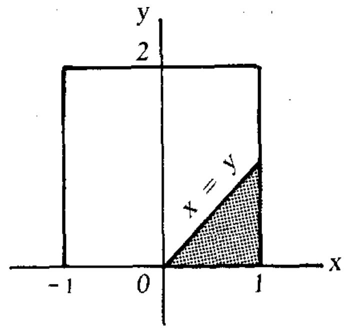
5.4 $\sum_{k=0}^{20}\binom{20}{k}^2 = \binom{40}{20}$

6. $P(X > Y) = \int_0^1\int_0^x \frac{7-2x-2y}{20}\,dy\,dx$



$= \int_0^1 \frac{7x-2x^2-x^2}{20}\,dx$

$= \frac{1}{20}\left[7\left(\frac{1}{2}\right)-3\left(\frac{1}{3}\right)\right]$

$= \frac{1}{8}$

7. ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมเงื่อนไขของ $X|Y = y$ กำหนดโดย

$$F(x|y) = \int_{-\infty}^{x} f(x|y)dx,\quad 0 < x < 1,\ 0 < y < 2$$

$$\int_{-\infty}^{x} f(x|y)dx = \int_{\infty}^{x} \frac{f(x,\ y)}{h(y)}dx$$

$$= \frac{\frac{\partial F(x,\ y)}{\partial y}}{\frac{dF(1,\ y\ )}{dy}}$$

$$= \frac{\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{x^2y}{20}(4x+3y)\right]}{\frac{d}{dy}\left[\frac{y}{20}(4+3y)\right]} = \frac{x^2(4x+6y)}{4+6y}$$

ดังนั้น $F(x|y) = 0$, ถ้า $x < 0,\ 0 < y < 2$

$= \frac{x^2(2x+3y)}{2+3y}$, $0 \leqslant x < 1,\ 0 < y < 2$

$= 1$, $x \geqslant 1,\ 0 < y < 2$

8. 8.1 อาศัยคุณสมบัติฟังก์ชันหนาแน่นของ X จะได้

$$P(-1 < X \leqslant 0) = 1-P(0 < X \leqslant 1)-P(1 < X \leqslant 2)$$

นั่นคือ $P(X \leqslant 0) = 1-0.4-0.4 = 0.2$

X และ Y มีการแจกแจงรูปเดียวกัน ดังนั้น

$$P(Y \geqslant 1) = P(1 \leqslant x \leqslant 2) = 0.4$$

x และ Y เป็นอิสระกัน ดังนั้น

$$P(X \leqslant 0, Y \geqslant 1) = P(X \leqslant 0)P(Y \geqslant 1)$$

$$= (0.2)(0.4) = 0.08$$

8.2 $E[2X + 4Y - 9XY] = 2E(X) + 4E(Y) - 9E(XY)$

$$= 2\left(\frac{1}{3}\right) + 4\left(\frac{1}{3}\right) - 9E(X)E(Y)$$

$$= 2 - 9\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$= 1$$

9. $Var(2X + Y) = 4Var(X) + Var(Y) + 4\,Cov(X, Y) = 44$ ....(1)

$Var(X-2Y) = Var(X) + 4Var(Y) - 4Cov(X, Y) = 16$ ....(2)

$Var(X) = 2Var(Y)$ ....(3)

$(1) + (2) - 5(3)$ จะได้

$$15\ Var(Y) = 60$$

$$Var(Y) = 4 \Longrightarrow Var(X) = 8$$

แทนค่า Var(X), Var(Y) ใน (1) จะได้

$$Cov(X, Y) = \frac{44 - 32 - 4}{4} = 2$$

ดังนั้น ส.ป.ส. สหสัมพันธ์ระหว่าง X กับ Y จะเท่ากับ

$$\rho = \frac{2}{\sqrt{(4)(8)}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

10. $$E[Y|x] = \int_{-\infty}^{\infty} yf(y|x)dy = \int_{-\infty}^{\infty} y\frac{f(x, y)}{g(x)}dy$$

ดังนั้น $$\frac{1}{g(x)}\int_{-\infty}^{\infty} yf(x, y)dy = \mu_Y + \beta(x - \mu_X)$$

เอา xg(x) คูณทั้ง 2 ข้าง แล้ว integrate ตามค่าของ x จะได้

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x, y)dydx = \int_{-\infty}^{\infty} [\mu_Y xg(x) + \beta xg(x)(x - \mu_X)]dx$$

$$E(XY) = \mu_Y \int_{-\infty}^{\infty} xg(x)dx + \beta \int_{-\infty}^{\infty} x^2 g(x)dx - \beta\mu_X \int_{-\infty}^{\infty} xg(x)dx$$

$$E(XY) = \mu_Y \cdot \mu_X + \beta E(X^2) - \beta\mu_X \cdot \mu_X$$

$$E(XY) - \mu_X\mu_Y = \beta[E(X^2) - \mu_X^2]$$

$$\sigma_{XY} = \beta\sigma_X^2$$

$$\rho = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y} = \beta \cdot \frac{\sigma_X^2}{\sigma_X\sigma_Y}$$

$$\beta = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \cdot \rho$$

คำตอบชุดที่ 5

1. ก. A, B, C เป็นส่วนแบ่งของ S ดังนั้น

$$P(A) + P(B) + P(C) = P(S)$$

$$0.2 + 0.5 + P(C) = 1$$

$$P(C) = 1 - 0.7 = 0.3$$

$$P(F) = P(AF) + P(BF) + P(CF) = P(C)$$

$$P(BF) = \frac{0.3}{3} = 0.1$$

$$P(F|B) = \frac{P(BF)}{P(B)} = \frac{0.1}{0.5} = 0.2$$

ข. ดูเฉลยข้อ 6 ในแบบฝึกหัดที่ $1-3$

2. f(x) เป็นฟังก์ชันหนาแน่นของตัวแปรเชิงสุ่ม X ดังนั้น

$$\int_{-1}^{0} (x+1)dx + \int_{3}^{c} (2x-6)dx = 1$$

$$\frac{0-(-1)^2}{2} + (0+1) + (c^2 - 3^2) - 6(c-3) = 1$$

$$2c^2 - 12c + 17 = 0$$

$$c = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 - 4(2)(17)}}{2(2)} = 3 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\longrightarrow \qquad c = 3 + \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad c > 3$$

3. $$\int_0^{\infty} |1 - F(x)|dx = \int_0^{\infty}\int_x^{\infty} f(t)dtdx$$

$$= \int_0^{\infty}\int_0^{t} f(t)dxdt$$

$$= \int_0^{\infty}\left[f(t)x\Big|_{x=0}^{t} \right]dt$$

$$= \int_0^{\infty} tf(t)dt$$

$$\Longrightarrow \int_0^{\infty} |1 - F(x)|dx = \int_0^{\infty} xf(x)dx = E(X)$$

4. ก. A_i = เหตุการณ์ที่จับคู่กันได้ในคู่ที่ i, i = 1, 2

A_1A_2 = เหตุการณ์ที่จับคู่กันได้ใน 2 คู่แรก

P(จับคู่กันได้อย่างน้อย 1 คู่ใน 2 คู่แรก) $= P(A_1 \cup A_2)$

$$= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2)$$

$$= \frac{1}{20} + \frac{1}{20} - \frac{1}{20(19)} = \frac{37}{380}$$

ข.1 $$\binom{100}{2} - \binom{100}{3} + \binom{100}{4} - \binom{100}{5} + \ldots = \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \binom{100}{k}$$

$$= \sum_{k=0}^{100} (-1)^k \binom{100}{k} - (-1)^0\binom{100}{0} - (-1)^1\binom{100}{1}$$

$$= 0 - 1 + 100$$

$$= 99$$

ข.2 $$1 + \frac{65}{99} + \frac{65^{(2)}}{99^{(2)}} + \frac{65^{(3)}}{99^{(3)}} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{65^{(k)}}{99^{(k)}}$$

$$= \frac{99+1}{99-65+1}$$

$$= \frac{20}{7}$$

5. ใส่บอลที่เหมือนกัน 26 ลูกลงในกล่อง 25 กล่องแบบสุ่ม

จะมีจำนวนผลลัพธ์ $= \begin{pmatrix} 26+25-1 \\ 26 \end{pmatrix} = \dfrac{50^{(26)}}{26!}$

ให้ A_i เป็นเหตุการณ์ที่กล่อง i ว่าง, $i = 1, 2, \ldots, 25$
ซึ่งก็คือการใส่บอล 26 ลูก ลงในกล่อง 24 กล่องแบบสุ่ม ดังนั้น

$$\text{จำนวนผลลัพธ์ของ } A_i = \begin{pmatrix} 26+24-1 \\ 26 \end{pmatrix} = \frac{49^{(26)}}{26!}$$

$$P(A_i) = \frac{\dfrac{49^{(26)}}{26!}}{\dfrac{50^{(26)}}{26!}} = \frac{49\text{-}25}{50} = \frac{12}{25}$$

ให้ X_i เป็นตัวแปรดัชนีของ A_i, $i = 1, 2, \ldots, 25$

$$X = \sum_{i=1}^{25} X_i = \text{จำนวนกล่องว่าง}$$

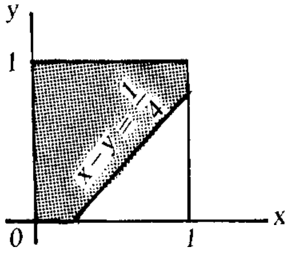
$$E(X) = E\left[\sum_{i=1}^{25} X_i\right] = \sum_{i=1}^{25} E(X_i) = \sum_{i=1}^{25} P(A_i)$$

นั่นคือ $$E(X) = \sum_{i=1}^{25} \frac{12}{25} = 12$$

6. X และ Y เป็นอิสระต่อกัน ดังนั้น

$$f(x, y) = 1, \quad 0 < x, y < 1$$
$$= 0, \quad \text{อื่น ๆ}$$

$$P\left(X - Y \leqslant \frac{1}{4}\right) = 1 - P\left(X - Y > \frac{1}{4}\right)$$



$$= 1 - \int_{\frac{1}{4}}^{1} \int_{0}^{x - \frac{1}{4}} dydx$$

$$= 1 - \int_{\frac{1}{4}}^{1} \left(x - \frac{1}{4}\right) dx$$

$$= 1-\left[\frac{1-\frac{1}{16}}{2}-\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}\right)\right] = \frac{9}{32}$$

7. ดูทฤษฎี 4 ตำรา ST 311

8. 8.1 g(x) เป็นฟังก์ชันหนาแน่นทางเดียวของ X ดังนั้น

$$g(x) = \int_0^x \frac{1}{x}dy = \frac{x}{x}, 0 \leqslant x < 1$$

$$g(x) = 1, \quad 0 \leqslant x < 1$$
$$= 0, \text{ อื่น ๆ}$$

8.2 $$E[Y|x] = \int_{-\infty}^{\infty} yf(y|x)dy$$

$$f(y|x) = \frac{\frac{1}{x}}{1} = \frac{1}{x}, \quad 0 \leqslant y \leqslant x, 0 \leqslant x < 1$$
$$= 0, \text{ อื่น ๆ}$$

ดังนั้น $$E[Y|x] = \int_0^x \frac{y}{x}dy$$

$$= \frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2} = \frac{x}{2}, \quad 0 \leqslant x < 1$$

9. $$\text{Var}(X-Y) = E[(X-Y)^2]-(E[X-Y])^2$$
$$= 80-\left(\frac{80}{10}\right)^2 = 16$$

$$\text{Var}(X+Y) = \text{Var}(X)+\text{Var}(Y)+2\text{ Cov}(X, Y)$$
$$= \text{Var}(X)+\text{Var}(Y)-2\text{ Cov}(X, Y)+4\text{ Cov}(X, Y)$$
$$= \text{Var}(X-Y)+4\text{ Cov}(X, Y)$$

ค่าของความแปรปรวนมากกว่าหรือเท่ากับ 0 เสมอ ดังนั้น

$$16+4\text{ Cov}(X, Y) \geqslant 0$$
$$4\text{ Cov}(X, Y) \geqslant -16$$
$$\text{Cov}(X, Y) \geqslant -4$$

10. $$E[Y^2|x] = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f(y|x)dy = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \frac{f(x, y)}{g(x)} dy$$

ดังนั้น $$\int_{-\infty}^{\infty} y^2 \frac{f(x, y)}{g(x)} dy = \sigma^2 + \mu_Y^2 - \beta^2\mu_X^2 + \beta^2 x^2$$

เอา g(x) คูณทั้ง 2 ข้าง แล้ว integrate ตามค่า x จะได้

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y^2 f(x, y)dydx = \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma^2 + \mu_Y^2 - \beta^2\mu_X^2 + \beta^2x^2)g(x)dx$$

$$E(Y^2) = (\sigma^2 + \mu_Y^2 - \beta^2\mu_X^2)\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx + \beta^2\int_{-\infty}^{\infty} x^2 g(x)dx$$

$$E(Y^2) = \sigma^2 + \mu_Y^2 - \beta^2\mu_X^2 + \beta^2 E(X^2)$$

$$\sigma^2 = E(Y^2) - \mu_Y^2 - \beta^2[E(X^2) - \mu_X^2]$$

นั่นคือ $$\sigma^2 = \sigma_Y^2 - \beta^2\sigma_X^2$$

β เป็น ส.ป.ส. การถดถอยของ Y บน X ดังนั้น

$$\beta = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2}\cdot\frac{\sigma_Y}{\sigma_Y} = \rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$$

ดังนั้น $$\sigma^2 = \sigma_Y^2 - \left(\rho^2\frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2}\right)\sigma_X^2 = \sigma_Y^2(1-\rho^2)$$

พิมพ์ที่... สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยรามคำแหง
Ramkhamhaeng University Press.

ถ้าฟังก์ชันหนาแน่นทางเดียวของ X คือ

$$g(x) = \frac{3x^2+21}{50} \quad , \quad 0 < x < 2$$
$$= 0 \quad , \quad \text{อื่น ๆ}$$

จงหา

8.1 ฟังก์ชันหนาแน่นเงื่อนไขของ $Y|X = 1$

8.2 $E[Y|X = x], \quad 0 < x < 2$

9. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีการแจกแจงร่วม จงแสดงให้เห็นจริงว่า

$$-1 \leqslant \rho \leqslant 1$$

10. ถ้า $f(x, y) = 8xy, \quad 0 < x < y < 1$

$= 0 \quad , \quad$ อื่น ๆ

เป็นฟังก์ชันหนาแน่นร่วมของ X กับ Y จงคำนวณค่า $E[3X - Y]$

ชุดที่ 4

1. ก. กำหนด $A_k = \left\{x : 0 < x \leqslant 4 - \frac{1}{k}\right\}, \quad k = 1, 2, \ldots$

จงหา $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ และ $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$

ข. ถ้า $P(A|B) > P(A)$ จงแสดงให้เห็นจริงว่า $P(B|A) > P(B)$

2. กำหนดฟังก์ชันหนาแน่นของตัวแปรเชิงสุ่ม X

$$f(x) = \frac{24}{x^4} \quad , \quad x \geqslant 2$$
$$= 0 \quad , \quad \text{อื่น ๆ}$$

จงหาฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ $Y = X^2$ และคำนวณค่าของ $P(X^2 > 9)$

3. X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่องที่มีฟังก์ชันการแจกแจงสะสม

$$F(x) = 0 \quad , \quad x < -1$$
$$= \frac{(ax+1)^2}{2} \quad , \quad -1 \leqslant x < 0$$
$$= \frac{1}{2} \quad , \quad 0 \leqslant x < 3$$
$$= x^2 - 6x + \frac{19}{2}, \quad 3 \leqslant x < b$$
$$= 1 \quad , \quad x \geqslant b$$

จงหาค่าของ a และ b

4. ก. X เป็นจำนวนคู่ที่จับคู่กันได้ ในการจับคู่แบบสุ่ม 50 คู่ จงหาฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X และคำนวณค่าของ $P(X = 0) - P(X = 1)$

   ข. ใส่บอล 12 ลูกลงในกล่อง 15 กล่องแบบสุ่ม จงหา

   ข.1 ความน่าจะเป็นที่จะมีกล่องว่าง 2 กล่อง ถ้าบอลต่างกัน

   ข.2 ความน่าจะเป็นที่จะมีกล่องว่าง 3 กล่อง ถ้าบอลเหมือนกัน

5. จงประมาณค่าของ

   5.1 $\sum_{k=0}^{20} (-1)' \binom{20}{k} (20 - k)^{20}$

   5.2 $\sum_{k=0}^{20} \frac{20^{(k)}}{50^{(k)}}$

   5.3 $\sum_{k=0}^{20} \binom{20}{k}$

   5.4 $\sum_{k=0}^{20} \binom{20}{k}^2$

6. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันหนาแน่นร่วม

$$
\begin{aligned}
f(x, y) &= \frac{7 - 2x - 2y}{20}, \quad -1 < x \leqslant 1,\ 0 < y < 2 \\
&= 0 \qquad\qquad\quad , \text{ อื่น ๆ}
\end{aligned}
$$

จงหา $P(X > Y)$

7. กำหนด

$$F(x, y) = \frac{x^2 y}{20}(4x + 3y), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2$$

เป็นฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วมของตัวแปรเชิงสุ่ม X และ Y จงหาฟังก์ชันการแจกแจง-สะสมเงื่อนไขของ X กำหนดว่า $Y = y,\ 0 < y < 2$

8. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน และมีฟังก์ชันการแจกแจงรูปเดียวกัน

   8.1 ถ้า $f(x, y) > 0,\ -1 < x, y \leqslant 2$ นอกนั้นเป็น 0 และ $P(0 < X \leqslant 1) = P(1 < X \leqslant 2) = 0.4$ จงหา $P(X \leqslant 0,\ Y \geqslant 1)$

   8.2 ถ้า $E(X) = \frac{1}{3}$ จงหาค่าของ $E[2X + 4Y - 9XY]$

9. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มี $Var(X) = 2Var(Y)$ ถ้า $Var(2X+Y) = 44$ และ $Var(X-2Y) = 16$ จงหา ส.ป.ส. สหสัมพันธ์ระหว่าง X กับ Y

10. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันหนาแน่นร่วม

ถ้า $E[Y|x] = \mu_Y + \beta(X-\mu_X)$

จงแสดงให้เห็นจริงว่า $\beta = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\cdot\rho$

ชุดที่ 5

1. ก. A, B และ C เป็นส่วนแบ่งของกลุ่มผลทดลอง S F เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ใน S ที่มี $P(AF) = P(BF) = P(CF)$ ถ้า $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.5$ และ $P(C) = P(F)$ จงหา $P(F|B)$

   ข. เลือกจุดแบบสุ่มภายในวงกลมที่มีรัศมี 1 นิ้ว จงหาความน่าจะเป็นที่จุดนี้จะไม่อยู่ภายในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีความยาวเส้นทแยงมุม 2 นิ้ว และมีจุดศูนย์กลางร่วมกันกับวงกลม

2. กำหนด
$$f(x) = \begin{cases} x+1 & , \ -1 < x < 0 \\ 2x-6 & , \ 3 < x < c \\ 0 & ; \ \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

   จงหาค่าของ c ที่ทำให้ f(x) เป็นฟังก์ชันหนาแน่นของ X

3. X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่องที่มีฟังก์ชันหนาแน่น $f(x) > 0$ เมื่อ $x \geqslant 0$ นอกนั้นเป็น 0

   จงแสดงให้เห็นจริงว่า $\int_0^\infty [1-F(x)]dx = E(X)$

4. ก. จงหาความน่าจะเป็นที่จะจับคู่กันได้อย่างน้อย 1 คู่ใน 2 คู่แรก จากการจับคู่แบบสุ่ม 20 คู่

   ข. จงหาค่าของ

   ข.1 $\binom{100}{2} - \binom{100}{3} + \binom{100}{4} - \binom{100}{5} + \ldots$

   ข.2 $1 + \frac{65}{99} + \frac{65^{(2)}}{99^{(2)}} + \frac{65^{(3)}}{99^{(3)}} + \ \ldots$

5. ใส่บอลที่เหมือนกัน 26 ลูก ลงในกล่อง 25 กล่องแบบสุ่ม จงแสดงให้เห็นจริงว่า ค่าคาดหมายของจำนวนกล่องว่างจะเท่ากับ 12

6. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระต่อกันและมีฟังก์ชันการแจกแจงรูปเดียวกัน

$$g(t) = h(t) = 1, \quad 0 < t < 1$$

จงคำนวณค่า $P\left(X - Y \leqslant \frac{1}{4}\right)$

7. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วม $F(x, y)$ a, b, c, d เป็นค่าคงที่ $b > a,\ d > c$

จงแสดงให้เห็นจริงว่า

$$P(a < X \leqslant b,\ c < Y \leqslant d) = F(b, d) - F(b, c) - F(a, d) + F(a, c)$$

8. กำหนดฟังก์ชันหนาแน่นร่วมของ X และ Y โดย

$$f(x, y) = \frac{1}{x}, \quad 0 \leqslant y \leqslant x < 1$$
$$= 0, \quad \text{อื่น ๆ}$$

จงหา

8.1 ฟังก์ชันหนาแน่นทางเดียวของ X

8.2 $E[Y|x],\ 0 \leqslant x < 1$

9. ถ้า $E[(X-Y)^2] = 10E[X-Y] = 80$ อาศัยค่าของ $Var(X+Y)$ จงแสดงให้เห็นจริงว่า $Cov(X, Y) \geqslant -4$

10. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีการแจกแจงร่วม และ β เป็น ส.ป.ส. การถดถอยของ Y บน X ถ้า $E[Y^2|x] = \sigma^2 + \mu_Y^2 - \beta^2\mu_X^2 + \beta^2 x^2$

จงแสดงให้เห็นจริงว่า

$$\sigma^2 = \sigma_Y^2(1-\rho^2)$$

ในเมื่อ ρ เป็น ส.ป.ส. สหสัมพันธ์ระหว่าง X กับ Y

เฉลยแบบทดสอบ

ชุดที่ 1

1. ก. A และ B เป็นเหตุการณ์ที่เป็นอิสระต่อกัน จะได้

$$P(AB) = P(A)P(B) \text{ และ}$$

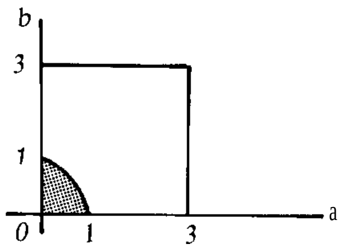
A และ B' จะเป็นอิสระต่อกันด้วย ดังนั้น

$$P(B'|A) = P(B') = 1-0.2 = 0.8$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

$$= 0.5+0.2-(0.5)(0.2) = 0.6$$

ข. $P(A^2+B^2 < 1) = \dfrac{\frac{1}{4}\pi(1)^2}{3 \times 3} = \dfrac{\pi}{36}$



2. $$F(x) = \int_{-1}^{x} \frac{2x+3}{12}dx, \quad -1 < x \leqslant 2$$

$$= \left.\frac{x^2+3x}{12}\right|_{x=-1}^{x} = \frac{1}{12}(x^2+3x+2)$$

นั่นคือ

$$F(X) = 0 \quad , \quad x < -1$$

$$= \frac{1}{12}(x^2+3x+2) \quad , \quad -1 \leqslant x < 2$$

$$= 1 \quad , \quad x \geqslant 2$$

3. F(x) เป็นฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ X ดังนั้น

$$F(2) = \frac{2a-4-b}{2} = 1 \quad \text{..........(1)}$$

และ $P(X = 1) = F(1) - F(1^-) = 0$

หรือ $a - \frac{1}{2} - b - \frac{1}{2} = 0$ ....(2)

(1) − (2) จะได้ $\frac{a-2}{2}$,

นั่นคือ $a = 2+2 = 4$

$b = 2(4)-4-2 = 2$

4. ก. P(ทำข้อที่ 1 และข้อที่ 2 ถูกต้อง) $= \frac{18!}{20!} = \frac{1}{380}$

ข. ค่าคาดหมายของจำนวนตำแหน่งที่ไม่มีผู้สมัคร $= \frac{10(10-1)}{10+21-1} = 3$

คำอธิบาย

ปัญหานี้ก็คือปัญหาการใส่บอลที่เหมือนกัน n (= 21) ลูก ลงในกล่อง m(= 10) กล่อง

ค. $\sum_{k=0}^{20}\binom{20}{k}^2 = \sum_{k=0}^{20}\binom{20}{k}\binom{20}{20-k} = \binom{40}{20}$

$$\sum_{k=0}^{20}\frac{20^{(k)}}{35^{(k)}} = \frac{35+1}{35-20+1} = 2\frac{1}{4}$$

5.1 $f(x) = \frac{20(70^{x-1})}{90^x}, \quad x = 1, 2, \ldots$

$= 0 \quad$, อื่น ๆ

5.2 f(x) เป็นฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X ดังนั้น

$$\sum_{x=1}^{\infty}\frac{20(70^{x-1})}{90^x} \quad , \qquad . \quad . \quad (1)$$

$$F(x) = P(X \leqslant x) = 1 - P(X > x)$$

$$P(X > x) = \sum_{k=x+1}^{\infty}\frac{20(70^{k-1})}{90^k}$$

$$= \sum_{y=1}^{\infty}\frac{20(70^{y+x-1})}{90^{y+x}}, y = k-x$$

$$P(X > x) = \frac{70^x}{90^x}\sum_{y=1}^{\infty}\frac{20(70^{y-1})}{90^y} = \left(\frac{7}{9}\right)^x \quad \text{(ผลจาก (1))}$$

นั่นคือ $F(x) = 1-\left(\frac{7}{9}\right)^{x}$

6. 6.1 X และ Y เป็นอิสระต่อกัน ดังนั้น

$$f(x, y) = g(x)h(y) = \left(\frac{x}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right), \quad 1 < x \leqslant 3,\ 0 < y \leqslant 2$$

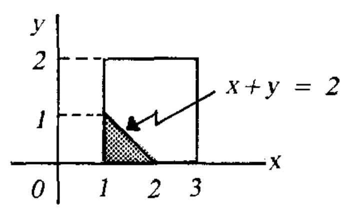
$$f(x, y) = \frac{x}{8}, \quad 1 < x \leqslant 3,\ 0 < y \leqslant 2$$

$$= 0, \text{ อื่น ๆ}$$

6.2 $P(X+Y \leqslant 2) = \int_{1}^{2}\int_{0}^{2-x} \frac{x}{8}\, dydx$

$$= \frac{1}{8}\int_{1}^{2} x(2-x)dx$$

$$= \frac{1}{8}\left[(4-1)-\frac{1}{3}(8-1)\right] = \frac{1}{12}$$



7.1 ฟังก์ชันหนาแน่นทางเดียวของ $X = g(x) = \frac{d}{dx}F(x, 4)$

$$\frac{d}{dx}F(x, 4) = \frac{d}{dx}\left[\frac{4-2}{16}\{(10-4)x-x^{2}\}\right], \quad 0 < x < 2$$

จะได้ $$g(x) = \frac{1}{4}(3-x) \quad , \quad 0 < x < 2$$

$$= 0 \quad , \text{ อื่น ๆ}$$

7.2 $P(-1 < X \leqslant 1,\ 1 < Y \leqslant 3) = F(1, 3)$

$$= \frac{1}{16}(3-2)(10-1-3) = \frac{3}{8}$$

8. ก. f(x|y) เป็นฟังก์ชันหนาแน่นเงื่อนไขของ X|Y = y ดังนั้น

$$f(x|y) = \frac{f(x, y)}{h(y)} \geqslant 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x|y)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x, y)}{h(y)} dx = \frac{1}{h(y)} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx$$

นั่นคือ $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x|y)dx = \frac{1}{h(y)} h(y) = 1$$

แสดงว่า f(x|y) มีคุณสมบัติของฟังก์ชันน่าจะเป็น

ข. $E(k) = \int_{-\infty}^{\infty} kf(x)dx$

$= k \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$

$= k(1) = k$ (คุณสมบัติฟังก์ชันหนาแน่นของ X)

9. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน ดังนั้น

$$\mathrm{Var}(2X+Y) = 4\sigma_X^2+\sigma_Y^2 = 28 \qquad \text{..........(1)}$$

และ $$\mathrm{Var}(X-Y) = \sigma_X^2+\sigma_Y^2 = 12 \qquad \text{..........(2)}$$

$\frac{(1)-(2)}{3}$ $$\sigma_X^2 = \frac{16}{3}$$

$\Longrightarrow$ $$\sigma_Y^2 = 12-\frac{16}{3} = \frac{20}{3}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X, X-Y) &= E[X(X-Y)] - E(X)E(X-Y) \\
&= E[X^2 - XY] - E(X)[E(X) - E(Y)] \\
&= E(X^2) - E(XY) - \{E(X)\}^2 + E(X)E(Y) \\
&= \sigma_X^2 \text{ (X และ Y เป็นอิสระกัน } E(XY) = E(X)E(Y))
\end{aligned}$$

$$\rho_{X, X-Y} = \frac{\mathrm{Cov}(X, X-Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\,\mathrm{Var}(X-Y)}} = \frac{\frac{16}{3}}{\sqrt{\left[\frac{16}{3}\right](12)}} = \frac{2}{3}$$

แสดงว่า ส.ป.ส. สหสัมพันธ์ระหว่าง X กับ X − Y จะเท่ากับ $\frac{2}{3}$

10. $E[Y|x] = \int_{-\infty}^{\infty} yf(y|x)dy = \mu_Y + \beta x$

แต่ $f(y|x) = \frac{f(x, y)}{g(x)}$

ดังนั้น $\int_{-\infty}^{\infty} y\frac{f(x, y)}{g(x)}dy = \mu_Y + \beta x$

เอา xg(x) คูณทั้ง 2 ข้าง จะได้

$$\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x, y)dy = \mu_Y xg(x) + \beta x^2 g(x)$$

ดังนั้น $\int_{-m}^{\infty}\int_{-m}^{\infty} xyf(x, y)dydx = \int_{-\infty}^{\infty}[\mu_Y xg(x) + \beta x^2 g(x)]dx$

$$E(XY) = \mu_Y \int_{-\infty}^{\infty} xg(x)dx + \beta\int_{-\infty}^{\infty} x^2 g(x)dx$$

$$E(XY) = \mu_Y\mu_X + \beta E(X^2)$$

$\sigma_{XY} = E(XY) - \mu_X\mu_Y = \beta(\sigma_X^2 + \mu_X^2), \because \sigma_X^2 = E(X^2) - \mu_X^2$

จะได้ $\beta = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2 + \mu_X^2}$

คำตอบชุดที่ 2

1. ก. $A_1 = \{x : 2 \leqslant x \leqslant 6\}$

$A_2 = \left\{x : 1\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 5\frac{1}{2}\right\}$

$A_\infty = \{x : 1 < x \leqslant 5\}$

จะได้ $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \{x : 1 < x \leqslant 6\}$

$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \{x : 2 \leqslant x \leqslant 5\}$

ข. A และ B เป็นอิสระต่อกัน ดังนั้น

$$P(A \cup B) = 0.5 + 0.4 - (0.5)(0.4) = 0.7$$

$A \cup B$ กับ C ขจัดกัน และ $A \cup B \cup C = S$ ดังนั้น

$$P(A \cup B \cup C) = P(A \cup B) + P(C) = P(S) = 1$$

$$0.7 + P(C) = 1$$

$$P(C) = 1 - 0.7 = 0.3$$

2. พิจารณาค่า $3x^2 - 1$ เมื่อ $-1 < x < 2$ จะเห็นว่า $3x^2 - 1 > 0$ ก็ต่อเมื่อ $3x^2 > 1$ หรือ $|x| > \frac{1}{\sqrt{3}}$

นั่นคือ $f(x) \leqslant 0$ สำหรับค่า x ที่อยู่ระหว่าง $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ ถึง $\frac{1}{\sqrt{3}}$

แสดงว่า $f(x)$ ไม่เป็นฟังก์ชันหนาแน่นของตัวแปรเชิงสุ่ม X

3. พิจารณาค่า F(2) จะเห็นว่า

$$F(2) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$$

แสดงว่า มัธยฐานของ X มีค่ามากกว่า 2

ให้ m เป็นมัธยฐานของ X จะได้ $m > 2$ และ

$$F(m) = \frac{m^2}{16} = \frac{1}{2}$$

$$m = 2\sqrt{2}$$

มัธยฐานของ x $= 2\sqrt{2}$

$$P(1 < X \leqslant 3) = F(3) - F(1)$$

$$= \frac{3^2}{16} - \frac{1}{8} = \frac{7}{16}$$

4. ก. ดูตัวอย่าง 3 – 1.2

ข. ถ้าบอลเหมือนกันกล่องจะว่าง 5 กล่อง ถ้าใส่บอลลงในกล่อง ๆ ละ 1 ลูก

ซึ่งจะมีจำนวนผลลัพธ์ $= \binom{25}{5}$

$$P(\text{มีกล่องว่าง 5 กล่อง}) = \frac{\binom{25}{5}}{\binom{20+25-1}{20}} = \frac{25^{(20)}}{44^{(20)}}$$

ถ้าบอลต่างกัน

ค่าคาดหมายของจำนวนกล่องว่าง $= \dfrac{(25-1)^{20}}{25^{20-1}} = \dfrac{24^{20}}{25^{19}}$

5. 5.1 $\sum_{k=0}^{30} (-1)^{k}\binom{30}{k}(30-k)^{n} = 0$ (ใช้สูตร 3.3, $m > n$)

5.2 $\sum_{k=0}^{30} (-1)^{k}\binom{30}{k}25^{30-k} = 24^{30}$ (ใช้สูตร 3.6, a = -1, b = 25)

5.3 $$\sum_{k=1}^{30} \frac{25(30)^{k-1}}{55^{k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{25(30)^{k-1}}{55^{k}} - \sum_{k=31}^{\infty} \frac{25(30)^{k-1}}{55^{k}}$$

$$= 1-\left(\frac{30}{55}\right)^{30}$$ (ใช้สูตร 3.7 และ 3.9)

$$= 1-\left(\frac{6}{11}\right)^{30}$$

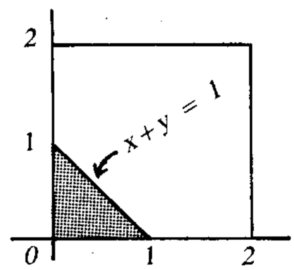
5.4 $$\sum_{k=1}^{30} \frac{30^{(k)}}{55^{(k)}} = \sum_{k=0}^{30} \frac{30^{(k)}}{55^{(k)}} - \frac{30^{(0)}}{55^{(0)}}$$

$$= \frac{55+1}{55-30+1} - 1$$ (สูตร 3.11)

$$= 1\frac{2}{13}$$

6. $$P(X+Y \leqslant 1) = \int_0^1\int_0^{1-y} \frac{1}{8}(x+y)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{8}\left[\frac{(1-y)^2}{2} + y(1-y)\right]dy$$



$$= \frac{1}{16}\int_0^1 (1-y^2)\,dy$$

$$= \frac{1}{16}\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{24}$$

7. f(y|x) เป็นฟังก์ชันหนาแน่นเงื่อนไขของ Y|X = x ดังนั้น

$$f(y|x) = \frac{f(x, y)}{g(x)}, \quad 0 < y \leqslant 3, \quad 0 < x \leqslant 2$$

$$= \frac{\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(x, y)}{\frac{d}{dx} F(x, 3)}$$

$$= \frac{\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left[\frac{xy}{336}(2x^2 + 5xy + 2y^2)\right]}{\frac{d}{dx}\left[\frac{3x}{336}(2x^2 + 15x + 18)\right]}$$

$$= \frac{\frac{\partial}{\partial y}[y(6x^2 + 10xy + 2y^2)]}{3(6x^2 + 30x + 18)}$$

$$= \frac{6x^2 + 20xy + 6y^2}{3(6x^2 + 30x + 18)}$$

$$\Rightarrow \quad f(y|x) = \frac{3x^2 + 10xy + 3y^2}{9x^2 + 45x + 27}, \quad 0 < y \leqslant 3, \ 0 < x \leqslant 2$$

$$= 0, \text{ อื่น ๆ}$$

8. 8.1 X และ Y เป็นอิสระต่อกัน ดังนั้น

$$f(x, y) = g(x)h(y)$$

$$= \frac{2x-1}{12} \cdot \frac{1}{2}, \quad 1 < x \leqslant 4, \quad -1 < y \leqslant 1$$

$$f(x, y) = \frac{2x-1}{24}, \ 1 < x \leqslant 4, \ -1 < y \leqslant 1$$

$$= 0, \text{ อื่น ๆ}$$

8.2 $$\mathrm{Cov}(X, X + Y) = E[X(X + Y)] - E(X)E(X + Y)$$

$$= E(X^2 + XY) - E(X)[E(X) + E(Y)]$$

$$= E(X^2) + E(XY) - \{E(X)\}^2 - E(X)E(Y)$$

X และ Y เป็นอิสระกัน ดังนั้น $E(XY) - E(X)E(Y) = 0$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Cov}(X, X+Y) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \mathrm{Var}(X)$$

9. $\text{Var}(aX+bY) = a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2 + 2ab\sigma_{XY}$ (ทฤษฎี 5.10)

ความแปรปรวน มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 0 เสมอ ดังนั้น

$$a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2 + 2abu_{XY} \geqslant 0$$

$$2ab\sigma_{XY} \geqslant -(a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2)$$

เอา $2ab\sigma_X\sigma_Y$ หารทั้ง 2 ข้าง จะได้

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}, \geqslant - \frac{a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2}{2ab\sigma_X\sigma_Y}, a, b, > 0$$

10. $$E[Y|x] = \int_{-\infty}^{\infty} yf(y|x)dy, \quad 0 < x < 3$$

$$f(y|x) = \frac{\frac{x}{9}}{\int_x^0 \frac{x}{9}dy} = \frac{x}{x(x-0)}$$

$$f(y|x) = \frac{1}{x}, \quad 0 < y < x, 0 < x < 3$$

0, อื่น ๆ

$$\rightarrow \quad E[Y|x] = \int_0^x \frac{y}{x}dy$$

$$= \frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2} = \frac{x}{2}, \quad 0 < x < 3$$

คำตอบชุดที่ 3

1. ก. $A, = \{x : 1 \leqslant x \leqslant 3\}$

$$A, = \left\{x : \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 3\right\}$$

$$A, = \{x : 0 < x \leqslant 3\}$$

$$\rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \{x : 0 < x \leqslant 3\}$$

"II. $A \cap B = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y \leq 1\}$

ค. ดูตัวอย่าง 1-3.3 ตำรา ST 311

2. $F(y) = P(Y \leq y)$

$= P(X^2 \leq y).\ 0 \leq y < 9$

$= P(-\sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{y})$

ถ้า $-2 < x < 2$ แล้ว $0 \leq y < 4$ ดังนั้น

$$F(y) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{5}\,dx$$

$$= \frac{1}{5}(\sqrt{y}+\sqrt{y}) = \frac{2\sqrt{y}}{5}$$

ถ้า $2 \leq x < 3$ แล้ว $4 \leq y < 9$ ดังนั้น

$$F(y) = \int_{-2}^{\sqrt{y}} \frac{1}{5}\,dx$$

$$= \frac{1}{5}(\sqrt{y}+2)$$

$\longrightarrow$ ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ $Y = X^2$ คือ

$$F(y) = \begin{cases} 0 & , \ y < 0 \\ \dfrac{2\sqrt{y}}{5} & , \ 0 \leq y < 4 \\ \dfrac{\sqrt{y}+2}{5} & , \ 4 \leq y < 9 \\ 1 & , \ y \geq 9 \end{cases}$$

4. ก. $P(X = x) = \sum_{k=0}^{10-x} \frac{(-1)^k}{k!\,x!}$, $x = 0, 1, 2, \ldots, 10$

$= 0$, อื่น ๆ

ข. $P(X = x) = \binom{10}{x} \frac{5^x 20^{10-x}}{25^{10}}$, $x = 0, 1, 2, \ldots, 10$

$= 0$, อื่น ๆ

ค. $P(X = x) = \frac{5(20)^{(x-1)}}{25^{(x)}}$, $x = 1, 2, 3, \ldots, 21$

$= 0$, อื่น ๆ

5. $P(\text{ไม่มีกล่องว่าง}) = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{m}{k} \frac{(m-k)^n}{m^n}$

ถ้า $m = m$ แล้ว $P(\text{ไม่มีกล่องว่าง}) = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{m}{k} \frac{(m-k)^m}{m^m}$

ใส่บอล m ลูกใน m กล่อง จะมีผลลัพธ์ $= m^m$

เหตุการณ์ที่ไม่มีกล่องว่าง ก็คือการใส่บอลลงในกล่อง กล่องละ 1 ลูกแบบสุ่ม จะมีผลลัพธ์ $= m!$

ดังนั้น $P(\text{ไม่มีกล่องว่าง}) = \frac{m!}{m^m}$

นั่นคือ $\sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{m}{k} \frac{(m-k)^m}{m^m} = \frac{m!}{m^m}$

$$\sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{m}{k} (m-k)^m = m!$$

6. ดูตัวอย่าง 4–5.1 ในตำรา ST 311

7. 7.1 ฟังก์ชันหนาแน่นทางเดียวของ X คือ $g(x) = \frac{dF(x, 2)}{dx}$

$$\frac{dF(x, 2)}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\frac{2x^2}{12}(4x+2)\right], \quad 0 \leqslant x < 1$$

$$= \frac{1}{6}(12x^2 + 4x)$$

$$g(x) = \frac{2x}{3}(3x + 1), \; 0 < x < 1$$

$$= 0, \text{ อื่น ๆ}$$

7.2 $P(Y \leqslant 1) = F(1, 1)$

$$= \frac{1}{12}(4+1) = \frac{5}{12}$$

8. 8.1 $f(y|x) = \frac{f(x, y)}{g(x)} = \frac{x^2+y^2}{3x^2+21}$ $1 < y < 4,\ 0 < x < 2$

$= 0,$ อื่น ๆ

$f(y|1)$ เป็นฟังก์ชันหนาแน่นเงื่อนไขของ $Y|X = 1$ จะได้

$$f(y|1) = \frac{1+y^2}{24}, \quad 1 < y < 4$$

$= 0,$ อื่น ๆ

8.2 $E[Y|x] = \int_1^4 y\frac{x^2+y^2}{3x^2+21}dy, \ 0 < x < 2$

$$= \frac{\left.\frac{y^4}{4} \cdot \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3}\right|_{y=1}^{4}}{3x^2+21}$$

$$= \frac{2x^2(16-1)+(256-1)}{12(x^2+7)}$$

$$\Rightarrow E[Y|x] = \frac{10x^2+85}{4(x^2+7)} \quad 0 < x < 2$$

9. ดูการพิสูจน์ทฤษฎี 5-2.8 ตำรา ST 311

10. ดูตัวอย่าง 5-2.7 ตำรา ST 311

ได้ $E(X) = \frac{8}{15}, \ E(Y) = \frac{4}{5}$

ดังนั้น $E[3X - Y] = 3\left(\frac{8}{15}\right) - \frac{4}{5} = \frac{4}{5}$

คำตอบชุดที่ 4

1. ก. $A_1 = \{x : 0 < x \leqslant 3\}$

$A_2 = \left\{x : 0 < x \leqslant 3\frac{1}{2}\right\}$

$A_3 = \left\{x : 0 < x \leqslant 3\frac{2}{3}\right\}$

$\vdots$

$A_\infty = \{x : 0 < x < 4\}$

ดังนั้น $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \{x : 0 < x < 4\}$

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \{x : 0 < x \leqslant 3\}$$

ข. $P(A|B) > P(A)$

$\Longrightarrow \quad \frac{P(AB)}{P(B)} > P(A)$

เอา $\frac{P(B)}{P(A)}$ คูณทั้ง 2 ข้าง จะได้

$$\frac{P(AB)}{P(A)} > P(B)$$

นั่นคือ $P(B|A) > P(B)$

2. ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ $Y = X^2$ กำหนดโดย

$$\begin{aligned} F(y) &= P(X^2 \leqslant y), \quad y \geqslant 4 \\ &= P(-\sqrt{y} \leqslant X \leqslant \sqrt{y}) \\ &= \int_2^{\sqrt{y}} \frac{24}{x^4}dx \\ &= -8(y^{-\frac{3}{2}} - 2^{-3}) \end{aligned}$$

นั่นคือ $F(y) = 0, \quad y < 4$

$$= 1 - \frac{8\sqrt{y}}{y^2}, \quad y \geqslant 4$$

$$P(X^2 > 9) = 1 - F_{X^2}(9) = 1 - \left(1 - \frac{8\sqrt{9}}{9^2}\right) = \frac{8}{27}$$

3. X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่อง ดังนั้น

$$P(X = -1) = F(-1) - F(-1^-) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{(-a+1)^2}{2} - 0 = 0$$

$$-a + 1 = 0$$

$$a = 1$$

และ $P(X = b) = F(b) - F(b^-) = 0$

$$\Longrightarrow \quad 1-\left(b^2-6b+\frac{19}{2}\right) = 0$$

$$2b^2-12b+17 = 0$$

$$b = \frac{12 \pm \sqrt{144-8(17)}}{4}$$

$$= 3 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

แต่ $b > 3$ ดังนั้น

$$b = 3+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

4. ก. X = จำนวนคู่ที่จับคู่กันได้ จากการจับคู่แบบสุ่ม 50 คู่ จะได้

$$P(X = x) = \sum_{k=0}^{50-x} \frac{(-1)^k}{k!\,x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, 50$$

และ $P(X = 0)-P(X = 1) = \sum_{k=0}^{50} \frac{(-1)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{49} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{50!}$

ข. ใส่บอล 12 ลูกลงในกล่อง 15 กล่อง จะต้องมีกล่องว่างอย่างน้อยที่สุด 3 กล่อง ดังนั้น

ข.1 P(กล่องว่าง 2 กล่อง) = 0

ข.2 เมื่อบอลเหมือนกัน กล่องจะว่าง 3 กล่อง ถ้าใส่บอลลงในกล่อง ๆ ละ 1 ลูก ซึ่ง

จะมีผลลัพธ์ $= \binom{12}{3}$

ดังนั้น

$$P(\text{กล่องว่าง 3 กล่อง}) = \frac{\binom{15}{3}}{\binom{26}{12}} = \frac{11!(14)}{25^{(10)}}$$

5. 5.1 $\sum_{k=0}^{20} (-1)^k \binom{20}{k}(20-k)^{20} = 20!$

5.2 $\sum_{k=0}^{20} \frac{20^{(k)}}{50^{(k)}} = \frac{50+1}{50-20+1} = \frac{51}{31}$

5.3 $\sum_{k=0}^{20} \binom{20}{k} = 2^{20}$

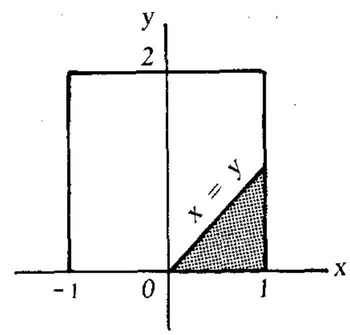
5.4 $\sum_{k=0}^{20}\binom{20}{k}^2 = \binom{40}{20}$

6. $P(X > Y) = \int_0^1\int_0^x \frac{7-2x-2y}{20}\,dy\,dx$

$= \int_0^1 \frac{7x-2x^2-x^2}{20}\,dx$

$= \frac{1}{20}\left[7\left(\frac{1}{2}\right)-3\left(\frac{1}{3}\right)\right]$

$= \frac{1}{8}$



7. ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมเงื่อนไขของ $X|Y = y$ กำหนดโดย

$$F(x|y) = \int_{-\infty}^{x} f(x|y)dx,\ 0 < x < 1,\ 0 < y < 2$$

$$\int_{-\infty}^{x} f(x|y)dx = \int_{\infty}^{y} \frac{f(x,\ y)}{h(y)}dx$$

$$= \frac{\frac{\partial F(x,\ y)}{\partial y}}{\frac{dF(1,\ y\ )}{dy}}$$

$$= \frac{\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{x^2y}{20}(4x+3y)\right]}{\frac{d}{dy}\left[\frac{y}{20}(4+3y)\right]} = \frac{x^2(4x+6y)}{4+6y}$$

ดังนั้น $F(x|y) = 0$, ถ้า $x < 0,\ 0 < y < 2$

$= \frac{x^2(2x+3y)}{2+3y}$, $0 \leqslant x < 1,\ 0 < y < 2$

$= 1$, $x \geqslant 1,\ 0 < y < 2$

8. 8.1 อาศัยคุณสมบัติฟังก์ชันหนาแน่นของ X จะได้

$$P(-1 < X \leqslant 0) = 1-P(0 < X \leqslant 1)-P(1 < X \leqslant 2)$$

นั่นคือ $P(X \leqslant 0) = 1-0.4-0.4 = 0.2$

X และ Y มีการแจกแจงรูปเดียวกัน ดังนั้น

$$P(Y \geqslant 1) = P(1 \leqslant x \leqslant 2) = 0.4$$

x และ Y เป็นอิสระกัน ดังนั้น

$$P(X \leqslant 0, Y \geqslant 1) = P(X \leqslant 0)P(Y \geqslant 1)$$

$$= (0.2)(0.4) = 0.08$$

8.2 $E|2X + 4Y - 9XY| = 2E(X) + 4E(Y) - 9E(XY)$

$$= 2\left(\frac{1}{3}\right) + 4\left(\frac{1}{3}\right) - 9E(X)E(Y)$$

$$= 2 - 9\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$= 1$$

9. $\text{Var}(2X + Y) = 4\text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 4\,\text{Cov}(X, Y) = 44$ ....(1)

$\text{Var}(X-2Y) = \text{Var}(X) + 4\text{Var}(Y) - 4\text{Cov}(X, Y) = 16$ ....(2)

$\text{Var}(X) = 2\text{Var}(Y)$ ....(3)

$(1) + (2) - 5(3)$ จะได้

$$15\ \text{Var}(Y) = 60$$

$$\text{Var}(Y) = 4 \Longrightarrow \text{Var}(X) = 8$$

แทนค่า Var(X), Var(Y) ใน (1) จะได้

$$\text{Cov}(X, Y) = \frac{44 - 32 - 4}{4} = 2$$

ดังนั้น ส.ป.ส. สหสัมพันธ์ระหว่าง X กับ Y จะเท่ากับ

$$\rho = \frac{2}{\sqrt{(4)(8)}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

10. $$E|Y|x| = \int_{-\infty}^{\infty} yf(y|x)dy = \int_{-\infty}^{\infty} y\frac{f(x, y)}{g(x)}dy$$

ดังนั้น $$\frac{1}{g(x)}\int_{-\infty}^{\infty} yf(x, y)dy = \mu_Y + \beta(x - \mu_X)$$

เอา xg(x) คูณทั้ง 2 ข้าง แล้ว integrate ตามค่าของ x จะได้

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x, y)dydx = \int_{-\infty}^{\infty} [\mu_Y xg(x) + \beta xg(x)(x - \mu_X)]dx$$

$$E(XY) = \mu_Y \int_{-\infty}^{\infty} xg(x)dx + \beta \int_{-\infty}^{\infty} x^2 g(x)dx - \beta\mu_X \int_{-\infty}^{\infty} xg(x)dx$$

$$E(XY) = \mu_Y \cdot \mu_X + \beta E(X^2) - \beta\mu_X \cdot \mu_X$$

$$E(XY) - \mu_X\mu_Y = \beta[E(X^2) - \mu_X^2]$$

$$\sigma_{XY} = \beta\sigma_X^2$$

$$\rho = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y} = \beta \cdot \frac{\sigma_X^2}{\sigma_X\sigma_Y}$$

$$\beta = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \cdot \rho$$

คำตอบชุดที่ 5

1. ก. A, B, C เป็นส่วนแบ่งของ S ดังนั้น

$$P(A) + P(B) + P(C) = P(S)$$

$$0.2 + 0.5 + P(C) = 1$$

$$P(C) = 1 - 0.7 = 0.3$$

$$P(F) = P(AF) + P(BF) + P(CF) = P(C)$$

$$P(BF) = \frac{0.3}{3} = 0.1$$

$$P(F|B) = \frac{P(BF)}{P(B)} = \frac{0.1}{0.5} = 0.2$$

ข. ดูเฉลยข้อ 6 ในแบบฝึกหัดที่ $1-3$

2. f(x) เป็นฟังก์ชันหนาแน่นของตัวแปรเชิงสุ่ม X ดังนั้น

$$\int_{-1}^{0} (x+1)dx + \int_{3}^{c} (2x-6)dx = 1$$

$$\frac{0-(-1)^2}{2} + (0+1) + (c^2 - 3^2) - 6(c-3) = 1$$

$$2c^2 - 12c + 17 = 0$$

$$c = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 - 4(2)(17)}}{2(2)} = 3 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\rightarrow \qquad c = 3 + \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad c > 3$$

3. $$\int_0^{\infty} |1 - F(x)|dx = \int_0^{\infty}\int_x^{\infty} f(t)dtdx$$

$$= \int_0^{\infty}\int_0^{t} f(t)dxdt$$

$$= \int_0^{\infty}\left[f(t)x\Big|_{x=0}^{t}\right]dt$$

$$= \int_0^{\infty} tf(t)dt$$

$$\Longrightarrow \int_0^{\infty} |1 - F(x)|dx = \int_0^{\infty} xf(x)dx = E(X)$$

4. ก. A_i = เหตุการณ์ที่จับคู่กันได้ในคู่ที่ i, $i = 1, 2$

A_1A_2 = เหตุการณ์ที่จับคู่กันได้ใน 2 คู่แรก

$$P(\text{จับคู่กันได้อย่างน้อย 1 คู่ใน 2 คู่แรก}) = P(A_1 \cup A_2)$$

$$= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2)$$

$$= \frac{1}{20} + \frac{1}{20} - \frac{1}{20(19)} = \frac{37}{380}$$

ข.1 $$\binom{100}{2} - \binom{100}{3} + \binom{100}{4} - \binom{100}{5} + \ldots = \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \binom{100}{k}$$

$$= \sum_{k=0}^{100} (-1)^k \binom{100}{k} - (-1)^0\binom{100}{0} - (-1)^1\binom{100}{1}$$

$$= 0 - 1 + 100$$

$$= 99$$

ข.2 $$1 + \frac{65}{99} + \frac{65^{(2)}}{99^{(2)}} + \frac{65^{(3)}}{99^{(3)}} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{65^{(k)}}{99^{(k)}}$$

$$= \frac{99+1}{99-65+1}$$

$$= \frac{20}{7}$$

5. ใส่บอลที่เหมือนกัน 26 ลูกลงในกล่อง 25 กล่องแบบสุ่ม

จะมีจำนวนผลลัพธ์ $= \binom{26+25-1}{26} = \dfrac{50^{(26)}}{26!}$

ให้ A_i เป็นเหตุการณ์ที่กล่อง i ว่าง, $i = 1, 2, \ldots, 25$
ซึ่งก็คือการใส่บอล 26 ลูก ลงในกล่อง 24 กล่องแบบสุ่ม ดังนั้น

$$\text{จำนวนผลลัพธ์ของ } A_i = \binom{26+24-1}{26} = \frac{49^{(26)}}{26!}$$

$$P(A_i) = \frac{\dfrac{49^{(26)}}{26!}}{\dfrac{50^{(26)}}{26!}} = \frac{49-25}{50} = \frac{12}{25}$$

ให้ X_i เป็นตัวแปรดัชนีของ A_i, $i = 1, 2, \ldots, 25$

$$X = \sum_{i=1}^{25} X_i = \text{จำนวนกล่องว่าง}$$

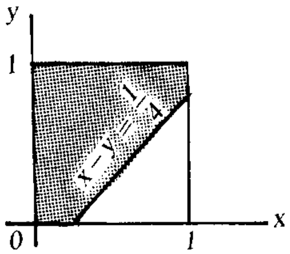
$$E(X) = E\left[\sum_{i=1}^{25} X_i\right] = \sum_{i=1}^{25} E(X_i) = \sum_{i=1}^{25} P(A_i)$$

นั่นคือ $$E(X) = \sum_{i=1}^{25} \frac{12}{25} = 12$$

6. X และ Y เป็นอิสระต่อกัน ดังนั้น

$$f(x, y) = 1, \quad 0 < x, y < 1$$
$$= 0, \quad \text{อื่น ๆ}$$

$$P\left(X - Y \leqslant \frac{1}{4}\right) = 1 - P\left(X - Y > \frac{1}{4}\right)$$



$$= 1 - \int_{\frac{1}{4}}^{1} \int_{0}^{x-\frac{1}{4}} dy\,dx$$

$$= 1 - \int_{\frac{1}{4}}^{1} \left(x - \frac{1}{4}\right) dx$$

$$= 1-\left[\frac{1-\frac{1}{16}}{2}-\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}\right)\right] = \frac{9}{32}$$

7. ดูทฤษฎี 4 ตำรา ST 311

8. 8.1 g(x) เป็นฟังก์ชันหนาแน่นทางเดียวของ X ดังนั้น

$$g(x) = \int_0^x \frac{1}{x}dy = \frac{x}{x},\ 0 \leqslant x < 1$$

$$g(x) = 1,\ 0 \leqslant x < 1$$

$$= 0,\ \text{อื่น ๆ}$$

8.2 $$E[Y|x] = \int_{-\infty}^{\infty} yf(y|x)dy$$

$$f(y|x) = \frac{\frac{1}{x}}{1} = \frac{1}{x},\quad 0 \leqslant y \leqslant x,\ 0 \leqslant x < 1$$

$$= 0,\ \text{อื่น ๆ}$$

ดังนั้น $$E[Y|x] = \int_0^x \frac{y}{x}dy$$

$$= \frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2} = \frac{x}{2},\ 0 \leqslant x < 1$$

9. $$\mathrm{Var}(X-Y) = E[(X-Y)^2]-(E[X-Y])^2$$

$$= 80-\left(\frac{80}{10}\right)^2 = 16$$

$$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)+2\ \mathrm{Cov}(X, Y)$$

$$= \mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)-2\ \mathrm{Cov}(X, Y)+4\ \mathrm{Cov}(X, Y)$$

$$= \mathrm{Var}(X-Y)+4\ \mathrm{Cov}(X, Y)$$

ค่าของความแปรปรวนมากกว่าหรือเท่ากับ 0 เสมอ ดังนั้น

$$16+4\ \mathrm{Cov}(X, Y) \geqslant 0$$

$$4\ \mathrm{Cov}(X, Y) \geqslant -16$$

$$\mathrm{Cov}(X, Y) \geqslant -4$$

10. $$E[Y^2|x] = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f(y|x)dy = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \frac{f(x, y)}{g(x)} dy$$

ดังนั้น $$\int_{-\infty}^{\infty} y^2 \frac{f(x, y)}{g(x)} dy = \sigma^2 + \mu_Y^2 - \beta^2\mu_X^2 + \beta^2 x^2$$

เอา g(x) คูณทั้ง 2 ข้าง แล้ว integrate ตามค่า x จะได้

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y^2 f(x, y)dydx = \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma^2 + \mu_Y^2 - \beta^2\mu_X^2 + \beta^2 x^2)g(x)dx$$

$$E(Y^2) = (\sigma^2 + \mu_Y^2 - \beta^2\mu_X^2)\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx + \beta^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 g(x)dx$$

$$E(Y^2) = \sigma^2 + \mu_Y^2 - \beta^2\mu_X^2 + \beta^2 E(X^2)$$

$$\sigma^2 = E(Y^2) - \mu_Y^2 - \beta^2[E(X^2) - \mu_X^2]$$

นั่นคือ $$\sigma^2 = \sigma_Y^2 - \beta^2\sigma_X^2$$

β เป็น ส.ป.ส. การถดถอยของ Y บน X ดังนั้น

$$\beta = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2}\cdot\frac{\sigma_Y}{\sigma_Y} = \rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$$

ดังนั้น $$\sigma^2 = \sigma_Y^2 - \left(\rho^2\frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2}\right)\sigma_X^2 = \sigma_Y^2(1-\rho^2)$$

พิมพ์ที่... สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยรามคำแหง
Ramkhamhaeng University Press.

เปลวเทียนให้แสง รามคำแหงให้ทาง

มหาวิทยาลัยรามคำแหง

28293111 7