$

$$= P(X \leqslant x, Y \leqslant \infty) = F_{X,Y}(x, \infty)$$

ในทำนองเดียวกัน $H(y) = F_{X,Y}(\infty, y)$

เช่นเดียวกัน กรณีของตัวแปรเชิงสุ่มพหุคูณ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เราหาการแจกแจงแบบ marginal ของ X_i หรือของ X_i และ X_j หรือ.....ได้ดังนี้

$$f_i(x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_{i-1}\, dx_{i+1} \ldots dx_n$$

ในเมื่อ $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ และ $f_i(x_i)$ เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นแบบ marginal ของ X_i

การหา $f_{i,j}(x_i, x_j), \ldots$ จะนิยามไว้ในทำนองเดียวกัน เช่น เรามี $n = 5$ และต้องการหา $f_{2,3}(x_2, x_3)$ จะหาได้ดังนี้

$$f_{2,3}(x_2, x_3) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)\, dx_1dx_4dx_5$$

สำหรับฟังก์ชันการแจกแจงสะสมแบบ marginal ของ x_i, $F_i(x_i)$ จะกำหนดไว้โดย

$$F_i(x_i) = F_{X_1, X_2, \ldots, X_n}(\infty, \infty, \ldots, x_i, \ldots, \infty)$$

ตัวอย่างที่ 4-4.1 X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันน่าจะเป็นร่วม $f(x, y)$ กำหนดไว้ดังนี้

$$f(x, y) = \frac{x + 2y}{18}, (x, y) = (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)$$

$= 0$ อื่น ๆ

จงหาฟังก์ชันน่าจะเป็นแบบ marginal ของ X และของ Y

วิธีทำ

$$g(x) = \sum_{y=1}^{2} \frac{x + 2y}{18} = \frac{x + 3}{9}, x = 1, 2$$

$= 0$ อื่น ๆ

$$h(y) = \sum_{x=1}^{2} \frac{x + 2y}{18} = \frac{3 + 4y}{18}, y = 1, 2$$

$= 0$ อื่น ๆ

ตัวอย่างที่ 4-4.2 X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นร่วม $f(x, y)$ กำหนดไว้ดังนี้

$$f(x, y) = \frac{xy + 1}{32}, 0 < x < 2, 1 < y < 5$$

$= 0$ อื่น ๆ

จงหาฟังก์ชันความหนาแน่นแบบ marginal ของ X และคำนวณค่าของ $P(2 < Y \leq 4)$

วิธีทำ

$$g(x) = \int_{1}^{5} \frac{xy + 1}{32}\, dy = \frac{1}{32}\left(\frac{xy^2}{2} + y \Big|_{y=1}^{y=5} \right)$$

$\Rightarrow \quad g(x) = \frac{3x+1}{8}, 0 < x < 2$

$= 0$ อื่น ๆ

$P(2 < Y \leqslant 4) = \int_2^4 h(y)dy$ [หรือ $P(2 < Y \leqslant 4) = \int_{2}^{4} \int_0^2 \frac{xy+1}{32} dxdy$]

แต่ $h(y) = \int_0^2 \frac{xy+1}{32} dx = \frac{1}{32} \left(\frac{x^2y}{2} + x \Big|_{x=0}^{x=2} \right) = \frac{y+1}{16}, 1 < y < 5$

$\Rightarrow \quad P(2 < Y \leqslant 4) = \int_2^4 \frac{y+1}{16} dy = \frac{1}{16} \left(\frac{y^2}{2} + y \Big|_{y=2}^{y=4} \right) = \frac{1}{2}$

ตัวอย่างที่ 4-4.3 กำหนดฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X และ Y ดังนี้

$f(x, y) = 3x, \quad 0 < y < x, 0 < x < 1$

$= 0$ อื่น ๆ

จงหา

ก. marginal p.d.f. ของ X

ข. marginal c.d.f. ของ Y

ค. $P(5X > 3)$

ง. $P(9Y^2 \leqslant 4)$

วิธีทำ

ก. $g(x) = \int_0^x 3x\, dy = 3xy \Big|_{y=0}^{y=x} = 3x^2, 0 < x < 1$

$= 0$ อื่น ๆ

ข. $F(y) = \int_0^y h(y)dy \quad , \quad 0 < y < 1$

$= \int_0^y \left\{ \int_y^1 3x\, dx \right\} dy$

$= \int_0^y \left(3\frac{x^2}{2} \Big|_{x=y}^{x=1} \right) dy$

$$= \int_0^y \frac{3}{2}(1 - y^2)\,dy = \frac{3}{2}\left(y - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_{y=0}^{y=y}$$

$$\Rightarrow F(y) = 0 \quad , \quad y < 0$$

$$= \frac{y}{2}(3 - y^2),\ 0 \leqslant y < 1$$

$$= 1 \quad , y \geqslant 1$$

ค. $P(5X > 3) = P(X > \frac{3}{5})$

$$= \int_{3/5}^{1} 3x^2dx = 1 - (\frac{3}{5})^3 = \frac{98}{125}$$

ง. $P(9Y^2 \leqslant 4) = P(-\frac{2}{3} \leqslant Y \leqslant \frac{2}{3})$

$$= F_Y(\frac{2}{3}) - F_Y(-\frac{2}{3})$$

$$= \frac{\frac{2}{3}}{2}(3 - \frac{4}{9}) - 0 = \frac{23}{27}$$

ตัวอย่างที่ 4-4.4 กำหนด

$$F(x, y) = \frac{x^2y}{20}(4x + 3y),\ 0 < x < 1,\ 0 < y < 2$$

เป็นฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วมของตัวแปรเชิงสุ่ม X และ Y ตามลำดับ

1. จงหา $F(x)$, $F(y)$
2. จงคำนวณค่าของ $P(2X > 1)$ และ $P(\cos \pi Y > 0)$

วิธีทำ

1. $F(x) = F(x, 2)$

$$= \frac{x^2 \cdot 2}{20}(4x + 3 \cdot 2) = \frac{x^2}{5}(2x + 3),\ 0 < x < 1$$

$F(y) = F(1, y)$

$$= \frac{1^2 \cdot y}{20}(4 \cdot 1 + 3y) = \frac{y}{20}(4 + 3y),\ 0 < y < 2$$

2. $P(2X > 1) \quad = \quad P(X > \frac{1}{2})$

$$= 1 - F_X(\frac{1}{2}) = 1 - \frac{\frac{1}{4}}{5}(2 \cdot \frac{1}{2} + 3) = \frac{4}{5}$$

$$P(\cos \pi Y > 0) = P(\cos \pi Y > \cos \frac{\pi}{2})$$

$$= P(Y < \frac{1}{2})$$

$$= F_Y(\frac{1}{2}) = \frac{1/2}{20}(4 + 3 \cdot \frac{1}{2}) = \frac{11}{80}$$

กรณีที่ทราบแน่ชัดว่าผลลัพธ์ของ X หรือของ Y เป็นค่า ๆ หนึ่ง แสดงว่า X หรือ Y นั้นสิ้นสุดสภาพการเป็นตัวแปรเชิงสุ่ม แต่ตัวที่เหลือยังคงสภาพของการเป็นตัวแปรเชิงสุ่มอยู่ หากเรากำหนดเหตุการณ์ A เป็นเหตุการณ์ที่ทราบแน่ชัดว่า ผลลัพธ์ของ X เป็น x (หรือผลลัพธ์ของ Y เป็น y) อาศัยนิยามความน่าจะเป็นของ B ภายใต้เงื่อนไขของ A คือ

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \ P(A) > 0$$

ในเมื่อ A และ B เป็นเหตุการณ์ที่นิยามโดย X = x และ Y = y ตามลำดับ ถ้า X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง เราจะได้

$$\Rightarrow \quad P(Y = y|X = x) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(X = x)}$$

$$= \frac{f(x, y)}{g(x)}, \ g(x) > 0$$

(นิยาม 4-1.1 และ 2-2)

ฟังก์ชัน $f(x, y)/g(x)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ Y เมื่อ X เป็นค่า ๆ หนึ่ง จะมีสมบัติเป็นฟังก์ชันน่าจะเป็นทุกประการ ถ้าเรากำหนด $f_{Y|X=x}(y|x)$ หรือเขียนสั้น ๆ ว่า $f(y|x)$ เป็นฟังก์ชันน่าจะเป็นของ Y ภายใต้เงื่อนไขของ X = x เราจะได้

$$f(y|x) = \frac{f(x, y)}{g(x)}, \ g(x) > 0 \qquad \text{..........(4-4.4)}$$

ในทำนองเดียวกัน เรานิยาม $f_{X|Y=y}(x|y)$ หรือ $f(x|y)$ เป็นฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X ภายใต้เงื่อนไขของ Y = y และกำหนดค่าดังนี้

$$f(x|y) = \frac{f(x, y)}{h(y)}, \ h(y) > 0 \qquad \text{..........(4-4.5)}$$

กรณีที่ X และ Y ต่างเป็นตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่อง และเราทราบแน่ชัดว่าค่าของ X = x (หรือค่าของ Y = y) เราไม่สามารถคำนวณความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A ภายใต้เงื่อนไขของ Y = y หรือความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ B ภายใต้เงื่อนไขของ X = x โดยวิธีตรงได้ ทั้งนี้เนื่องจาก

$$P(X \in A \mid Y = y) = \frac{P(X \in A, Y = y)}{P(Y = y)} = \frac{0}{0}$$

การคำนวณค่า เราจะทำได้ดังต่อไปนี้

ให้ $A = \{x : X \leqslant x\}$ และ $B : \{y : y \leqslant Y \leqslant y + \Delta y\}, 0 < \Delta y \to 0$

อาศัยนิยามความน่าจะเป็นของ A ภายใต้เงื่อนไขของ B จะได้

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$\Rightarrow \quad P(X \leqslant x \mid y \leqslant Y \leqslant y + \Delta y) = \frac{P(X \leqslant x, y \leqslant Y \leqslant y + \Delta y)}{P(y \leqslant Y \leqslant y + \Delta y)}$$

$$= \frac{F(x, y + \Delta y) - F(x, y)}{H(y + \Delta y) - H(y)}$$

ในเมื่อ H(y) เป็นฟังก์ชันการแจกแจงสะสมแบบ marginal ของ Y ดังนั้น

$$P(X \leqslant x \mid y \leqslant Y \leqslant y + \Delta y) = \frac{\frac{1}{\Delta y}\{F(x, y + \Delta y) - F(x, y)\}}{\frac{1}{\Delta y}\{H(y + \Delta y) - H(y)\}}$$

$$\lim_{\Delta y \to 0} P(X \leqslant x \mid y \leqslant Y \leqslant y + \Delta y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\frac{1}{\Delta y}\{F(x, y + \Delta y) - F(x, y)\}}{\frac{1}{\Delta y}\{H(y + \Delta y) - H(y)\}}$$

$$\Rightarrow \quad P(X \leqslant x \mid Y = y) = \frac{\partial F(x, y)/\partial y}{dH(y)/dy}$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{x} f(t, y)\, dt}{h(y)}$$

ซึ่งจะหาค่าได้ ถ้า h(y) ฟังก์ชันความหนาแน่นแบบ marginal ของ Y มีค่ามากกว่า 0 ดังนั้นเรานิยาม F(x|y) โดย

$$F(x|y) = \frac{\int_{-\infty}^{x} f(t, y)\,dt}{h(y)} \qquad \text{..........(4-4.6)}$$

และฟังก์ชันความหนาแน่นภายใต้เงื่อนไข (conditional probability density) ของ X เมื่อรู้ค่า Y = y, f(x|y) จะกำหนดได้โดย

$$f(x|y) = \frac{f(x, y)}{h(y)}, \; h(y) > 0 \qquad \text{..........(4-4.7)}$$

ทำนองเดียวกัน ถ้ารู้ว่าค่าของ X เป็น x เราหาฟังก์ชันความหนาแน่นภายใต้เงื่อนไขของ y, f(y|x) ได้ดังนี้

$$f(y|x) = \frac{f(x, y)}{g(x)}, \; g(x) > 0 \qquad \text{..........(4-4.8)}$$

ดังนั้นในการคำนวณค่าของ $P(X \in A|Y = y)$ หรือ $P(Y \in B|X = x)$ จะคำนวณได้จาก

$$P(X \in A|Y = y) = \int_A f(x|y)dx \qquad \text{..........(4-4.9)}$$

$$P(Y \in B|X = x) = \int_B f(y|x)dy$$

จากผลที่ได้ เราสรุปได้ว่า ไม่ว่า X และ Y จะเป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบต่อเนื่องหรือไม่ต่อเนื่อง ก็ตาม เราจะได้

$$f(x, y) = h(y)\,f(x|y) = g(x)\,f(y|x) \qquad \text{..........(4-4.10)}$$

ฟังก์ชัน f(x|y) หรือ f(y|x) ต่างมีสมบัติเป็นฟังก์ชันน่าจะเป็นหรือฟังก์ชันความหนาแน่น กล่าวคือ

1. $f(x|y) > 0$
2. $\sum_{\forall x} f(x|y) = 1$ ถ้า X และ Y เป็นตัวแปรแบบไม่ต่อเนื่อง
3. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x|y)\,dx = 1$ ถ้า X และ Y เป็นตัวแปรแบบต่อเนื่อง

ตัวอย่างที่ 4-4.5 ให้

$$f(x, y) = \frac{1}{19}(x + y^2), \; x = 1, 2, \; y = 0, 1, 2$$

$= 0$ อื่น ๆ

เป็นฟังก์ชันน่าจะเป็นร่วมของ X และ Y จงหา

ก. ฟังก์ชันน่าจะเป็นเงื่อนไขของ X กำหนด $Y = 2$

ข. ฟังก์ชันน่าจะเป็นเงื่อนไข Y กำหนด $X = x, x = 1, 2$

ค. $P(0 < Y \leqslant 2 | X = 1)$

วิธีทำ ให้ g(x) และ h(y) เป็นฟังก์ชันน่าจะเป็นแบบ marginal ของ X และของ Y ตามลำดับ ดังนั้น

$$g(x) = \sum_{y=0}^{2} \frac{1}{19}(x + y^2) = \frac{1}{19}\{x + (x + 1) + (x + 4)\}$$

$$\Rightarrow \quad g(x) = \frac{3x + 5}{19}, x = 1, 2$$

$= 0$ อื่น ๆ

และ $h(y) = \sum_{x=1}^{2} \frac{1}{19}(x + y^2) = \frac{1}{19}\{(1 + y^2) + (2 + y^2)\}$

$$\Rightarrow \quad h(y) = \frac{3 + 2y^2}{19}, y = 0, 1, 2$$

$= 0$ อื่น ๆ

ฟังก์ชันน่าจะเป็นเงื่อนไขของ X เมื่อ $Y = 2$, $f(x|2)$ กำหนดได้โดย

$$f(x|2) = \frac{f(x, 2)}{h(2)}$$

ในที่นี้ $f(x, 2) = \frac{1}{19}(x + 4)$ และ $h(2) = \frac{3 + 2 \cdot 4}{19} = \frac{11}{19}$

ดังนั้น $f(x|2) = \frac{(x + 4)/19}{11/19} = \frac{x + 4}{11}, x = 1, 2$

$= 0$ อื่น ๆ

ข. ฟังก์ชันน่าจะเป็นเงื่อนไขของ Y เมื่อ $X = x$, $f(y|x)$ กำหนดได้โดย

$$f(y|x) = \frac{f(x, y)}{g(x)} = \frac{(x + y^2)/19}{(3x + 5)/19}$$

$$\Rightarrow \quad f(y|x) = \frac{x + y^2}{3x + 5}, y = 0, 1, 2, x = 1, 2$$

$= 0$

$$P(0 < Y \leqslant 2 | X = 1) = \sum_{y=1}^{2} f_{Y/X=1}(y|1)$$

$$= \{(1 + 1) + (1 + 4)\} / (3 + 5)$$

$$= 7/8$$

ตัวอย่างที่ 4-4.6 จากตัวอย่างที่ 4-4.3 จงหา

ก. ฟังก์ชันความหนาแน่นเงื่อนไขของ Y เมื่อ $X = x, 0 < x < 1$

ข. $P(Y < \frac{1}{2} \mid X > \frac{4}{5})$

ค. $P(\frac{1}{4} < X < \frac{3}{4} \mid Y = \frac{2}{3})$

วิธีทำ

ก. จากตัวอย่างที่ 4-4.3 ข้อ ก. เราทราบว่า

$$g(x) = 3x^2, 0 < x < 1$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

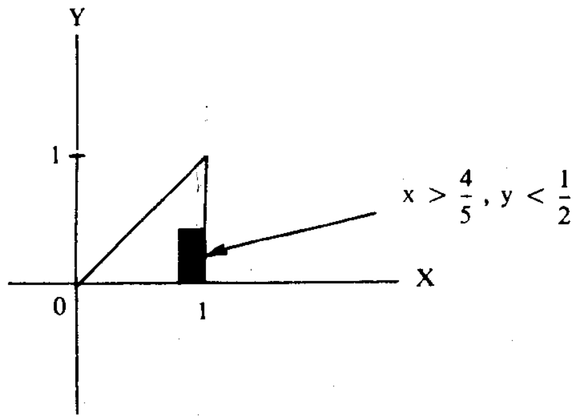
และ

$$f(x, y) = 3x, \quad 0 < y < x, 0 < x < 1$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

ดังนั้น

$$f(y|x) = \frac{3x}{3x^2} = \frac{1}{x}, \quad 0 < y < x, 0 < x < 1$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

$$P(Y < \frac{1}{2} \mid X > \frac{4}{5}) = \frac{P(X > \frac{4}{5}, Y < \frac{1}{2})}{P(X > \frac{4}{5})}$$



$$P(X > \frac{4}{5}, Y < \frac{1}{2}) = \int_0^{1/2} \int_{4/5}^{1} 3x \, dx \, dy$$

$$= \int_0^{1/2} 3 \frac{x^2}{2} \Big|_{x=\frac{4}{5}}^{x=1} dy$$

$$= \int_0^{1/2} \frac{3}{2}(1 - \frac{16}{25}) \, dy$$

$$= \frac{27}{50} \, y \Big|_{y=0}^{y=\frac{1}{2}} = \frac{27}{100}$$

$$P(X > \frac{4}{5}) = \int_{4/5}^{1} 3x^2 dx = x^3 \Big|_{4/5}^{1} = \frac{61}{125}$$

$$\Rightarrow \; P(Y < \frac{1}{2} \,\Big|\, X > \frac{4}{5}) = \frac{27/100}{61/125} = \frac{135}{244}$$

ค. $P(\frac{1}{4} < X < \frac{3}{4} \,\Big|\, Y = \frac{2}{3}) = \int_{1/4}^{3/4} f_{X/Y=\frac{2}{3}} \; (x / \frac{2}{3}) \, dx$

แต่ $f(x|y) = \dfrac{3x}{\frac{3}{2}(1-y^2)} = \dfrac{2x}{1-y^2}$, $y < x < 1, 0 < y < 1$

(จากข้อ ข ตัวอย่างที่ 4-4.3 $h(y) = \frac{3}{2}(1 - y^2), 0 < y < 1$)

ดังนั้น $f(x \,|\, \frac{2}{3}) = \dfrac{2x}{1 - \frac{4}{9}} = \dfrac{18x}{5}$, $\frac{2}{3} < x < 1$

$P(\frac{1}{4} < X < \frac{3}{4} \,\Big|\, Y = \frac{2}{3}) = \int_{2/3}^{3/4} \frac{18x}{5} dx$ (ค่าต่ำสุดของ $x = \frac{2}{3}$)

$$= \frac{18}{5} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_{2/3}^{3/4}$$

$$= \frac{9}{5}(\frac{9}{16} - \frac{4}{9}) = \frac{17}{80}$$

แบบฝึกหัดที่ 4-4

1. กำหนด f(x, y) เป็นฟังก์ชันน่าจะเป็นร่วมของตัวแปรเชิงสุ่ม X และ Y ซึ่งกำหนดไว้โดย $f(1, 4) = \frac{3}{10}$, $f(2, 1) = \frac{2}{10}$, $f(3, 3) = \frac{1}{10}$, $f(4, 1) = \frac{3}{10}$, $f(4, 2) = \frac{1}{10}$ นอกนั้นเป็น 0 จงหา

   1.1 ฟังก์ชันน่าจะเป็นแบบ marginal ของ X และของ Y

   1.2 ฟังก์ชันน่าจะเป็นเงื่อนไขของ X เมื่อ Y = 1

   1.3 ฟังก์ชันน่าจะเป็นเงื่อนไขของ Y เมื่อ $X \in A = [2, 4]$

2. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นร่วม f(x, y) กำหนดไว้โดย

$$
\begin{aligned}
f(x, y) &= \frac{1}{8}(6 - x - y),\ 0 < x < 2,\ 2 < y < 4 \\
&= 0 \quad \text{อื่น ๆ}
\end{aligned}
$$

   จงหา

   2.1 ฟังก์ชันความหนาแน่นแบบ marginal ของ X และของ Y

   2.2 ฟังก์ชันความหนาแน่นเงื่อนไขของ X เมื่อ $Y = y,\ 2 < y < 4$

   2.3 $P(1 < Y < 3 | X = 2)$ และ $P(X > 1 | Y < 3)$

3. กำหนด

$$
\begin{aligned}
f(x, y) &= 6xy(2 - x - y),\ 0 < x, y < 1 \\
&= 0 \quad \text{อื่น ๆ}
\end{aligned}
$$

   เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X และ Y

   3.1 จงหาฟังก์ชันความหนาแน่นแบบ marginal ของ X และของ Y

   3.2 จงหาฟังก์ชันความหนาแน่นเงื่อนไขของ X เมื่อ $Y = y,\ 0 < y < 1$

   3.3 จงคำนวณค่าของ $P(X > \frac{1}{2} | Y < \frac{1}{4})$ และ $P(X > Y | Y > \frac{1}{2})$

4. ฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X และ Y กำหนดไว้โดย

$$
\begin{aligned}
f(x, y) &= 6x,\ 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 - x \\
&= 0 \quad \text{อื่น ๆ}
\end{aligned}
$$

   4.1 จงหาฟังก์ชันความหนาแน่นเงื่อนไขของ Y เมื่อ $X = x,\ 0 < x < 1$

   4.2 จงหาฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ X ภายใต้เงื่อนไข Y = 0.5

   4.3 จงคำนวณค่าของ $P(X > 0.3 | Y = 0.5)$ และ $P(Y < 0.2 | X = 0.2)$

5. ฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของตัวแปรเชิงสุ่ม X และ Y กำหนดไว้โดย

$$f(x, y) = 2 \ , \ 0 < x < y < 1$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

จงหาคำนวณค่าของ

5.1 $P(0.2 < X \leqslant 0.5)$

5.2 $P(0.3 < Y \leqslant 0.7)$

5.3 $P(0.25 < X < 0.5 | Y = 0.75)$

5.4 $P(Y \leqslant 0.5 | X = 0.1)$

6. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบต่อเนื่องที่มี $f(x|y)$ เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นเงื่อนไขของ X เมื่อ $Y = y$

6.1 จงพิสูจน์ว่า

$$\int_{\forall x} f(x|y)dx = 1$$

6.2 ถ้า

$$f(x|y) = \frac{k(1 - x)}{(1 - y)^2} \ , 0 < y < x < 1$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

6.2.1 จงคำนวณค่าของ k

6.2.2 ถ้า h(y) เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นแบบ marginal ของ Y ซึ่งกำหนดไว้โดย

$$f(y) = 12y(1 - y)^2 \ , 0 < y < 1$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

จงหาฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X และ Y

6.2.3 จงคำนวณค่าของ $P(2X > 1)$

7. ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วมของ X และ Y กำหนดไว้โดย

$$F(x, y) = \frac{1}{40}(2x^3y + 5x^2y^2 + 2xy^3), \ 0 \leqslant x < 1, \ 0 \leqslant y < 2$$

จงหา

7.1 ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมแบบ marginal ของ X และของ Y

7.2 $P(3X > 2)$, $P(\frac{1}{2} < Y \leqslant \frac{3}{2})$

8. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมกำหนดไว้ดังนี้

$$f(x, y) = x + y, \ 0 < x, y < 1$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

จงหาฟังก์ชันการแจกแจงสะสมภายใต้เงื่อนไขของ Y เมื่อกำหนดให้ $X \in A = [0, \frac{1}{n}]$ และถ้า $n \to \infty$ จะเกิดอะไรขึ้น

9. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วม กำหนดไว้โดย

$$F(x, y) = \frac{x^3y^2 + 8y^2}{144}, \ -2 < x < 2, 0 < y < 3$$

9.1 จงคำนวณค่าของ $P(|X| < 1)$ และ $P(Y > 2)$

9.2 จงแสดงให้เห็นจริงว่า

$$f(x|y) = g(x)$$

4.5 การเป็นอิสระซึ่งกันและกันระหว่างตัวแปรเชิงสุ่ม

ตามปกติ $f(x|y)$ จะเป็นฟังก์ชันที่มีลักษณะแตกต่างกัน สำหรับแต่ละค่า y ที่แตกต่างกัน แต่มีบางกรณีที่ $f(x|y)$ เป็นฟังก์ชันที่มีลักษณะเดียวกันกับ $g(x)$ ฟังก์ชันการแจกแจงแบบ marginal ของ X โดยไม่ขึ้นกับค่าของ y กล่าวคือ

$$f(x|y) = g(x)$$

อาศัยนิยามของ $f(x|y)$ เราจะได้

$$\frac{f(x, y)}{h(y)} = g(x)$$

หรือ $f(x, y) = g(x) \cdot h(y)$

เมื่อ $f(x|y)$ ไม่ขึ้นกับค่าของ y นั่นคือ การแจกแจงของ X ภายใต้เงื่อนไขของ Y = y เป็นอิสระจากข้อสมมติใด ๆ ของ Y เราเรียกตัวแปรเชิงสุ่ม X และ Y นี้ว่า ตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน และให้นิยามของการเป็นอิสระระหว่างตัวแปรเชิงสุ่ม X และ Y ดังต่อไปนี้

นิยาม 4-5.1 ให้ X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบไม่ต่อเนื่องหรือแบบต่อเนื่อง ที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นร่วม f(x, y) และมีฟังก์ชันความหนาแน่นแบบ marginal g(x) และ h(y) ตามลำดับ ตัวแปรเชิงสุ่ม X และ Y จะเป็นอิสระซึ่งกันและกันก็ต่อเมื่อ

$$f(x, y) = g(x)\,h(y)$$

สำหรับทุก ๆ ค่าของ (x, y)

ตัวแปรเชิงสุ่มที่ไม่เป็นอิสระต่อกันเรียกว่า ตัวแปรเชิงสุ่มที่พึ่งพิงกัน

ตัวอย่างที่ 4-5.1 X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นร่วม f(x, y) กำหนดไว้โดย

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 12xy(1-y),\ 0 < x, y < 1 \\ &= 0 \quad \text{อื่น ๆ} \end{aligned}$$

จงแสดงให้เห็นจริงว่า X และ Y เป็นอิสระต่อกัน

วิธีทำ

$$\Rightarrow \quad g(x) = \int_0^1 12xy(1-y)dy$$

$$= 12x\left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\Big|_{y=0}^{y=1}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} g(x) &= 2x,\ 0 < x < 1 \\ &= 0 \quad \text{อื่น ๆ} \end{aligned}$$

$$h(y) = \int_0^1 12xy(1-y)dx = 12y(1-y)\,.\,\frac{x^2}{2}\Big|_{x=0}^{x=1}$$

$$\begin{aligned} h(y) &= 6y(1-y)\ ,\ 0 < y < 1 \\ &= 0 \quad \text{อื่น ๆ} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x)\,h(y) &= 2x.6y(1-y)\ ,\ 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ &= 12xy(1-y) \\ &= f(x, y) \end{aligned}$$

แสดงว่า X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน

ทฤษฎี 4.5.1 X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วม F, X และ Y จะเป็นอิสระต่อกันก็ต่อเมื่อ

$$F(x, y) = G(x)\, H(y)$$

สำหรับทุก ๆ ค่าของ (x, y)

พิสูจน์ ($\Rightarrow$) X และ Y เป็นอิสระต่อกัน อาศัยนิยาม 4-5.1 เราได้

$$f(x, y) = g(x)\, h(y)$$

เราทราบว่า

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f(s, t)\, ds dt$$

$$= \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} g(s) \,.\, h(t)\, ds dt$$

$$= \int_{-\infty}^{y} h(t) \left\{ \int_{-\infty}^{x} g(s)\, ds \right\} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{y} h(t) \,.\, G(x)\, dt$$

$$= G(x) \int_{-\infty}^{y} h(t)\, dt$$

ดังนั้น $F(x, y) = G(x) \,.\, H(y)$

($\Rightarrow$) แสดงว่า ถ้า X และ Y เป็นอิสระต่อกันแล้ว $F(x, y) = G(x) \,.\, H(y)$

($\Leftarrow$) ในทางกลับกัน ถ้า $F(x, y) = G(x) \,.\, H(y)$

เราทราบว่า

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x\, \partial y}$$

$$= \frac{\partial^2 G(x) \,.\, H(y)}{\partial x\, \partial y}$$

$$= \frac{dG(x)}{dx} \cdot \frac{dH(y)}{dy}$$

ดังนั้น $f(x, y) = g(x) \cdot h(y)$

$\Rightarrow$ X และ Y จะเป็นอิสระต่อกัน (นิยาม 4-5.1)

($\Leftarrow$) แสดงว่า ถ้า $F(x, y) = G(x) H(y)$ แล้ว X และ Y จะเป็นอิสระซึ่งกันและกัน

ทฤษฎี 4-5.2 ถ้า X และ Y เป็นตัวแปรที่เป็นอิสระต่อกันแล้ว

$P(a < X \leqslant b, c < Y \leqslant d) = P(a < X \leqslant b)\, P(c < Y \leqslant d)$

ในเมื่อ $a < b$, $c < d$ และ a, b, c, d เป็นค่าคงที่

พิสูจน์

X และ Y เป็นอิสระต่อกัน ดังนั้น

$$f(x, y) = g(x) \cdot h(y)$$

$$\begin{aligned}
P(a < X \leqslant b, c < Y \leqslant d) &= \int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy \\
&= \int_c^d \int_a^b g(x) \cdot h(y)\, dx\, dy \\
&= \int_c^d h(y) \left\{ \int_a^b g(x)\, dx \right\} dy \\
&= \int_c^d h(y)\, P(a < X \leqslant b)\, dy \\
&= P(a < X \leqslant b) \int_c^d h(y)\, dy \\
&= P(a < X \leqslant b)\, P(c < Y \leqslant d)
\end{aligned}$$

โดยทั่วไปการเป็นอิสระซึ่งกันและกันระหว่างตัวแปรเชิงสุ่ม n ตัว นิยามไว้ดังต่อไปนี้

นิยาม 4-5.2 ให้ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบต่อเนื่องหรือไม่ต่อเนื่อง ที่มีฟังก์ชันการแจกแจงร่วม $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ และฟังก์ชันการแจกแจงแบบ marginal $f_1(x_1), f_2(x_2), \ldots, f_n(x_n)$ ตามลำดับ ตัวแปรเชิงสุ่ม $X_1, X_2, \ldots, X_n$ จะเป็นอิสระระหว่างกันก็ต่อเมื่อ

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_1(x_1)\, f_2(x_2) \ldots f_n(x_n)$$

ทฤษฎี 4-5.3 ตัวแปรเชิงสุ่ม $X_1, X_2, \ldots, X_n$ จะเป็นอิสระระหว่างกันก็ต่อเมื่อ

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_1(x_1) F_2(x_2) \ldots F_n(x_n)$$

ในเมื่อ $F_i(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ เป็นฟังก์ชันการแจกแจงสะสมแบบ marginal ของ X_i

ตัวอย่างที่ 4-5.2 X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน มีฟังก์ชันความหนาแน่นแบบ-marginal ของ X และของ Y กำหนดไว้โดย

$$g(x) = \frac{x}{2}, \; 0 < x < 2$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

และ $$h(y) = \frac{1 + 3y^2}{2}, \; 0 < y < 1$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

ก. จงหาฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X และ Y

ข. จงคำนวณค่าของ $P(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}, \frac{1}{2} < Y < \frac{3}{2})$

ค. จงแสดงให้เห็นจริงว่า

$$f(x|y) = g(x)$$

และ $$P(\frac{1}{4} < X < \frac{1}{2} \mid Y = \frac{1}{3})$$
$$= P(\frac{1}{4} < X < \frac{1}{2}) = \frac{3}{64}$$

วิธีทำ

ก. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน ดังนั้น

$$f(x, y) = g(x)\,h(y) = \frac{x}{2} \cdot \frac{1 + 3y^2}{2}$$

$$\Rightarrow f(x, y) = \frac{x(1 + 3y^2)}{4}, \; 0 < x < 2, \; 0 < y < 1$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

ข. $P(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}, \frac{1}{2} < Y < \frac{3}{2})$

$$= P(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2})\,P(\frac{1}{2} < Y < \frac{3}{2}) \qquad \text{(ทฤษฎี 4-5.2)}$$

$$= \int_{1/2}^{3/2} \frac{x}{2}\,dx \cdot \int_{1/2}^{1} \frac{1 + 3y^2}{2}\,dy$$

$$= \left(\frac{x^2}{4} \Big|_{x=\frac{1}{2}}^{x=\frac{3}{2}} \right) \left(\frac{y + y^3}{2} \Big|_{y=\frac{1}{2}}^{y=1} \right)$$

$$= \frac{1}{8} \left(\frac{9}{4} - \frac{1}{4} \right) \{ (1 - \frac{1}{2}) + (1 - \frac{1}{8}) \} = \frac{11}{32}$$

ค. $f(x|y) = \frac{f(x, y)}{h(y)} = \frac{x(1 + 3y^2)/4}{(1 + 3y^2)/2} = \frac{x}{2}, \; 0 < x < 2$

แสดงว่า $f(x|y) = g(x)$

$$P\left(\frac{1}{4} < X < \frac{1}{2} \,\Big|\, Y = \frac{1}{3} \right) = \int_{1/4}^{1/2} f_{X/Y=\frac{1}{3}}(x/\tfrac{1}{3})\, dx$$

$$= \int_{1/4}^{1/2} \frac{x}{2}\, dx = P\left(\frac{1}{4} < X < \frac{1}{2} \right)$$

แต่ $\int_{1/4}^{1/2} \frac{x}{2}\, dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_{x=\frac{1}{4}}^{x=\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{16} \right) = \frac{3}{64}$

แสดงว่า $P\left(\frac{1}{4} < X < \frac{1}{2} \,\Big|\, Y = \frac{1}{3} \right) = P\left(\frac{1}{4} < X < \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{64}$

ตัวอย่างที่ 4-5.3 X_1, X_2, X_3 เป็นตัวแปรเชิงสุ่มซึ่งต่างเป็นอิสระต่อกัน และมีฟังก์ชันความหนาแน่นแบบ marginal รูปเดียวกัน คือ

$$f(t) = e^{-t}, \; t > 0$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

ก. จงหาฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X_1, X_2 และ X_3

ข. จงคำนวณค่าของ $P(X_1 < 2, 1 < X_2 < 3, X_3 > 2)$

วิธีทำ X_1, X_2 และ X_3 เป็นตัวแปรเชิงสุ่มซึ่งต่างเป็นอิสระต่อกัน

ดังนั้น $f(x_1, x_2, x_3) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) f_3(x_3) = e^{-x_1} \cdot e^{-x_2} \cdot e^{-x_3}$

$$f(x_1, x_2, x_3) = e^{-x_1-x_2-x_3}, \; x_1, x_2, x_3 > 0$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ} \qquad \text{..........(ก)}$$

$$P(X_1 < 2, 1 < X_2 < 3, X_3 > 2) = \int_2^{\infty} \int_1^{3} \int_0^{2} e^{-x_1-x_2-x_3}\, dx_1 dx_2 dx_3$$

$$= \int_2^{\infty} e^{-x_3}\, dx_3 \,.\, \int_1^{3} e^{-x_2}\, dx_2 \,.\, \int_0^{2} e^{-x_1}\, dx_1$$

$$= \left(-e^{-x_3} \Big|_{x_3=2}^{x_3=\infty}\right)\left(-e^{-x_2} \Big|_{x_2=1}^{x_2=3}\right)\left(-e^{-x_1} \Big|_{x_1=0}^{x_1=2}\right)$$

$$= (e^{-2} - e^{-\infty})(e^{-1} - e^{-3})(e^{0} - e^{-2})$$

$$= e^{-2}(e^{-1} - e^{-3})(1 - e^{-2})$$

$$= 0.0376 \qquad \text{..........(ข)}$$

แบบฝึกหัดที่ 4-5

1. ฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X และ Y กำหนดไว้โดย

$$f(x, y) = 2y(1-y)^2, \; -3 < x < 3, 0 < y < 1$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

X และ Y จะเป็นอิสระต่อกันหรือไม่

2. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นร่วม f(x, y) กำหนดไว้โดย

$$f(x, y) = \frac{x+1}{2y^2}, \; |x| < 1, y > 1$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

จงแสดงให้เห็นจริงว่า

1. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน
2. $P(0 < X < 1, 1 < Y < 2) = P(0 < X < 1) \,.\, P(1 < Y < 2)$

3. ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วมของ X และ Y กำหนดไว้โดย

$$F(x, y) = \frac{y\sqrt{x}}{2-2y}, \; 0 < x < 4, 0 < y < \frac{1}{2}$$

จงแสดงให้เห็นจริงว่า

1. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระกัน

2. $P(2 < X < 3, .2 < Y < .3) = P(2 < X < 3) . P(.2 < Y < .3)$

4. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น $f(x, y)$ ดังนี้

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 2e^{-x-y}, \ 0 < x < y, 0 < y < \infty \\ &= 0 \quad \text{อื่น ๆ} \end{aligned}$$

จงแสดงให้เห็นจริงว่า X และ Y เป็นตัวแปรที่พึ่งพิงกัน

5. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน และมีฟังก์ชันความหนาแน่นแบบ marginal รูปเดียวกัน คือ

$$\begin{aligned} f(t) &= .1\, e^{-.1t}, \ t \geqslant 0 \\ &= 0 \quad \text{อื่น ๆ} \end{aligned}$$

จงหา

5.1 ฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X และ Y

5.2 ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วมของ X และ Y

5.3 จงแสดงให้เห็นจริงว่า $f(x|10) = g(x)$

6. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน และมีฟังก์ชันการแจกแจงสะสมแบบ marginal ในรูปเดียวกัน คือ

$$\begin{aligned} F(t) &= 0 && , \ t < 0 \\ &= t - \frac{1}{4}t^2 && , \ 0 \leqslant t < 2 \\ &= 1 && , \ t \geqslant 2 \end{aligned}$$

จงหา

6.1 ฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X และ Y

6.2 $P\left(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}, Y > \frac{4}{3}\right)$

6.3 $P(X > 1 | Y \leqslant 1)$

7. ถ้า (X, Y) เป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง และมีค่าที่จุด (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3) ด้วยความน่าจะเป็น $\frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \frac{1}{18}, \frac{1}{3}, a, b$ a และ b ควรจะมีค่าเท่าใด จึงจะทำให้ X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน

8. X และ Y ต่างเป็นตัวแปรเชิงสุ่มดัชนี (indicator random variable) ถ้า $P(X = 1) = .3$ และ $P(Y = 1) = .4$ ฟังก์ชันน่าจะเป็นร่วมของ X และ Y จะเป็นอย่างไร ถ้า X และ Y เป็นตัวแปรที่เป็นอิสระต่อกัน

9. จงคำนวณค่าของความน่าจะเป็นของ union ของเหตุการณ์ $a < X < b, -\infty < Y < \infty$ และ $-\infty < X < \infty, c < Y < d$ ถ้า X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน และมี $P(a < X < b) = \frac{2}{3}$, $P(c < Y < d) = \frac{5}{8}$

10. จงคำนวณค่าของ $P(0 < X < \frac{1}{3}, 0 < Y < \frac{1}{3})$ ถ้า X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระกัน และมีฟังก์ชันความหนาแน่นแบบ marginal ของ X และของ Y กำหนดไว้โดย

$$g(x) = 2x,\ 0 < x < 1 \quad \text{และ} \quad h(y) = 2(1-y),\ 0 < y < 1$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ} \qquad\qquad = 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

11. กำหนดฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วมของ X กับ Y โดย

$$F(x, y) = \frac{1}{2}(3xy^2 - x^3),\ 0 < x < y < 1$$

11.1) จงหาฟังก์ชันการแจกแจงสะสมแบบ marginal ของ X และของ Y

11.2) X และ Y จะเป็นตัวแปรที่เป็นอิสระกันหรือไม่

11.3) จงคำนวณค่าของ $P(1/5 < X \leq 1/2, 1/3 < Y \leq 4/5)$

11.4) จงหาฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X กับ Y

12. ถ้า $F(x, y) = \frac{x^2y^2}{16}$, $0 \leq x, y \leq 2$ เป็นฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วมของ X กับ Y จงแสดงให้เห็นจริงว่า

12.1 X กับ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน และมีฟังก์ชันหนาแน่นรูปเดียวกัน

12.2 P (ตัวแปร 1 ตัวเท่านั้น ที่มีค่ามากกว่า 1) $= \frac{3}{8}$

12.3 $P(|X - Y| > 1) = \frac{7}{48}$

4.6 บทสรุป

X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่องที่มีฟังก์ชันหนาแน่นร่วม $f(x, y)$ และมีฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วม $F(x, y)$ เราสรุปคุณสมบัติและคุณลักษณะของ X และ Y ได้ดังตารางต่อไปนี้

	$f(x, y)$	$F(x, y)$
ความสัมพันธ์	$F(x, y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta$	$f(x, y) = \dfrac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x\, \partial y}$
$g(x)$	$\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy$	$\dfrac{d\, F(x, \infty)}{dx}$
$h(y)$	$\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx$	$\dfrac{d\, F(\infty, y)}{dy}$
$G(x)$	$\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy\, dx$	$F(x, \infty)$
$H(y)$	$\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx\, dy$	$F(\infty, y)$
$P(a < X \leq b, c < Y \leq d)$	$\int_{c}^{d}\int_{a}^{b} f(x, y)\, dx\, dy$	$F(b, d) - F(b, c) - F(a, d) + F(a, c)$
$P(a < X \leq b)$	$\int_{a}^{b}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy\, dx$	$F(b, \infty) - F(a, \infty)$
$P(c < Y \leq d)$	$\int_{c}^{d}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx\, dy$	$F(\infty, d) - F(\infty, c)$

ถ้า X กับ Y มีความสัมพันธ์กัน เราจะได้

$$f(x \mid y) = \frac{f(x, y)}{h(y)} \quad \text{และ} \quad f(y \mid x) = \frac{f(x, y)}{g(x)}$$

นั่นก็คือ

$$f(x, y) = f(x \mid y)\, h(y) = f(y \mid x)\, g(x)$$

เราจะกล่าวว่า X กับ Y เป็นอิสระต่อกัน ก็ต่อเมื่อ

$$f(x, y) = g(x)\, h(y)$$

เปรียบเทียบตัวแปรอิสระและตัวแปรพึ่งพิงกัน ได้ดังนี้

	X และ Y **เป็นอิสระต่อกัน**	X และ Y **พึ่งพิงกัน**
$F(x, y)$	$G(x)\, H(y)$	$\int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f(x\|y)\, h(y)\, dx\, dy$
$P(a < X \leq b,\ c < Y \leq d)$	$\int_{a}^{b} g(x)\, dx \int_{c}^{d} h(y)\, dy$	$\int_{c}^{d} \int_{a}^{b} f(x\|y)\, h(y)\, dx\, dy$
	$[G(b) - G(a)][H(d) - H(c)]$	$\int_{c}^{d} \int_{a}^{b} f(y\|x)\, g(x)\, dx\, dy$
$P(a < X \leq b \| Y = c)$	$\int_{a}^{b} g(x)\, dx$	$\int_{a}^{b} f_{x\|y}(x\|c)\, dx$
$P(c < Y \leq d \| X = a)$	$\int_{c}^{d} h(y)\, dy$	$\int_{c}^{d} f_{y\|x}(y\|a)\, dy$

แบบฝึกหัดระคน

1. กำหนดฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X และ Y โดย

$$f(x, y) = k, \; 1 < x < 3, \; 1 < y < 2$$
$$= 0, \quad \text{อื่น ๆ}$$

1.1) จงหาค่าของ k

1.2) จงหาฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วมของ X กับ Y

1.3) จงคำนวณค่าของ $P(X > Y)$

2. จงหาค่าของ K ที่ทำให้

$$F(x, y) = kx(y - 2)(10 - y - x), \; 0 < x < 2, \; 2 < y < 4$$

เป็นฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วมของ X กับ Y จงหาฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X กับ Y และคำนวณค่าของ $P(X < 1, Y < 3)$, $P(X + Y < 3)$

3. ฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X กับ Y กำหนดโดย

$$f(x, y) = 4xy, \quad 0 < x, y < 1$$
$$= 0, \quad \text{อื่น ๆ}$$

จงคำนวณค่าของ

3.1) $P(0 < X < 1/2, 1/4 < Y < 5/4)$

3.2) $P(X = Y)$

3.3) $P(X \leqslant Y)$

3.4) $P(X + Y > 1/2)$

4. X กับ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นร่วม $f(x, y)$ กำหนดไว้โดย

$$f(x, y) = 1, \quad 0 < x, y < 1$$
$$= 0, \quad \text{อื่น ๆ}$$

4.1) จงคำนวณค่าของ $P(X + Y \leqslant z)$, $0 < z < 2$

4.2) กำหนด $F(z) = P(X + Y \leqslant z)$ เป็นฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ Z จงหาฟังก์ชันความหนาแน่นของ Z และคำนวณค่าของ $P(|Z| \leqslant 3/2)$

5. กำหนด

$$f(x|y) = mx/y^2, \quad 0 < x < y, \; 0 < y < 1$$

และ $h(y) = ny^4$, $0 < y < 1$

นอกนั้นเป็น 0 เป็นฟังก์ชันภายใต้เงื่อนไขของ X เมื่อรู้ว่า Y = y และฟังก์ชันความหนาแน่นแบบ marginal ของ Y ตามลำดับ จงหา

5.1) ค่าของ m และ n

5.2) ฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X กับ Y

5.3) $P(\frac{1}{4} < X < \frac{1}{2} \mid Y = \frac{5}{8})$ และ $P(\frac{1}{4} < X < \frac{1}{2})$

6. ในจำนวนนักศึกษาที่เรียนวิชาโทคอมพิวเตอร์ 8 คน มี 3 คนที่เรียนวิชาเอกสถิติ 3 คน เรียนวิชาเอกคณิตศาสตร์ ส่วนอีก 2 คนเรียนวิชาเอกฟิสิคส์ เลือกนักศึกษามา 4 คน แบบสุ่ม กำหนด X เป็นจำนวนนักศึกษาวิชาเอกสถิติ และ Y เป็นจำนวนนักศึกษาวิชาเอกฟิสิคส์ที่ได้รับเลือก จงหา

6.1) ฟังก์ชันน่าจะเป็นร่วมของ X กับ Y

6.2) $P[(X, Y) \in A]$ ในเมื่อ $A = \{(x, y) : x + y \leqslant 2\}$

6.3) $f_{Y|X=2}(y|2)$ และ $P(Y = 0|X = 2)$

7. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นร่วม กำหนดโดย

$$
\begin{aligned}
f(x, y) &= 4xye^{-x^2-y^2} \quad , \quad x, y > 0 \\
&= 0 \quad , \quad \text{อื่น ๆ}
\end{aligned}
$$

จงหา

7.1) ฟังก์ชันความหนาแน่นแบบ marginal ของ X และของ Y

7.2) X และ Y จะเป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระต่อกันหรือไม่

7.3) ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วมของ X กับ Y

7.4) $P(5 < X \leqslant 10, 5 < Y \leqslant 10)$

8. กำหนดฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X กับ Y โดย

$$
\begin{aligned}
f(x, y) &= 8xy \quad , \quad x < y < 1, 0 < y < 1 \\
&= 0 \quad , \quad \text{อื่น ๆ}
\end{aligned}
$$

จงหา

8.1) ฟังก์ชันความหนาแน่นแบบ marginal ของ X และของ Y

8.2) ฟังก์ชันภายใต้เงื่อนไขของ X เมื่อรู้ว่า $Y = y, 0 < y < 1$

8.3) $P(2X < Y)$ และ $P(X < 1/2 \mid Y > 1/2)$

9. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมกำหนดไว้โดย

$$f(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{8} \cdot e^{-y} \quad , \quad y \geqslant 0, |x| \leqslant y$$

$$= 0 \qquad , \quad \text{อื่น ๆ}$$

9.1) จงหาฟังก์ชันความหนาแน่นแบบ marginal ของ Y

9.2) จงคำนวณค่าของ $P(|X| \leqslant 2 \mid Y = 5)$

10. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วม กำหนดไว้โดย

$$F(x, y) = (1 - e^{-x}) + (e^{-xy} - 1)/y \ , \ x \geqslant 0, y \geqslant 1$$

10.1) จงหาฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X และ Y

10.2) จงหาฟังก์ชันการแจกแจงสะสมแบบ marginal ของ X

10.3) จงหาฟังก์ชันภายใต้เงื่อนไขของ Y เมื่อรู้ว่า $X = x, x \geqslant 0$

11. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน และมีฟังก์ชันรูปเดียวกันคือ

$$f(t) = e^{-t} \ , \ t \geqslant 0$$

นอกนั้นเป็น 0 จงคำนวณค่าของ

11.1) $P(X + Y \leqslant 2)$

11.2) $P(X/Y \leqslant z)$ ถ้า $F(z) = P(X/Y \leqslant z)$ จงหา p.d.f. ของ Z

11.3) $P(X < Y \mid Y \leqslant 10)$

12. A และ B เป็นเหตุการณ์ที่ $P(A) = 1/4$, $P(B) = 1/2$ และ $P(A|B) = 1/4$ กำหนด X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มดัชนี (indicator r.v.'s) ของ A และ B ตามลำดับ จงแสดงให้เห็นจริงว่าข้อความต่อไปนี้ถูกหรือผิด

12.1) X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน

12.2) $P(X^2 + Y^2 = 1) = 1/4$

12.3) $P(XY = X^2Y^2) = 1$

12.4) $g(x) = 1/2, x = 0, 1$ นอกนั้นเป็น 0

12.5) X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีการแจกแจงเหมือนกัน

13. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน และมีฟังก์ชันความหนาแน่นรูปเดียวกัน คือ-

$$f(t) = 1, 0 < t < 1$$

นอกนั้นเป็น 0 จงหาฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X กับ Y และคำนวณค่าของ

13.1) $P(X + Y < 0.5)$

13.2) $P(X - Y < 0.5)$

13.3) $P(X^2 + Y^2 < 0.5)$

13.4) $P(e^{-X} < 0.5)$

13.5) $P(\cos \pi Y < 0.5)$

14. โรงงานอุตสาหกรรมแห่งหนึ่ง มีแผนกการผลิต 2 แผนก แต่ละแผนกจะมีอุบัติเหตุเกิดขึ้น- X และ Y ครั้งต่อเดือน ตามลำดับ สมมติว่า X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน และมีการแจกแจงเหมือนกัน คือ

จำนวนอุบัติเหตุ (t)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(T = t)$	.08	.12	.16	.13	.09	.12	.10	.09	.06	.05

จงคำนวณค่าของ

14.1) $P(X = 6 \mid Y \geqslant 3)$

14.2) $P(X > 6 \mid Y \geqslant 3)$

14.3) $P(X + Y > 18)$

14.4) $P(X + Y \geqslant 18 \mid X \leqslant 9)$

14.5) $P(3 < X \leqslant 6,\ 5 < Y < 8)$

15. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระกัน มี

$$F(x) = k(x^3 + 1) \quad , \quad -1 < x < 2$$

$$F(y \mid 1) = m \cdot (y^2 - 2y + 1) \quad , \quad 1 < y < n$$

เป็นฟังก์ชันการแจกแจงสะสมแบบ marginal ของ X และฟังก์ชันการแจกแจงสะสมภายเงื่อนไขของ Y เมื่อรู้ว่า X = 1 ตามลำดับ ถ้า $P(AB) = 1/36$ ในเมื่อ $A = \{x : 0 < x < 1\}$ และ $B = \{y : 1 < y < 2\}$ จงคำนวณค่าของ

15.1) k, m, n

15.2) $P(A \cup B)$

15.3) จงหาฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X กับ Y

16. ถ้า $F(y \mid x)$ และ $F(x)$ เป็นฟังก์ชันการแจกแจงสะสมภายใต้เงื่อนไขของ Y เมื่อรู้ว่า X = x, $0 < x < 1$ และฟังก์ชันการแจกแจงสะสมแบบ marginal ของ X ตามลำดับ กำหนดไว้โดย-

$$F(y \mid x) = \frac{k \cdot (16x^3 y + y^4)}{2x^3 + 1} \quad , \quad 0 < y < 2,\ 0 < x < 1$$

และ $F(x) = cx \cdot (x^3 + 2) \quad , \quad 0 < x < 1$

จงหา

16.1) ค่าของ k และ c

16.2) ฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X กับ Y

16.3) ฟังก์ชันหนาแน่นภายใต้เงื่อนไขของ X เมื่อ $Y = y, 0 < y < 2$

16.4) ฟังก์ชันหนาแน่นแบบ marginal ของ X และของ Y

16.5) ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมแบบ marginal ของ Y

16.6) ค่าของ $P(1/2 < Y < 3/2 \mid X = 1/2)$, $P(|X| \leq 1/3 \mid Y = 1)$ และ $P(1/4 < X < 1/2)$, $P(Y > 1)$

17. กำหนด

$$f(x, y) = \frac{1}{2x} \quad , \quad 0 < y < x < 1$$

$$= 1 \quad , \quad 0 < x < y < 1$$

นอกนั้นเป็น 0 เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X กับ Y

17.1) จงแสดงให้เห็นจริงว่า

$g(x) = \frac{3}{2} - x, 0 < x < 1$ และ $h(y) = y - \ln\sqrt{y}, 0 < y < 1$

นอกนั้นเป็น 0 เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นแบบ marginal ของ X และของ Y ตามลำดับ

17.2) จงคำนวณค่าของ $P(1/3 < X < 1/2)$, $P(1/2 < Y \leq 3/2 \mid 1/3 < X < 1/2)$

17.3) จงหาฟังก์ชันการแจกแจงสะสมภายใต้เงื่อนไขของ Y เมื่อ $X = x, 0 < x < 1$

18. $f(x|y)$ และ $h(y)$ เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นเงื่อนไขของ X เมื่อ $Y = y$ และฟังก์ชันความหนาแน่นแบบ marginal ของ Y ตามลำดับ ซึ่งกำหนดโดย

$$f(x|y) = \frac{3x^2 + xy^2 e^{1-y}}{8 + 2y^2 e^{1-y}} \quad , 0 < x < 2, \ y \geq 1$$

$$h(y) = \frac{1}{5y^2} \cdot (4 + y^2 e^{1-y}) \ , \ y \geq 1$$

นอกนั้นเป็น 0 จงหา

18.1) ฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X กับ Y

18.2) ฟังก์ชันความหนาแน่นและฟังก์ชันการแจกแจงสะสมแบบ marginal ของ X

18.3) ฟังก์ชันความหนาแน่นและฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ $Z = \sqrt{X/2}$

18.4) จงแสดงให้เห็นจริงว่า

$$\int_0^2 f(x|5)\, dx = 1$$

$$P(1/2 < X \leq 3/2 \mid Y = 2) \neq P(1/2 < X \leq 3/2)$$

คำตอบแบบฝึกหัดที่ 4-1

(2) 1/27 , 2/27 , 11/27 , 5/27 (4) 1/5 , 2/5 , 1 , 3/5

แบบฝึกหัดที่ 4-2

(1) 2 , 1/4 (2) 6 , 3/20 (3) 3 , 21/512

(4) 1/4 , 1/2, $\pi/14$ (5) $-(3/10)\ln(4/5)$, $(1 - \ln 2)/2$

คำตอบแบบฝึกหัดที่ 4-3

(1) 1, 2, $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ (2) $\frac{1}{2}, \frac{6}{25}$ (4) $\frac{x}{16}(y-2)(10-x-y)$; $\frac{1}{4}$

(5) $\frac{x}{128}(y-1)(xy+x+1)$; $\frac{5}{64}$ (7) $\frac{1}{6}, \frac{5}{12}, \frac{49}{192}$

คำตอบแบบฝึกหัดที่ 4-4

(1.3) $\frac{5}{7}, y = 1; \frac{1}{7}, y = 2, 3$

(2) $\frac{3-x}{4}, 0 < x < 2; \frac{5-y}{4}, 2 < y < 4;$

$\frac{6-x-y}{2(5-y)}, 0<x<2, 2<y<4;$

3/4 , 4/10

3.3) 19/28 , 3/10

(4) $\frac{1}{1-x}, 0 < y < 1-x, 0 < x < 1;$

$8x, 0 < x < \frac{1}{2}$; 0.64 , 0.25

(5) 0.39 ; 0.4 ;

1/3 ; 4/9

(6) $24y(1-x), 0 < y < x < 1;$

11/16

(7) $\frac{x^3 + 5x^2 + 4x}{10}, 0 < x < 1;$

$\frac{2y + 5y^2 + 2y^3}{40}, 0 < y < 2;$

13/27, 37/80

คำตอบแบบฝึกหัดที่ 4-5

(6) 1/18 , 1/4

(7) 2/9 , 1/9

(8)

y \ x	0	1
0	.42	.18
1	.28	.12

(9) 7/8

(11) $\frac{x}{2}(3 - x^2), 0 < x < 1;$

$y^3, 0 < y < 1;$

คำตอบแบบฝึกหัดระคน

(1) $\frac{1}{2}$; $\frac{(x-1)(y-1)}{2}$; $\frac{3}{4}$ (4) $f(z) = z, 0 < z < 1; 2 - z, 1 < z < 2$; 7/8

(2) $\frac{1}{16}$, $\frac{6 - x - y}{8}$

$\frac{3}{8}$, $\frac{5}{24}$

(3) $\frac{3}{8}$, 0 , $\frac{1}{2}$, $\frac{95}{96}$

(5) 2 , 5 ; $10xy^2$,

(8) $4x(1 - x^2)$, $0 < x < 1$;

$4y^3$, $0 < y < 1$;

$\frac{2x}{y^2}$, $x < y < 1, 0 < y < 1$; $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{5}$

(9) $e^{-y}y^3/6$, $y \geqslant 0$; $\frac{71}{125}$

(10) xe^{-xy} , $x \geqslant 0$, $y \geqslant 1$

$1 - e^{-x}$, $x \geqslant 0$;

$\frac{xe^{-xy}}{e^{-x}}$, $y \geqslant 1$, $x \geqslant 0$

(11) 0.595 ; $z/(1 + z)$, $z \geqslant 0$;

$1/(1 + z)^2$, $z \geqslant 0$; 0.5

(13) .125 , .875 , .393 ,

$1 - \ln 2$, 2/3

(14) .12, .3, .012,

.012 , .075

(15) $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{4}$, 3 ; $\frac{1}{3}$;

$\frac{x^2(y - 1)}{6}$, $-1 < x < 2$, $1 < y < 3$;

(16) 1/16 , 1/3 ;

$$\frac{4x^3 + y^3}{6}, \quad 0 < x < 1, \; 0 < y < 2 \; ;$$

$$\frac{4x^3 + 2}{3}, \quad 0 < x < 1 \; ;$$

$$\frac{1 + y^3}{6}, \quad 0 < y < 2 \; ;$$

$$\frac{4y + y^4}{24}, \quad 0 < y < 2 \; ;$$

$$\frac{3}{5}, \; \frac{14}{81}, \; \frac{143}{768}, \; \frac{19}{24}$$

(17) 13/72 , 6/13;

$$\frac{y}{(3x - 2x^2)}, \quad 0 \leqslant y < x$$

$$\frac{2y - 2x + 1}{3 - 2x}, \quad x \leqslant y < 1$$

$$1 \qquad , \; y \geqslant 1$$

(18) $\dfrac{3x^2 + xy^2e^{1-y}}{10y^2}$, $0 < x < 2, \quad y \geqslant 1$;

$$\frac{3x^2 + x}{10} \; ; \; \frac{2x^3 + x^2}{20} \; ,$$

$$\frac{4z^6 + z^4}{5}, \quad 0 < z < 1$$

$$\frac{24z^5 + 4z^3}{5}, \quad 0 < z < 1$$