บทที่ 5
การคาดหมายของตัวแปรเชิงสุ่ม
Expectation of a Random Variable

5.1 ค่าคาดหมายและความแปรปรวนของตัวแปรเชิงสุ่ม

นิยาม 5.1 X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น (หรือฟังก์ชันน่าจะเป็น) f(x) และมีฟังก์ชันการแจกแจงสะสม F(x) ค่าคาดหมายของ g(X) จะกำหนดได้โดย

$$E[g(X)] = \begin{cases} \sum_{\forall x} g(x)\ f(x) \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\ f(x)dx \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\ dF(x) \end{cases}$$

ขึ้นอยู่กับว่า ลักษณะของ X จะบรรยายด้วยฟังก์ชันน่าจะเป็น หรือฟังก์ชันความหนาแน่น f(x) หรือด้วยฟังก์ชันการแจกแจงสะสม F(x)

เราจะสามารถหาค่าของ E[g(x)] ได้ ถ้า

$$\sum_{\forall x} |g(x)|f(x) < \infty \text{ หรือ } \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|f(x)dx < \infty$$

จะเห็นว่า เมื่อ g(X) = X, E[g(X)] = E(X) นั่นเอง

ทฤษฎี 5.1 X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น (หรือฟังก์ชันน่าจะเป็น) f(x) ถ้า a และ b เป็นค่าคงที่ใด ๆ แล้ว

$$E(aX+b) = aE(X)+b$$

บทแทรก 1 ถ้า b = 0 แล้ว E(aX) = aE(X)

บทแทรก 2 ถ้า a = 0 แล้ว E(b) = b

ทฤษฎี 5.2 ค่าคาดหมายของผลบวกหรือผลต่างของฟังก์ชันของ X n ฟังก์ชัน ($n \geqslant 2$) ก็คือ ผลบวกหรือผลต่างของค่าคาดหมายของฟังก์ชันเหล่านั้น กล่าวคือ

$$E[g(X) \pm h(X)] = E[g(X)] \pm E[h(X)]$$

นิยาม 5.2 ค่าความแปรปรวนของ X, Var(X) จะกำหนดได้โดย

$$\mathrm{Var}(X) = E[\{X - E(X)\}^2] = \begin{cases} \sum_{\forall x} (x-\mu)^2 f(x) \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 dF(x) \end{cases}$$

เราจะหาค่าของความแปรปรวนไม่ได้ ถ้า $E(X) = \infty$ และจะสามารถหาค่า Var(X) ได้ ถ้าค่าที่นิยามใน (5.2) น้อยกว่า ∞

Var(X) มักจะนิยมใช้สัญญลักษณ์แทนด้วย σ^2 พิจารณาจากนิยาม 5.2 จะเห็นว่า ความแปรปรวนของ X จะมีค่าเป็นบวกเท่านั้น และหน่วยของ Var(X) จะเป็นกำลังสองของหน่วยของ X ซึ่งไม่สะดวกในการใช้ เราจึงใช้รากที่สองของความแปรปรวนของ X ซึ่งเรียกว่า ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน (Standard Deviation) ของตัวแปรเชิงสุ่ม X แทน และนิยามไว้โดย

$$\sigma_{(\text{ซิกมา})} = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$$

ทฤษฎี 5.3 $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$

ทฤษฎี 5.4 X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น (หรือฟังก์ชันน่าจะเป็น) f(x) g(X) เป็นฟังก์ชันใด ๆ ของ X ที่ไม่ใช่ฟังก์ชันความหนาแน่น ความแปรปรวนของฟังก์ชัน g(X) จะกำหนดได้โดย

$$\mathrm{Var}[g(X)] = E[\{g(X) - E(g(X))\}^2]$$

ทฤษฎี 5.5 ถ้า X เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม a และ b เป็นค่าคงที่ใด ๆ แล้ว

$$\mathrm{Var}(aX + b) = a^2\mathrm{Var}(X)$$

ทฤษฎี 5.6 (Chebyshev's Inequality)

X เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม ที่มีค่า $E(X) = \mu$ และ $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$

$$P(|X-\mu| \geqslant ka) \leqslant \frac{1}{k^2}$$

หรือ $P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma \geqslant 1 - \frac{1}{k^2}$

สำหรับทุก 9 ค่าของ k ที่มากกว่า 0

ตัวอย่าง 5.1 X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มทีมีค่า E(X) >0 ถ้า $E\left[2X^2 - 5X + 10\right] = 43$ และ Var (3 - 2X) = 16 จงหาค่า E(3X-8) และประมาณค่าของ P(-1 IX ≤ 11) และ P(|X-5| ≥10)

วธทา จากทฤษฎี 5.1 และ 5.2 เราจะได้

$$E\left[2X^2 - 5X + 10\right] = 2E(X^2) - 5E(X) + 10$$

ดังนั้น $2E(X^2) - 5E(X) + 10 = 43$ .... (1)

จากทฤษฎี 5.5 และ 5.3 เราจะได้

$$Var(3-2X) = 4[E(X^2) - \{E(X)\}^2] = 16$$

หรือ $2E(X^2) - 2E^2(X) = 8$ ....(2)

(1) – (2) จะได้

$$2E^2(X) - 5E(X) + 10 = 35$$

หรือ $2E^2(X) - 5E(X) - 25 = 0$

$$\{2E(X) + 5\}\{E(X) - 5\} = 0$$

จะได้ $E(X) = 5 \{\because E(X) > 0)$

ค่าของ $E(3X-8) = 3E(X) - 8$

$$= 3(5) - 8 = 7$$

จาก (2) เราได้

$$2 \ Var(X) = 8$$

ดังนั้น $\sigma = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{\frac{8}{2}} = 2$

$$P(-1 \leqslant X \leqslant 11) = P(5-6 \leqslant X \leqslant 5+6)$$

$$= P(\mu \ 3\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 3\sigma), \ \{\mu = E(X) = 5\}$$

$$\geqslant 1 - \frac{1}{3^2}$$ (ทฤษฎีเชบบีเชฟ)

$$P(-1 \leqslant X \leqslant 11) \geqslant \frac{8}{9}$$

$$P(|X-5| \geqslant 10) = P(|X-\mu| \geqslant 5\sigma), \ \{\mu = E(X) = 5, \ \sigma = 2\}$$

$$6 \ \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$$ (ทฤษฎีเชบบีเชฟ)

แบบฝึกหัด 5.1

1. X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นกำหนดไว้โดย

$$f(x) = \frac{8}{x^3}, \quad x > 2$$
$$= 0 \;, \text{ อื่น ๆ}$$

จงหาค่าคาดหมายและความแปรปรวนของ $\frac{X-2}{X}$

$$E\left(\frac{X-2}{X}\right) = \int_2^{\infty} \frac{x-2}{x} \; \frac{8}{x^3} dx = 8\left[\quad \frac{1}{2x^2} + \frac{2}{3x^3}\Big|_2^{\infty}\right]$$

จะได้ $E\left(\frac{X \; 2}{X}\right. = 8\left[\frac{1}{8} \quad \frac{1}{12}\right] = \frac{1}{3}$

$$E\left[\frac{X-2}{X}\right)^2 = \int_2^{\infty} \frac{(x-2)^2}{x^2} \; \frac{8}{x^3} dx$$

$$= 8\left[-\frac{1}{2x^2} + \frac{4}{3x^3} \quad \frac{4}{4x^4}\Big|_{x=2}^{\infty}\right]$$

$$= 8\left[\frac{1}{8} \quad \frac{1}{6} + \frac{1}{16}\right] = \frac{1}{6}$$

$$Var\left(\frac{X-2}{X}\right) = E\left[\left(\frac{X-2}{X}\right)^2\right] \quad \left\{E\left(\frac{X-2}{X}\right)^2 = \frac{1}{6} \quad \frac{1}{9} = \frac{1}{18}$$

หมายเหตุ นักศึกษาอาจจะหาค่าคาดหมายและความแปรปรวนของ $\frac{X-2}{X}$ ได้จาก

$$E\left(\frac{X-2}{X}\right. = -2E\left(\frac{1}{X}\right. \quad \text{และ } E\left(\frac{1}{X}\right) = \int_2^{\infty} \frac{8}{x^4} dx$$

$$Var\left(\frac{X-2}{X}\right) = 4\, Var\left(\frac{1}{X}\right) \quad \text{และ } Var\left(\frac{1}{X}\right) = E\left(\frac{1}{X^2}\right) - \left\{E\left(\frac{1}{X}\right)\right\}^2$$

โดยที่ $E\left(\frac{1}{X^2}\right) = \int_2^{\infty} \frac{8}{x^5} dx$

2. **เลือกตัวเลข 2 ตัว โดยไม่ให้ซ้ำกัน จากเลขจำนวนเต็มบวกที่มีค่าไม่เกิน 6 จงคำนวณค่าคาดหมายของค่าสัมบูรณ์ของผลต่างระหว่างตัวเลขทั้งสองที่ได้จากการสุ่ม**

จำนวนผลลัพธ์ของการเลือกตัวเลขไม่ซ้ำกัน $= 6^{(2)} = 30$

ค่าสัมบูรณ์ของผลต่างระหว่างตัวเลขทั้ง 2 จะเป็นตัวแปรเชิงสุ่ม X ที่มีการแจกแจงดังนี้

$$f(x) = \frac{2(6-x)}{30}, \quad x = 1, 2, 3, 4, 5$$

$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

ดังนั้น $E(X) = \sum_{x=1}^{5} x\frac{6-x}{15} = \frac{5}{15}+\frac{8}{15}+\frac{9}{15}+\frac{8}{15}+\frac{5}{15}$

ค่าคาดหมายของค่าสัมบูรณ์ของผลต่างระหว่างตัวเลข $= \frac{7}{3}$

3. กำหนดฟังก์ชันน่าจะเป็นของตัวแปรเชิงสุ่ม X มีค่าเป็นบวก ที่ $x = -1, 0, 1$ นอกนั้นเป็น 0

3.1 ถ้า $f(0) = \frac{1}{2}$ จงคำนวณค่าของ $E(X^2)$

3.2 ถ้า $f(0) = \frac{1}{2}$ และ $E(X) = \frac{1}{6}$ จงคำนวณค่าของ $E(3X^3+2)$ และ $Var(2X)$

3.1 $E(X^2) = (-1)^2f(-1)+(0)f(0)+(1)^2f(1) = f(-1)+f(1)$

แต่ $f(-1)+f(0)+f(1) = f(-1)+\frac{1}{2}+f(1) = 1$

ดังนั้น $f(-1)+f(1) = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

นั่นคือ $E(X^2) = \frac{1}{2}$

3. $f(0) = \frac{1}{2}$ ดังนั้น $f(-1)+f(1) = 1 - f = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{6} = E(X) = (-1)f(-1) + (0)f(0) + (1)f(1)$

ดังนั้น $-f(-1)+f(1) = \frac{1}{6}$

$$\begin{aligned} E(3X^3+2) &= 3E(X^3)+2 \\ &= 3[(-1)^3f(-1)+(0)^3f(0)+(1)^3f(1)]+2 \\ &= 3[-f(-1)+f(1)]+2 \\ &= 3\left(\frac{1}{6}\right)+2 = 2\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Var(2X) &= 4\ Var(X) \\
&= 4[E(X^2) - \{E(X)\}^2] \\
&= 4\left[f(-1)+f(1)-\left(\frac{1}{6}\right)^2\right] \\
&= 4\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{36}\right] = \frac{17}{9}
\end{aligned}$$

4. X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มี $E[(X-1)^2] = 10$ และ $E[(X-2)^2] = 6$ จงหาค่าคาดหมาย และความแปรปรวนของ x

$$E[(X-1)^2] = E[X^2 - 2X + 1]$$

$$10 = E(X^2) - 2E(X) + 1 \qquad \text{..........(1)}$$

$$E[(X-2)^2] = E[X^2 - 4X + 4]$$

$$6 = E(X^2) - 4E(X) + 4 \qquad \text{..........(2)}$$

(1) − (2), $\quad 4 = 2E(X) - 3$

$$E(X) = \frac{7}{2} = \text{ค่าคาดหมายของ } X$$

unufii $E(X)$ ใน (1) จะได้

$$\begin{aligned}
10 &= E(X^2) - 7 + 1 \\
E(X^2) &= 16 \\
E(X^2) - \{E(X)\}^2 &= 16 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 \\
&= \frac{15}{4} = \text{ความแปรปรวนของ } x
\end{aligned}$$

5. x เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น $f(x) = \frac{(x+2)}{18}$, $-2 \leqslant x \leqslant 4$ นอกนั้นเป็น 0

จงคำนวณค่าของ $E(X)$, $E[(X+2)^3]$ และ $E[6X - 2(X+2)^3]$

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-2}^{4} x\frac{x+2}{18}dx \\
&= \frac{1}{18}\left[\frac{4^3-(-2)^3}{3} + \{4^2 - (-2)^2\}\right] = 2 \\
E[(X+2)^3] &= \int_{-2}^{4} (x+2)^3\frac{x+2}{18}dx
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{18}\left(\frac{1}{5}\right)[(4+2)^5 - (2-2)^5] = 86.4$$

$$E[6X - 2(X+2)^3] = 6E(X) - 2E[(X+2)^3]$$
$$= 6(2) - 2(86.4) = -160.8$$

6. $$f(x) = e^{-x} \quad , \quad x \geq 0$$
$$= 0 \quad , \quad \text{อื่น ๆ}$$

เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นของ X จงคำนวณค่าของ $E(X)$, $E(X^2)$, $E(X^{(3)})$ และ $E(e^{2X/3})$

$$E(X) = \int_0^{\infty} xe^{-x}dx = 1$$

$$E(X^2) = \int_0^{\infty} x^2e^{-x}dx = 2! = 2$$

$$E(X^{(3)}) = E[X(X-1)(X-2)]$$
$$= E(X^3) - 3E(X^2) + 2E(X)$$

$$E(X^3) = \int_0^{\infty} x^3e^{-x}dx = 3! = 6$$

$$\Longrightarrow \quad E(X^{(3)}) = 6 - 3(2) + 2(1) = 2$$

$$E(e^{2X/3}) = \int_0^{\infty} e^{2x/3}e^{-x}dx$$

$$= 3\int_0^{\infty} e^{-x/3}d\frac{x}{3} = 3$$

7. จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าถูกหรือผิด

7.1 $E\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{1}{E(X)}$

7.2 $E(c\ g(X)) = c\ E(g(X))$

7.3 $E(X^2) \geq [E(X)]^*$

7.4 $Var(3 - X) = -Var(X)$

7 . 5 $E|g_1(X)| \leqslant E|g_2(X)|$ ถ้า $g_1(X) \leqslant g_2(X)$ ทุก ๆ ค่า x

7.6 $Var\left(X - \frac{1}{X}\right) = Var(X) + Var\left(\frac{1}{X}\right) - 2E(X)E\left(\frac{1}{X}\right)$

7.1 ผิด

เพราะว่า $E\left(\frac{1}{X}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} f(x)dx$

แต่ $\frac{1}{E(X)} = \frac{1}{\left(\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx\right)}$

7.2 ถูก

เพราะว่า $E|cg(X)| = \int_{-\infty}^{\infty} cg(x)f(x)dx$

$$= c\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx = cE|g(X)|$$

7.3 ถูก

เพราะว่า $Var(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 \geqslant 0$

ดังนั้น $E(X^2) \geqslant \{E(X)\}^2$

7.4 ผิด

ตามทฤษฎี 5.5 $Var(aX + b) = a^2\ Var(X)$

ดังนั้น $Var(3 - X) = Var(X)$

หรืออาจจะใช้เหตุผลว่า ความแปรปรวนของฟังก์ชันใด ๆ ของตัวแปรเชิงสุ่ม X จะต้องมากกว่าหรือเท่ากับ 0 เสมอ

7.5 ถูก

ถ้า $g_1(X) \leqslant g_2(X)$ ทุก ๆ ค่า x

แล้ว $\int_{-\infty}^{\infty} g_1(x)f(x)dx \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} g_2(x)f(x)dx$

นั่นคือ $E|g_1(X)| \leqslant E|g_2(X)|$

7.6 ผิด

$$Var\left(X - \frac{1}{X}\right) = E\left[\left(X - \frac{1}{X}\right)^2\right] - \left\{E\left(X - \frac{1}{X}\right)\right\}^2$$

$$= E\left[X^2 - 2 + \frac{1}{X^2}\right] - \left\{E(X) - E\left(\frac{1}{X}\right)\right\}^2$$

$$= E(X^2) - 2 + E\left(\frac{1}{X^2}\right) - \{E(X)\}^2 + 2E(X)E\left(\frac{1}{X}\right) - \left\{E\left(\frac{1}{X}\right)\right\}^2$$

$$= [E(X^2) - \{E(X)\}^2] + \left[E\left(\frac{1}{X^2}\right) - \left\{E\left(\frac{1}{X}\right)\right\}^2\right] + 2E(X)E\left(\frac{1}{X}\right) - 2$$

$$= Var(X) + Var\left(\frac{1}{X}\right) + 2E(X)E\left(\frac{1}{X}\right) - 2$$

8. กำหนด $f(x) = 2x, 0 < x < 1$ นอกนั้นเป็น 0 เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นของ X จงหา

8.1 ค่าของ $E(\sqrt{X})$

8.2 ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมและฟังก์ชันความหนาแน่นของ $Y = \sqrt{X}$

8.3 อาศัยผลจากข้อ (8.2) จงหาค่าของ E(Y) แล้วเปรียบเทียบผลที่ได้กับข้อ (8.1)

8.1 $E(\sqrt{X}) = \int_0^1 2x^{3/2}dx$

$$= 2\frac{x^{5/2}}{5/2}\Big|_0^1 = \frac{4}{5}$$

8.2 $F(y) = P(Y \leqslant y)$

$$= P(\sqrt{X} \leqslant y), \quad 0 < y < 1$$

$$= P(X \leqslant y^2)$$

$$= \int_0^{y^2} 2x\,dx = y^4$$

$$\frac{dF(y)}{dy} = 4y^3 \quad , \quad 0 < y < 1$$

จะได้ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมและฟังก์ชันหนาแน่นของ $Y = \sqrt{X}$

$$F(y) = 0 \quad , \quad y < 0$$
$$= y^4 \quad , \quad 0 \leqslant y < 1$$
$$= 1 \quad , \quad y \geqslant 1$$

และ $f(y) = 4y^3 \quad , \quad 0 < y < 1$

$= 0$ อื่น ๆ

8.3 $E(Y) = \int_0^1 4y^4dy$

$$= 4\left(\frac{y^5}{5}\bigg|_0^1\right) = \frac{4}{5}$$

ซึ่งเป็นค่าเดียวกันกับผลที่ได้จากข้อ 8.1 แสดงให้เห็นว่า เราจะหาค่า $E(\sqrt{X})$ โดยตรงจากฟังก์ชันหนาแน่นของ $\sqrt{X}$ หรือจะใช้นิยามค่าคาดหมายของ $\sqrt{X}$ ก็ได้

9. กำหนดฟังก์ชันความหนาแน่นของ X ดังต่อไปนี้

9.1 $f(x) = 6x(1-x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$

$\quad = 0 \quad$, อื่น ๆ

9.2 $f(x) = \frac{1}{3} \quad , \quad 0 < x < 1, 2 < x < 4$

$\quad = 0 \quad$, อื่น ๆ

9.3 $f(x) = \frac{1}{3\sqrt{x}} \quad , \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$

$\quad = \frac{1}{6\sqrt{x}} \quad , \quad 1 \leqslant x \leqslant 4$

$\quad = 0 \quad$, อื่น ๆ

ในแต่ละกรณี จงคำนวณความน่าจะเป็นที่ X จะออกผลลัพธ์ในช่วง $\mu - 2\sigma$ กับ $\mu + 2\sigma$

9.1 $$\mu = E(X) = \int_0^1 6x^2(1-x)dx$$

$$= 6\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

$$E(X^2) = \int_0^1 6x^3(1-x)dx$$

$$= 6\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) = \frac{3}{10}$$

$$\sigma = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{\frac{3}{10} - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{10}$$

$$P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) = \int_{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{5}}^{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{5}} 6x(1-x)dx$$

$$= 3\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2-\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2\right]-2\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^3-\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^3\right]$$

$$= \frac{6\sqrt{5}}{5} - \frac{3\sqrt{5}}{5} - \frac{4\sqrt{5}}{25}$$

$$= 0.98$$

9.2 $E(X) = \int_0 \frac{x}{3}dx + \int_2^4 \frac{x}{3}dx$

$$\longrightarrow \quad \mu = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{4^2-2^2}{2}\right) = 2\frac{1}{6} = \quad 2.167$$

$$E(X^2) = \int_0 \frac{x^2}{3}dx + \int_2^4 \frac{x^2}{3}dx$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{4^3-2^3}{3}\right) = \frac{19}{3}$$

$$\sigma \doteq \sqrt{\frac{19}{3}-\left(\frac{13}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{59}}{6} = 1.28$$

$$P(\mu-2\sigma \leqslant X \leqslant \mu+2\sigma) = \int_{-.393} f(x)dx = 1$$

9.3 $E(X) = \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{3}dx + \int_1^4 \frac{\sqrt{x}}{6}dx$

$$\longrightarrow \quad \mu = \frac{1}{3}\cdot\frac{1^{3/2}}{\frac{3}{2}} + \frac{1}{6}\cdot\frac{4^{3/2}-1}{\frac{3}{2}} = 1$$

$$E(X^2) = \int_0^1 \frac{x^{3/2}}{3}dx + \int_1^4 \frac{x^{3/2}}{6}dx$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\frac{5}{2}} + \frac{32-1}{6\left(\frac{5}{2}\right)} = \frac{33}{15}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{33}{15} - 1} = 1.095$$

$$P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) = \int_{-1.19}^{3.19} f(x)dx$$

$$= 1 - \int_{3.19}^{4} \frac{1}{6\sqrt{x}} dx$$

$$= 1 - \frac{1}{6}\{2(\sqrt{4} - \sqrt{3.19})\} = 0.93$$

10. X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันการแจกแจงสะสม กำหนดไว้โดย

$$
\begin{aligned}
F(x) &= 0 &&, \quad x < 0 \\
&= \frac{x}{8} &&, \quad 0 \leqslant x < 2 \\
&= \frac{x^2}{16} &&, \quad 2 \leqslant x < 4 \\
&= 1 &&, \quad x \geqslant 4
\end{aligned}
$$

จงคำนวณค่าของ $E(2X^2 + 5X - 4)$ และ $Var(2 - 3X)$

เฉลย

$$E(X) = \int_0^2 x d\frac{x}{8} + \int_2^4 x d\frac{x^2}{16} = \frac{31}{12}$$

$$E(X^2) = \int_0^2 x^2 d\frac{x}{8} + \int_2^4 x^2 d\frac{x^2}{16}$$

$$= \frac{8^2}{3}\left(\frac{2}{8}\right)^3 + \frac{16}{2}\left[\left(\frac{4^2}{16}\right)^2 - \left(\frac{2^2}{16}\right)^2\right] = \frac{47}{6}$$

$$E(2X^2 + 5X - 4) = 2E(X^2) + 5E(X) - 4$$

$$= 2\left(\frac{47}{6}\right) + 5\left(\frac{31}{12}\right) - 4 = \frac{295}{12}$$

$$Var(2 - 3X) = 9\left[\frac{47}{6} - \left(\frac{31}{12}\right)^2\right] = \frac{167}{16}$$

11. X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่อง ที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น f และฟังก์ชันการแจกแจงสะสม F จงแสดงให้เห็นจริงว่า ถ้า E(X) หาค่าได้

$$E(X) = \int_0^{\infty}\{1 - F(x)\}dx - \int_{-\infty}^{0} F(x)dx$$

ดังนั้น ถ้า f(x) = 0 ในเมื่อ $x \leqslant 0$ แล้ว

$$E(X) = \int_0^{\infty}\{1 - F(x)\}dx$$

เฉลย

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

$$\int_0^{\infty}\{1 - F(x)\}dx - \int_{-\infty}^{0} F(x)dx = \int_0^{\infty}\left(\int_x^{\infty} f(t)dt\right)dx - \int_{-\infty}^{0}\left(\int_{-\infty}^{x} f(t)dt\right)dx$$

$$= \int_0^{\infty}\int_0^{t} f(t)dxdt - \int_{-\infty}^{0}\int_t^{0} f(t)dxdt$$

$$= \int_0^{\infty} tf(t)dt - \int_{-\infty}^{0} (-t)f(t)dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} tf(t)dt \qquad = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx$$

แสดงว่า $$E(X) = \int_0^{\infty}\{1 - F(x)\}dx - \int_{-\infty}^{0} F(x)dx$$

ถ้า f(x) = 0 ในเมื่อ $x \leqslant 0$ แล้ว

$$\int_0^{\infty}\{1 - F(x)\}dx = \int_0^{\infty}\int_x^{\infty} f(t)dtdx$$

$$= \int_0^{\infty}\int_0^{t} f(t)dxdt = \int_0^{\infty} tf(t)dt$$

$$= \int_0^{\infty} xf(x)dx = E(X)$$

12. ให้ $u(X)$ เป็นฟังก์ชันที่ไม่เป็นลบของตัวแปรเชิงสุ่ม X ถ้า $E[u(X)]$ สามารถหาค่าได้ จงแสดงให้เห็นจริงว่า

$$P[u(X) \geqslant c] \leqslant \frac{E[u(X)]}{c}$$

สำหรับทุก ๆ ค่าของ c ที่เป็นบวก

อาศัยผลที่ได้ จงคำนวณค่าของ $P(5X^2 - 20X \geqslant 7)$ ในเมื่อ $E(X) = 3$ และ $Var(X) = 4$

เฉลย

$$E[u(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)f(x)dx$$

$u(X) \geqslant c$ และ $u(X)$ ไม่เป็นลบ ดังนั้น $X \geqslant u^{-1}(c)$

จะได้

$$E[u(X)] = \int_{-\infty}^{u^{-1}(c)} u(x)f(x)dx + \int_{u^{-1}(c)}^{\infty} u(x)f(x)dx$$

$$E[u(X)] \geqslant \int_{u^{-1}(c)}^{\infty} u(x)f(x)dx$$

$$\geqslant \int_{u^{-1}(c)}^{\infty} cf(x)dx, \quad (u(X) \geqslant c)$$

เอา $c > 0$ หารทั้ง 2 ข้าง จะได้

$$\frac{E[u(X)]}{c} \geqslant \int_{u^{-1}(c)}^{\infty} f(x)dx = P(X \geqslant u^{-1}(c))$$

นั่นคือ $\dfrac{E[u(X)]}{c} \geqslant P(u(X) \geqslant c)$

$$P(5X^2 - 20X \geqslant 7) \leqslant \frac{E[5X^2 - 20X]}{7}$$

$$\begin{aligned} E[5X^2 - 20X] &= 5E(X^2) - 20E(X) \\ &= 5[Var(X) + \{E(X)\}^2] - 20(3) \\ &= 5(4+9) - 60 = 5 \end{aligned}$$

$$P(5X^2 - 20X \geqslant 7) \leqslant \frac{5}{7}$$

13. X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีค่าเฉลี่ย $\mu = 10$ และความแปรปรวน $\sigma^2 = 4$ จงใช้ทฤษฎีของเชบบีเชฟคำนวณค่าของ

13.1 $P(|X-10| \geqslant 3)$

13.2 $P(5 < X < 15)$

13.3 c ซึ่งทำให้ $P(|X-10| \geqslant c) \leqslant 0.04$

$\mu = 10, \sigma = 2$

13.1 $P(|X-10| \geqslant 3) = P(|X-\mu| \geqslant \frac{3}{2}\sigma) \leqslant \frac{4}{9}$

13.2 $P(5 < X < 15) = P(10-5 < X < 10+5)$

$$= P\left(\mu - \frac{5}{2}\sigma < X < \mu + \frac{5}{2}\sigma\right) \geqslant 1 - \frac{1}{\frac{25}{4}}$$

$\Rightarrow P(5 < X < 15) \geqslant \frac{21}{25}$

13.3 $P(|X-10| \geqslant c) \leqslant 0.04$

จะได้ $c = 2k$ และ $\frac{1}{k^2} = 0.04$ หรือ $k = 5$

ดังนั้น $c = 2(5) = 10$

5.2 ค่าคาดหมายของตัวแปรเชิงสุ่มที่มีการแจกแจงร่วม

เมื่อมีตัวแปรเชิงสุ่มแบบทวิคูณ X และ Y ที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นร่วม หรือฟังก์ชันน่าจะเป็นร่วม $f(x, y)$ หรือฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วม $F(x, y)$ และเมื่อมีฟังก์ชัน $g(X, Y)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันใด ๆ ที่กำหนดในเทอมของ X และ Y เรานิยามค่าคาดหมายของฟังก์ชัน $g(X, Y)$ ได้ดังนี้

นิยาม 5.3 ค่าคาดหมายของฟังก์ชัน $g(X, Y)$ จะกำหนดได้โดย

$$E[g(X, Y)] = \sum_{\forall x} \sum_{\forall y} g(x, y)\, f(x, y)$$

ในเมื่อ $f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันน่าจะเป็นร่วมของตัวแปรเชิงสุ่มไม่ต่อเนื่อง X และ Y

$$E[g(X, Y)] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f(x,y)\,dx\,dy \\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x, y)\, dF(x, y) \end{cases}$$

ถ้า $g(X, Y) = X$ ผลลัพธ์ที่ได้คือค่า $E(X)$ หรือ μ_X

ถ้า $g(X, Y) = Y$ ผลลัพธ์ที่ได้คือค่า $E(Y)$ หรือ μ_Y

ถ้า $g(X, Y) = (X-\mu_X)^2$ ผลที่ได้คือค่า $Var(X)$ หรือ σ_X^2

ถ้า $g(X, Y) = (Y-\mu_Y)^2$ ผลที่ได้คือค่า $Var(Y)$ หรือ σ_Y^2

ถ้า $g(X, Y) = (X-\mu_X)(Y-\mu_Y)$ ผลที่ได้คือความแปรปรวนร่วมของ X กับ Y นั่นคือ $Cov(X, Y)$ หรือ σ_{XY}

ค่าคาดหมายของฟังก์ชัน $g(X, Y)$ จะเป็นอย่างไร ก็ขึ้นอยู่กับลักษณะของฟังก์ชัน $g(X, Y)$ นั้น

เรามีทฤษฎีเกี่ยวกับค่าคาดหมายของ X กับ Y ดังนี้

ทฤษฎีที่ 5.7 ค่าคาดหมายของผลบวกหรือผลต่างของฟังก์ชันของตัวแปรเชิงสุ่ม X และ Y ตั้งแต่ 2 ฟังก์ชันขึ้นไป ก็คือ ผลบวกหรือผลต่างของค่าคาดหมายของฟังก์ชัน กล่าวคือ

$$E[g(X, Y) \pm h(X, Y)] = E[g(X, Y)] \pm E[h(X, Y)]$$

บทแทรก กำหนด $g(X, Y) = X$ และ $h(X, Y) = Y$ จะเห็นว่า

$$E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$$

ทฤษฎี 5.8 X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีค่าเฉลี่ย $\mu_X = E(X)$ และ $\mu_Y = E(Y)$ ความแปรปรวนร่วมระหว่าง X กับ Y กำหนดได้โดย

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(XY) - \mu_X\mu_Y$$

ทฤษฎี 5.9 X และ Y เป็นตัวแปรที่เป็นอิสระต่อกัน และมีฟังก์ชันความหนาแน่นร่วม $f(x, y)$ ค่าคาดหมายของผลคูณระหว่างฟังก์ชัน $u(X)$ กับฟังก์ชัน $v(Y)$ จะเท่ากับผลคูณระหว่างค่าคาดหมายของฟังก์ชัน $u(X)$ กับค่าคาดหมายของฟังก์ชัน $v(Y)$ กล่าวคือ

$$E[u(X) \cdot v(Y)] = E[u(X)]E[v(Y)]$$

หาก $u(X) = X$ และ $v(Y) = Y$ จะเห็นว่า

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

บทแทรก ถ้า X และ Y เป็นอิสระต่อกันแล้ว ความแปรปรวนร่วม $Cov(X, Y) = 0$

บทกลับไม่จริง กล่าวคือ หากความแปรปรวนร่วม $Cov(X, Y) = 0$ X และ Y อาจเป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน หรือเป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่พึ่งพิงกันก็ได้

ทฤษฎี 5.10 ถ้า X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีการแจกแจงร่วม a และ b เป็นค่าคงที่ใด ๆ แล้ว

$$\mathrm{Var}(aX+bY) = a^2\mathrm{Var}(X)+b^2\mathrm{Var}(Y)+2ab\ \mathrm{Cov}(X,\ Y)$$

บทแทรก ถ้า X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน แล้ว

$$\mathrm{Var}(aX+bY) = a^2\mathrm{Var}(X)+b^2\mathrm{Var}(Y)$$

จากนิยามและทฤษฎี 5.8 เราได้

$$\mathrm{Cov}(X,\ Y) = E[\{X-\mu_X\}\{Y-\mu_Y\}] = E(XY)-\mu_X\mu_Y$$

จะเห็นว่า ค่าของ Cov(X, Y) อาจจะเป็นบวกหรือลบก็ได้ ความแปรปรวนร่วมจะมีค่าเป็นบวก หากค่าของ X มากกว่า μ_X และค่าของ Y มากกว่า μ_Y ซึ่งแสดงว่า ค่าของ X และ Y มีค่าเพิ่มด้วยกันทั้งคู่หรือลดลงด้วยกันทั้งคู่ ในทางตรงกันข้าม ความแปรปรวนร่วมจะมีค่าเป็นลบ หากค่าของ X น้อยกว่า μ_X แต่ค่าของ Y มากกว่า μ_Y หรือค่าของ X มากกว่า μ_X แต่ค่าของ Y น้อยกว่า μ_Y ซึ่งแสดงว่า ค่าของ X ลดลงในขณะที่ค่าของ Y เพิ่มขึ้น หรือค่าของ X เพิ่มขึ้นในขณะที่ค่าของ Y ลดลง และเมื่อ X กับ Y เป็นอิสระต่อกัน ค่าของความแปรปรวนร่วมจะเป็น 0 เราจึงกล่าวได้ว่า ความแปรปรวนร่วมใช้เป็นตัววัดความสัมพันธ์ระหว่าง X กับ Y ได้

อย่างไรก็ตาม กรณีที่เราต้องการพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่าง X กับ Y ว่าจะมีความสัมพันธ์มากน้อยขนาดไหน ความแปรปรวนร่วมระหว่าง X กับ Y ควรมีค่าสูงสุดหรือต่ำสุดเท่าใดเราไม่อาจกำหนดได้ชัดเจน ในทางปฏิบัติเราจึงไม่นิยมใช้ความแปรปรวนร่วมเป็นตัววัดความสัมพันธ์ระหว่าง X กับ Y และโดยที่ X กับ Y เราบรรยายลักษณะได้ด้วยค่าเฉลี่ยและความแปรปรวน ดังนั้นตัววัดที่ดีที่จะใช้วัดความสัมพันธ์ระหว่าง X กับ Y จึงควรอยู่ในเทอมของค่าเหล่านี้ เราจึงกำหนดตัววัดขึ้นใหม่ ซึ่งเป็นอัตราส่วนระหว่างความแปรปรวนร่วม, Cov(X ,Y), กับผลคูณของส่วนเบี่ยงเบนของ X, σ_X, และของ Y, σ_Y, ซึ่งจะได้ผลลัพธ์เป็นตัวเลขที่ไม่มีหน่วย เรียกค่าที่ได้นี้ว่า สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ (correlation coefficient) ระหว่าง X กับ Y เขียนแทนด้วยสัญญลักษณ์ $\rho(X,\ Y)$ หรือ ρ_{XY} และนิยามไว้ดังต่อไปนี้

นิยาม 5.4 X กับ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีความแปรปรวนร่วม Cov(X, Y) และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน $\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$, $\sigma_Y = \sqrt{\mathrm{Var}(Y)}$ สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ระหว่าง X กับ Y จะกำหนดได้ดังนี้

$$\rho_{XY} = \frac{\mathrm{Cov}(X,\ Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$$

ส.ป.ส. สหสัมพันธ์เป็นค่าจริงที่ไม่มีหน่วย ใช้วัดองศาแห่งความสัมพันธ์ระหว่าง X กับ Y ค่าที่ได้นี้จะบอกขนาดและความสัมพันธ์ระหว่าง X กับ Y ρ มีค่าอยู่ระหว่าง +1 กับ −1 เมื่อ ρ เป็นบวก แสดงว่า X กับ Y มีค่าเพิ่มขึ้นด้วยกันหรือลดลงด้วยกัน และเมื่อ ρ เป็นลบ แสดงว่าค่าของ X กับ Y สวนทางกัน เช่นเมื่อ X เพิ่มขึ้น Y จะลดลง เมื่อ $\rho = +1$ แสดงว่า X กับ Y มีความสัมพันธ์ร่วมอย่างสมบูรณ์ และมีการเปลี่ยนแปลงไปทางเดียวกัน แต่ถ้า แต่ถ้า $\rho = -1$ แสดงว่า X กับ Y มีความสัมพันธ์ร่วมอย่างสมบูรณ์แต่เปลี่ยนแปลงในทางตรงข้ามกัน และถ้า $\rho = 0$ แสดงว่า X กับ Y ไม่มีสหสัมพันธ์กัน

ทฤษฎีที่ 5.11 สำหรับตัวแปรเชิงสุ่ม X, Y ทุกคู่ที่ ρ_{XY} สามารถหาค่าได้ เราจะได้

$$-1 \leqslant \rho_{XY} \leqslant 1$$

กรณีของตัวแปรเชิงสุ่มพหุคูณ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เรานิยามค่าคาดหมายของฟังก์ชัน $g(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ ได้ดังนี้

นิยาม 5.5 ค่าคาดหมายของฟังก์ชัน $g(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ จะกำหนดได้โดย

$$E[g(X_1,\ldots,X_n)] = \begin{cases} \sum\limits_{\forall x_n} \cdots \sum\limits_{\forall x_1} g(x_1,\ldots,x_n)\, f(x_1,\ldots,x_n) \\ \\ \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1,\ldots,x_n)\, f(x_1,\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_n \end{cases}$$

ขึ้นอยู่กับว่า $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ เป็นฟังก์ชันน่าจะเป็นร่วมหรือฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ $X_1, X_2, \ldots, X_n$

ทฤษฎีที่ 5.12 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบพหุคูณ ที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นร่วม $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ กำหนด $Y = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i X_i$ เมื่อ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ เป็นค่าคงที่ ค่าคาดหมาย และความแปรปรวนของ Y กำหนดได้โดย

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i \text{ และ } \sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i a_j \; \sigma_{ij}$$

ทฤษฎี 5.13 กำหนด U และ V เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นของตัวแปรเชิงสุ่ม $X_1, X_2, \ldots, X_n$ สองฟังก์ชัน

โดย $U = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$, $V = \sum_{j=1}^{n} b_j X_j$ ความแปรปรวนร่วมของ U กับ V กำหนดได้โดย

$$\sigma_{UV} = \sum_{i} \sum_{j} a_i b_i \sigma_{ij}$$

แบบฝึกหัดที่ 5.2

1. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม ที่มีฟังก์ชันน่าจะเป็นร่วมกำหนดไว้โดย

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & x = 1 \\ \frac{1}{8}, & x=2 \\ \frac{1}{2}, & x = 3 \\ \frac{1}{8}, & x = 4 \end{cases} \qquad f(y) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & y = 2 \\ \frac{1}{8}, & y = 4 \\ \frac{1}{2}, & y = 6 \\ \frac{1}{8}, & y = 8 \end{cases}$$

จงคำนวณค่าของ E(X+ Y), Var(X Y)

$$E(X) = \frac{1}{4} + 2\left(\frac{1}{8}\right) + 3\left(\frac{1}{2}\right) + 4\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{5}{2}$$

$$E(Y) = 2\left(\frac{1}{4}\right) + 4\left(\frac{1}{8}\right) + 6\left(\frac{1}{2}\right) + 8\left(\frac{1}{8}\right) = 5$$

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) = \frac{15}{2}$$

$$\begin{aligned} Var(X-Y) &= E[\{X - Y - E(X-Y)\}^2] \\ &= E[\{X - Y - (E(X) - E(Y))\}^2] \\ &= E\left[\left\{X - Y + \frac{5}{2}\right\}^2\right] \\ &= \left(1 - 2 + \frac{5}{2}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right) + \left(2 - 4 + \frac{5}{2}\right)^2\left(\frac{1}{8}\right) + \left(3 - 6 + \frac{5}{6}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right) \\ &\quad + \left(4 - 8 + \frac{5}{2}\right)^2\left(\frac{1}{8}\right) \\ &= \frac{9}{4}\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{8}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{9}{4}\left(\frac{1}{8}\right) = 1 \end{aligned}$$

หมายเหตุ การหาค่า Var(X-Y) อาจหาได้จาก

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X - Y) &= \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) - 2\mathrm{Cov}(X, Y)\\ &= [E(X^2) - \{E(X)\}^2] + [E(Y^2) - \{E(Y)\}^2] - 2[E(XY) - E(X)E(Y)]\end{aligned}$$

ก็ได้

2. ให้ตัวแปรเชิงสุ่ม X และ Y มีฟังก์ชันน่าจะเป็นร่วมกำหนดไว้โดย

2.1 $f(x, y) = \frac{1}{3}$, $(x, y) = (0, 0), (1, 1), (2, 2)$ นอกนั้นเป็น 0

2.2 $f(x, y) = \frac{1}{3}$, $(x, y) = (0, 2), (1, 1), (2, 0)$ นอกนั้นเป็น 0

2.3 $f(x, y) = \frac{1}{3}$, $(x, y) = (0, 0), (1, 1), (2, 0)$ นอกนั้นเป็น 0

ในแต่ละกรณีจงหา ส.ป.ส. สหสัมพันธ์ระหว่าง X กับ Y

ส.ป.ส. สหสัมพันธ์ระหว่าง X กับ Y คือ

$$\rho = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y} = \frac{E[\{X-\mu_X\}\{Y-\mu_Y\}]}{\sqrt{E[\{X-\mu_X\}^2]E[\{Y-\mu_Y\}^2]}}$$

2.1 $\mu_X = \sum_{\forall(x,\,y)} xf(x, y) = 0\left(\frac{1}{3}\right) + 1\left(\frac{1}{3}\right) + 2\left(\frac{1}{3}\right) = 1$

$$E[\{X-\mu_X\}^2] = \sum_{\forall(x,\,y)} (x-1)^2 f(x, y) = \frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\mu_Y = \sum_{\forall(x,\,y)} yf(x, y) = 1$$

$$E[\{Y-\mu_Y\}^2] = \frac{2}{3}$$

$$E[\{X-\mu_X\}\{Y-\mu_Y\}] = (-1)(-1)\frac{1}{3} + 0 + (1)(1)\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\Longrightarrow \quad \rho = \frac{\frac{2}{3}}{\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)}} = 1$$

2.2

$$\mu_X = 0 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$$

$$\mu_Y = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + 0 = 1$$

$$E[\{X-\mu_X\}^2] = \frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$E[\{Y-\mu_Y\}^2] = \frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$E[\{X-\mu_X\}\{Y-\mu_Y\}] = (-1)(1)\frac{1}{3} + 0 + (1)(-1)\frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$$

$$\rho = \frac{-\frac{2}{3}}{\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)}} = -1$$

2.3 $$\mu_X = 0 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$$

$$\mu_Y = (0)\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) + (1)\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$E[\{X-\mu_X\}^2] = \frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$E[\{Y-\mu_y\}^2] = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) + \frac{4}{9}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9}$$

$$E[\{X-\mu_X\}\{Y-\mu_Y\}] = (-1)\left(-\frac{1}{3}\right)\frac{1}{3} + (0)\left(\frac{2}{3}\right)\frac{1}{3} + (1)\left(-\frac{1}{3}\right)\frac{1}{3} = 0$$

$$\rho = 0$$

3. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันน่าจะเป็นร่วมกำหนดไว้โดย

(x, y)	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)
f(x, y)	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{4}{15}$

จงคำนวณค่า ส.ป.ส. สหสัมพันธ์ระหว่าง X กับ Y

$$\mu_X = (1)\left(\frac{2}{15} + \frac{4}{15} + \frac{3}{15}\right) + (2)\left(\frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{4}{15}\right) = \frac{21}{15} = \frac{7}{5}$$

$$\mu_Y = (1)\left(\frac{2}{15} + \frac{1}{15}\right) + (2)\left(\frac{4}{15} + \frac{1}{15}\right) + (3)\left(\frac{3}{15} + \frac{4}{15}\right) = \frac{34}{15}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{9}{15} + (2)^2\left(\frac{6}{15}\right) - \left(\frac{21}{15}\right)^2 = \frac{6}{25}$$

$$\mathrm{Var}(Y) = \frac{3}{15} + (2)^2\frac{5}{15} + (3)^2\left(\frac{7}{15}\right) - \left(\frac{34}{15}\right)^2 = \frac{134}{225}$$

$$\text{Cov}(X, Y) = \frac{2}{15} + 2\left(\frac{4}{15}\right) + 3\left(\frac{3}{15}\right) + 2\left(\frac{1}{15}\right) + 4\left(\frac{1}{15}\right) + 6\left(\frac{4}{15}\right) - \frac{7}{5}\left(\frac{34}{15}\right)$$

$$= \frac{7}{75}$$

$$\longrightarrow \qquad \rho = \frac{\frac{7}{75}}{\sqrt{\left(\frac{6}{25}\right)\left(\frac{134}{225}\right)}} = 0.247$$

4. หาก $E(X^2)$ และ $E(Y^2)$ สามารถหาค่าได้ แล้วค่าของ $E[(X+Y)^2]$ จะสามารถหาได้ด้วย จงแสดงว่า

4.1 $E[(X+Y)^2] \leqslant 2E(X^2) + 2E(Y^2)$

4.2 $E[(tX+Y)^2] = t^2E(X^2) + 2tE(XY) + E(Y^2)$

สำหรับค่าจริงใด ๆ ของ t

4.3 อาศัยผลที่ได้จาก (4.2) ถ้า

$E[(tX+Y)^2] \geqslant 0$ แล้ว $[E(XY)]^2 \leqslant E(X^2)E(Y^2)$

เฉลย

4.1 $$E[(X+Y)^2] = E[X^2 + 2XY + Y^2]$$

$$= E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2)$$

แต่ $$E[(X+Y)^2] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x+y)^2 f(x, y)\,dxdy \geqslant 0$$

ดังนั้น $E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) \geqslant 0$

$$E(X^2) + E(Y^2) \geqslant 2E(XY)$$

$$2E(X^2) + 2E(Y^2) \geqslant E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2)$$

นั่นคือ $$E[(X+Y)^2] \leqslant 2E(X^2) + 2E(Y^2)$$

4.2 $$E[(tX+Y)^2] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(t^2x^2 + 2txy + y^2)f(x, y)\,dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}t^2x^2 f(x, y)\,dxdy + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}2txyf(x, y)\,dxdy + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}y^2 f(x, y)\,dxdy$$

$$= t^2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x, y)\,dxdy + 2t\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf(x, y)\,dxdy + E(Y^2)$$

$$= t^2E(X^2) + 2tE(XY) + E(Y^2)$$

4.3 $E[(tX+Y)^2] \geqslant 0$

$$t^2E(X^2) + 2tE(XY) + E(Y^2) \geqslant 0$$

สำหรับค่าจริงของ t ที่ทำให้ฟังก์ชันนั้นมากกว่าหรือเท่ากับ 0 เราจะได้

$$\{2E(XY)\}^2 - 4E(X^2)E(Y^2) \leqslant 0$$

$$4\{E(XY)\}^2 \leqslant 4E(X^2)E(Y^2)$$

$$\{E(XY)\}^2 \leqslant E(X^2)E(Y^2)$$

5. ฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของตัวแปรเชิงสุ่ม X และ Y กำหนดไว้โดย

$$f(x, y) = 6xy(2-x-y), \quad 0 \leqslant x, y \leqslant 1$$
$$= 0 \quad , \text{ อื่น ๆ}$$

จงคำนวณค่าของ

5.1 $E(X^2Y^2+XY+1)$

5.2 $Cov(X, Y)$

5.3 σ_{XY}

$$E(X) = \int_0^1\int_0^1 6x^2y(2-x-y)dxdy$$

$$= 6\int_0^1 y\left[2\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4} - \frac{1}{3}y\right]dy$$

$$= 6\left[\frac{5}{12}\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{7}{12} = E(Y)$$

$$E(X^2) = \int_0^1\int_0^1 6x^3y(2-x-y)dxdy$$

$$= 6\int_0^1 y\left[2\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{5} - \frac{1}{4}y\right]dy$$

$$= 6\left[\frac{3}{10}\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{2}{5} = E(Y^2)$$

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{2}{5}-\left(\frac{7}{12}\right)^2 = \frac{43}{720} = \mathrm{Var}(Y)$$

$$E(XY) = \int_0^1\int_0^1 6x^2y^2(2-x-y)dxdy$$

$$= 6\int_0^1 y^2\left[2\left(\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}y\right]dy$$

$$= 6\left[\frac{5}{12}\left(\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)\right] = \frac{1}{3}$$

$$E(X^2Y^2) = \int_0^1\int_0^1 6x^3y^3(2-x-y)dxdy$$

$$= 6\left[\frac{3}{10}\left(\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}\right)\right] = \frac{3}{20}$$

5.1 $E(X^2Y^2+XY+1) = E(X^2Y^2)+E(XY)+1$

$$= \frac{3}{20}+\frac{1}{3}+1 = \frac{89}{60}$$

5.2 $\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \frac{1}{3}-\left(\frac{7}{12}\right)\left(\frac{7}{12}\right) = -\frac{1}{144}$$

5.3 $\rho = \dfrac{-\frac{1}{144}}{\sqrt{\left(\frac{43}{720}\right)\left(\frac{43}{720}\right)}} = -\dfrac{5}{43}$

6. $f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X และ Y ซึ่งกำหนดไว้โดย

$$f(x, y) = \frac{1}{8}(x+y), \quad 0 \leqslant x, y \leqslant 2$$

$$= 0 \qquad , \text{ อื่น ๆ}$$

จงคำนวณค่าของ $E(X^2+3XY-Y^2)$ และ $\mathrm{Var}(3X+2Y)$

$$E(X) = \int_0^2\int_0^2 \frac{x}{8}(x+y)dxdy$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^2\left(\frac{2^3}{3}+\frac{2^2}{2}y\right)dy$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{8}{3}(2)+2^2\right] = \frac{7}{6} = E(Y)$$

$$E(X^2) = \int_0^2\int_0^2 \frac{x^2}{8}(x+y)dxdy$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^2\left(\frac{2^4}{4}+\frac{2^3}{3}y\right)dy$$

$$= \frac{1}{8}\left[4(2)+\frac{4}{3}(2^2)\right] = \frac{5}{3} = E(Y^2)$$

$$Var(X) = \frac{5}{3}-\left(\frac{7}{6}\right)^2 = \frac{11}{36} = Var(Y)$$

$$E(XY) = \int_0^2\int_0^2 \frac{xy}{8}(x+y)dxdy$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{y}{3}+\frac{y^2}{4}\right)dy$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{2^2}{2}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{2^3}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

$$Cov(X, Y) = \frac{4}{3}-\left(\frac{7}{6}\right)\left(\frac{7}{6}\right) = -\frac{1}{36}$$

$$E(X^2+3XY-Y^2) = E(X^2)+3E(XY)-E(Y^2)$$

$$E(X^2+3XY-Y^2) = \frac{5}{3}+3\left(\frac{4}{3}\right)-\frac{5}{3} = 4$$

$$Var(3X+2Y) = 9\ Var(X)+4\ Var(Y)+12\ Cov(X, Y)$$

$$= 9\left(\frac{11}{36}\right)+4\left(\frac{11}{36}\right)+12\left(-\frac{1}{36}\right) = \frac{131}{36}$$

7. กำหนด $f(x, y) = 21x^2y^3,\ 0 < x < y < 1$

$= 0$, อื่น ๆ

เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X และ Y จงคำนวณค่าของ

7.1 $E(10X+3Y-7)$

7.2 $Cov(X-Y,\ X+Y)$

7.3 $Var(4X-3Y)$

7.4 สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ระหว่าง X กับ Y

$$E(X) = \int_0^1\int_0^y 21x^3y^3\,dxdy$$

$$= \int_0^1 21\left(\frac{y^4}{4}\right)y^3dy = \frac{21}{4}\left(\frac{1^8}{8}\right) = \frac{21}{32}$$

$$E(X^2) = \int_0^1\int_0^y 21x^4y^3\,dxdy$$

$$= \int_0^1 21\left(\frac{y^5}{5}\right)y^3dy = \frac{21}{5}\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{7}{15}$$

$$Var(X) = \frac{7}{15} - \left(\frac{21}{32}\right)^2 = \frac{553}{15360}$$

$$E(Y) = \int_0^1\int_0^y 21x^2y^4\,dxdy$$

$$= \int_0^1 21\left(\frac{y^3}{3}\right)y^4dy = 7\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{7}{8}$$

$$E(Y^2) = \int_0^1\int_0^y 21x^2y^5\,dxdy$$

$$= \int_0^1 7y^8dy = \frac{7}{9}$$

$$Var(Y) = \frac{7}{9} - \left(\frac{7}{8}\right)^2 = \frac{7}{576}$$

$$E(XY) = \int_0^1\int_0^y 21x^3y^4\,dxdy$$

$$= \int_0^1 \frac{21}{4}y^8dy = \frac{21}{4}\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{7}{12}$$

$$Cov(X, Y) = \frac{7}{12} - \left(\frac{21}{32}\right)\left(\frac{7}{8}\right) = \frac{7}{768}$$

7.1 $E(10X+3Y-7) = 10\left(\frac{21}{32}\right)+3\left(\frac{7}{8}\right)-7 = \frac{35}{16}$

7.2 $Cov(X-Y,\ X+Y) = E[(X-Y)(X+Y)]-E[X-Y]E[X+Y]$

$$= E[X^2-Y^2]-\{E(X)-E(Y)\}\{E(X)+E(Y)\}$$

$$= E(X^2)-E(Y^2)-\{E(X)\}^2+\{E(Y)\}^2$$

$$= Var(X) - Var(Y)$$

$$\frac{553}{15360} \quad \frac{7}{576} \quad - \quad \frac{1099}{46080}$$

7.3 $Var(4X-3Y) = 16\left(\frac{553}{15360}\right)+9\left(\frac{7}{576}\right)-24\left(\frac{7}{768}\right) = \frac{7}{15}$

7.4 $$\rho = \frac{\frac{7}{768}}{\sqrt{\left(\frac{553}{15360}\right)\left(\frac{7}{576}\right)}} = \sqrt{\frac{15}{79}}$$

8. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มี $E(X) = E(Y)$ และ $E(X^2) = E(Y^2)$ จงแสดงว่า $Cov(X-Y,\ X+Y) = 0$

$$Cov(X-Y,\ X+Y) = E[(X-Y)(X+Y)]-\{E(X-Y)\}\{E(X+Y)\}$$

$$= E[X^2-Y^2]-\{E(X)-E(Y)\}\{E(X)+E(Y)\}$$

$$= E(X^2)-E(Y^2)-0 \qquad (\because E(X) = E(Y))$$

$$= 0 \qquad (\because E(X^2) = E(Y^2))$$

9. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่ $Var(X+Y) = 13$ และ $Var(X-Y) = 5$ จงหา

9.1 ความแปรปรวนร่วมระหว่าง 4X กับ Y

9.2 สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ระหว่าง X+Y กับ X ในเมื่อ $Var(X) = 4$

$$Var(X+Y) = Var(X)+Var(Y)+2Cov(X,\ Y) = 13 \qquad \text{..........(1)}$$

$$Var(X-Y) = Var(X)+Var(Y)-2Cov(X,\ Y) = 5 \qquad \text{..........(2)}$$

$\{(1)+(2)\}\div 2,\ Var(X)+Var(Y) = 9$

$\{(1)-(2)\}\div 4,\qquad Cov(X,\ Y) = 2$

9.1 $Cov(4X,\ Y) = 4\ Cov(X,\ Y)$

$$= 4(2) \qquad = 8$$

9.2

$$\rho_{(X+Y)X} = \frac{Cov(X+Y,\ X)}{\sqrt{Var(X+Y)\ Var(X)}}$$

$$= \frac{E(X^2+XY)\quad [E(X)+E(Y)\}E(X)}{\sqrt{(13)(4)}}$$

$$= \frac{E(X^2)-\{E(X)\}^2+E(XY)-E(X)E(Y)}{2\sqrt{13}}$$

$$= \frac{4+2}{2\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$$

10. $X_1, X_2, \ldots, X_5$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มี $E(X_i) = 3$, $Var(X_i) = 5$ และ $Cov(X_i, X_j) = 2$, $i \neq j$ จงหาค่าของ E(Y), a:, σ_{YX_i} ในเมื่อ $Y = \sum_{i=1}^{5} Xi$

$$E(Y) = E\left[\sum_{i=1}^{5} X_i\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{5} E(X_i) = \sum_{i=1}^{5} 3 = 15$$

$$\sigma_Y^2 = Var\left[\sum_{i=1}^{5} X_i\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{5} Var(X_i) + 2\sum_{i<j} Cov(X_i,\ X_j)$$

$$= 5(5)+2\binom{5}{2}2 = 65$$

$$\sigma_{YX_i} = E\left[\left(\sum_{j=1}^{5} X_i\right)\right] - E\left[\sum_{j=1}^{5} X_j\right]E(X_i)$$

$$= \{E(X_i^2)+4E(X_iX_j)] - \{E(X_i)\}^2 - 4E(X_i)E(X_j)$$

$$= Var(X_i) + 4\ Cov(X_i,\ X_j)$$

$$= 5+4(2) = 13$$

11. X_1, X_2 และ X_3 เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีความแปรปรวนของ $X_i = \sigma_i^2$ และความแปรปรวนร่วมระหว่าง X_i กับ $X_j = \sigma_{ij}$ จงคำนวณค่าของสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ระหว่าง

11.1 $X_1 + X_2$ กับ $X_1 - X_2$

11.2 x,+x, กับ x,+x,

11.1 $Cov(X_1+X_2,\ X,-X,) = E[(X_1+X_2)(X_1-X_2)] - E(X_1+X_2)E(X_1-X_2)$

$$= E[X_1^2 - X_2^2] - \{E(X_1)+E(X_2)\}\{E(X_1)-E(X_2)\}$$

$$= E(X_1^2) - E(X_2^2) - \{E(X_1)\}^2 + \{E(X_2)\}^2$$

$$= E(X_1^2) - \{E(X_1)\}^2 - [E(X_2^2) - \{E(X_2)\}^2]$$

$$= \sigma_1^2 - \sigma_2^2$$

$$Var(X_1 + X_2) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_{12}$$

$$Var(X_1 \quad X_2) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}$$

$$\rho_{(X_1+X_2)(X_1-X_2)} = \frac{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2+2\sigma_{12})(\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\sigma_{12})}$$

ส.ป.ส. สหสัมพันธ์ระหว่าง X_1+X_2 กับ X_1-X_2 $= \dfrac{\sigma_1^2-\sigma_2^2}{\sqrt{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)^2 - 4(\sigma_{12})^2}}$

11.2 $Cov(X_1 + X,,\ X_2 + X,) = E[(X, + X,)(X, +X_3)] - E(X_1 + X_2)E(X_2 + X_3)$

$$= E[X_1X_2 + X_1X_3 + X_2X_3 + X_2^2] - \{E(X_1)+E(X_2)\}\{E(X_2)+E(X_3)\}$$

$$Cov(X_1+X_2, X_2+X_3) = E(X_1X_2) + E(X_1X_3) + E(X_2X_3) + E(X_2^2)$$

$$- \{E(X_1)E(X_2) + E(X_1)E(X_3) + E(X_2)E(X_3) + \{E(X_2)\}^2$$

$$= \sigma_{12} + \sigma_{13} + \sigma_{23} + \sigma_2^2$$

$$Var(X_1+X_2) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_{12}$$

$$Var(X_2 + X_3) = \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \sigma_{23}$$

ส.ป.ส. สหสัมพันธ์ระหว่าง X_1+X_2 กับ X_2+X_3 จะเท่ากับ $\dfrac{\sigma_{12}+\sigma_{13}+\sigma_{23}+\sigma_2^2}{\sqrt{(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_{12})(\sigma_2^2+\sigma_3^2+\sigma_{23})}}$

12. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน และมีฟังก์ชันการแจกแจงรูปเดียวกันคือ

$$f(t) = 1,\ 1 < t < 2$$

นอกนั้นเป็น 0 จงแสดงให้เห็นจริงว่า

12.1 $E\left(\dfrac{X}{Y}\right) = \dfrac{3 \ln 2}{2}$

12.2 $\rho_{X(X-Y)} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

เฉลย

X และ Y เป็นอิสระต่อกัน และมีฟังก์ชันการแจกแจงรูปเดียวกัน ดังนั้น

$$E(X) = E(Y) \text{ และ } Var(X) = Var(Y)$$

$$E\left(\frac{X}{Y}\right) = E(X)\ E\left(\frac{1}{Y}\right)$$

12.1 $E(X) = \int_1^2 x\,dx$

$= \frac{x^2}{2}\Big|_1^2$

$= \frac{3}{2} \qquad = E(Y)$

$E\left(\frac{1}{Y}\right) = \int_1^2 \frac{1}{y}\,dy$

$= \ln y \Big|_1^2$

$= \ln 2$

$E\left(\frac{X}{Y}\right) = \frac{3}{2} \cdot \ln 2$

12.2 $E(X^2) = \int_1^2 x^2\,dx$

$= \frac{8-1}{3} = \frac{7}{3}$

$Var(X) = \frac{7}{3} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} = Var(Y)$

X และ Y เป็นอิสระต่อกัน ดังนั้น $Cov(X, Y) = 0$

$Var(X-Y) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$

$Cov(X, X-Y) = E[X(X-Y)] - E(X)E(X-Y)$

$= E[X^2 - XY] - E(X)[E(X) - E(Y)]$

$= E(X^2) - E(XY) - [E(X)]^2 + E(X)E(Y)$

$= Var(X), \ [E(XY) - E(X)E(Y) = 0]$

$= \frac{1}{12}$

$$\rho_{X(X-Y)} = \frac{\frac{1}{12}}{\sqrt{\left(\frac{1}{12}\right)\left(\frac{1}{6}\right)}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

13. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันน่าจะเป็นร่วม f(x, y) กำหนดไว้โดย f(x, y)

X \ Y	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$
2	$\frac{3}{16}$	0	$\frac{1}{16}$

จงแสดงให้เห็นจริงว่า Cov(X, Y) = 0 แต่ X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่พึ่งพิงกัน

$$E(X) = \sum_{y=0}^{2}\sum_{x=0}^{2} xf(x, y)$$

$$= 0+\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{8}\right)+2\left(\frac{3}{16}+\frac{1}{16}\right) = \frac{3}{4}$$

$$E(Y) = \sum_{y=0}^{2}\sum_{x=0}^{2} yf(x, y)$$

$$= 0+\left(\frac{3}{16}+\frac{1}{16}\right)+2\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\right) = \frac{3}{4}$$

$$E(XY) = \sum_{y=0}^{2}\sum_{x=0}^{2} xyf(x, y)$$

$$= \frac{1}{16}+2\left(\frac{1}{8}\right)+4\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{9}{16}$$

$$\text{Cov}(X, Y) = \frac{9}{16}-\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right) = 0$$

หาฟังก์ชันหนาแน่นทางเดียวของ X และของ Y จะได้

$$g(x) = \frac{1}{4}+\frac{3}{16}+\frac{1}{16} = \frac{1}{2}, \quad x = 0$$

$$= \frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{8} = \frac{1}{4}, \quad x = 1$$

$$= \frac{3}{16}+\frac{1}{16} = \frac{1}{4}, \quad x = 2$$

และ

$$h(y) = \frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{3}{16} = \frac{1}{2}, \quad y = 0$$

$$= \frac{3}{16}+\frac{1}{16} = \frac{1}{4}, \quad y = 1$$

$$= \frac{1}{16}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16} = \frac{1}{4}, \quad y = 2$$

หาค่า g(x)h(y) จะได้

x \ y	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

จะเห็นได้ว่า $f(x, y) \neq g(x)h(y)$ สำหรับบางค่า x และ y
แสดงว่า X และ Y ไม่เป็นอิสระต่อกัน
นั่นคือ Cov(X, Y) = 0 แต่ X และ Y เป็นตัวแปรที่พึ่งพิงกัน

14. กำหนด $f(x, y) = \frac{1}{\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$, $(x, y) \in A_1 \cup A_2 \cup A_3$

นอกนั้นเป็น 0 เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X กับ Y จงแสดงให้เห็นจริงว่า Cov(X, Y) เท่ากับ 0 แต่ X กับ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่พึ่งพิงกัน

ในเมื่อ $A_1 = \{(x, y) : x \leqslant -c, y > 0\}$

$$A_2 = \{(x, y) : x \geqslant c, y > 0\}$$
$$A_3 = \{(x, y) : -c < x < c, y < 0\}$$

และ $P(X \leqslant -c) = P(X \geqslant c) = \frac{1}{2}P(X \geqslant 0)$

$$P(X \geqslant 0) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$g(x) = \begin{cases} \int_0^\infty \frac{1}{\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy, & |x| \geqslant c \\ \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy, & -c < x < c \end{cases}$$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad -\infty < x < \infty$$

$$h(y) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{-c} \frac{1}{\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dx + \int_c^\infty \frac{1}{\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dx, & y > 0 \\ \int_{-c}^{c} \frac{1}{\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dx, & y < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \right), & y > 0 \\ \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \right), & y < 0 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \qquad h(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}, \quad -\infty < y < \infty$$

$$g(x)h(y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}, \quad -\infty < x,\ y < \infty$$

$$\neq f(x, y)$$

แสดงว่า X กับ Y ไม่เป็นอิสระต่อกัน

$$E(XY) = \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{-c} \frac{xy}{\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dxdy + \int_0^{\infty}\int_c^{\infty} \frac{xy}{\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dxdy$$

$$+ \int_{-\infty}^{0}\int_{-c}^{c} \frac{xy}{\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dxdy$$

$$= \frac{1}{\pi}(-e^{-\frac{1}{c}}) + \frac{1}{\pi} e^{-\frac{c}{2}} + 0 = 0$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = 0$$

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$$

แสดงว่า Cov(X, Y) = 0 แต่ X กับ Y เป็นตัวแปรที่พึ่งพิงกัน

15. X, Y, Z เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน และมีความแปรปรวนเท่ากัน กำหนด $U = X+Z$ และ $V = Y+Z$

จงแสดงให้เห็นจริงว่า

15.1 $\rho_{UZ} = \rho_{VZ} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

15.2 $\rho_{UV} = \frac{1}{2}$

X, Y, Z เป็นอิสระต่อกัน และมีความแปรปรวนเท่ากัน ดังนั้น

$$E(XY) = E(X)E(Y),\ E(XZ) = E(X)E(Z),\ E(YZ) = E(Y)E(Z)$$

$$Var(X + Z) = Var(X)+Var(Z) = 2\sigma^2 = Var(U)$$

$$Var(Y + Z) = Var(Y)+ Var(Z) = 2\sigma^2 = Var(V)$$

15.1 $Cov(U, Z) = E[(X+Z)Z]-E(X+Z)E(Z)$

$$= E[XZ + Z^2] - \{E(X) + E(Z)\}E(Z)$$

$$= E(XZ) + E(Z^2) - E(X)E(Z) - \{E(Z)\}^2$$

$$= Var(Z) = \sigma^2$$

$$\rho_{UZ} = \frac{Cov(U, Z)}{\sqrt{Var(U)\ Var(Z)}} = \frac{\sigma^2}{\sqrt{(2\sigma^2)\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$Cov(V, Z) = E[(Y + Z)Z] \quad E(Y + Z)E(Z)$$

$$= E[YZ + Z^2] - (E(Y) + E(Z)\}E(Z)$$

$$= E(YZ) + E(Z^2) - E(Y)E(Z) - \{E(Z)\}^2$$

$$= Var(Z) = \sigma^2$$

$$\rho_{VZ} = \frac{Cov(V, Z)}{\sqrt{Var(V)\ Var(Z)}} = \frac{\sigma^2}{\sqrt{(2\sigma^2)\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

แสดงว่า $\rho_{UZ} = \rho_{VZ} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$Cov(U, V) = E[(X + Z)(Y + Z)] -E(X + Z)E(Y + Z)$$

$$= E[XY + XZ + YZ + Z'] - [E(X) + E(Z)]\{E(Y) + E(Z)]$$

$$= E(XY) + E(XZ) + E(YZ) + E(Z^2) - E(X)E(Y) - E(X)E(Z) - E(Y)E(Z) - [E(Z)\}^2$$

$$= Var(Z) = \sigma^2$$

$$\rho_{UV} = \frac{Cor(U, V)}{\sqrt{Var(U)\ Var(V)}} = \frac{\sigma^2}{\sqrt{(2\sigma^2)(2\sigma^2)}} = \frac{1}{2}$$

5.3 ค่าคาดหมายภายใต้เงื่อนไข (CONDITIONAL EXPECTATION)

นิยาม $f(y|x)$ และ $F(y|x)$ เป็นฟังก์ชันการแจกแจงและฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ Y ภายใต้เงื่อนไขว่า $X = x$ ค่าคาดหมายและความแปรปรวนของ Y ภายใต้เงื่อนไขว่า $X = x$ จะกำหนดได้โดย

$$E[Y|X = x] = \begin{cases} \sum\limits_{\forall y} yf(y|x) \\ \int_{-\infty}^{\infty} yf(y|x)dy \\ \int_{-\infty}^{\infty} ydF(y|x) \end{cases}$$

เป็นค่าคาดหมายของ $Y|X = x$ เขียนแทนด้วย $\mu_{Y|x}$ และ

$$Var(Y|X = x) = E[(Y-\mu_{Y|x})^2] = \begin{cases} \sum\limits_{\forall y} (y-\mu_{Y|x})^2 f(y|x) \\ \int_{-\infty}^{\infty} (y-\mu_{Y|x})^2 f(y|x)dy \\ \int_{-\infty}^{\infty} (y-\mu_{Y|x})^2 dF(y|x) \end{cases}$$

เป็นความแปรปรวนของ $Y|X = x$ เขียนแทนด้วย $\sigma^2_{Y|x}$
เมื่อเรากระจายค่า $(Y = \mu_{Y|x})^2$ เราจะได้

$$\sigma^2_{Y|x} = Var[Y|X = x] = E[Y^2|X = x] - (\mu_{Y|x})^2$$

ในเมื่อ

$$E(Y^2|X = x) = \begin{cases} \sum\limits_{\forall y} y^2 f(y|x) \\ \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f(y|x)dy \end{cases}$$

ทำนองเดียวกันเมื่อมีตัวแปรเชิงสุ่ม X ภายใต้เงื่อนไขว่า $Y = y$, $X|Y = y$, ซึ่งมีฟังก์ชันการแจกแจง $g(x|y)$ เรานิยามค่าคาดหมายและความแปรปรวนของ $X|Y = y$ โดย

$$\mu_{X|y} = E(X|Y = y) = \begin{cases} \sum\limits_{\forall y} xg(x|y) \\ \int_{-\infty}^{\infty} xg(x|y)dx \\ \int_{-\infty}^{\infty} xdF(x|y) \end{cases}$$

$$\sigma^2_{X|y} = Var(X|Y = y) = E(X^2|Y = y) - (\mu_{X|y})^2$$

จึงกล่าวได้ว่า ค่าคาดหมายและความแปรปรวนภายใต้เงื่อนไข ก็คือค่าคาดหมายและความแปรปรวนที่คำนวณเกี่ยวกับการแจกแจงภายใต้เงื่อนไข

ค่าคาดหมายภายใต้เงื่อนไข อาจเป็นค่าคงที่ ซึ่งแสดงว่า ตัวแปรแต่ละตัวพึ่งพิงกัน แต่ไม่มีสหสัมพันธ์กัน หรืออาจมีค่าเป็นฟังก์ชันเชิงเส้นตรงของตัวกำหนดให้ หรือเป็นฟังก์ชันที่ไม่เป็นเส้นตรงของตัวที่กำหนดให้ก็ได้

ตัวอย่างที่แสดงว่า ค่าคาดหมายภายใต้เงื่อนไขเป็นค่าคงที่ ทุกค่าของตัวที่กำหนดให้

ตัวอย่าง X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่พึ่งพิงกัน และมีฟังก์ชันหนาแน่นร่วม

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{2}e^{-y}, \quad y > |x|, \ -\infty < x < \infty \\ &= 0 \quad , \text{ อื่น ๆ} \end{aligned}$$

จงแสดงว่า ค่าคาดหมายภายใต้เงื่อนไขของ X กำหนดว่า $Y = y$ $0 < y < \infty$ จะมีค่าคงที่เสมอ

วิธีทำ

$$\begin{aligned} h(y) &= \int_{-y}^{y} \frac{1}{2}e^{-y}dx, \quad 0 < y < \infty \\ &= \frac{1}{2}e^{-y}(y + y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(y) &= ye^{-y} \ , \ 0 < y < \infty \\ &= 0 \quad , \text{ อื่น ๆ} \end{aligned}$$

$$f(x|y) = \frac{f(x,\ y)}{h(y)} = \frac{\frac{1}{2}e^{-y}}{ye^{-y}}$$

$$f(x|y) = \frac{1}{2y} \quad , \quad -y < x < y,\ 0 < y < \infty$$

$$= 0 \quad , \quad \text{อื่น ๆ}$$

$$E|X|y| = \int_{-y}^{y} \frac{x}{2y}dx = \frac{1}{4y}x^2 \Big|_{x=-y}^{y} = 0$$

แสดงว่าค่าคาดหมายภายใต้เงื่อนไขของ X กำหนด Y = y จะมีค่าคงที่ ทุกค่า $0 < y < \infty$

โดยทั่วไป ค่าคาดหมายภายใต้เงื่อนไขมักจะเป็นฟังก์ชันของตัวที่กำหนดให้ และที่น่าสนใจก็คือกรณีของฟังก์ชันเชิงเส้นตรงซึ่งมีนิยามและทฤษฎี ดังต่อไปนี้

นิยาม X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีการแจกแจงร่วม เรากล่าวว่า Y มีการถดถอยเชิงเส้นบน X ถ้ากราฟแสดงการถดถอยของ Y บน X เป็นกราฟเส้นตรง กล่าวคือ

$$E(Y|X = x) = \alpha + \beta X$$

ทุกค่าคงที่ α และ β

ค่าคงที่ α และ β นี้เรียกว่า ส.ป.ส. การถดถอยของ Y บน X ซึ่งเป็นพารามีเตอร์ที่ชี้บอกอย่างคร่าว ๆ ว่า Y ขึ้นอยู่กับ X อย่างไร ตัวอย่างเช่น หาก $\beta > 1$ แล้วสำหรับค่า X โต ๆ เราคาดว่า Y จะมีค่าโต ๆ โดยเฉลี่ยด้วย ในตอนต้นเราได้กล่าวถึง ส.ป.ส. สหสัมพันธ์ ρ ว่าเป็นตัววัดขนาดและชี้ให้เห็นว่า Y กับ X จะมีความสัมพันธ์กันอย่างไร นั่นก็หมายความว่า ส.ป.ส. การถดถอย และ ส.ป.ส. สหสัมพันธ์ย่อมมีความสัมพันธ์กันอย่างใกล้ชิด

ทฤษฎี 5.14 กำหนด X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีการแจกแจงร่วม ถ้าเส้นถดถอยของ Y บน X คือ $E(Y|X = x) = \alpha + \beta X$ แล้ว

$$\alpha = \mu_Y + \beta\mu_X$$

$$\beta = \left(\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\right)\rho$$

ในเมื่อ $\mu_X, \mu_Y, \sigma_X > 0,\ \sigma_Y > 0$ และ ρ เป็นค่าเฉลี่ย ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และ ส.ป.ส. สหสัมพันธ์ของ X และ Y ตามลำดับ

บทแทรก ตัวแปรเชิงสุ่ม X และ Y มี μ_X, μ_Y, σ_X, σ_Y และ ρ เป็นค่าเฉลี่ย ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และ ส.ป.ส. สหสัมพันธ์ตามลำดับ ถ้า Y มีการถดถอยเชิงเส้นบน X แล้ว เส้นถดถอยจะผ่านจุด (μ_X, μ_Y) และมีความชัน (slope) เท่ากับ $\left(\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\right)\rho$

ทฤษฎีที่ 5.15 กำหนดตัวแปรเชิงสุ่มที่มีการแจกแจงร่วม X และ Y หาก Y มีการถดถอยบน X กล่าวคือ

$$E(Y|X = x) = \alpha + \beta X$$

และค่าของความแปรปรวนภายใต้เงื่อนไข $Var(Y|X = x) = \sigma^2$ ทุก ๆ ค่าของ x ใน เมื่อ σ^2 เป็นค่าคงที่ แล้ว

$$\sigma_Y^2 = \beta^2\sigma_X^2 + \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{(1-\rho^2)}$$

หาก X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน การกำหนดค่าของ X และ Y ก็ดี จะไม่มีผลกระทบต่อค่าคาดหมายภายใต้เงื่อนไขของตัวแปรที่เหลือ กล่าวคือ ค่าคาดหมายภายใต้เงื่อนไขของ Y กำหนดว่า X = x จะไม่ขึ้นกับค่าของ x แต่จะมีค่าเดียวกันกับค่าคาดหมายของ Y นั่นคือ

$$E(Y|X = x) = E(Y)$$

ทำนองเดียวกัน ค่าความแปรปรวนภายใต้เงื่อนไขของ Y กำหนดว่า X = x จะไม่ขึ้นกับค่าของ x แต่จะเป็นค่าเดียวกันกับค่าความแปรปรวนของ Y กล่าวคือ

$$Var(Y|X = x) = Var(Y)$$

เช่นเดียวกัน เมื่อ X กับ Y เป็นอิสระต่อกัน จะเห็นว่า

$$E(X|Y = y) = E(X)$$

และ $$Var(X|Y = y) = Var(X)$$

อย่างไรก็ตาม การที่เรามี $E(Y|X = x) = E(Y)$ หรือ $E(X|Y = y) = E(X)$ ก็ไม่ได้หมายความว่า X และ Y จะเป็นอิระต่อกัน

แบบฝึกหัดที่ 5.3

1. กำหนด $h(y|x) = \frac{1}{(10-x)}$, $y = x, x+1, \ldots, 9;\ x = 0, 1, 2, \ldots, 9$

   เป็นฟังก์ชันภายใต้เงื่อนไขของ Y เมื่อ $X = x$, $x = 0, 1, 2, \ldots, 9$ จงแสดงให้เห็นจริงว่า

$$E(Y|x) = \frac{(x+9)}{2}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, 9$$

เฉลย

$$E|Y|x| = \sum_{y=x}^{9} \frac{y}{10-x}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, 9$$

$$= \frac{1}{10-x} \sum_{k=0}^{9-x} (k+x)$$

$$\frac{1}{10-x}\left[\frac{10-x}{2}(0+9-x)+(10-x)x\right]$$

$$= \frac{1}{2}(9-x+2x) = \frac{x+9}{2}; \quad x = 0, 1, 2, \ldots, 9$$

2. $f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของตัวแปรเชิงสุ่ม X กับ Y ซึ่งกำหนดไว้โดย

$$f(x, y) = \frac{x}{5}(3x+y), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2$$

   นอกนั้นเป็น 0 จงหาค่าคาดหมายและความแปรปรวนภายใต้เงื่อนไขของ Y กำหนดว่า $X = x$, $0 < x < 1$

เฉลย

$$g(x) = \int_0^2 \frac{x}{3}(3x+y)dy, \quad 0 < x < 1$$

$$= x^2(2-0) + \frac{x}{3} \cdot \frac{2^2-0}{2} = \frac{2x}{3}(3x+1), \quad 0 < x < 1$$

$$f(y|x) = \frac{\frac{x}{3}(3x+y)}{\frac{2x}{3}(3x+1)}$$

$$= \frac{3x+y}{6x+2}, \quad 0 < y < 2, 0 < x < 1$$

$$= 0 \quad , \text{อื่น ๆ}$$

$$E[Y|x] = \int_0^2 y \frac{3x+y}{6x+2} dy \quad , \quad 0 < x < 1$$

$$= \frac{1}{6x+2}\left[3x\left(\frac{2^2}{2}\right) + \frac{2^3}{3}\right]$$

ค่าคาดหมายของ $Y|X = x = \dfrac{9x+4}{9x+3} \quad , \quad 0 < x < 1$

$$E[Y^2|x] = \int_0^2 y^2 \frac{3x+y}{6x+2} dy$$

$$= \frac{1}{6x+2}\left[3x\left(\frac{2^3}{3}\right) + \frac{2^4}{4}\right] = \frac{4x+2}{3x+1}, \quad 0 < x < 1$$

$$E[Y^2|x] - \{E[Y|x]\}^2 = \frac{4x+2}{3x+1} - \left(\frac{9x+4}{9x+3}\right)^2 = \frac{27x^2+18x+2}{(9x+3)^2}$$

ความแปรปรวนของ $Y|X = x = \dfrac{27x^2 + 18x+2}{81x^2+54x+9}, \quad 0 < x < 1$

3. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นร่วม f(x, y) ดังนี้

$$f(x, y) = \frac{3}{2}, \quad x^2 < y < 1, \quad 0 < x < 1$$

นอกนั้นเป็น 0 จงแสดงให้เห็นจริงว่า

3.21 $E(Y|x) = \dfrac{(1+x^2)}{2}, \ 0 < x < 1$

3.2 $E(X|y) = \dfrac{y}{2}, \ 0 < y < 1$

3.3 $Var(Y|x) = \dfrac{(1-2x^2+x^4)}{12}, \ 0 < x < 1$

3.4 $Var\left(X|Y = \dfrac{1}{9}\right) = \dfrac{1}{108}$

เฉลย

$$g(x) = \int_{x^2}^{1} \frac{3}{2} dy = \frac{3}{2}(1-x^2), \ 0 < x < 1$$

$\Longrightarrow \qquad f(y|x) = \_\_\_\_\_\_ \quad \_\_\_\_\_\_ \qquad x^2 < y < 1, \ 0 < x < 1$

อื่น ๆ

$$h(y) = \int_0^{\sqrt{y}} \frac{3}{2}\,dx = \frac{3\sqrt{y}}{2}, \quad 0 < y < 1$$

$$\longrightarrow \quad f(x|y) = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3\sqrt{y}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{y}}, \quad 0 < x < \sqrt{y},\ 0 < y < 1$$

$$= 0, \quad \text{อื่น ๆ}$$

3.1 $$E[Y|x] = \int_{x^2}^{1} y \frac{1}{1-x^2}\,dy, \quad 0 < x < 1$$

$$= \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{y^2}{2}\Big|_{y=x^2}^{1}$$

$$= \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1-x^4}{2} = \frac{1+x^2}{2}, \quad 0 < x < 1$$

3.2 $$E[X|y] = \int_0^{\sqrt{y}} x \frac{1}{\sqrt{y}}\,dx, \quad 0 < y < 1$$

$$= \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_{x=0}^{\sqrt{y}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \frac{y}{2} = \frac{\sqrt{y}}{2}, \quad 0 < y < 1$$

3.3 $$E[Y^2|x] = \int_{x^2}^{1} y^2 \frac{1}{1-x^2}\,dy, \quad 0 < x < 1$$

$$\frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{y^3}{3}\Big|_{y=x^2}^{1}$$

$$= \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1-x^6}{3} = \frac{1+x^2+x^4}{3}, \quad 0 < x < 1$$

$$E[Y^2|x] - \{E[Y|x]\}^2 = \frac{1+x^2+x^4}{3} - \left(\frac{1+x^2}{2}\right)^2$$

$$\mathrm{Var}|Y|x| = \frac{1}{12}|4+4x^2+4x^4-3(1+2x^2+x^4)|$$

$$= \frac{1}{12}(1-2x^2+x^4),\ 0 < x < 1$$

3.4 $E\left[X^2|Y=\frac{1}{9}\right] = \left(\int_0^{\sqrt{y}} x^2\frac{1}{\sqrt{y}}dx\right)\Big|_{y=\frac{1}{9}}$

$$= \frac{1}{\frac{1}{3}}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_{x=0}^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{27}$$

$$E\left[X^2|Y=\frac{1}{9}\right]-\left\{E\left[X|Y=\frac{1}{9}\right]\right\}^2 = \frac{1}{27}-\left(\frac{\sqrt{y}}{2}\Big|_{y=\frac{1}{9}}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Var}\left(X|Y=\frac{1}{9}\right) = \frac{1}{27}-\frac{1}{36} = \frac{1}{108}$$

4. กำหนด $f(x, y) = 6xy(2-x-y),\ 0 < x, y < 1$
นอกนั้นเป็น 0 เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นร่วม จงแสดงให้เห็นจริงว่า

4.1 $E(X|y) = \dfrac{5-4y}{8-6y},\ 0 < y < 1$

4.2 $E[E(XY|y)] = E(XY)$

$$h(y) = \int_0^1 6xy(2-x-y)dx,\ 0 < y < 1$$

$$= 6yx^2-2yx^3-3y^2x^2|_{x=0}^1$$

$$h(y) = 4y-3y^2,\ 0 < y < 1$$

$$\Rightarrow \quad f(x|y) = \frac{6xy(2-x-y)}{4y-3y^2} = \frac{6x(2-x-y)}{4-3y},\quad 0<x<1,\ 0<y<1$$

$$= 0, \quad \text{อื่น ๆ}$$

4.1 $E|X|y| = \displaystyle\int_0^1 x\frac{6x(2-x-y)}{4-3y}dx,\ 0 < y < 1$

$$= \frac{1}{4-3y}\left[4x^3-\frac{3x^4}{2}-2yx^3\right]_{x=0}^1$$

$$= \frac{1}{4-3y}\left[4-\frac{3}{2}-2y\right] = \frac{5-4y}{8-6y},\ 0 < y < 1$$

4.2 $$E(XY|y) = \int_0^1 xy\frac{6x(2-x-y)}{4-3y}dx$$

$$E[E(XY|y)] = \int_0^1 E(XY|y)(4y-3y^2)dy$$

$$= \int_0^1\int_0^1 xy\frac{6x(2-x-y)}{4-3y}(4y-3y^2)dxdy$$

$$E[E(XY|y)] = \int_0^1\int_0^1 xy[6xy(2-x-y)]dxdy = E(XY)$$

5. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบต่อเนื่อง (continuous r.v.'s) ที่มีค่าคาดหมายภายใต้เงื่อนไข $E(X|y)$ เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นของ y จงแสดงให้เห็นจริงว่า

5.1 $E(X|y) = \mu_1+\rho\cdot\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2)$

5.2 $E_Y[Var(X|y)] = \sigma_1^2(1-\rho^2)$

ในเมื่อ μ_1, μ_2, σ_1^2, σ_2^2 และ ρ เป็นค่าคาดหมาย ความแปรปรวนและ ส.ป.ส. สหสัมพันธ์ของ X กับ Y ตามลำดับ

จงตรวจสอบผลที่ได้จาก 5.1 และ 5.2 โดยใช้ฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X กับ Y ซึ่งกำหนดโดย

$$f(x, y) = \frac{e^{-\frac{x}{y}}e^{-y}}{y},\ 0 < x,\ y < \infty$$

นอกนั้นเป็น 0

a x $$E(X|y) = \alpha+\beta y \qquad \text{.........(I)}$$

จะได้ $$\int_{-\infty}^{\infty} xf(x|y)dx = \alpha+\beta y$$

เอา h(y) คูณทั้ง 2 ข้าง

$$\int_{-\infty}^{\infty} xf(x|\,y)h(y)dx = \alpha h(y) + \beta yh(y)$$

นั่นคือ $$\int_{-\infty}^{\infty} xf(x,\ y)dx \quad \alpha h(y) + \beta yh(y) \qquad \text{..........(2)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xf(x,\ y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha h(y)dy + \int_{-\infty}^{\infty} \beta yh(y)dy$$

$$E(X) = \alpha\int_{-\infty}^{\infty} h(y)dy + \beta\int_{-\infty}^{\infty} yh(y)dy = a + \beta E(Y)$$

$$\Longrightarrow \qquad \mu_1 = \alpha + \beta\mu_2$$

ดังนั้น $$\alpha = \mu_1 - \beta\mu_2$$

(2)คูณ y ทั้ง 2 ข้าง แล้ว integrate ตามค่า y จะได้

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,\ y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} |\alpha yh(y) + \beta y^2h(y)|dy$$

$$E(XY) = a\int_{-\infty}^{\infty} yh(y)dy + \beta\int_{-\infty}^{\infty} y^2h(y)dy$$

$$= \alpha E(Y) + \beta E(Y^2) \qquad \text{..........(3)}$$

แทนค่า α ใน (3) จะได้

$$E(XY) = (\mu_1 - \beta\mu_2)\mu_2 + \beta E(Y^2)$$

$$\frac{E(XY) - \mu_1\mu_2}{\sigma_1\sigma_2} = \frac{\beta|\,E(Y^2) - \mu_2^2\,|}{\sigma_1\sigma_2}$$

$$\Longrightarrow \qquad \rho = \frac{\beta\sigma_2^2}{\sigma_1\sigma_2}$$

หรือ $$\beta = \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$

แทนค่า α, β ใน (1) จะได้

$$E(X|y) = \left(\mu_1 - \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\mu_2\right) + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}y$$

$$\Longrightarrow \qquad E(X|y) = \mu_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y - \mu_2) \qquad \text{..........(5.1)}$$

$$\mathrm{Var}(X|y) = E[\{X - E(X|y)\}^2]$$

$$= E\left[\left\{X - \mu_1 - \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(Y - \mu_2)\right\}^2\right]$$

$$= E\left[X^2 + \mu_1^2 + \rho^2\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}(Y - \mu_2)^2 - 2X\mu_1 - 2X\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(Y - \mu_2) + 2\mu_1\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(Y - \mu_2)\right]$$

$$\mathrm{Var}(X|y) = E(X^2) + \mu_1^2 + \rho^2\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}E[(Y - \mu_2)^2] - 2\mu_1 E(X) - 2\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}[E(XY) - \mu_2 E(X)]$$

$$+ 2\mu_1\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\quad[E(Y) - \mu_2]$$

$$= E(X^2) + \mu_1^2 + \rho^2\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\cdot\sigma_2^2 - 2\mu_1^2 - 2\rho\sigma_1^2\frac{E(XY) - \mu_1\mu_2}{\sigma_1\sigma_2}$$

$$= \sigma_1^2 + \rho^2\sigma_1^2 - 2\rho^2\sigma_1^2$$

$$= \sigma_1^2(1 - \rho^2)$$

$$E_Y[\mathrm{Var}(X|y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\sigma_1^2(1 - \rho^2)h(y)dy$$

$$= \sigma_1^2(1 - \rho^2)\int_{-\infty}^{\infty}h(y)dy$$

$$= \sigma_1^2(1 - \rho^2) \qquad \text{..........(5.2)}$$

ถ้า $f(x, y) = \dfrac{e^{-\frac{x}{y}}e^{-y}}{y},\ 0 < x, y < \infty$

จะได้ $\mu_1 = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} x\dfrac{e^{-\frac{x}{y}}e^{-y}}{y}dxdy$

$$= \int_0^{\infty} ye^{-y}\int_0^{\infty}\frac{x}{y}e^{-\frac{x}{y}}d\frac{x}{y}dy$$

$$= \int_0^{\infty} ye^{-y}dy = 1$$

$$\mu_2 = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} y\frac{e^{-\frac{x}{y}}e^{-y}}{y}dx\ dy$$

$$= \int_0^\infty ye^{-y}\int_0^\infty e^{-\frac{x}{y}} d\frac{x}{y}\,dy$$

$$= \int_0^\infty ye^{-y}dy \;=\; 1$$

$$E(X^2) \;=\; \int\!\!\int x^2 \frac{e^{-\frac{x}{y}}e^{-y}}{y}dxdy$$

$$= \int_0^\infty y^2e^{-y}\int_0^\infty \left(\frac{x}{y}\right)^2 e^{-\frac{x}{y}} d\frac{x}{y}\,dy$$

$$= \int_0^\infty y^2e^{-y}(2)dy \;=\; 2(2) \;=\; 4$$

$$\Longrightarrow \qquad \sigma_1^2 \;=\; 4-1 \;=\; 3$$

$$E(Y^2) \;=\; \int_0^\infty y^2e^{-y}dy \;=\; 2$$

$$\Longrightarrow \qquad \sigma_2^2 \;=\; 2-1 \;=\; 1$$

$$E(XY) \;=\; \int_0^\infty y^2e^{-y}dy \;=\; 2$$

$$\sigma_{12} \;=\; 2\text{-}1 \;=\; 1$$

$$\Longrightarrow \qquad \rho \;=\; \frac{1}{\sqrt{(3)(1)}} \;=\; \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ดังนั้น $\mu_1+\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2) \;=\; 1+\frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{\sqrt{3}}{1}(y-1) \;=\; y$

และ $\sigma_1^2(1-\rho^2) \;=\; 3\left(1-\frac{1}{3}\right) \;=\; 2$

$$h(y) \;=\; \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{x}{y}}e^{-y}}{y}dx \;=\; e^{-y},\; 0 < y < \infty$$

$$f(x|y) = \frac{e^{-\frac{x}{y}}e^{-y}}{y} \Big/ e^{-y}$$

$$= \frac{e^{-\frac{x}{y}}}{y}, \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < y < \infty$$

$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

$$E(X|y) = \int_0^\infty x \frac{e^{-\frac{x}{y}}}{y} dx = y \int_0^\infty \frac{x}{y} e^{-\frac{x}{y}} d\frac{x}{y} = y$$

แสดงว่า $E(X|y) = \mu_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y - \mu_2)$

$$E(X^2|y) = \int_0^\infty x^2 \frac{e^{-\frac{x}{y}}}{y} dx = y^2 \int_0^\infty \left(\frac{x}{y}\right)^2 e^{-\frac{x}{y}} d\frac{x}{y} = 2y^2, \; 0 < y < \infty$$

$$Var(X|y) = 2y^2 - (y)^2 = y^2, \; 0 < y < \infty$$

$$E_Y[\,Var(X|y)] = \int_0^\infty y^2 e^{-y} dy = 2$$

แสดงว่า $E_Y[Var(X|y)] = \sigma_1^2(1 - \rho^2)$

6. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน และมีฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมกำหนดไว้ โดย $f(x, y) = (x+1) \quad , \quad -1 < x < 1, \; \frac{1}{2} < y < 1$

$= 0 \quad$, อื่น ๆ

จงแสดงให้เห็นจริงว่า

6.1 $E(Y|x) = E(Y)$

6.2 $E(X|y) = E(X)$

6.3 $Var(X|y) = Var(X)$

$$E(X) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \int_{-1}^{1} x(x + 1)dxdy$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \Big|_{x=-1}^{1} \right) dy$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{2}{3} dy$$

$$= \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}$$

$$E(X^2) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \int_{-1}^{1} x^2(x+1)dxdy$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} \Big|_{x=-1}^{1} \right] dy$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{2}{3} dy = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}$$

$$Var(X) = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$$

$$E(Y) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \int_{-1}^{1} y(x+1)dxdy$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} y\left(\frac{x^2}{2} + x \Big|_{x=-1}^{1} \right) dy$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} 2ydy$$

$$= 1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

$$g(x) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} (x+1)dy = (x+1)\left(1 - \frac{1}{2}\right), \quad -1 < x < 1$$

$$f(y|x) = \frac{x+1}{\frac{1}{2}(x+1)} = 2, \quad \frac{1}{2} < y < 1, \quad 1 < x < 1$$

$$= 0, \text{ อื่น ๆ}$$

$$E[Y|x] = \int_{\frac{1}{2}}^{1} 2y\,dy = \frac{3}{4} = E(Y)$$

$$h(y) = \int_{-1}^{1} (x+1)\,dx, \quad \frac{1}{2} < y < 1$$

$$= \frac{1-1}{2} + 1 + 1 = 2, \quad \frac{1}{2} < y < 1$$

$$f(x|y) = \frac{x+1}{2}, \quad -1 < x < 1, \ \frac{1}{2} < y < 1$$

$$= 0, \qquad \text{อื่น ๆ}$$

$$E[X|y] = \int_{-1} x \cdot \frac{x+1}{2}\,dx, \quad \frac{1}{2} < y < 1$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1+1}{3} + \frac{1-1}{2}\right] = \frac{1}{3} = E(X)$$

$$E[X^2|y] = \int_{-1}^{1} x^2 \cdot \frac{x+1}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1-1}{4} + \frac{1+1}{3}\right] = \frac{1}{3}$$

$$Var[X|y] = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9} = Var(X)$$

7. $f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X กับ Y ซึ่งกำหนดไว้โดย

$$f(x, y) = 2, \quad 1 < y < 1+x, \ 0 < x < 1$$

$$= 0, \quad \text{อื่น ๆ}$$

จงแสดงให้เห็นจริงว่า

7.1 $E(Y|x) = \mu_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x - \mu_1)$

7.2 $E[Var(Y|x)] = \sigma_2^2(1-\rho^2)$

ในเมื่อ μ_1, μ_2, σ_1^2, σ_2^2 และ ρ เป็นค่าคาดหมาย ความแปรปรวนและ ส.ป.ส. สหสัมพันธ์ของ X กับ Y ตามลำดับ

$$g(x) = \int_{1}^{1+x} 2dy, \quad 0 < x < 1$$