$$= 2[(1+x)-1] = 2x, \quad 0 < x < 1$$

$$\mu_1 = \int_0^1 2x^2 dx = 2\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

$$E(X^2) = \int_0^1 2x^3 dx = 2\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}$$

$$\mu_2 = \int_0^1 \int_1^{1+x} 2y \, dy dx$$

$$= \int_0^1 [(1+x)^2 - 1] dx$$

$$= \int_0^1 (2x + x^2) dx = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

$$E(XY) = \int_0^1 x(2x + x^2) dx = 2\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{4} = \frac{11}{12}$$

$$E(Y^2) = \int_0^1 \int_1^{1+x} 2y^2 dy dx$$

$$= \int_0^1 2\frac{(1+x)^3 - 1}{3} dx = \frac{2}{3}\left[3\left(\frac{1}{2}\right) + 3\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{4}\right] = \frac{11}{6}$$

$$\sigma_2^2 = \frac{11}{6} - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}$$

$$\rho = \frac{\frac{11}{12} - \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{3}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{18}\right)\left(\frac{1}{18}\right)}} = \frac{1}{2}$$

$$\mu_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x - \mu_1) = \frac{4}{3} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{2}{3}\right) = 1 + \frac{1}{2}x$$

และ $$\sigma_2^2(1-\rho^2) = \frac{1}{18}\left(1-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{24}$$

$$E[Y|x] = \int_1^{1+x} y\frac{2}{2x}dy, \quad o < x < 1$$

$$= \frac{1}{2x}[(1+x)^2-1] = 1+\frac{x}{2}$$

แสดงว่า $$E[Y|x] = \mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1) \qquad \text{.........(7.1)}$$

$$E[Y^2|x] = \int_1^{1+x} y^2\cdot\frac{2}{2x}dy, \quad o < x < 1$$

$$= \frac{1}{x}\left[\frac{(1+x)^3-1}{3}\right] = \frac{3x+3x^2+x^3}{3x}$$

$$Var[Y|x] = \frac{3+3x+x^2}{3} - \left(\frac{2+x}{2}\right)^2, \quad 0 < x < 1$$

$$= \frac{1}{12}(12+12x+4x^2-12-12x-3x^2) = \frac{x^2}{12}$$

$$E[Var(Y|x)] = \int_0^1 \frac{x^2}{12}(2x)dx$$

$$= \frac{1}{6}\frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{24}$$

แสดงว่า $E[Var(Y|x)] = \sigma_2^2(1-\rho^2)$

8. กำหนดตัวแปรเชิงสุ่ม X และ Y ที่มีค่าเฉลี่ยภายใต้เงื่อนไขแบบเชิงเส้น $E(Y|x) = 4x+3$ และ $E(X|y) = \frac{1}{16}y-3$ อาศัยสูตรของค่าเฉลี่ยภายใต้เงื่อนไขแบบเชิงเส้น จงหาค่าของ $\mu_1, \mu_2, \rho, \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$

ถ้าค่าเฉลี่ยภายใต้เงื่อนไขเป็นฟังก์ชันเชิงเส้น จะได้

$$E(Y|x) = \mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1) = 4x+3 \qquad \text{..........(1)}$$

และ $$E[X|y] = \mu_1+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(y-\mu_2) = \frac{1}{16}y-3 \qquad \text{..........(2)}$$

จาก (1) $\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}x+\mu_2-\mu_1\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = 4x+3$

แสดงว่า $\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = 4$ ....(3)

และ $\mu_2-\mu_1\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \mu_2-4\mu_1 = 3$ ....(4)

จาก (2) $\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}y-\left(\mu_2\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}-\mu_1\right) = \frac{1}{16}y-3$

แสดงว่า $\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{1}{16}$ ....(5)

และ $\mu_2\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}-\mu_1 = \frac{1}{16}\mu_2-\mu_1 = 3$ ....(6)

(4) − 4(6) $\frac{3}{4}\mu_2 = -9$

$\mu_2 = -12$

$\Rightarrow \mu_1 = -\frac{15}{4}$

$\sqrt{(3)\times(5)}$ $\rho = \sqrt{\frac{4}{16}} = \frac{1}{2}$

$\sqrt{(3)\div(5)}$ $\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \sqrt{4(16)} = 8$

9. ให้ตัวแปรเชิงสุ่ม X และ Y มีฟังก์ชันความหนาแน่นร่วม $f(x, y) = 1, \ -x < y < x, 0 < x < 1$ นอกนั้นเป็น 0 จงหาค่าของ $E[Y|x]$ และ $E[X|y]$

$$g(x) = \int_{-x}^{x} dy = 2x, \ 0 < x < 1$$

$$f(y|x) = \frac{1}{2x}, \ -x < y < x, \ 0 < x < 1$$

$$= 0 \ , \ \text{อื่น ๆ}$$

$$\Rightarrow \quad E[Y|x] = \int_{-x}^{x} y\cdot\frac{1}{2x}dy, \ 0 < x < 1$$

$$= \frac{1}{4x}(x^2-x^2) = 0$$

$$h(y) = \int_{-y} dx = 1 + y, \quad -1 < y < 0$$

$$= \int_{y}^{1} dx = 1 - y, \quad 0 < y < 1$$

$$= 0 \quad , \text{อื่น ๆ}$$

$$f(x|y) = \frac{1}{1-|y|}, \quad |y| < x < 1, \quad -1 < y < 1$$

$$= 0 \text{ ,อื่น ๆ}$$

$$E[X|y] = \int_{|y|}^{1} \frac{x}{1-|y|} dx, \quad -1 < y < 1$$

$$= \frac{1\text{-}y^*}{2(1-|y|)}, \quad -1 < y < 1$$

10. กำหนด X_1, X_2 และ X_3 เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีค่าเฉลี่ย ความแปรปรวน และ ส.ป.ส.-สหสัมพันธ์ กำหนดโดย μ_1, μ_2, μ_3, a : , σ_2^2, a : และ $\rho_{12}, \rho_{13}, \rho_{23}$ตามลำดับ หาก

$$E(X_1 - \mu_1 | x_2, x_3) = b_2(x_2 - \mu_2) + b_3(x_3 - \mu_3)$$

ในเมื่อ b_2 และ b_3 เป็นค่าคงที่แล้ว

$$b_2 = \frac{\sigma_1(\rho_{12} - \rho_{13} \cdot \rho_{23})}{[\sigma_2(1-\rho_{23}^2)]}$$

$$b_3 = \frac{\sigma_1(\rho_{13} - \rho_{12} \cdot \rho_{23})}{[\sigma_3(1-\rho_{23}^2)]}$$

$$E(X_1 - \mu_1 | x_2, x_3) = \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - \mu_1) f(x_1 | x_2, x_3) dx_1$$

$$b_2(x_2 - \mu_2) + b_3(x_3 - \mu_3) = \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - \mu_1) \frac{f(x_1, x_2, x_3)}{f(x_2, x_3)} dx_1$$

$$b_2(x_2 - \mu_2) f(x_2, x_3) + b_3(x_3 - \mu_3) f(x_2, x_3) = \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - \mu_1) f(x_1, x_2, x_3) dx_1 \qquad \ldots\ldots\ldots(1)$$

$(1) \times (x_2 - \mu_2)$ แล้ว integrate ตามค่า x_2, x_3 ทั้ง 2 ข้าง จะได้

$$b_2 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x_2 - \mu_2)^2 f(x_2, x_3) dx_2 dx_3 + b_3 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x_2 - \mu_2)(x_3 - \mu_3) f(x_2, x_3) dx_2 dx_3$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)f(x_1,\ x_2,\ x_3)dx_1dx_2dx_3$$

$$b_2E[(X_2-\mu_2)^2]+b_3E[(X_2-\mu_2)(X_3-\mu_3)] \quad = \quad E[(X_1-\mu_1)(X_2-\mu_2)]$$

$$b_2\sigma_2^2 + b_3\frac{\sigma_{23}}{\sigma_2\sigma_3}\sigma_2\sigma_3 = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1\sigma_2}\cdot\sigma_1\sigma_2$$

$$b_2\sigma_2 + b_3\rho_{23}\sigma_3 = \rho_{12}\sigma_1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$(1)\times(x_3-\mu_3)$ แล้ว integrate ตามค่า x_2, x_3 ทั้ง 2 ข้าง จะได้

$$b_2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x_2-\mu_2)(x_3-\mu_3)f(x_2,x_3)dx_2dx_3+b_3\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x_3-\mu_3)^2f(x_2,x_3)dx_2dx_3$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x_1-\mu_1)(x_3-\mu_3)f(x_1,\ x_2,\ x_3)dx_1dx_2dx_3$$

$$b_2E[(X_2-\mu_2)(X_3-\mu_3)]+b_3E[(X_3-\mu_3)^2] = E[(X_1-\mu_1)(X_3-\mu_3)]$$

$$b_2\frac{\sigma_{23}}{\sigma_2\sigma_3}\cdot\sigma_2\sigma_3 + b_3\sigma_3^2 = \frac{\sigma_{13}}{\sigma_1\sigma_3}\sigma_1\sigma_3$$

$$b_2\rho_{23}\sigma_2+b_3\sigma_3 = \rho_{13}\sigma_1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

$(2)-\rho_{23}(3)$ จะได้

$$b_2\sigma_2(1-\rho_{23}^2) = \sigma_1(\rho_{12}-\rho_{13}\rho_{23})$$

$$\Longrightarrow \qquad b_2 = \frac{\sigma_1(\rho_{12}-\rho_{13}\rho_{23})}{\sigma_2(1-\rho_{23}^2)}$$

(3)-p,, (2) จะได้

$$b_3\sigma_3(1-\rho_{23}^2) = \sigma_1(\rho_{13}-\rho_{12}\rho_{23})$$

$$\Longrightarrow \qquad b_3 = \frac{\sigma_1(\rho_{13}-\rho_{12}\rho_{23})}{\sigma_3(1-\rho_{23}^2)}$$

แบบฝึกหัดระคน

1. จงแสดงให้เห็นจริงว่า

$$E[(X-c)^2] = Var(X)+(\mu-c)^2$$

ทุกค่าคงที่ c ในเมื่อ $\mu = E(X)$ และจงแสดงให้เห็นจริงว่า $E[(X-c)^2]$ จะมีค่าต่ำที่สุด เมื่อ $c = \mu$

$$\begin{aligned} E[(X-c)^2] &= E[(X-\mu+\mu-c)^2] \\ &= E[(X-\mu)^2+2(X-\mu)(\mu-c)+(\mu-c)^2] \\ &= E[(X-\mu)^2]+E[2(X-\mu)(\mu-c)]+E[(\mu-c)^2] \\ &= Var(X)+2(\mu-c)[E(X)-\mu]+(\mu-c)^2 \\ &= Var(X)+(\mu-c)^2 \end{aligned}$$

$$E[(X-c)^2] = \int_{-\infty}^{\infty}(x-c)^2 f(x)dx \quad \text{จะมีค่าต่ำสุด เมื่อ}$$

$$\frac{\partial}{\partial c}\int_{-\infty}^{\infty}(x-c)^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial c}[(x-c)^2 f(x)]dx = 0$$

นั่นคือ $-2\int_{-\infty}^{\infty}(x-c)f(x)dx = -2E(X)+2c = 0$

สรุปได้ว่า $E[(X-c)^2]$ จะมีค่าต่ำสุด เมื่อ $c = \mu$

2. x เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม ที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น f(x) กำหนดไว้โดย

$$f(x) = \frac{1}{3}, \quad -1 < x < 2$$

นอกนั้นเป็น 0

2.1 จงคำนวณค่าของ $E(5X^2+4X-7)$

2.2 จงแสดงให้เห็นจริงว่า

$$\begin{aligned} E(e^{tX}) &= \frac{e^{2t}-e^{-t}}{3t}, && t \neq 0 \\ &= 1, && t = 0 \end{aligned}$$

2.1 $E(X) = \int_{-1}^{2} \frac{x}{3} dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{2^2-(-1)^2}{2} = \frac{1}{2}$

$E(X^2) = \int_{-1}^{2} \frac{x^2}{3} dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{2^3-(-1)^3}{3} = 1$

$E(5X^2+4X-7) = 5E(X^2)+4E(X)-7$

$= 5(1)+4\left(\frac{1}{2}\right) -7 = 0$

2.2 $E(e^{tX}) = \int_{-1}^{2} y^{tx} d x$

$= \frac{1}{3t}\int_{-1}^{2} e^{tx} d(tx) = \frac{e^{2t}-e^{-t}}{3t}, t \neq 0$

$= \left.\frac{2e^{2t}+e^{-t}}{3}\right|_{t=0} = 1, t = 0$

3. อาศัยทฤษฎีเชปบีเชฟในการคำนวณค่าของ $E(5X+10)$ และ $Var(3-2X)$ ในเมื่อ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มี

$P(X \leqslant 4$ หรือ $X \geqslant 12) \leqslant \frac{1}{4}$

$P(X \leqslant 4$ หรือ $x \geqslant 12) \leqslant \frac{1}{4}$

$P(8-X \geqslant 4$ หรือ $X-8 \geqslant 4) \leqslant \frac{1}{4}$

$P(|X-8| \geqslant 4) \leqslant \frac{1}{4}$

อาศัยทฤษฎีเชปบีเชป จะได้ $\mu = 8$, $k\sigma = 4$ และ $1-\frac{1}{k^2} = \frac{1}{4}$

$\longrightarrow \quad \sigma^2 = \frac{4}{k^2} = 4\left(1-\frac{1}{4}\right) = 3$

$E(5X+10) = 5E(X)+10$

$= 5(8)+10 = 50$

$Var(3-2X) = 4Var(X)$

$= 4(3) = 12$

4. ถ้า

$$f(x) = \frac{1}{2}, \quad -1 < x < 0$$

$$= \frac{1}{4}, \quad 0 < x < 2$$

นอกนั้นเป็น 0 เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นของ x จงหา

4.1 $P(9X^2 \leqslant 1)$

4.2 $E(5X + 2)$

4.3 $Cov(X,\ 2X)$

4.1 $P(9X^2 \leqslant 1) = P\left(-\frac{1}{3} \leqslant X \leqslant \frac{1}{3}\right)$

$$= \int_{-\frac{1}{3}}^{0} \frac{1}{2}\,dx + \int_{0}^{\frac{1}{3}} \frac{1}{4}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(0 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} - 0\right) = \frac{1}{4}$$

4.2 $$E(X) = \int_{-1}^{0} \frac{x}{2}\,dx + \int_{0}^{2} \frac{x}{4}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{0-1}{2}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{4-0}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

$$E[5X+2] = 5\left(\frac{1}{4}\right) + 2 = 3\frac{1}{4}$$

4.3 $Cov(X,\ 2X) = E(2X^2) - E(X)E(2X)$

$$= 2E(X^2) - 2\{E(X)\}^2$$

$$= 2\left[\int_{-1}^{0} \frac{x^2}{2}\,dx + \int_{0}^{2} \frac{x^2}{4}\,dx\right] - 2\left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$= 2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{0+1}{3}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{8-0}{3}\right)\right] - \frac{1}{8} = \frac{37}{24}$$

5. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม ที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นกำหนดไว้โดย

$$f(x,\ y) = \frac{10x + 8y}{75}, \quad -1 < x < 2,\ 2 < y < 3$$

จงคำนวณค่าของ

5.1 $E(2X + 3Y)$, $E(5 - 4Y)$

5.2 $Var(2 - X)$, $Var(Y + Y^2)$

5.3 $Cov(4X, 5Y)$

5.4 $\rho_{X(X-Y)}$

$$E(X) = \int_2^3\int_1^2 x\frac{10x+8y}{75}dxdy$$

$$= \frac{1}{75}\int_2^3\left[10\left(\frac{8+1}{3}\right) + 4y(4-1)\right]dy$$

$$= \frac{1}{75}[30(3-2) + 6(9-4)] = \frac{4}{5}$$

$$E(XY) = \frac{1}{75}\int_2^3(30y + 12y^2)dy$$

$$= \frac{1}{75}[15(9-4) + 4(27-8)] = \frac{151}{75}$$

$$E(X^2) = \int_2^3\int_1^2 x^2\frac{10x+8y}{75}dxdy$$

$$= \frac{1}{75}\int_2^3\left[\frac{10}{4}(16-1) + \frac{8y}{3}(8+1)\right]dy$$

$$= \frac{1}{75}\left[\frac{75}{2}(3-2) + 12(9-4)\right] = \frac{13}{10}$$

$$E(Y) = \int_2^3\int_1^2 y\frac{10x+8y}{75}dxdy$$

$$= \frac{1}{75}\int_2^3[5y(4-1) + 8y^2(2+1)]dy$$

$$= \frac{1}{75}\left[\frac{15}{2}(9-4) + 8(27-8)\right] = \frac{379}{150}$$

$$E(Y^2) = \frac{1}{75}\int_2^3 (15y^2 + 24y^3)dy$$

$$= \frac{1}{75}[5(27-8)+6(81-16)] = \frac{97}{15}$$

$$E(Y^3) = \frac{1}{75}\int_2^3 (15y^3 + 24y^4)dy$$

$$= \frac{1}{25}\left[\frac{5}{4}(81-16) + \$243\text{-}32)\right] = \frac{8377}{500}$$

$$E(Y^4) = \frac{1}{75}\int_2^3 (15y^4 + 24y^5)dy$$

$$= \frac{1}{75}[3(243-32)+4(729-64)] = \frac{3293}{75}$$

5.1 $E(2X+3Y) = 2\left(\frac{4}{5}\right)+3\left(\frac{379}{150}\right) = 9.18$

$E(5-4Y) = 5-4\left(\frac{379}{150}\right) = -5.106$

5.2 $\mathrm{Var}(2-X) = \mathrm{Var}(X) = \frac{13}{10}-\left(\frac{4}{5}\right)^2 = 0.66$

$$\mathrm{Var}(Y+Y^2) = E[(Y-Y^2)^2]-\{E(Y+Y^2)\}^2$$

$$= E[Y^2+2Y^3+Y^4]-\{E(Y)+E(Y^2)\}^2$$

$$= \frac{97}{15}+2\left(\frac{8377}{500}\right)+\frac{3293}{75}-\left(\frac{379}{150}+\frac{97}{15}\right)^2 = \mathbf{3.011}$$

5.3 $\mathrm{Cov}(4X, 5Y) = E[(4X)(5Y)] - E(4X)E(5Y)$

$$= 20\left(\frac{151}{75}\right)-20\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{379}{150}\right) = -0.16$$

5.4 $\rho_{X(X-Y)} = \dfrac{\mathrm{Cov}(X, X-Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\,\mathrm{Var}(X-Y)}}$

$$\mathrm{Cov}(X, X-Y) = E[X(X-Y)]-E(X)E(X-Y)$$

$$= E(X^2-XY) \quad E(X)\{E(X) \quad E(Y)]$$

$$= E(X^2) \quad \{E(X)\}^2-[E(XY)-E(X)E(Y)]$$

$$= 0.66-(-.008) = .668$$

$$\mathrm{Var}(X-Y) = \mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)-2\mathrm{Cov}(X,Y)$$

$$= 0.66+\frac{97}{15}-\left(\frac{379}{150}\right)^2-2(-.008) = .758$$

$$\rho_{X(X-Y)} = \frac{.668}{\sqrt{(.66)(.758)}} = 0.94$$

6. กำหนดตัวแปรเชิงสุ่มที่มีการแจกแจงร่วม X กับ Y ซึ่งมีสมบัติว่า $Y = X^n$ และการแจกแจงแบบ marginal ของ X คือ $h(x) = \frac{1}{2}, \ -1 < x < 1$ นอกนั้นเป็น 0 จงแสดงให้เห็นจริงว่า
   6.1 สำหรับทุกค่า n ที่เป็นเลขคู่ ความแปรปรวนร่วมระหว่าง X กับ Y จะเป็น 0 นั่นย่อมแสดงว่า X กับ X^n ไม่มีสหสัมพันธ์กัน ทั้ง ๆ ที่ตามความเป็นจริงแล้ว X กับ X^n มีความสัมพันธ์กันอย่างยิ่ง
   6.2 เมื่อ n เป็นเลขคี่

$$\rho_{X\,X^n} = \frac{\sqrt{3(2n+1)}}{n+2}$$

จากผลที่ได้นี้สรุปว่า

หาก X กับ Y มีการพึ่งพิงเชิงเส้น กล่าวคือ Y = X แล้ว $\rho_{XY} = 1$

สำหรับค่า n โต ๆ, $n \to \infty$, X กับ Y เกือบจะไม่มีสหสัมพันธ์กัน

$$E(X) = \int_{-1}^{1} x\cdot\frac{1}{2}dx = \frac{1}{4}(1-1) = 0$$

$$E(Y) = E(X^n) = \int_{-1} x^n\cdot\frac{1}{2}dx = \frac{1}{2(n+1)}\{1-(-1)^{n+1}\}$$

$$E(Y) = \begin{cases} \frac{1}{n+1}, & n \text{ เป็นเลขคู่} \\ \quad , & n \text{ เป็นเลขคี่} \end{cases}$$

$$E(XY) = E(X^{n+1}) = \int_{-1}^{1}\frac{1}{2}x^{n+1}dx$$

$$= \frac{1}{2(n+2)}\{1-(-1)^{n+2}\} = \begin{cases} 0 & , n \text{ เป็นเลขคู่} \\ \frac{1}{n+2} & , n \text{ เป็นเลขคี่} \end{cases}$$

6.1 เมื่อ n เป็นเลขคู่

$$\text{Cov}(X,\ Y) \;=\; 0-(0)\left(\frac{1}{n+1}\right) \;=\; 0$$

แสดงว่า X กับ Y = X^n ไม่มีสหสัมพันธ์กัน ทั้ง ๆ ที่ X กับ X^n มีความสัมพันธ์กัน

6.2 เมื่อ n เป็นเลขคี่

$$\text{Cov}(X,\ Y) \;=\; \frac{1}{n+2}-(0)(0) \;=\; \frac{1}{n+2}$$

$$E(X^2) \;=\; \int_{-1}^{1}\frac{x^2}{2}dx \;=\; \frac{1}{6}(1+1) \;=\; \frac{1}{3}$$

$$\text{Var}(X) \;=\; \text{‘ j} - 0 \;=\; \frac{1}{3}$$

$$E(Y^2) \;=\; \int_{-1}^{1}\frac{x^{2n}}{2}dx \;=\; \frac{1-(-1)}{2(2n+1)} \;=\; \frac{1}{2n+1}$$

$$\text{Var}(Y) \;=\; \text{Var}(X^n) \;=\; \frac{1}{2n+1} - 0 \;=\; \frac{1}{2n+1}$$

$$\rho_{X\cdot X^n} \;=\; \frac{\dfrac{1}{n+2}}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{1}{2n+1}\right)}} \;=\; \frac{\sqrt{3(2n+1)}}{n+2}$$

ถ้า Y = X นั่นคือ n = 1 จะได้

$$\rho_{XY} \;=\; \frac{\sqrt{3(2+1)}}{1+2} \;=\; 1$$

แสดงว่า ถ้า X กับ Y มีการพึ่งพิงเชิงเส้น แล้ว $\rho_{XY} = 1$

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\sqrt{3(2n+1)}}{n+2}\right\} \;=\; \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\sqrt{3\left(\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)}}{1+\dfrac{2}{n}}\right\} \;=\; 0$$

สรุปได้ว่าสำหรับ n โต ๆ X กับ Y เกือบไม่มีสหสัมพันธ์กัน

7. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน และมีการแจกแจงรูปเดียวกันคือ

$$f(t) \;=\; .3e^{-.3t},\quad t \geqslant 0$$

7.1 จงคำนวณค่าของ $E(X+Y-XY)$ และ $Var(4X-5Y)$

7.2 จงแสดงให้เห็นจริงว่า $Cov\left(X+Y, \frac{X}{Y}\right) = \frac{10}{3}$

เฉลย

X และ Y เป็นอิสระต่อกัน และมีการแจกแจงรูปเดียวกัน

ดังนั้น $Cov(X, Y) = 0$

$$E\left(\frac{X}{Y}\right) = E(X)\,E\left(\frac{1}{Y}\right)$$

$$E(X) = \int_0^{\infty} .3xe^{-.3x}dx$$

$$= \frac{10}{3}\int_0^{\infty}(.3x)e^{-.3x}d(.3x)$$

$$= \frac{10}{3} = E(Y)$$

$$E(X^2) = \int_0^{\infty} .3x^2e^{-.3x}dx$$

$$= \frac{100}{9}\int_0^{\infty}(.3x)^2e^{-.3x}d(.3x)$$

$$= \frac{200}{9} = E(Y^2)$$

และ $Var(X) = Var(Y) = \frac{200}{9} - \left(\frac{10}{3}\right)^2 = \frac{100}{9}$

7.1 $E(X+Y-XY) = E(X)+E(Y)-E(X)E(Y)$

$$= \frac{10}{3} + \frac{10}{3} - \frac{100}{9} = -\frac{40}{9}$$

$Var(4X-5Y) = 16\,Var(X) + 25\,Var(Y) = \frac{4100}{9}$

7.2 $Cov\left(X+Y, \frac{X}{Y}\right) = E\left[(X+Y)\frac{X}{Y}\right] - E(X+Y)\,E\left(\frac{X}{Y}\right)$

$$= E(X^2)\,E\left(\frac{1}{Y}\right) + E(X) - \left[E(X)+E(Y)\right]E(X)\,E\left(\frac{1}{Y}\right)$$

$$\mathrm{Cov}\left(X+Y,\frac{X}{Y}\right) = \frac{200}{9}E\left(\frac{1}{Y}\right)+\frac{10}{3}-\left(\frac{10}{3}+\frac{10}{3}\right)\left(\frac{10}{3}\right)E\left(\frac{1}{Y}\right)$$
$$= \frac{10}{3}$$

8. ฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X กับ Y กำหนดไว้โดย

$$f(x, y) = e^{-y}, \quad 0 < x < y < \infty$$
$$= 0 \ , \quad \text{อื่น ๆ}$$

จงแสดงให้เห็นจริงว่า

8.1 $E(X) = Var(X) = Cov(X, Y) = 1$

8.2 ส.ป.ส. สหสัมพันธ์ระหว่าง X กับ Y คือ $\rho = \frac{\sqrt{2}}{2}$

8.1

$$E(X) = \int_0^\infty \int_0^y xe^{-y}dxdy$$
$$= \int_0^\infty e^{-y}\frac{x^2}{2}\Big|_{x=0}^{y} dy$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty y^2e^{-y}dy = \frac{1}{2}(2) = 1$$

$$E(XY) = \frac{1}{2}\int_0^\infty y^3e^{-y}dy = \frac{1}{2}(3!) = 3$$

$$E(X^2) = \int_0^\infty \int_0^y x^2e^{-y}dxdy$$
$$= \frac{1}{3}\int_0^\infty y^3e^{-y}dy = \frac{1}{3}(3!) = 2$$

$$Var(X) = 2-(1)^2 = 1$$

$$E(Y) = \int_0^\infty \int_0^y ye^{-y}dxdy$$
$$= \int_0^\infty y^2e^{-y}dy = 2$$

$\Rightarrow \text{Cov}(X, Y) = 3 - (1)(2) = 1$

แสดงว่า $E(X) = \text{Var}(X) = \text{Cov}(X, Y) = 1$

8.2 $$E(Y^2) = \int_0^{\infty} y^3 e^{-y} dy = 6$$

$$\text{Var}(Y) = 6 - (2)^2 = 2$$

$$\rho_{XY} = \frac{1}{\sqrt{(1)(2)}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

9. h(x) เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นของ X และ g(y|x) เป็นฟังก์ชันภายใต้เงื่อนไขของ Y เมื่อรู้ค่า X ซึ่งกำหนดโดย

$$h(x) = \frac{1}{2} \quad , \quad 0 < x < 2$$

$$g(y|x) = \frac{1}{x^2} \quad , \quad 0 < y < x^2, \; 0 < x < 2$$

จงหา

9.1 ฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X กับ Y

9.2 ฟังก์ชันหนาแน่นแบบ marginal ของ Y

9.3 ค่าคาดหมายภายใต้เงื่อนไขของ X กำหนดว่า Y = y

9.1 $$f(x, y) = h(x)g(y|x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2}, \; 0 < y < x^2, \; 0 < x < 2$$

ดังนั้น $$f(x, y) = \frac{1}{2x^2}, \quad 0 < y < x^2, \; 0 < x < 2$$
$$= 0 \quad , \text{ อื่น ๆ}$$

9.2 ถ้า g(y) เป็นฟังก์ชันหนาแน่นแบบ marginal ของ Y

$$g(y) = \int_{\sqrt{y}}^{2} \frac{1}{2x^2} dx, \; 0 < y < 2$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{y}} \right)$$

$$g(y) = \frac{2 - \sqrt{y}}{4\sqrt{y}}, \; 0 < y < 2$$
$$= 0, \quad \text{อื่น ๆ}$$

9.3 $$f(x|y) = \frac{\frac{1}{2x^2}}{\frac{2-\sqrt{y}}{4\sqrt{y}}} = \frac{2\sqrt{y}}{2-\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{x^2}, \quad \sqrt{y} < x < 2,\ 0 < y < 2$$

$$= 0, \text{ อื่น ๆ}$$

$$E[X|y] = \int_{\sqrt{y}}^{2} \frac{2\sqrt{y}}{2-\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{2\sqrt{y}}{2-\sqrt{y}} (\text{In } 2\text{-h } \sqrt{y}),\ 0 < y < 2$$

$$= \frac{2\sqrt{y}}{2-\sqrt{y}} \ln\left(\frac{2\sqrt{y}}{y}\right),\ 0 < y < 2$$

10. กำหนด

$$f(x, y) = 2,\ 0 < x < y < 1$$

นอกนั้นเป็น 0 เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X กับ Y จงแสดงให้เห็นจริงว่า

10.1 ค่าคาดหมายภายใต้เงื่อนไข จะเท่ากับ $\frac{1+x}{2}$, $0 < x < 1$ และ $\frac{y}{2}, 0 < y < 1$ ตามลำดับ

10.2 ค่าความแปรปรวนภายใต้เงื่อนไข จะเท่ากับ $\frac{(1-x)^2}{12}$, $0 < x < 1$ และ $\frac{y^2}{12}$, $0 < y < 1$ ตามลำดับ

10.3 ส.ป.ส. สหสัมพันธ์ระหว่าง X กับ Y คือ $\rho = 0.5$

$$g(x) = \int_x^1 2dy = 2(1-x),\ 0 < x < 1$$

$$= 0 \quad , \text{ อื่น ๆ}$$

$$E(i) = \int_0^1 2x(1-x)dx = 1-2\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

$$E(X^2) = \int_0^1 2x^2(1-x)dx = 2\left(\frac{1}{3}\right) - 2\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{6}$$

$$Var(X) = \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}$$

$$f(y|x) = \frac{2}{2(1-x)} = \frac{1}{1-x},\quad x < y < 1,\quad 0 < x < 1$$

$$= 0 \quad , \text{ อื่น ๆ}$$

$$E[Y|x] = \int_x^1 \frac{y}{1-x}dy, \quad 0 < x < 1$$

$$\frac{1}{1-x} \cdot \frac{y^2}{2}\Big|_{y=x}^{1}$$

$$= \frac{1-x^2}{2(1-x)} = \frac{1+x}{2}, \quad 0 < x < 1$$

$$E[Y^2|x] = \int_x^1 \frac{y^2}{1-x}dy, \quad 0 < x < 1$$

$$\frac{1}{1-x} \cdot \frac{y^3}{3}\Big|_{y=x}^{1}$$

$$= \frac{1-x^3}{3(1-x)} = \frac{1}{3}(1+x+x^2), \quad 0 < x < 1$$

$$Var(Y|x) = \frac{1}{3}(1+x+x^2) - \left(\frac{1+x}{2}\right)^2, \quad 0 < x < 1$$

$$= \frac{1}{12}(4+4x+4x^2-3-6x-3x^2)$$

$$= \frac{1}{12}(1-2x+x^2) = \frac{(1-x)^2}{12}, \quad 0 < x < 1$$

$$h(y) = \int_0^y 2dx = 2y, \quad 0 < y < 1$$

$$= 0, \quad \text{อื่น ๆ}$$

$$E(Y) = \int_0^1 2y^2 dy = 2\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

$$E(Y^2) = \int_0^1 2y^3 dy = 2\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

$$Var(Y) = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}$$

$$f(x|y) = \frac{2}{2y} = \frac{1}{y}, \quad 0 < x < y, \quad 0 < y < 1$$

$$= 0, \quad \text{อื่น ๆ}$$

$$E[X|y] = \int_0^y \frac{x}{y}dx$$

$$= \frac{1}{y}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_{x=0}^{y} = \frac{y}{2},\ 0 < y < 1$$

$$E[X^2|y] = \int_0^y \frac{x^2}{y}\,dx$$

$$= \frac{1}{y}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_{x=0}^{y} = \frac{y^2}{3},\ 0 < y < 1$$

$$\Rightarrow \quad Var(X|y) = \frac{y^2}{3} - \left(\frac{y}{2}\right)^2 = \frac{y^2}{12},\ 0 < y < 1$$

$$E(XY) = \int_0^1\int_0^y 2xy\ dxdy$$

$$= \int_0^1 y(y^2 - 0)dy = \frac{1}{4}$$

$$Cov(X,\ Y) = \frac{1}{4}\left(-\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{36}$$

$$\Rightarrow \quad \rho_{XY} = \frac{\frac{1}{36}}{\sqrt{\left(\frac{1}{18}\right)\left(\frac{1}{18}\right)}} = \frac{1}{2}$$

11. ฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X กับ Y คือ

$$f(x,\ y) = \frac{1}{\pi},\ x^2 + y^2 \leqslant 1$$

คำนวณค่าคาดหมายของ $Z = X^2 + Y^2$ โดย

11.1 หาฟังก์ชันความหนาแน่นของ Z แล้วคำนวณค่าของ E(Z)

11.2 หาค่า $E(X^2 + Y^2)$

11.1 $F(z) = P(Z \leqslant z)$

$$= P(X^2 + Y^2 \leqslant z),\ 0 \leqslant z < 1$$

$$= \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}}\int_{-\sqrt{z-y^2}}^{\sqrt{z-y^2}} \frac{1}{\pi}\,dxdy$$

$$= \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} \frac{1}{\pi}\left(\sqrt{z-y^2} + \sqrt{z-y^2}\right)dy$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{y}}\sqrt{z-y^2}\,dy$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\left\{\frac{\sqrt{z}}{2}\sqrt{z-z}+\frac{z}{2}\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{z}}\right)\right\}-\left\{\frac{-\sqrt{z}}{2}\sqrt{z-z}+\frac{z}{2}\sin^{-1}\left(\frac{-\sqrt{z}}{\sqrt{z}}\right)\right\}\right]$$

$$\frac{dF}{dz}(z) = \frac{d}{dz}\left[\frac{2}{\pi}\left(\frac{z}{2}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{z}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right] = 1$$

ฟังก์ชันหนาแน่นของ $Z = X^2+Y^2$ ก็คือ

$$f(z) = 1, \quad 0<z<1$$
$$= 0, \quad \text{อื่น ๆ}$$

$$E(Z) = \int_0^1 z\,dz = \frac{1}{2}$$

11.2 $E(X^2+Y^2) = \displaystyle\int\int_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{x^2+y^2}{\pi}dxdy$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1\frac{r^2}{\pi}r\,dr\,d\theta, \quad x = r\sin\theta, \quad y = r\cos\theta$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}d\theta$$

$$= \frac{1}{4\pi}\cdot 2\pi$$

$$= \frac{1}{2}$$

12. ฟังชันความหนาแน่นร่วมของ X กับ Y คือ

$$f(x, y) = \frac{1}{x}, \quad 0<y<x<1$$

จงแสดงให้เห็นจริงว่า

12.1 ค่าคาดหมายภายใต้เงื่อนไข จะเท่ากับ $\frac{x}{2}, 0<x<1$ และ $\frac{(y-1)}{\ln y}, 0<y<1$ ตามลำดับ

12.2 ความแปรปรวนภายใต้เงื่อนไขของ Y กำหนดว่า $X = x$ จะเท่ากับ $\frac{x^2}{12}, 0<x<1$

12.3 ส.ป.ส. สหสัมพันธ์ระหว่าง X กับ Y คือ $\rho = \sqrt{\frac{3}{7}}$

$$g(x) = \int_0^x \frac{1}{x}dy, \quad 0 < x < 1$$

$$= \frac{1}{x}y\Big|_{y=0}^{x} = 1, \quad 0 < x < 1$$

$$= 0, \text{ อื่น ๆ}$$

$$h(y) = \int_y^1 \frac{1}{x}dx, \quad 0 < y < 1$$

$$= \ln x\Big|_y^1 = -\ln y, \quad 0 < y < 1$$

$$= 0, \text{ อื่น ๆ}$$

12.1 $$f(y|x) = \frac{1}{x}, \quad 0 < y < x, 0 < x < 1$$

$$= 0, \text{ อื่น ๆ}$$

$$\Longrightarrow E(Y|x) = \int_0^x y\frac{1}{x}dy, \quad 0 < x < 1$$

$$= \frac{1}{x}\cdot\frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{x} = \frac{x}{2}, \quad 0 < x < 1$$

$$f(x|y) = \frac{\frac{1}{x}}{-\ln y} = -\frac{1}{x\ln y}, \quad y < x < 1, 0 < y < 1$$

$$= 0, \text{ อื่น ๆ}$$

$$\Longrightarrow E(X|y) = \int_y^1 -\frac{1}{\ln y}dx, \quad 0 < y < 1$$

$$= -\frac{1}{\ln y}x\Big|_{x=y}^{1} = \frac{y-1}{\ln y}, \quad 0 < y < 1$$

12.2 $$E(Y^2|x) = \int_0^x \frac{y^2}{x}dy, \quad 0 < x < 1$$

$$= \frac{1}{x}\cdot\frac{y^3}{3}\Big|_{y=0}^{x} = \frac{x^2}{3}, \quad 0 < x < 1$$

$$\Longrightarrow Var(Y|x) = \frac{x^2}{3} - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{12}, \quad 0 < x < 1$$

12.3 $E(X) = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

$$Var(X) = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}$$

$$E(Y) = \int_0^1 -y \ln y \, dy$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\infty} (2u)e^{-2u} d(2u) = \frac{1}{4}$$

$$E(Y^2) = \int_0^1 -y^2 \ln y dy$$

$$= \frac{1}{9}\int_0^{\infty} (3u)2^{-3u} d(3u) = \frac{1}{9}$$

$$Var(Y) = \frac{1}{9} - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{7}{144}$$

$$E(XY) = \int_0^1 \int_0^x \frac{xy}{x} dydx$$

$$= \int_0^1 \frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{x} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^2}{2} dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}$$

$$Cov(X, Y) = \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{24}.$$

$$\rho_{XY} = \frac{\frac{1}{24}}{\sqrt{\left(\frac{1}{12}\right)\left(\frac{7}{144}\right)}} = \sqrt{\frac{3}{7}}$$

13. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นร่วม กำหนดไว้โดย

$$f(x, y) = \frac{1}{2x}, \quad 0 < y < x < 1$$

$$= 1 \quad , \quad 0 < x < y < 1$$

นอกนั้นเป็น 0 จงแสดงให้เห็นจริงว่า

13.1 ค่าคาดหมายของ X และของ Y จะเท่ากับ $\frac{5}{12}$ และ $\frac{11}{24}$ ตามลำดับ

13.2 $P(X > 2Y) = \frac{1}{4}$, $P\left(\frac{1}{2} \leqslant Y \leqslant \frac{3}{2} \middle| X = \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

13.3 ค่าคาดหมายภายใต้เงื่อนไขของ X กำหนดว่า Y = y คือ

$$E(X|y) = \frac{y^2 - y + 1}{2y - \ln y}, \; 0 < y < 1$$

เฉลย

13.1 $$E(X) = \int_0^1 \int_y^1 x\left(\frac{1}{2x}\right) dxdy + \int_0^1 \int_0^y xdxdy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (1 - y)dy + \int_0^1 \frac{y^2}{2}dy$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{12}$$

$$E(Y) = \int_0^1 \int_0^x \frac{y}{2x} dydx + \int_0^1 \int_0^y y \; dxdy$$

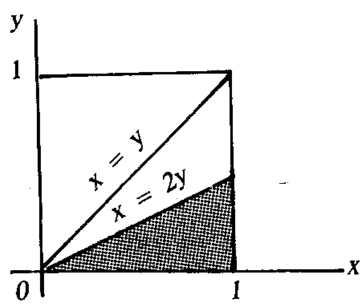
$$= \int_0^1 \frac{1}{2x}\left(\frac{x^2}{2}\right)dx + \int_0^1 y(y)dy$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} = \frac{11}{24}$$

13.2 $$P(X > 2Y) = \int_0^1 \int_0^{\frac{x}{2}} \frac{1}{2x} \cdot dydx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2x}\left(\frac{x}{2} - 0\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}$$



$$g(x) = \int_0^x \frac{1}{2x}dy + \int_x^1 dy, \ 0 < x < 1$$

$$= \frac{1}{2x}(x) + (1-x), \ 0 < x < 1$$

$$f(y|x) = \frac{1}{x(3-2x)}, \quad 0 < y < x, \ 0 < x < 1$$

$$= \frac{2}{3-2x}, \quad x < y < 1, \ 0 < x < 1$$

$= 0$, อื่น ๆ

$$f\left(y \middle| \frac{1}{2}\right) = 1 \quad , \quad 0 < y < 1$$

$= 0$, อื่น ๆ

$$P\left(\frac{1}{2} \leqslant Y \leqslant \frac{3}{2} \middle| X = \frac{1}{2}\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} f\left(y \middle| \frac{1}{2}\right) dy$$

$$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

13.3 $$h(y) = \int_y^1 \frac{1}{2x}dx + \int_0^y dx \quad , \quad 0 < y < 1$$

$$= -\frac{1}{2}\ln y + y \quad , \quad 0 < y < 1$$

$= 0$, อื่น ๆ

$$f(x|y) = \frac{1}{x(2y - \ln y)} \quad , \quad y < x < 1, \ 0 < y < 1$$

$$= \frac{2}{2y - \ln y} \quad , \quad 0 < x < y, \ 0 < y < 1$$

$= 0$, อื่น ๆ

$$E(X|y) = \int_y^1 \frac{x}{x(2y - \ln y)}dx + \int_0^y \frac{2x}{2y - \ln y}dx, \ 0 < y < 1$$

$$= \frac{1-y}{2y - \ln y} + \frac{y^2}{2y - \ln y}, \ 0 < y < 1$$

$$= \frac{y^2 - y + 1}{2y - \ln y}, \ 0 < y < 1$$

14. หยิบไพ่ 1 ใบอย่างสุ่ม จากสำรับไพ่ที่มี n ใบ หมายเลข 1, 2,...,n หากไพ่ที่หยิบได้เป็นหมายเลข k ให้หยิบไพ่ใบที่ 2 อย่างสุ่มในจำนวนไพ่หมายเลข 1, 2,...,k กำหนดตัวแปรเชิงสุ่ม Y เป็นหมายเลขบนไพ่ที่หยิบได้ในครั้งแรก และ X เป็นหมายเลขที่หยิบได้ในครั้งที่ 2 จงแสดงให้เห็นจริงว่า

$$E(X) = \frac{n+3}{4}$$

14.1 โดยหาฟังก์ชันน่าจะเป็นร่วม $f(x, y)$ แล้วคำนวณค่าของ $E(X)$

14.2 โดยหาฟังก์ชันภายใต้เงื่อนไข $g(x|y = k)$ และฟังก์ชันความหนาแน่นแบบ marginal $h_Y(k)$ แล้วคำนวณค่า $E(X|Y = k)$ และ $E(X)$

เฉลย Y = หมายเลขบนไพ่ที่หยิบได้ในครั้งแรก

$$P(Y = k) = \frac{1}{n}, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$
$$= 0 \ , \quad \text{อื่น ๆ}$$

X = หมายเลขที่หยิบได้ในครั้งที่ 2

$$P(X = x|Y = k) = \frac{1}{k}, \quad x = 1, 2, \ldots, k$$
$$= 0 \ , \quad \text{อื่น ๆ}$$

14.1 $P(X = x, Y = y) = P(X = x|Y = y)P(Y = y)$

$$f(x, y) = \frac{1}{ny}, \quad x = 1, 2, \ldots, y, \quad y = 1, 2, \ldots, n$$
$$= 0 \ , \quad \text{อื่น ๆ}$$

$$E(X) = \sum_{y=1}^{n} \sum_{x=1}^{y} \frac{x}{ny}$$

$$= \sum_{y=1}^{n} \frac{1}{ny}\left[\frac{y}{2}(1+y)\right]$$

$$= \frac{1}{2n}\left[n + \frac{n}{2}(1+n)\right]$$

$$= \frac{3+n}{4}$$

14.2 $g(x|y = k) = P(X = x|Y = k) = \frac{1}{k}, \quad x = 1, 2, \ldots, k$

$$= 0 \ , \quad \text{อื่น ๆ}$$

$$E[X|Y = k] = \sum_{x=1}^{k} \frac{x}{k}, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

$$= \frac{1}{k}\left(\frac{k}{2}(1+k)\right) = \frac{1+k}{2}$$

$$h_Y(k) = P(Y = k) = \frac{1}{n}, \ k = 1, 2, \ldots, n$$
$$= 0, \quad \text{อื่น ๆ}$$

$$E[E(X|Y = k)] = \sum_{\forall Y} E(X|Y = k)h_Y(k)$$

$$\Longrightarrow \qquad E(X) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1+k}{2} \cdot \frac{1}{n}$$

$$E(X) = \frac{1}{2n}\left[n + \frac{n}{2}(1+n)\right] = \frac{3+n}{4}$$

15. X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบผสม ที่มีฟังก์ชันการแจกแจงสะสม $F(x)$ กำหนดไว้โดย

$$
\begin{aligned}
F(x) &= 0 && , \ x < 0 \\
&= \frac{x^2}{4} && , \ 0 \leqslant x < 1 \\
&= \frac{1}{2} && , \ 1 \leqslant x < 2 \\
& \ \ \frac{x}{3} && , \ 2 \leqslant x < 3 \\
&= 1 && , \ 3 \leqslant x
\end{aligned}
$$

จงหาค่าคาดหมายและความแปรปรวนของ x

ในที่นี้ F เป็นแบบผสมของ G กับ H โดยที่

$$F(x) = pG(x) + (1-p)H(x), \ 0 < P < 1$$

พิจารณาจาก F จะเห็นว่า ตัวแปรไม่ต่อเนื่อง เกิดขึ้นตรงจุดที่ $x = 1$ และ $x = 2$

ถ้าเรามี $H(x)$ เป็น

$$
\begin{aligned}
H(x) &= 0 && , \ x < o \\
&= kx^2 && , \ 0 \leqslant x < 1 \\
&= k && , \ 1 \leqslant x < 2 \\
&= (1-k)x + 3k - 2, && \ 2 \leqslant x < 3 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

จากสมการของ F(x) เราจะได้

$$(1-p)k = \frac{1}{4}$$

และ $$(1-p)(1-k) = \frac{1}{3}$$

ดังนั้น $$1-p = \frac{1}{3}+\frac{1}{4} = \frac{7}{12} \text{ และ } p = \frac{5}{12}$$

$$k = \frac{1}{4}\cdot\frac{12}{7} = \frac{3}{7}$$

จากสมการ F(x) เมื่อ $1 \leqslant x < 2$ จะได้

$$\frac{5}{12}G(1)+\frac{7}{12}\left(\frac{3}{7}\right) = \frac{1}{2}$$

$$G(1) = \frac{12}{5}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{5}$$

ค่าคาดหมายของ X = E(X)

$$E(X) = \frac{5}{12}\sum_{x=1}^{2} x[G(x)-G(x-1)] + \frac{7}{12}\int_0^3 x\,dH(x)$$

$$= \frac{5}{12}\left[\frac{3}{5}+2\left(\frac{2}{5}\right)\right]+\frac{7}{12}\left[\int_0^1 x\left(\frac{6}{7}x\right)dx+\int_2^3 x\left(\frac{4}{7}\right)dx\right]$$

$$= \frac{7}{12}+\frac{7}{12}\left[\frac{2}{7}+\frac{2}{7}(9-4)\right]$$

$$= \frac{19}{12}$$

ความแปรปรวนของ X = Var(X) = $E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$$E(X^2) = \frac{5}{12}\left(\frac{3}{5}+\frac{8}{5}\right)+\frac{7}{12}\left[\int_0^1 \frac{6}{7}x^3dx+\int_2^3 \frac{4}{7}x^2dx\right]$$

$$= \frac{11}{12}+\frac{7}{12}\left[\frac{6}{7}\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{4}{7}\left(\frac{27-8}{3}\right)\right]$$

$$\text{Var}(X) = \frac{227}{72}-\left(\frac{19}{12}\right)^2 = \frac{31}{48}$$

16. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน μ_X, μ_Y, σ_X^2 และ σ_Y^2 เป็นค่าเฉลี่ยและความแปรปรวน ตามลำดับ หาก U = XY และ V = $\frac{X}{Y}$ จงแสดงให้เห็นจริงว่า

16.1 $\sigma_U^2 = \sigma_X^2 \cdot \sigma_Y^2 + \mu_X^2 \cdot \sigma_Y^2 + \mu_Y^2 \cdot \sigma_X^2$

16.2 $\sigma_{UV} = \sigma_X^2 + \mu_X^2(1 - \mu_X \mu_{\frac{1}{Y}})$

16.1 $\sigma_U^2 = E[U^2] - \{E(U)\}^2$

$= E[X^2Y^2] - \{E(XY)\}^2$

$= E(X^2)E(Y^2) - \{E(X)E(Y)\}^2$, X และ Y เป็นอิสระกัน

$= [(\sigma_X^2 + \mu_X^2)(\sigma_Y^2 + \mu_Y^2)] - \mu_X^2\mu_Y^2$

$= \sigma_X^2\sigma_Y^2 + \mu_X^2\sigma_Y^2 + \mu_y^2\sigma_X^2$

16.2 $\sigma_{UV} = E(UV) - E(U)E(V)$

$= E\left[(XY)\left(\frac{X}{Y}\right)\right] - E(XY)E\left(\frac{X}{Y}\right)$

$= E(X^2) - \{E(X)E(Y)\}\left\{E(X)E\left(\frac{1}{Y}\right)\right\}$, X และ Y เป็นอิสระกัน

$= \sigma_X^2 + \mu_X^2 - \mu_X^2\mu_Y\mu_{\frac{1}{Y}}$

$= \sigma_X^2 + \mu_X^2(1 - \mu_Y\mu_{\frac{1}{Y}})$

แบบทดสอบ

ชุดที่ 1

1. ก. A และ B เป็นเหตุการณ์ที่เป็นอิสระต่อกัน ถ้า $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.2$ จงหาค่า $P(A \cup B)$ และ $P(B'|A)$

   ข. เลือกจุดแบบสุ่ม 2 จุดบนเส้นตรง คือ จุด a และ b โดยที่ $0 < a < 3$, $0 < b < 3$ จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้ผลบวกของ a^2 กับ b^2 มีค่าน้อยกว่า 1

2. X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันหนาแน่น

$$f(x) = \frac{2x+3}{12} \quad , \quad -1 < x \leqslant 2$$
$$= 0 \quad , \quad \text{อื่น ๆ}$$

   จงหาฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ X

3. จงหาค่า a และ b ที่ทำให้

$$F(x) = \frac{x^2}{2} \quad , \quad 0 \leqslant x < 1$$
$$= \frac{ax - x^2 - b}{2} \quad , \quad 1 \leqslant x < 2$$
$$= 1 \quad , \quad x \geqslant 2$$

   เป็นฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแปรเชิงสุ่ม X

4. ก. ในการทำข้อสอบแบบจับคู่ ที่มีจำนวนคำถาม = จำนวนคำตอบ = 20 ความน่าจะเป็นที่จะทำข้อที่ 1 และข้อที่ 2 ถูกต้อง = ...

   ข. มหาวิทยาลัยเปิดรับสมัครงาน 10 ตำแหน่ง มีคนมาสมัคร 21 คน ค่าคาดหมายของจำนวนตำแหน่งที่ไม่มีผู้ใดมาสมัคร (ไม่สนใจว่าผู้สมัครเป็นใคร) จะเท่ากับ...................
   ....

   ค. ค่าประมาณของ

$$\sum_{k=0}^{20} \binom{20}{k}^2 = \qquad\qquad \sum_{k=0}^{20} \frac{20^{(k)}}{35^{(k)}} =$$

5. กล่องใบหนึ่งบรรจุบอล 90 ลูก เป็นสีขาว 20 ลูก นอกนั้นเป็นสีดำ ให้ X เป็นจำนวนครั้งที่สุ่มบอลจากกล่องแบบใส่กลับคืน จนกว่าจะได้บอลสีขาว จงหา

5.1 ฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X

5.2 อาศัยผลจาก (5.1) จงแสดงให้เห็นจริงว่า $F(x) = 1-\left(\frac{7}{9}\right)^x$

6. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน $g(x)$, $h(y)$ เป็นฟังก์ชันหนาแน่นทางเดียวของ X และ Y ตามลำดับ ถ้า

$$g(x) = \frac{x}{4},\ 1 < x \leqslant 3 \text{ และ } h(y) = \frac{1}{2},\ 0 < y \leqslant 2$$

นอกนั้นเป็น 0 จงหา

6.1 ฟังก์ชันหนาแน่นร่วมของ X กับ Y

6.2 $P(X+Y \leqslant 2)$

7. ถ้า $F(x, y) = \frac{x}{16}(y-2)(10-y-x),\ 0 < x < 2,\ 2 < y < 4$ เป็นฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วมของ X และ Y

7.1 จงหาฟังก์ชันหนาแน่นทางเดียวของ X

7.2 จงหา $P(-1 < X \leqslant 1,\ 1 < Y \leqslant 3)$

8. ก. ถ้า $f(x|y)$ เป็นฟังก์ชันหนาแน่นเงื่อนไขของ $X|Y = y$ จงแสดงให้เห็นจริงว่า $f(x|y)$ มีคุณสมบัติของฟังก์ชันน่าจะเป็น

ข. ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันหนาแน่นของ X, k เป็นค่าคงที่ใด ๆ จงแสดงให้เห็นจริงว่า $E[k] = k$

9. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน และมี $Var(2X+Y) = 28$, $Var(X-Y) = 12$ จงแสดงให้เห็นจริงว่า ส.ป.ส. สหสัมพันธ์ระหว่าง X กับ X−Y จะเท่ากับ $\frac{2}{3}$

10. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันการแจกแจงร่วม ถ้า $E[Y|X = x] = \mu_Y + \beta x$ จงแสดงให้เห็นจริงว่า $\beta = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2 + \mu_X^2}$

ชุดที่ 2

1. ก. ถ้า $A_k = \left\{x : 1+\frac{1}{k} \leqslant x \leqslant 5+\frac{1}{k}\right\}$, $x = 1, 2, 3, \ldots$ จงหา $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ และ $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$

ข. A และ B เป็นเหตุการณ์ที่เป็นอิสระต่อกัน $A \cup B$ กับ C เป็นเหตุการณ์ที่ขจัดกัน ถ้า $A \cup B \cup C = S$ และ $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.4$ จงหาค่าของ $P(C)$

2. ถ้า $f(x) = \frac{3x^2-1}{6}, \quad -1 < x < 2$

$\quad = 0 \quad$, อื่น ๆ

จงพิจารณาว่า f(x) เป็นฟังก์ชันหนาแน่นของตัวแปรเชิงสุ่ม X หรือไม่ เพราะเหตุใด

3. X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันการแจกแจงสะสม

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \ x < 0 \\ \frac{x}{8} & , \ 0 \leqslant x < 2 \\ \frac{x^2}{16} & , \ 2 \leqslant x < 4 \\ 1 & , \ x \geqslant 4 \end{cases}$$

จงหามัธยฐานของ X และ $P(1 < X \leqslant 3)$

4. ก. ในปัญหาการจับคู่ที่มี $n > 2$ กำหนดตัวแปรเชิงสุ่ม X เป็นจำนวนคู่ที่จับคู่กันได้ใน 2 ตำแหน่งแรก จงหาค่าคาดหมายของ X และ $P(X = 2)$

ข. ใส่บอล 20 ลูกลงในกล่อง 25 กล่องแบบสุ่ม

ข.1 จงหาความน่าจะเป็นที่จะมีกล่องว่าง 5 กล่อง ถ้าบอลเหมือนกัน

ข.2 ถ้าบอลต่างกัน จงหาค่าคาดหมายของจำนวนกล่องว่าง

5. จงประมาณค่าของ

5.1 $\sum_{k=0}^{30} (-1)^k \binom{30}{k} (30-k)^{25} =$

5.2 $\sum_{k=0}^{30} (-1)' \binom{30}{k} 25^{30-k} =$

5.3 $\sum_{k=1}^{30} \frac{25(30)^{k-1}}{55^k} =$

5.4 $\sum_{k=1}^{30} \frac{30^{(k)}}{55^{(k)}} =$ ....

6. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันหนาแน่นร่วม

$f(x, y) = \frac{1}{8}(x+y) \ , \quad 0 \leqslant x, y \leqslant 2$

$\quad = 0 \quad$, อื่น ๆ

จงคำนวณค่า $P(X+Y \leqslant 1)$

7. ถ้า $F(x, y) = \frac{xy}{336}(2x^2+5xy+2y^2), \ 0 < x \leqslant 2, 0 < y \leqslant 3$ เป็นฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วมของ X และ Y จงหาฟังก์ชันหนาแน่นเงื่อนไขของ Y กำหนดว่า $X = x, 0 < x \leqslant 2$

8. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน

   8.1 ถ้าฟังก์ชันหนาแน่นทางเดียวของ X และของ Y ตามลำดับ กำหนดไว้ดังนี้

   $g(x) = \frac{2x-1}{12}, \ 1 < x \leqslant 4$ และ $h(y) = \frac{1}{2}, \ -1 < y \leqslant 1$

   นอกนั้นเป็น 0 จงหาฟังก์ชันหนาแน่นร่วมของ X กับ Y

   8.2 จงแสดงให้เห็นจริงว่า

   $Cov(X, X+Y) = Var(X)$

9. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันการแจกแจงร่วม a และ b เป็นค่าคงที่ใด ๆ ที่มากกว่า 0 จงแสดงให้เห็นจริงว่า

   $$\rho_{XY} \geqslant \frac{a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2}{2ab\sigma_X\sigma_Y}$$

10. ถ้า $f(x, y) = \frac{x}{9}, \ 0 < y < x < 3$

   $= 0$, อื่น ๆ

   เป็นฟังก์ชันหนาแน่นร่วมของ X กับ Y จงหาค่าคาดหมายภายใต้เงื่อนไขของ Y กำหนดว่า $X = x, \ 0 < x < 3$

ชุดที่ 3

1. ก. $A_k = \left\{x : \frac{1}{k} \leqslant x \leqslant 3\right\}, \ k = 1, 2, 3, \ldots$ จงหา $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$

   ข. ถ้า $A = \{(x, y) : -1 \leqslant x \leqslant 1, \ 0 < y \leqslant 1\}$

   $B = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 \leqslant y < 2\}$

   จงหา $A \cap B$

   ค. เลือกจุดแบบสุ่มภายในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้จุดภายในวงกลมแนบในสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีจุดศูนย์กลางร่วมกัน

ถ้าฟังก์ชันหนาแน่นทางเดียวของ X คือ

$$g(x) = \frac{3x^2+21}{50}, \quad 0 < x < 2$$
$$= 0, \quad \text{อื่น ๆ}$$

จงหา

2. X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันหนาแน่น

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{5}, \quad -2 < x < 3 \\
&= 0 \ , \quad \text{อื่น ๆ}
\end{aligned}
$$

จงหาฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ $Y = X^2$

3. X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันการแจกแจงสะสม $F(x)$ a และ b เป็นค่าคงที่ใด ๆ ของ X, $b > a$

จงแสดงให้เห็นจริงว่า $P(a < X \leqslant b) = F(b) - F(a)$

4. จงหาฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X
   ก. X เป็นจำนวนคู่ที่จับคู่กันได้ ในการจับคู่แบบสุ่ม 10 คู่
   ข. X เป็นจำนวนบอลสีขาวที่ได้จากการสุ่มบอลแบบใส่กลับคืน 10 ลูก จากกล่องที่มีบอลสีขาว 5 ลูก สีดำ 20 ลูก
   ค. X เป็นจำนวนครั้งการสุ่มจนได้บอลสีขาว จากการสุ่มบอลทีละลูกแบบไม่ใส่กลับคืน จากกล่องที่มีบอลสีขาว 5 ลูก สีดำ 20 ลูก

5. ใส่บอล n ลูกที่แตกต่างกันลงในกล่อง m กล่อง จงหาความน่าจะเป็นที่จะไม่มีกล่องว่าง

อาศัยผลที่ได้ จงแสดงให้เห็นจริงว่า ถ้า $m = n$ แล้ว $\sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{m}{k} (m-k)^m = m!$

6. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันหนาแน่นร่วม

$$
\begin{aligned}
f(x, y) &= 12(xy - xy^2) \ , \quad 0 < x, y < 1 \\
&= 0 \qquad\qquad\quad , \quad \text{อื่น ๆ}
\end{aligned}
$$

จงแสดงให้เห็นจริงว่า X และ Y เป็นอิสระต่อกัน

7. กำหนดฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วมของ X และ Y ดังนี้

$$
F(x, y) = \frac{x^2 y}{12}(4x + y), \quad 0 \leqslant x < 1, 0 \leqslant y < 2
$$

จงหา

7.1 ฟังก์ชันหนาแน่นทางเดียวของ X

7.2 $P(Y \leqslant 1)$

8. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันหนาแน่นร่วม

$$
\begin{aligned}
f(x, y) &= \frac{x^2 + y^2}{50} \qquad , \quad 0 < x < 2, 1 < y < 4 \\
&= 0 \qquad\qquad\quad , \quad \text{อื่น ๆ}
\end{aligned}
$$

จงหาค่าของ a และ b

4. ก. X เป็นจำนวนคู่ที่จับคู่กันได้ ในการจับคู่แบบสุ่ม 50 คู่ จงหาฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X และคำนวณค่าของ $P(X = 0) - P(X = 1)$
   ข. ใส่บอล 12 ลูกลงในกล่อง 15 กล่องแบบสุ่ม จงหา
      ข.1 ความน่าจะเป็นที่จะมีกล่องว่าง 2 กล่อง ถ้าบอลต่างกัน

ถ้าฟังก์ชันหนาแน่นทางเดียวของ X คือ

$$g(x) = \frac{3x^2+21}{50} \quad , \quad 0 < x < 2$$
$$= 0 \quad , \quad \text{อื่น ๆ}$$

จงหา

8.1 ฟังก์ชันหนาแน่นเงื่อนไขของ $Y|X = 1$

8.2 $E[Y|X = x], \quad 0 < x < 2$

9. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีการแจกแจงร่วม จงแสดงให้เห็นจริงว่า

$$-1 \leqslant \rho \leqslant 1$$

10. ถ้า $f(x, y) = 8xy, \quad 0 < x < y < 1$

$$= 0 \quad , \quad \text{อื่น ๆ}$$

เป็นฟังก์ชันหนาแน่นร่วมของ X กับ Y จงคำนวณค่า $E[3X - Y]$

ชุดที่ 4

1. ก. กำหนด $A_k = \left\{x : 0 < x \leqslant 4 - \frac{1}{k}\right\}, \quad k = 1, 2, \ldots$

จงหา $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ และ $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$

ข. ถ้า $P(A|B) > P(A)$ จงแสดงให้เห็นจริงว่า $P(B|A) > P(B)$

2. กำหนดฟังก์ชันหนาแน่นของตัวแปรเชิงสุ่ม X

$$f(x) = \frac{24}{x^4} \quad , \quad x \geqslant 2$$
$$= 0 \quad , \quad \text{อื่น ๆ}$$

จงหาฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ $Y = X^2$ และคำนวณค่าของ $P(X^2 > 9)$

3. X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่องที่มีฟังก์ชันการแจกแจงสะสม

$$F(x) = 0 \quad , \quad x < -1$$
$$= \frac{(ax+1)^2}{2} \quad , \quad -1 \leqslant x < 0$$
$$= \frac{1}{2} \quad , \quad 0 \leqslant x < 3$$
$$= x^2 - 6x + \frac{19}{2}, \quad 3 \leqslant x < b$$
$$= 1 \quad , \quad x \geqslant b$$

จงหาค่าของ a และ b

4. ก. X เป็นจำนวนคู่ที่จับคู่กันได้ ในการจับคู่แบบสุ่ม 50 คู่ จงหาฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X และคำนวณค่าของ $P(X = 0) - P(X = 1)$

   ข. ใส่บอล 12 ลูกลงในกล่อง 15 กล่องแบบสุ่ม จงหา

   ข.1 ความน่าจะเป็นที่จะมีกล่องว่าง 2 กล่อง ถ้าบอลต่างกัน

   ข.2 ความน่าจะเป็นที่จะมีกล่องว่าง 3 กล่อง ถ้าบอลเหมือนกัน

5. จงประมาณค่าของ

5.1 $\sum_{k=0}^{20} (-1)^{k} \binom{20}{k} (20-k)^{20}$

5.2 $\sum_{k=0}^{20} \frac{20^{(k)}}{50^{(k)}}$

5.3 $\sum_{k=0}^{20} \binom{20}{k}$

5.4 $\sum_{k=0}^{20} \binom{20}{k}^2$

6. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันหนาแน่นร่วม

$$f(x, y) = \frac{7-2x-2y}{20}, \quad -1 < x \leqslant 1,\ 0 < y < 2$$
$$= 0 \quad , \text{ อื่น ๆ}$$

จงหา $P(X > Y)$

7. กำหนด

$$F(x, y) = \frac{x^2y}{20}(4x+3y), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2$$

เป็นฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วมของตัวแปรเชิงสุ่ม X และ Y จงหาฟังก์ชันการแจกแจง-สะสมเงื่อนไขของ X กำหนดว่า $Y = y,\ 0 < y < 2$

8. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน และมีฟังก์ชันการแจกแจงรูปเดียวกัน

   8.1 ถ้า $f(x, y) > 0,\ -1 < x, y \leqslant 2$ นอกนั้นเป็น 0 และ $P(0 < X \leqslant 1) = P(1 < X \leqslant 2) = 0.4$ จงหา $P(X \leqslant 0,\ Y \geqslant 1)$

   8.2 ถ้า $E(X) = \frac{1}{3}$ จงหาค่าของ $E[2X+4Y-9XY]$

9. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มี $Var(X) = 2Var(Y)$ ถ้า $Var(2X+Y) = 44$ และ $Var(X-2Y) = 16$ จงหา ส.ป.ส. สหสัมพันธ์ระหว่าง X กับ Y

10. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันหนาแน่นร่วม

ถ้า $E[Y|x] = \mu_Y + \beta(X-\mu_X)$

จงแสดงให้เห็นจริงว่า $\beta = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\cdot\rho$

ชุดที่ 5

1. ก. A, B และ C เป็นส่วนแบ่งของกลุ่มผลทดลอง S F เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ใน S ที่มี $P(AF) = P(BF) = P(CF)$ ถ้า $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.5$ และ $P(C) = P(F)$ จงหา $P(F|B)$

   ข. เลือกจุดแบบสุ่มภายในวงกลมที่มีรัศมี 1 นิ้ว จงหาความน่าจะเป็นที่จุดนี้จะไม่อยู่ภายในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีความยาวเส้นทแยงมุม 2 นิ้ว และมีจุดศูนย์กลางร่วมกันกับวงกลม

2. กำหนด
$$f(x) = \begin{cases} x+1 & , \ -1 < x < 0 \\ 2x-6 & , \ 3 < x < c \\ 0 & ; \ \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

จงหาค่าของ c ที่ทำให้ f(x) เป็นฟังก์ชันหนาแน่นของ X

3. X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่องที่มีฟังก์ชันหนาแน่น $f(x) > 0$ เมื่อ $x \geqslant 0$ นอกนั้นเป็น 0

จงแสดงให้เห็นจริงว่า $\int_0^\infty [1-F(x)]dx = E(X)$

4. ก. จงหาความน่าจะเป็นที่จะจับคู่กันได้อย่างน้อย 1 คู่ใน 2 คู่แรก จากการจับคู่แบบสุ่ม 20 คู่

   ข. จงหาค่าของ

   ข.1 $\binom{100}{2} - \binom{100}{3} + \binom{100}{4} - \binom{100}{5} + \ldots$

   ข.2 $1 + \frac{65}{99} + \frac{65^{(2)}}{99^{(2)}} + \frac{65^{(3)}}{99^{(3)}} + \ \ldots$

5. ใส่บอลที่เหมือนกัน 26 ลูก ลงในกล่อง 25 กล่องแบบสุ่ม จงแสดงให้เห็นจริงว่า ค่าคาดหมายของจำนวนกล่องว่างจะเท่ากับ 12

6. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระต่อกันและมีฟังก์ชันการแจกแจงรูปเดียวกัน

$$g(t) = h(t) = 1, \quad 0 < t < 1$$

จงคำนวณค่า $P\left(X - Y \leqslant \frac{1}{4}\right)$

7. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วม $F(x, y)$ a, b, c, d เป็นค่าคงที่ $b > a, d > c$

จงแสดงให้เห็นจริงว่า

$$P(a < X \leqslant b, c < Y \leqslant d) = F(b, d) - F(b, c) - F(a, d) + F(a, c)$$

8. กำหนดฟังก์ชันหนาแน่นร่วมของ X และ Y โดย

$$f(x, y) = \frac{1}{x}, \quad 0 \leqslant y \leqslant x < 1$$
$$= 0, \quad \text{อื่น ๆ}$$

จงหา

8.1 ฟังก์ชันหนาแน่นทางเดียวของ X

8.2 $E[Y|x], \; 0 \leqslant x < 1$

9. ถ้า $E[(X-Y)^2] = 10E[X-Y] = 80$ อาศัยค่าของ $Var(X+Y)$ จงแสดงให้เห็นจริงว่า $Cov(X, Y) \geqslant -4$

10. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีการแจกแจงร่วม และ β เป็น ส.ป.ส. การถดถอยของ Y บน X ถ้า $E[Y^2|x] = \sigma^2 + \mu_Y^2 - \beta^2\mu_X^2 + \beta^2x^2$

จงแสดงให้เห็นจริงว่า

$$\sigma^2 = \sigma_Y^2(1-\rho^2)$$

ในเมื่อ ρ เป็น ส.ป.ส. สหสัมพันธ์ระหว่าง X กับ Y

เฉลยแบบทดสอบ

ชุดที่ 1

1\. ก. A และ B เป็นเหตุการณ์ที่เป็นอิสระต่อกัน จะได้

$$P(AB) = P(A)P(B) \text{ และ}$$

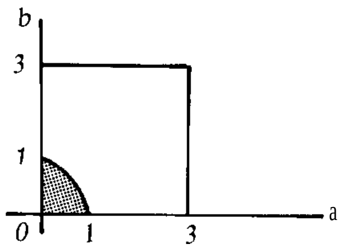
A และ B' จะเป็นอิสระต่อกันด้วย ดังนั้น

$$P(B'|A) = P(B') = 1-0.2 = 0.8$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

$$= 0.5 + 0.2 - (0.5)(0.2) = 0.6$$

ข. $P(A^2+B^2 < 1) = \dfrac{\frac{1}{4}\pi(1)^2}{3 \times 3} = \dfrac{\pi}{36}$



2\. $$F(x) = \int_{-1}^{x} \frac{2x+3}{12} dx, \quad -1 < x \leqslant 2$$

$$= \left. \frac{x^2+3x}{12} \right|_{x=-1}^{x} = \frac{1}{12}(x^2+3x+2)$$

นั่นคือ $F(X) = 0 \quad , x < -1$

$$= \frac{1}{12}(x^2+3x+2) \quad , \quad -1 \leqslant x < 2$$

$$= 1 \quad , \quad x \geqslant 2$$

3\. F(x) เป็นฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ X ดังนั้น

$$F(2) = \frac{2a-4-b}{2} = 1 \qquad \text{..........(1)}$$

และ $P(X = 1) = F(1) - F(1^-) = 0$

หรือ $a - \frac{1}{2} - b - \frac{1}{2} = 0 \qquad \text{........(2)}$

(1) − (2) จะได้ $\frac{a-2}{2}$,

นั่นคือ $a = 2+2 = 4$

$b = 2(4) - 4 - 2 = 2$

4. ก. P(ทำข้อที่ 1 และข้อที่ 2 ถูกต้อง) $= \frac{18!}{20!} = \frac{1}{380}$

ข. ค่าคาดหมายของจำนวนตำแหน่งที่ไม่มีผู้สมัคร $= \frac{10(10-1)}{10+21-1} = 3$

คำอธิบาย

ปัญหานี้ก็คือปัญหาการใส่บอลที่เหมือนกัน n (= 21) ลูก ลงในกล่อง m(= 10) กล่อง

ค. $\sum_{k=0}^{20} \binom{20}{k}^2 = \sum_{k=0}^{20} \binom{20}{k}\binom{20}{20-k} = \binom{40}{20}$

$$\sum_{k=0}^{20} \frac{20^{(k)}}{35^{(k)}} = \frac{35+1}{35-20+1} = 2\frac{1}{4}$$

5.1 $f(x) = \frac{20(70^{x-1})}{90^x}, \quad x = 1, 2, \ldots$

$= 0$, อื่น ๆ

5.2 f(x) เป็นฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X ดังนั้น

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{20(70^{x-1})}{90^x} = , \qquad \ldots (1)$$

$$F(x) = P(X \leqslant x) = 1 - P(X > x)$$

$$P(X > x) = \sum_{k=x+1}^{\infty} \frac{20(70^{k-1})}{90^k}$$

$$= \sum_{y=1}^{\infty} \frac{20(70^{y+x-1})}{90^{y+x}}, y = k - x$$

$$P(X > x) = \frac{70^x}{90^x} \sum_{y=1}^{\infty} \frac{20(70^{y-1})}{90^y} = \left(\frac{7}{9}\right)^x \text{ (ผลจาก (1))}$$

นั่นคือ $F(x) = 1-\left(\frac{7}{9}\right)^{x}$

6. 6.1 X และ Y เป็นอิสระต่อกัน ดังนั้น

$$f(x, y) = g(x)h(y) = \left(\frac{x}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right), \quad 1 < x \leqslant 3,\ 0 < y \leqslant 2$$

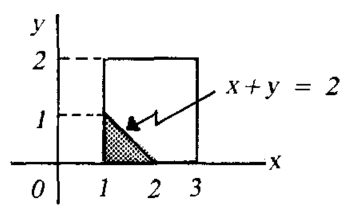
$$f(x, y) = \frac{x}{8}, \quad 1 < x \leqslant 3,\ 0 < y \leqslant 2$$

$$= 0, \text{ อื่น ๆ}$$

6.2 $P(X+Y \leqslant 2) = \int_{1}^{2}\int_{0}^{2-x} \frac{x}{8}\,dydx$

$$= \frac{1}{8}\int_{1}^{2} x(2-x)dx$$

$$= \frac{1}{8}\left[(4-1) - \frac{1}{3}(8-1)\right] = \frac{1}{12}$$



7.1 ฟังก์ชันหนาแน่นทางเดียวของ X $= g(x) = \frac{d}{dx}F(x, 4)$

$$\frac{d}{dx}F(x, 4) = \frac{d}{dx}\left[\frac{4-2}{16}\{(10-4)x-x^2\}\right], \quad 0 < x < 2$$

จะได้ $g(x) = \frac{1}{4}(3-x)$, $0 < x < 2$

$$= 0 \quad , \text{ อื่น ๆ}$$

7.2 $P(-1 < X \leqslant 1,\ 1 < Y \leqslant 3) = F(1, 3)$

$$= \frac{1}{16}(3-2)(10-1-3) = \frac{3}{8}$$

8. ก. f(x|y) เป็นฟังก์ชันหนาแน่นเงื่อนไขของ $X|Y = y$ ดังนั้น

$$f(x|y) = \frac{f(x, y)}{h(y)} \geqslant 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x|y)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x, y)}{h(y)} dx = \frac{1}{h(y)} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx$$

นั่นคือ $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x|y)dx = \frac{1}{h(y)} h(y) = 1$

แสดงว่า f(x|y) มีคุณสมบัติของฟังก์ชันน่าจะเป็น

ข. $E(k) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} kf(x)dx$

$= k\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$

$= k(1) = k$ (คุณสมบัติฟังก์ชันหนาแน่นของ X)

9. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน ดังนั้น

$$Var(2X+Y) = 4\sigma_X^2+\sigma_Y^2 = 28 \quad \text{..........(1)}$$

และ

$$Var(X-Y) = \sigma_X^2+\sigma_Y^2 = 12 \quad \text{..........(2)}$$

$\frac{(1)-(2)}{3}$ $\quad \sigma_X^2 = \frac{16}{3}$

$\Longrightarrow \quad \sigma_Y^2 = 12-\frac{16}{3} = \frac{20}{3}$

$$\begin{aligned} Cov(X, X-Y) &= E[X(X-Y)] - E(X)E(X-Y) \\ &= E[X^2 - XY] - E(X)[E(X)-E(Y)] \\ &= E(X^2) - E(XY) - \{E(X)\}^2 + E(X)E(Y) \\ &= \sigma_X^2 \text{ (X และ Y เป็นอิสระกัน } E(XY) = E(X)E(Y)) \end{aligned}$$

$$\rho_{X, X-Y} = \frac{Cov(X, X-Y)}{\sqrt{Var(X)\,Var(X-Y)}} = \frac{\frac{16}{3}}{\sqrt{\left[\frac{16}{3}\right](12)}} = \frac{2}{3}$$

แสดงว่า ส.ป.ส. สหสัมพันธ์ระหว่าง X กับ $X-Y$ จะเท่ากับ $\frac{2}{3}$

10. $E[Y|x] = \int_{-\infty}^{\infty} yf(y|x)dy = \mu_Y + \beta x$

แต่ $$f(y|x) = \frac{f(x, y)}{g(x)}$$

ดังนั้น $$\int_{-\infty}^{\infty} y\frac{f(x, y)}{g(x)}dy = \mu_Y + \beta x$$

เอา xg(x) คูณทั้ง 2 ข้าง จะได้

$$\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x, y)dy = \mu_Y xg(x) + \beta x^2 g(x)$$

ดังนั้น $$\int_{-m}^{\infty}\int_{-m}^{\infty} xyf(x, y)dydx = \int_{-\infty}^{\infty}[\mu_Y xg(x) + \beta x^2 g(x)]dx$$

$$E(XY) = \mu_Y \int_{-\infty}^{\infty} xg(x)dx + \beta\int_{-\infty}^{\infty} x^2 g(x)dx$$

$$E(XY) = \mu_Y\mu_X + \beta E(X^2)$$

$$\sigma_{XY} = E(XY) - \mu_X\mu_Y = \beta(\sigma_X^2 + \mu_X^2), \because \sigma_X^2 = E(X^2) - \mu_X^2$$

จะได้ $$\beta = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2 + \mu_X^2}$$

คำตอบชุดที่ 2

1. ก. $A_1 = \{x : 2 \leqslant x \leqslant 6\}$

$$A_2 = \left\{x : 1\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 5\frac{1}{2}\right\}$$

$$A_\infty = \{x : 1 < x \leqslant 5\}$$

จะได้ $$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \{x : 1 < x \leqslant 6\}$$

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \{x : 2 \leqslant x \leqslant 5\}$$

ข. A และ B เป็นอิสระต่อกัน ดังนั้น

$$P(A \cup B) = 0.5 + 0.4 - (0.5)(0.4) = 0.7$$

$A \cup B$ กับ C ขจัดกัน และ $A \cup B \cup C = S$ ดังนั้น

$$P(A \cup B \cup C) = P(A \cup B) + P(C) = P(S) = 1$$

$$0.7 + P(C) = 1$$

$$P(C) = 1 - 0.7 = 0.3$$

2. พิจารณาค่า $3x^2 - 1$ เมื่อ $-1 < x < 2$ จะเห็นว่า $3x^2 - 1 > 0$ ก็ต่อเมื่อ $3x^2 > 1$ หรือ $|x| > \frac{1}{\sqrt{3}}$

นั่นคือ $f(x) \leqslant 0$ สำหรับค่า x ที่อยู่ระหว่าง $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ ถึง $\frac{1}{\sqrt{3}}$

แสดงว่า $f(x)$ ไม่เป็นฟังก์ชันหนาแน่นของตัวแปรเชิงสุ่ม X

3. พิจารณาค่า F(2) จะเห็นว่า

$$F(2) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$$

แสดงว่า มัธยฐานของ X มีค่ามากกว่า 2

ให้ m เป็นมัธยฐานของ X จะได้ $m > 2$ และ

$$F(m) = \frac{m^2}{16} = \frac{1}{2}$$

$$m = 2\sqrt{2}$$

มัธยฐานของ x $= 2\sqrt{2}$

$$P(1 < X \leqslant 3) = F(3) - F(1)$$

$$= \frac{3^2}{16} - \frac{1}{8} = \frac{7}{16}$$

4. ก. ดูตัวอย่าง 3 – 1.2

ข. ถ้าบอลเหมือนกันกล่องจะว่าง 5 กล่อง ถ้าใส่บอลลงในกล่อง ๆ ละ 1 ลูก

ซึ่งจะมีจำนวนผลลัพธ์ $= \binom{25}{5}$

$$P(\text{มีกล่องว่าง 5 กล่อง}) = \frac{\binom{25}{5}}{\binom{20+25-1}{20}} = \frac{25^{(20)}}{44^{(20)}}$$

ถ้าบอลต่างกัน

ค่าคาดหมายของจำนวนกล่องว่าง $= \dfrac{(25-1)^{20}}{25^{20-1}} = \dfrac{24^{20}}{25^{19}}$

5. 5.1 $\sum_{k=0}^{30} (-1)^{'} \binom{30}{k} (30-k)^{”} = 0$ (ใช้สูตร 3.3, m $>$ n)

5.2 $\sum_{k=0}^{30} (-1)^{k} \binom{30}{k}^{2530-k} = 24^{30}$ (ใช้สูตร 3.6, a = -1, b = 25)

5.3 $\sum_{k=1}^{30} \dfrac{25(30)^{k-1}}{55^{k}} - = \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{25(30)^{k-1}}{55”} \sum_{k=31}^{\infty} \dfrac{25(30)^{k-1}}{55^{k}}$

$= 1 - \left(\dfrac{30}{55}\right)^{30}$ (ใช้สูตร 3.7 และ 3.9)

$= 1 - \left(\dfrac{6}{11}\right)^{30}$

5.4 $\sum_{k=1}^{30} \dfrac{30^{(k)}}{55^{(k)}} = \sum_{k=0}^{30} \dfrac{30^{(k)}}{55^{(k)}} - \dfrac{30^{(0)}}{55^{(0)}}$

$= \dfrac{55+1}{55-30+1} - 1$ (สูตร 3.11)

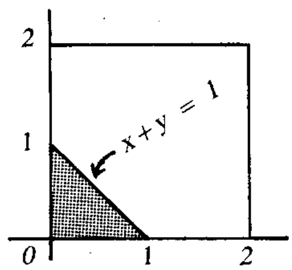
$= 1\dfrac{2}{13}$

6. $P(X+Y \leqslant 1) = \int_0^1 \int_0^{1-y} \dfrac{1}{8}(x+y)dxdy$

$= \int_0^1 \dfrac{1}{8}\left[\dfrac{(1-y)^2}{2} + y(1-y)\right]dy$

$= \dfrac{1}{16}\int_0^1 (1-y^2)dy$

$= \dfrac{1}{16}\left(1 - \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{24}$



7. $f(y|x)$ เป็นฟังก์ชันหนาแน่นเงื่อนไขของ $Y|X = x$ ดังนั้น

$$f(y|x) = \frac{f(x, y)}{g(x)}, \quad 0 < y \leqslant 3, \quad 0 < x \leqslant 2$$

$$= \frac{\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(x, y)}{\frac{d}{dx} F(x, 3)}$$

$$= \frac{\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left[\frac{xy}{336}(2x^2 + 5xy + 2y^2)\right]}{\frac{d}{dx}\left[\frac{3x}{336}(2x^2 + 15x + 18)\right]}$$

$$= \frac{\frac{\partial}{\partial y}[y(6x^2 + 10xy + 2y^2)]}{3(6x^2 + 30x + 18)}$$

$$= \frac{6x^2 + 20xy + 6y^2}{3(6x^2 + 30x + 18)}$$

$$\Longrightarrow \quad f(y|x) = \frac{3x^2 + 10xy + 3y^2}{9x^2 + 45x + 27}, \quad 0 < y \leqslant 3, \ 0 < x \leqslant 2$$

$$= 0, \text{ อื่น ๆ}$$

8. 8.1 X และ Y เป็นอิสระต่อกัน ดังนั้น

$$f(x, y) = g(x)h(y)$$

$$= \frac{2x-1}{12} \cdot \frac{1}{2}, \quad 1 < x \leqslant 4, \quad -1 < y \leqslant 1$$

$$f(x, y) = \frac{2x - 1}{24}, \ 1 < x \leqslant 4, \ -1 < y \leqslant 1$$

$$= 0, \text{ อื่น ๆ}$$

8.2 $$\text{Cov}(X, X + Y) = E[X(X + Y)] - E(X)E(X + Y)$$

$$= E(X^2 + XY) - E(X)[E(X) + E(Y)]$$

$$= E(X^2) + E(XY) - \{E(X)\}^2 - E(X)E(Y)$$

X และ Y เป็นอิสระกัน ดังนั้น $E(XY) - E(X)E(Y) = 0$

$$\Longrightarrow \text{Cov}(X, X + Y) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \text{Var}(X)$$

9. $\mathrm{Var}(aX+bY) = a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2 + 2ab\sigma_{XY}$ (ทฤษฎี 5.10)

ความแปรปรวน มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 0 เสมอ ดังนั้น

$$a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2 + 2abu_{XY} \geqslant 0$$

$$2ab\sigma_{XY} \geqslant -(a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2)$$

เอา $2ab\sigma_X\sigma_Y$ หารทั้ง 2 ข้าง จะได้

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}, \geqslant -\frac{a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2}{2ab\sigma_X\sigma_Y}, a, b, > 0$$

10. $$E[Y|x] = \int_{-\infty}^{\infty} yf(y|x)dy, \quad 0 < x < 3$$

$$f(y|x) = \frac{\frac{x}{9}}{\int_x^0 \frac{x}{9}dy} = \frac{x}{x(x-0)}$$

$$f(y|x) = \frac{1}{x}, \quad 0 < y < x, 0 < x < 3$$

$$0, \quad \text{อื่น ๆ}$$

$$\rightarrow \quad E[Y|x] = \int_0^x \frac{y}{x}dy$$

$$= \frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2} = \frac{x}{2}, \quad 0 < x < 3$$

คำตอบชุดที่ 3

1. ก. $A_, = \{x : 1 \leqslant x \leqslant 3\}$

$$A_, = \left\{x : \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 3\right\}$$

$$A_, = \{x : 0 < x \leqslant 3\}$$

$$\rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \{x : 0 < x \leqslant 3\}$$

“II. $A \cap B = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y \leqslant 1\}$

ค. ดูตัวอย่าง 1-3.3 ตำรา ST 311

2. $F(y) = P(Y \leqslant y)$

$= P(X^2 \leqslant y).\ 0 \leqslant y < 9$

$= P(-\sqrt{y} \leqslant x \leqslant \sqrt{y})$

ถ้า $-2 < x < 2$ แล้ว $0 \leqslant y < 4$ ดังนั้น

$$F(y) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{5}\,dx$$

$$= \frac{1}{5}(\sqrt{y}+\sqrt{y}) = \frac{2\sqrt{y}}{5}$$

ถ้า $2 \leqslant x < 3$ แล้ว $4 \leqslant y < 9$ ดังนั้น

$$F(y) = \int_{-2}^{\sqrt{y}} \frac{1}{5}\,dx$$

$$= \frac{1}{5}(\sqrt{y}+2)$$

$\longrightarrow$ ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ $Y = X^2$ คือ

$$F(y) = \begin{cases} 0 & , \quad y < 0 \\ \dfrac{2\sqrt{y}}{5} & , \quad 0 \leqslant y < 4 \\ \dfrac{\sqrt{y}+2}{5} & , \quad 4 \leqslant y < 9 \\ 1 & , \quad y \geqslant 9 \end{cases}$$

4. ก. $P(X = x) = \sum_{k=0}^{10-x} \frac{(-1)^k}{k!\,x!}$, $x = 0, 1, 2, \ldots, 10$

$= 0$, อื่น ๆ

ข. $P(X = x) = \binom{10}{x} \frac{5^x 20^{10-x}}{25^{10}}$, $x = 0, 1, 2, \ldots, 10$

$= 0$, อื่น ๆ

ค. $P(X = x) = \frac{5(20)^{(x-1)}}{25^{(x)}}$, $x = 1, 2, 3, \ldots, 21$

$= 0$, อื่น ๆ

5. $P(\text{ไม่มีกล่องว่าง}) = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{m}{k} \frac{(m-k)^n}{m^n}$

ถ้า $m = m$ แล้ว $P(\text{ไม่มีกล่องว่าง}) = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{m}{k} \frac{(m-k)^m}{m^m}$

ใส่บอล m ลูกใน m กล่อง จะมีผลลัพธ์ $= m^m$

เหตุการณ์ที่ไม่มีกล่องว่าง ก็คือการใส่บอลลงในกล่อง กล่องละ 1 ลูกแบบสุ่ม จะมีผลลัพธ์ $= m!$

ดังนั้น $P(\text{ไม่มีกล่องว่าง}) = \frac{m!}{m^m}$

นั่นคือ $\sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{m}{k} \frac{(m-k)^m}{m^m} = \frac{m!}{m^m}$

$$\sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{m}{k} (m-k)^m = m!$$

6. ดูตัวอย่าง 4-5.1 ในตำรา ST 311

7. 7.1 ฟังก์ชันหนาแน่นทางเดียวของ X คือ $g(x) = \frac{dF(x, 2)}{dx}$

$$\frac{dF(x, 2)}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\frac{2x^2}{12}(4x+2)\right], \quad 0 \leqslant x < 1$$

$$= \frac{1}{6}(12x^2 + 4x)$$

$$g(x) = \frac{2x}{3}(3x + 1), \; 0 < x < 1$$

$$= 0, \text{ อื่น ๆ}$$

7.2 $P(Y \leqslant 1) = F(1, 1)$

$$= \frac{1}{12}(4+1) = \frac{5}{12}$$

8. 8.1 $f(y|x) = \frac{f(x, y)}{g(x)} = \frac{x^2+y^2}{3x^2+21}$, $1 < y < 4, 0 < x < 2$

$= 0$, อื่น ๆ

$f(y|1)$ เป็นฟังก์ชันหนาแน่นเงื่อนไขของ $Y|X = 1$ จะได้

$$f(y|1) = \frac{1+y^2}{24}, \quad 1 < y < 4$$

$$= 0, \quad \text{อื่น ๆ}$$

8.2 $$E[Y|x] = \int_1^4 y\frac{x^2+y^2}{3x^2+21}dy, \quad 0 < x < 2$$

$$= \left.\frac{\frac{y^4}{4} \cdot \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3}}{3x^2+21}\right|_{y=1}^{4}$$

$$= \frac{2x^2(16-1)+(256-1)}{12(x^2+7)}$$

$$\Rightarrow E[Y|x] = \frac{10x^2+85}{4(x^2+7)} \quad 0 < x < 2$$

9. ดูการพิสูจน์ทฤษฎี 5-2.8 ตำรา ST 311

10. ดูตัวอย่าง 5-2.7 ตำรา ST 311

ได้ $E(X) = \frac{8}{15}$, $E(Y) = \frac{4}{5}$

ดังนั้น $E[3X-Y] = 3\left(\frac{8}{15}\right) - \frac{4}{5} = \frac{4}{5}$

คำตอบชุดที่ 4

1. ก. $A_1 = \{x : 0 < x \leqslant 3\}$

$A_2 = \left\{x : 0 < x \leqslant 3\frac{1}{2}\right\}$

$A_3 = \left\{x : 0 < x \leqslant 3\frac{2}{3}\right\}$

$\vdots$

$A_\infty = \{x : 0 < x < 4\}$

ดังนั้น $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \{x : 0 < x < 4\}$

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \{x : 0 < x \leqslant 3\}$$

ข. $P(A|B) > P(A)$

$\Longrightarrow \quad \dfrac{P(AB)}{P(B)} > P(A)$

เอา $\dfrac{P(B)}{P(A)}$ คูณทั้ง 2 ข้าง จะได้

$$\frac{P(AB)}{P(A)} > P(B)$$

นั่นคือ $P(B|A) > P(B)$

2. ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ $Y = X^2$ กำหนดโดย

$$\begin{aligned} F(y) &= P(X^2 \leqslant y), \quad y \geqslant 4 \\ &= P(-\sqrt{y} \leqslant X \leqslant \sqrt{y}) \\ &= \int_2^{\sqrt{y}} \frac{24}{x^4} dx \\ &= -8(y^{-\frac{3}{2}} - 2^{-3}) \end{aligned}$$

นั่นคือ
$$\begin{aligned} F(y) &= 0, \quad y < 4 \\ &= 1 - \frac{8\sqrt{y}}{y^2}, \quad y \geqslant 4 \end{aligned}$$

$$P(X^2 > 9) = 1 - F_{X^2}(9) = 1 - \left(1 - \frac{8\sqrt{9}}{9^2}\right) = \frac{8}{27}$$

3. X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่อง ดังนั้น

$$P(X = -1) = F(-1) - F(-1^-) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{(-a+1)^2}{2} - 0 = 0$$

$$-a + 1 = 0$$

$$a = 1$$

และ $P(X = b) = F(b) - F(b^-) = 0$

$$\Longrightarrow \quad 1-\left(b^2-6b+\frac{19}{2}\right) = 0$$

$$2b^2-12b+17 = 0$$

$$b = \frac{12\pm\sqrt{144-8(17)}}{4}$$

$$= 3\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

แต่ $b > 3$ ดังนั้น

$$b = 3+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

4. ก. X = จำนวนคู่ที่จับคู่กันได้ จากการจับคู่แบบสุ่ม 50 คู่ จะได้

$$P(X = x) = \sum_{k=0}^{50-x}\frac{(-1)^k}{k!\,x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, 50$$

และ $P(X = 0)-P(X = 1) = \sum_{k=0}^{50}\frac{(-1)^k}{k!}-\sum_{k=0}^{49}\frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{50!}$

ข. ใส่บอล 12 ลูกลงในกล่อง 15 กล่อง จะต้องมีกล่องว่างอย่างน้อยที่สุด 3 กล่อง ดังนั้น

ข.1 P(กล่องว่าง 2 กล่อง) = 0

ข.2 เมื่อบอลเหมือนกัน กล่องจะว่าง 3 กล่อง ถ้าใส่บอลลงในกล่อง ๆ ละ 1 ลูก ซึ่ง

จะมีผลลัพธ์ $= \binom{12}{3}$

ดังนั้น

$$P(\text{กล่องว่าง 3 กล่อง}) = \frac{\binom{15}{3}}{\binom{26}{12}} = \frac{11!(14)}{25^{(10)}}$$

5. 5.1 $\sum_{k=0}^{20}(-1)^k\binom{20}{k}(20-k)^{20} = 20!$

5.2 $\sum_{k=0}^{20}\frac{20^{(k)}}{50^{(k)}} = \frac{50+1}{50-20+1} = \frac{51}{31}$

5.3 $\sum_{k=0}^{20}\binom{20}{k} = 2^{20}$