บทที่ 4
ตัวแปรเชิงสุ่มแบบทวิคูณ
(Bivariate Random Variables)

4.1 ฟังก์ชันน่าจะเป็นร่วม (JOINT PROBABILITY FUNCTION)

นิยาม 4.1.1 ให้ (X, Y) เป็นตัวแปรเชิงสุ่มทวิคูณหรือตัวแปรเชิงสุ่มสองมิติ (two-dimensional random variable), (X, Y) จะเป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่ไม่ต่อเนื่อง (discrete random variables) ถ้า (X, Y) มีค่า (x_i, y_k) ซึ่งนับได้หรือเป็นตัวเลขที่มีค่าแตกต่างกัน สำหรับทุก ๆ ค่า i และ k และทำให้ $P(X = x_i, Y = y_k)$ มีค่ามากกว่า 0

นิยาม 4.1.2 ถ้าเราให้ $f(x, y) = P(X = x, Y = y)$ เราเรียก f(x, y) นี้ว่า เป็นฟังก์ชันน่าจะเป็นร่วม (joint probability function) ของ X และ Y ถ้า f(x, y) มีคุณสมบัติดังนี้

1. $0 \leqslant f(x, y) \leqslant 1$ สำหรับทุกค่า (x, y) ที่เป็นไปได้
2. $\sum\limits_{\forall y} \sum\limits_{\forall x} f(x, y) = 1$

เราคำนวณความน่าจะเป็นที่ (X, Y) อยู่ใน A ได้ดังนี้

$$P\{(X, Y) \in A\} = \sum_{\substack{\forall (x, y) \in A \\ \ni f(x, y) > 0}} f(x, y)$$

เฉลยแบบฝึกหัดที่ 4.1

1. สมมติว่าฟังก์ชันน่าจะเป็นร่วมของตัวแปรเชิงสุ่ม X และ Y คือ f(x, y) ซึ่งมีค่ามากกว่า 0 ถ้า $(x, y) \in R = \{(x, y) : (x, y) = (2, 1), (2, 2), (3, 2), (3, 3)\}$ นอกนั้นเป็น 0 ถ้า $f(3, 2) = f(3, 3) = \frac{1}{8}$ และ $P(X \geqslant 2, Y \geqslant 2) = \frac{3}{4}$ จงหา f(x, y) และ $P(X = 2, Y = 1)$

$$P((X, Y) \in R) = f(2, 1) + f(2, 2) + f(3, 2) + f(3, 3) \qquad \text{.......... (1)}$$

$$f(3, 2) = f(3, 3) = \frac{1}{8} \qquad \text{.......... (2)}$$

$$P(X \geqslant 2,\ Y \geqslant 2) = f(2,2) + f(3,2) + f(3,3) = \frac{3}{4} \qquad \ldots\ldots\ldots(3)$$

(1) − (3) จะได้ $\quad f(2,1) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} = P(X = 2,\ Y = 1)$

(3) (2) จะได้ $\quad f(2,2) = \frac{3}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8} = \frac{2}{4}$

สรุปว่า เราจะได้ฟังก์ชันน่าจะเป็นร่วมของ X และ Y ดังนี้

(x, y)	(2, 1)	(2, 2)	(3, 2)	(3, 3)
f(x, y)	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

2. จงคำนวณค่าของ k ที่ทำให้

$$f(x,y) = k(x^2 + 3xy + 1), \quad x = 0, 1, \quad y = 1, 2, 3$$
$$= 0 \qquad \text{อื่น ๆ}$$

เป็นฟังก์ชันน่าจะเป็นร่วมของตัวแปรเชิงสุ่ม X และ Y

และคำนวณค่าของ $P\left(X \leqslant \frac{1}{2},\ Y > \frac{3}{2}\right)$, $P(X+Y \geqslant 4)$, $P(X^2 = Y^2)$

เฉลย

f(x, y) เป็นฟังก์ชันน่าจะเป็นร่วมของ X และ Y ดังนั้น

$$\sum_{y=1}^{3} \sum_{x=0}^{1} f(x,y) = 1$$

หรือ

$$f(0,1) + f(0,2) + f(0,3) + f(1,1) + f(1,2) + f(1,3) = 1$$
$$k + k + k + k(1+3+1) + k(1+6+1) + k(1+9+1) = 1$$
$$27k = 1 \implies k = \frac{1}{27}$$

นั่นคือ

$$f(x,y) = \frac{1}{27}(x^2 + 3xy + 1) \quad , \quad x = 0, 1, \quad y = 1, 2, 3$$

$$P\left(X \leqslant \frac{1}{2},\ Y > \frac{3}{2}\right) = f(0,2) + f(0,3)$$
$$= \frac{1}{27} + \frac{1}{27} = \frac{2}{27}$$
$$P(X+Y \geqslant 4) = f(1,3) = \frac{11}{27}$$
$$P(X^2 = Y^2) = f(1,1) = \frac{5}{27}$$

3. $$f(x, y) = \frac{20!}{x!(y-x)!(20-y)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{20+y} \quad , \quad x = 0, 1, 2, \ldots, y, \quad y = 0, 1, 2, \ldots, n$$
$$= 0 \qquad \text{อื่น ๆ}$$

เป็นฟังก์ชันน่าจะเป็นร่วมของตัวแปรเชิงสุ่ม X และ Y จงหาค่าของ n

เฉลย

f(x, y) เป็นฟังก์ชันน่าจะเป็นร่วมของ X และ Y ดังนั้น

$$\sum_{y=0}^{n} \sum_{x=0}^{y} \frac{20!}{x!(y-x)!(20-y)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{20+y} = 1$$

$$\sum_{y=0}^{n} \frac{20!}{y!(20-y)!} \sum_{x=0}^{y} \frac{y!}{x!(y-x)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{20+y} = 1$$

$$\sum_{y=0}^{n} \binom{20}{y}\left(\frac{1}{2}\right)^{y} \sum_{x=0}^{y} \binom{y}{x} = 2^{20}$$

$$\sum_{y=0}^{n} \binom{20}{y}\left(\frac{1}{2}\right)^{y} 2^{y} = 2^{20}$$

จะได้ $$2^{n} = 2^{20} \implies n = 20$$

4. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันน่าจะเป็นร่วม f(x, y) กำหนดไว้ดังนี้

$$f(x, y) = k, \ (x, y) = (-1, 1), (-1, 2), (0, 1), (0, 2), (1, 3)$$
$$= 0 \qquad \text{อื่น ๆ}$$

จงหาค่าของ k และคำนวณค่าของ $P(-1 < X \leqslant 1,\ 1 < Y \leqslant 3)$, $P(2X < Y)$, $P\{(X, Y) \in A\}$ เมื่อ $A = \{(x, y) : |x+y| \leqslant 1\}$

เฉลย

f(x, y) เป็นฟังก์ชันน่าจะเป็นร่วมของ X และ Y ดังนั้น

$$f(-1, 1) + f(-1, 2) + f(0, 1) + f(0, 2) + f(1, 3) = 1$$
$$k + k + k + k + k = 1$$
$$5k = 1$$
$$k = \frac{1}{5}$$

$$P(-1 < X \leqslant 1,\ 1 < Y \leqslant 3) = f(0, 2) + f(1, 3) = \frac{2}{5}$$

$$P(2X < Y) = f(-1, 1) + f(-1, 2) + f(0, 1) + f(0, 2) + f(1, 3) = 1$$

$$A = \{(x, y) : |x+y| \leqslant 1\}$$

$$P((X, Y) \in A) = \sum_{|x+y| \leq 1} f(x, y)$$

$$= f(-1, 1) + f(-1, 2) + f(0, 1) = \frac{3}{5}$$

5. กล่องใบหนึ่งบรรจุบอลสีขาว 8 ลูก สีดำ 2 ลูก สุ่มบอลจากกล่องนี้ 2 ลูก

ก. แบบใส่กลับ

ข. แบบไม่ใส่กลับ

กำหนดตัวแปรเชิงสุ่ม X และ Y ดังนี้

X = 0 ถ้าสุ่มครั้งแรกเป็นสีขาว

= 1 ถ้าสุ่มครั้งแรกได้สีดำ

Y = จำนวนบอลสีขาวที่ได้จากการสุ่ม

จงเขียนตารางแสดงฟังก์ชันน่าจะเป็นร่วมของ X และ Y

เฉลย

ก. แบบใส่กลับ

สุ่มบอล 2 ลูก จากกล่องที่มีบอล 10 ลูก จะได้ผลลัพธ์ = 10^2

จำนวนผลลัพธ์ที่จะสุ่มได้บอลสีขาวทั้ง 2 ลูก = 8^2

จำนวนผลลัพธ์ที่จะสุ่มได้บอลสีดำทั้ง 2 ลูก = 2^2

จำนวนผลลัพธ์ที่สุ่มครั้งแรกเป็นสีขาว ครั้งที่สองเป็นสีดำ = $8 \cdot 2$

ซึ่งเท่ากับจำนวนผลลัพธ์ที่สุ่มครั้งแรกเป็นสีดำ ครั้งที่สองเป็นสีขาว

จะได้ฟังก์ชันน่าจะเป็นร่วมของ X และ Y ดังนี้

(x, y)	(0, 1)	(0, 2)	(1, 0)	(1, 1)
f(x, y)	$\frac{16}{100}$	$\frac{64}{100}$	$\frac{4}{100}$	$\frac{16}{100}$

ข. แบบไม่ใส่กลับ จะได้ตารางฟังก์ชันน่าจะเป็นร่วมของ X และ Y

(x, y)	(0, 1)	(0, 2)	(1, 0)	(1, 1)
f(x, y)	$\frac{16}{90}$	$\frac{56}{90}$	$\frac{2}{96}$	$\frac{16}{90}$

6. ไพ่สำรับหนึ่งมีอยู่ $m+n$ ใบ หมายเลข $1, 2, \ldots, m, m+1, \ldots, m+n$ เรียงไพ่สำรับนี้เป็นแถวแบบสุ่มใน $m+n$ ตำแหน่ง หมายเลข $1, 2, \ldots, m+n$ เช่นเดียวกัน กำหนดตัวแปรเชิงสุ่ม X และ Y ดังนี้

X = จำนวนคู่ที่จับคู่กันได้ใน m ตำแหน่งแรก

Y = จำนวนคู่ที่จับคู่กันได้ n ตำแหน่งถัดไป

6.1 จงพิสูจน์ว่า

$$P(X = x, Y = y) = \binom{m}{x}\binom{n}{y}\frac{(m+n-x-y)!}{(m+n)!}P_{m+n-x-y}$$

$$x = 0, 1, 2, \ldots, m$$

$$y = 0, 1, 2, \ldots, n$$

ในเมื่อ $P_{m+n-x-y}$ = ความน่าจะเป็นที่จะไม่มีการจับคู่กันเลยใน $m+n-x-y$ ตำแหน่ง

6.2 กำหนด $m = 1$, $n = 2$ จงเขียนตารางแสดงฟังก์ชันน่าจะเป็นร่วมของ X และ Y

เฉลย

เรียงไพ่ $m+n$ ใบแบบสุ่ม จะได้จำนวนผลลัพธ์ $= (m+n)!$

ให้ $N_{m+n-x-y}$ เป็นจำนวนผลลัพธ์ที่ไม่มีการจับคู่กันเลยใน $m+n-x-y$ ตำแหน่ง

แต่การจับคู่ใน $m+n-x-y$ ตำแหน่ง มีจำนวน $= (m+n-x-y)!$

$$\therefore \quad P_{m+n-x-y} = \frac{N_{m+n-x-y}}{(m+n-x-y)!} = \sum_{k=0}^{m+n-x-y}\frac{(-1)^k}{k!}$$

นั่นคือ

$$N_{m+n-x-y} = P_{m+n-x-y}(m+n-x-y)!$$

จำนวนผลลัพธ์ของการจับคู่ได้ x คู่แรก $(x = 0, 1, 2, \ldots, m)$ ใน m คู่แรก และ y คู่แรก $(y = 0, 1, 2, \ldots, n)$ ใน n คู่หลัง จะเท่ากับ

$$N_{m+n-x-y} = P_{m+n-x-y}(m+n-x-y)!$$

แต่การจับคู่กันได้ x คู่ใด ๆ ใน m คู่แรก และ y คู่ใด ๆ ใน n คู่หลัง จะมีทางเกิดขึ้นได้ $\binom{m}{x}\binom{n}{y}$ หนทาง

ดังนั้น

ผลลัพธ์ของ $(X = x, Y = y) = \binom{m}{x}\binom{n}{Y}(m+n-x-y)!\,P_{m+n-x-y}$

จะได้ $$P(X = x,\ Y = y) = \binom{m}{x}\binom{n}{y}\frac{(m+n-x-y)!}{(m+n)!}P_{m+n-x-y} \qquad (6.1)$$

$$x = 0, 1, \ldots m,\ y = 0, 1, \ldots n$$

6.2 $m = 1,\ n = 2$

จะได้

$$P(X = 0,\ Y = 0) = \binom{1}{0}\binom{2}{0}\left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right] = \frac{1}{3}$$

$$P(X = 0,\ Y = 1) = \binom{1}{0}\binom{2}{1}\frac{2!}{3!}\left(\frac{1}{2!}\right) = \frac{1}{3}$$

$$P(X = 0,\ Y = 2) = \binom{1}{0}\binom{2}{2}\frac{1}{3!}(1-1) = 0$$

$$P(X = 1,\ Y = 0) = \binom{1}{1}\binom{2}{0}\frac{2!}{3!}\left(\frac{1}{2!}\right) = \frac{1}{6}$$

$$P(X = 1,\ Y = 1) = \binom{1}{1}\binom{2}{1}\frac{1}{3!}(1-1) = 0$$

$$P(X = 1,\ Y = 2) = \binom{1}{1}\binom{2}{2}\frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$$

เราจะได้ฟังก์ชันน่าจะเป็นร่วมของ X และ Y ดังตาราง

(x, y)	(0, 0)	(0, 1)	(1, 0)	(1, 2)
$P(X = x,\ Y = y)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

4.2 ฟังก์ชันความหนาแน่นร่วม (JOINT DENSITY FUNCTION)

นิยาม 4.2.1 ให้ (X, Y) เป็นตัวแปรแบบทวิคูณ (X, Y) เป็นตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่อง (continuous random variables) ถ้าค่าที่เป็นไปได้ของ X และ Y มีจำนวนอนันต์นับไม่ได้ บอกได้แต่เพียงค่าต่ำสุด และ/หรือค่าสูงสุดเท่านั้น

นิยาม 4.2.2 ให้ X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่อง ซึ่งมีฟังก์ชัน f(x, y) กำหนดไว้ว่า

$$f(x, y)dxdy \quad = \quad P(x < X \leqslant x + dx, y < Y \leqslant y + dy)$$

เราเรียกฟังก์ชัน f(x, y) นี้ว่า ฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X และ Y, f(x, y) จะมีคุณสมบัติดังนี้

1. $f(x, y) > 0$ สำหรับทุกค่า x, y ที่จะเป็นไปได้
2. $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dxdy \quad = \quad 1$

กรณีที่เราต้องการคำนวณค่า $P(a < X \leqslant b, c < Y \leqslant d)$ ในเมื่อ a, b และ c, d เป็นค่าที่เป็นไปได้ของ X และ Y ตามลำดับ สามารถคำนวณได้จาก

$$P(a < X \leqslant b, c \leqslant Y < d) \quad = \quad \int_c^d\int_a^b f(x, y)\, dxdy$$

เฉลยแบบฝึกหัดที่ 4.2

1. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นร่วม f(x, y) กำหนดไว้ดังนี้

$$f(x, y) \quad = \quad \frac{1}{8}(6 - x - y), \quad 0 < x < 2, \quad k < y < 4$$

$$= \quad 0 \qquad \text{อื่น ๆ}$$

จงหาค่าของ k และคำนวณค่าของ $P(1 < X < 2, 2 < Y < 3)$

เฉลย

f(x, y) เป็นฟังก์ชันหนาแน่นร่วมของ X และ Y ดังนั้น

$$\int_k^4\int_0^2 \frac{1}{8}(6 - x - y)dxdy = \quad 1$$

$$\frac{1}{8}\int_k^4 \left(6x - \frac{x^2}{2} - xy \Big|_{x=0}^{2} \right) dy \quad = \quad \mathbf{I}$$

$$\int_k^4 (10 - 2y)dy = \quad 8$$

$$10y - y^2 \Big|_{y=k}^{4} \quad = \quad 24 - 10k + k^2 = \quad 8$$

$$k^2 - 10k + 16 = \quad 0$$

$$k \quad = \quad 2, \ 8$$

สรุปว่า เราจะได้ $k = 2$

$$P(1 < X < 2, 2 < Y < 3) = \int_2^3\int_1^2 \frac{1}{8}(6-x-y)dxdy$$

$$= \frac{1}{8}\int_2^3 \left[6(2-1) - \frac{4-1}{2} - (2-1)y\right]dy$$

$$= \frac{1}{8}\left[6(3-2) - \frac{3}{2}(3-2) - \frac{9-4}{2}\right] = \frac{1}{4}$$

2. ให้ $f(x, y) = kx, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1-x$

$\qquad = 0 \qquad$ อื่น ๆ

เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X และ Y

จงหาค่าของ k และคำนวณค่าของ $P\left(X < \frac{1}{2}, Y < \frac{1}{5}\right)$, $P(X < Y)$

เฉลย

$f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันหนาแน่นร่วมของ X และ Y ดังนั้น

$$\int_0^1\int_0^{1-x} kxdydx = 1$$

$$\int_0^1 kxy\Big|_{y=0}^{1-x} dx = 1$$

$$k\int_0^1 (x-x^2)dx = 1$$

$$k\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big|_{x=0}\right)dx = 1$$

$$k\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) = \frac{k}{6} = 1$$

แสดงว่า $\qquad k = 6$

$$P\left(X < \frac{1}{2}, Y < \frac{1}{5}\right) = \int_0^{1/5}\int_0^{1/2} 6xdxdy$$

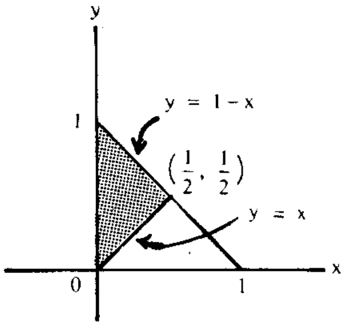
$$= \int_0^{1/5} 3\left(\frac{1}{4}\right)dy$$

$$= \frac{3}{4}\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{3}{20}$$

$$P(X < Y) = \int_0^{1/2} \int_x^{1-x} 6x\,dy\,dx$$

$$P(X < Y) = \int_0^{1/2} 6x(1 - x - x)dx$$

$$= 3\left(\frac{1}{4}\right) - 4\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{4}$$



3. จงหาค่าของ k ที่ทำให้

$$f(x, y, z) = kxy^2z, \quad 0 < x < 1, \; 0 < y < 1, \; 0 < z < 2$$

$$= 0 \qquad \text{อื่น ๆ}$$

เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X, Y และ Z

และคำนวณค่าของ $P\left(X < \frac{1}{4}, Y > \frac{1}{2}, 1 < Z < 2\right)$

เฉลย

f(x, y, z) เป็นฟังก์ชันหนาแน่นร่วมของ X, Y และ Z จะได้

$$\int_0^2 \int_0^1 \int_0^1 kxy^2z\,dx\,dy\,dz = 1$$

$$k\int_0^2 \int_0^1 \frac{1}{2}y^2z\,dy\,dz = 1$$

$$k\int_0^2 \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)z\,dz = 1$$

$$\frac{1}{6}k\left(\frac{2^2}{2}\right) = \frac{k}{3} = 1$$

ดังนั้น $k = 3$

ค่าของ $P\left(X < \frac{1}{4}, Y > \frac{1}{2}, 1 < z < 2\right) = \int_1^2 \int_{1/2}^1 \int_0^{1/4} 3xy^2 z\,dx\,dy\,dz$

$$= \int_1^2 \int_{1/2}^1 3\left(\frac{1}{32}\right) y^2 z\,dy\,dz$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{32}\left(1 - \frac{1}{8}\right) z\,dz$$

$$= \frac{7}{256} \cdot \frac{4-1}{2}$$

$$= \frac{21}{512}$$

4. $f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของตัวแปรเชิงสุ่ม X และ Y ซึ่งกำหนดไว้ดังนี้

$$f(x, y) = 1, \quad 0 < x < 1, \; 0 < y < 1$$
$$= 0 \qquad \text{อื่น ๆ}$$

จงคำนวณค่าของ

4.1 $P\left(X < \frac{1}{2}, Y < \frac{1}{2}\right)$

4.2 $P(X > Y)$

4.3 $P(X^2 + Y^2 < 1)$

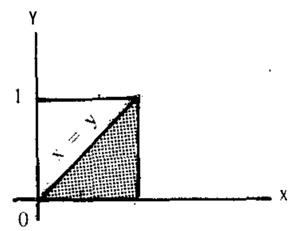
เฉลย

4.1 $P\left(X < \frac{1}{2}, Y < \frac{1}{2}\right) = \int_0^{1/2} \int_0^{1/2} dx\,dy$

$$= \int_0^{1/2} \frac{1}{2} dy = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

4.2 $P(X > Y) = \int_0^1 \int_0^x dy\,dx$

$$= \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$$



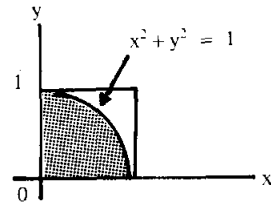
หมายเหตุ นักศึกษาอาจจะหาค่า $P(X > Y)$ ได้จาก

$P(X > Y) = \int_0^1 \int_y^1 dx\,dy$ ก็ได้

4.3 $P(X^2+Y^2 < 1) = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} dxdy$

$$= \int_0^1 \sqrt{1-y^2}\, dy$$

$$= \frac{y}{2}\sqrt{1-y^2} + \frac{1}{2}\sin^{-1} y \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$



5. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม ที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมกำหนดไว้ดังนี้

$$f(x, y) = \frac{1}{y}, \quad 0 < x < y, \ 0 < y < 1$$

$$= 0 \qquad \text{อื่น ๆ}$$

จงคำนวณค่าของ $P\left(\frac{1}{5} < X < \frac{1}{2}, Y > \frac{4}{5}\right)$ และ $P\left(X+Y > \frac{1}{2}\right)$

เฉลย

$$P\left(\frac{1}{5} < X < \frac{1}{2}, Y > \frac{4}{5}\right) = \int_{4/5}^{1} \int_{1/5}^{1/2} \frac{1}{y} dxdy$$

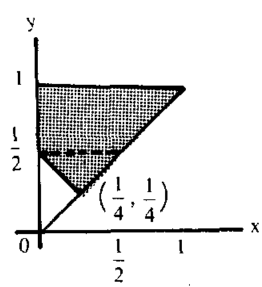
$$= \int_{4/5}^{1} \frac{1}{y}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) dy$$

$$= \frac{3}{10}\left(\ell n\, 1 - \ell n \frac{4}{5}\right) = 0.3(\ell n \text{ I } .25)$$

$$P\left(X+Y > \frac{1}{2}\right) = \int_{1/4}^{1/2} \int_{1/2-y}^{y} \frac{1}{y} dxdy + \int_{1/2}^{1} \int_{0}^{y} \frac{1}{y} dxdy$$

$$= \int_{1/4}^{1/2} \frac{1}{y}\left(y - \frac{1}{2} + y\right) dy + \int_{1/2}^{1} \frac{1}{y}(y-0)dy$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(\ell n \frac{1}{2} - \ell n \frac{1}{4}\right) + \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{2 - \ell n\, 2}{2}$$



4.3 ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วม (JOINT DISTRIBUTION FUNCTION)

นิยาม ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วมของตัวแปรเชิงสุ่ม (X, Y) ณ จุด (x, y) ก็คือความน่าจะเป็นที่ X มีค่าไม่เกิน x และ Y มีค่าไม่เกิน y กล่าวคือ

$$F(x, y) = P(X \leqslant x, Y \leqslant y), \quad -\infty < x, y < \infty$$

ทฤษฎี ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วมของ X และ Y มีคุณสมบัติต่อไปนี้

1. F(x, y) เป็นฟังก์ชันซึ่งมีค่าเพิ่มขึ้น เมื่อตัวแปรแต่ละตัวมีค่าสูงขึ้น กล่าวคือ

$$F(x+h_1, y) \geqslant F(x, y), \quad h_1 > 0$$

หรือ $$F(x, y+h_2) \geqslant F(x, y), \quad h_2 > 0$$

หรือ $$F(x+h, y+h) \geqslant F(x, y), \quad h > 0$$

2. $$F(x, -\infty) = F(-\infty, y) = F(-\infty, -\infty) = 0$$

$$F(+\infty, +\infty) = 1$$

3. F(x, y) มีสมบัติเป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องทางขวามือ (right continuous) เมื่อพิจารณาเปรียบเทียบกับตัวแปรแต่ละตัว กล่าวคือ

$$\lim_{h_1 \to 0} F(x+h_1, y) = F(x, y)$$

$$\lim_{h_2 \to 0} F(x, y+h_2) = F(x, y)$$

หรือเขียนรวมได้ว่า

$$\lim_{h \to 0} F(x+h, y+h) = F(x, y)$$

4. ถ้า a, b และ c, d เป็นค่าของ X และ Y โดยที่ $a < b$, $c < d$ แล้ว

$$P(a < X \leqslant b, c < Y \leqslant d) = F(b, d) - F(b, c) - F(a, d) + F(a, c) \geqslant 0$$

ตัวอย่าง X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วม

$$F(x, y) = \frac{y}{320}(x^3 + xy^2 + 2y^2 + 8), \quad k \leqslant x < 2, \quad 0 \leqslant y < 4$$

จงหาค่าของ k แล้วคำนวณค่า $P(X \leqslant 0, Y \leqslant 1)$, $P(X \leqslant 1, Y \leqslant 1)$, $P(X \leqslant 1, Y \leqslant 2)$, $\lim_{0<h \to 0} P(X \leqslant 1+h, Y \leqslant 1+h)$, $P(0 < X \leqslant 1, 1 < Y \leqslant 2)$

วิธีทำ

จากคุณสมบัติข้อ 2 ของ F(x, y) จะได้

$$F(k, y) = \frac{y}{320}(k^3 + ky^2 + 2y^2 + 8) = 0$$

$$k^3 + ky^2 + 2y^2 + 8 = 0$$

พิจารณา

$$F(-2, y) = (-2)^3 + (-2)y^2 + 2y^2 + 8$$

$$= -8 - 2y^2 + 2y^2 + 8$$

$$= 0$$

แสดงว่า $k = -2$

$$P(X \leqslant 0, Y \leqslant 1) = F(0, 1)$$

$$\frac{1}{320}(0 + 0 + 2 + 8) = \frac{10}{320}$$

$$P(X \leqslant 1, Y \leqslant 1) = F(1, 1)$$

$$= \frac{1}{320}(1 + 1 + 2 + 8) = \frac{12}{320}$$

$$P(X \leqslant 1, Y \leqslant 2) = F(1, 2)$$

$$= \frac{2}{320}(1 + 4 + 8 + 8) = \frac{42}{320}$$

$$\underset{0<h\to 0}{\text{tim}} P(X \leqslant 1 + h, Y \leqslant 1 + h) = \lim_{0<h\to 0} F(1 + h, 1 + h)$$

$$= \lim_{0<h\to 0}\left[\frac{1+h}{320}\left\{(1 + h)^3 + (1 + h)^3 + 2(1 + h)^2 + 8\right\}\right]$$

$$= \lim_{0<h\to 0}\left[\frac{2}{320}(6 + 7h + 9h^2 + 5h^3 + h^4)\right]$$

$$= \frac{12}{320}$$

$$= P(X \leqslant 1, Y \leqslant 1)$$

$$P(0 < X \leqslant 1, 1 < Y \leqslant 2) = F(1, 2) - F(1, 1) - F(0, 2) + F(0, 1)$$

$$= \frac{42}{320} - \frac{12}{320} - \frac{2}{320}(8 + 8) + \frac{10}{320} = \frac{1}{40}$$

จากนิยามของฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วมของ X และ Y ถ้า X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชัน f(x, y) เราสามารถหาฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วมของ X และ Y, F(x, y) ได้ดังนี้

$$F(x, y) = \sum_{b \leqslant y} \sum_{a \leqslant x} f(a, b) \qquad \text{.........(4.3.1)}$$

ในเมื่อ X และ Y เป็นตัวแปรแบบไม่ต่อเนื่อง และ

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f(x, y)dxdy \qquad \text{.........(4.3.2)}$$

ในเมื่อ X และ Y เป็นตัวแปรแบบต่อเนื่อง

เราสามารถหา f(x, y) ได้ในกรณีที่เรารู้ F(x, y) ของตัวแปรเชิงสุ่ม X และ Y ดังต่อไปนี้

หาก X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มไม่ต่อเนื่อง ที่มีฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วม F(x, y) ฟังก์ชันน่าจะเป็นร่วมของ X และ Y, f(x, y) จะกำหนดได้ดังนี้

$$f(x, y) = F(x, y) - F(x, y-h) - F(x-h, y) + F(x-h, y-h), \quad h > 0, \quad h \to 0$$

ในเมื่อ $$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} F(x-h, y-h) = P(X < x, Y < y) \qquad \text{.........(4.3.3)}$$

หาก X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่อง ที่มีฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วม F(x, y) ฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X และ Y, f(x, y) จะกำหนดได้ดังนี้

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} \qquad \text{.......(4.3.4)}$$

เฉลยแบบฝึกหัดที่ 4.3

1. กำหนดฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วมของ X และ Y ดังนี้

$$F(x, y) = \frac{1}{2}(xy - x - y + c), \quad 1 < x < 3, \quad 1 < y < k$$

จงหาค่าของ c และ k และคำนวณค่าของ

$P(X \leqslant 2, Y \leqslant 2)$

$P(1.2 < x \leqslant 2.2, Y \leqslant 2.2)$

$P(1.5 < x \leqslant 2.5, 1.5 < Y \leqslant 2.5)$

เฉลย

F(x, y) เป็นฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วมของ X และ Y ดังนั้น

$$0 = F(1, 1) = \frac{1}{2}(1 - 1 - 1 + c) \text{ จะได้ } c = 1$$

และ $$1 = F(3, k) = \frac{1}{2}(3k - 3 - k + 1)$$

จะได้ $$2k-2 = 2$$
$$k = 2$$

$$P(X \leqslant 2,\ Y \leqslant 2) = F(2,\ 2)$$
$$= \frac{1}{2}(4-2-2+1) = \frac{1}{2}$$

$$P(1.2 < X \leqslant 2.2,\ Y \leqslant 2.2) = F(2.2,\ 2.2)-F(1.2,\ 2.2)$$
$$= \frac{1}{2}(4.4-2-2.2+1) - \frac{1}{2}(2.4-2-1.2+1) = \frac{1}{2}$$

$$P(1.5 < X \leqslant 2.5,\ 1.5 < Y \leqslant 2.5) = F(2.5,\ 2.5)-F(2.5,\ 1.5)-F(1.5,\ 2.5)+F(1.5,\ 1.5)$$
$$= \frac{1}{2}(5-2.5-2+1)-\frac{1}{2}(3.75-2.5-1.5+1)$$
$$-\frac{1}{2}(3-1.5-2+1)+\frac{1}{2}(2.25-1.5-1.5+1)$$
$$= \frac{1}{4}$$

หมายเหตุ ค่าสูงสุดของ Y คือ 2 ดังนั้น ทุก ๆ ค่า y ที่มากกว่า 2 จะแทนด้วย 2 เสมอ เช่น F(2.5, 2.5) ก็คือ F(2.5, 2) เป็นต้น

2. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วม F(x, y) ดังนี้

$$F(x,\ y) = kxy(x+y),\quad 0 < x < 1,\quad 0 < y < 1$$

จงหาค่าของ k และ $P\left(X > \frac{1}{5},\ Y > \frac{4}{5}\right)$

เฉลย

F(x, y) เป็นฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วมของ X และ Y

ดังนั้น

$$1 = F(1,\ 1) = k(1+1)$$

จะได้ $$k = \frac{1}{2}$$

$$P\left(X > \frac{1}{5}, Y > \frac{4}{5}\right) = P\left(\frac{1}{5} < x \leqslant 1,\ \frac{4}{5} < Y \leqslant 1\right)$$
$$= F(1,\ 1)-F\left(1,\ \frac{4}{5}\right)-F\left(\frac{1}{5},\ 1\right)+F\left(\frac{1}{5},\ \frac{4}{5}\right)$$
$$= 1-\frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{9}{5}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{6}{5}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{4}{25}\right)\left(\frac{5}{5}\right)$$
$$= \frac{6}{25}$$

3. กำหนด $f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันน่าจะเป็นร่วมของตัวแปรเชิงสุ่ม x และ Y, $f(x, y) > 0$ ในเมื่อ $(x, y) = (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)$ นอกนั้นเป็น 0 ถ้า $f(1, 1) = f(2, 2)$, $F(2, 2) = 2F(1, 2) = \frac{6}{9}$, $P(X+Y \geqslant 4) = \frac{4}{9}$ และ $P(X \leqslant 1, Y \leqslant 3) = \frac{5}{9}$

จงเขียนตารางแสดงฟังก์ชันน่าจะเป็นร่วมของ x และ Y

เฉลย

$f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันน่าจะเป็นร่วมของ x และ Y ดังนั้น

$$f(1, 1)+f(1, 2)+f(1, 3)+f(2, 1)+f(2, 2)+f(2, 3) = 1 \qquad \text{..........(1)}$$

$$F(2, 2) = 2F(1, 2) = \frac{6}{9} \quad \text{จะได้}$$

$$f(1, 1)+f(1, 2)+f(2, 1)+f(2, 2) = 2[f(1, 1)+f(1, 2)] = \frac{6}{9}$$

นั่นคือ $f(1, 1)+f(1, 2) = \frac{3}{9}$ ....(2)

และ $f(2, 1)+f(2, 2) = \frac{6}{9}-\frac{3}{9} = \frac{3}{9}$ ....(3)

แต่ $f(1, 1) = f(2, 2)$ ดังนั้น

(2)-(3) ได้ $f(1, 2)-f(2, 1) = 0$ หรือ $f(1, 2) = f(2, 1)$

$$P(X+Y \geqslant 4) = f(1, 3)+f(2, 2)+f(2, 3) = \frac{4}{9} \qquad (4)$$

$$P(X \leqslant 1, Y \leqslant 3) = f(1, 1)+f(1, 2)+f(1, 3) = \frac{5}{9} \qquad \text{.........(5)}$$

ผลจาก (1), (2), (3) และ (4) จะได้

$$f(2, 2) = \frac{1}{9} = f(1, 1)$$

จาก (2) จะได้ $f(1, 2) = \frac{3}{9}-\frac{1}{9} = \frac{2}{9} = f(2, 1)$

จาก (5) จะได้ $f(1, 3) = \frac{5}{9}-\frac{1}{9}-\frac{2}{9} = \frac{2}{9}$

จาก (4) จะได้ $f(2, 3) = \frac{4}{9}-\frac{2}{9}-\frac{1}{9} = \frac{1}{9}$

เขียนตารางฟังก์ชันน่าจะเป็นร่วมของ X และ Y ได้ดังนี้

(x, y)	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)
f(x, y)	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$

4. ให้ $f(x, y) = \frac{1}{8}(6-x-y),\ 0 < x < 2,\ 2 < y < 4$

$= 0$ อื่น ๆ

จงหาฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วมของ X และ Y และคำนวณค่าของ $P(X > 1, Y \leqslant 3)$

เฉลย

$$\int_2^y\int_0^x \frac{1}{8}(6-x-y)dxdy = \frac{1}{8}\int_2^y\left(6x-\frac{x^2}{2}-xy\Big|_{x=0}^{x}\right)dy$$

$$= \frac{1}{8}\int_2^y\left(6x-\frac{x^2}{2}-xy\right)dy$$

$$= \frac{1}{8}\left(6xy-\frac{x^2}{2}y-x\frac{y^2}{2}\Big|_{y=2}^{y}\right)$$

$$= \frac{1}{16}(12xy-x^2y-xy^2-20x+2x^2)$$

จะได้ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วมของ X และ Y ดังนี้

$F(x, y) = 0$, $x < 0$ และ/หรือ $y < 2$

$= \frac{x}{16}(12y-xy-y^2-20+2x),\ 0 \leqslant x < 2,\ 2 \leqslant y < 4$

$= 1$, $x \geqslant 2,\ y \geqslant 4$

$P(X > 1, Y \leqslant 3) = P(1 < x \leqslant 2, Y \leqslant 3)$

$= F(2, 3) \quad F(1, 3)$

$= \frac{2}{16}(36-6-9-20+4) - \frac{1}{16}(36-3-9-20+2)$

$= \frac{1}{4}$

5. ให้ $f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X และ Y ซึ่งกำหนดไว้ดังนี้

$f(x, y) = \frac{xy+1}{32},\ 0 < x < 2,\ 1 < y < 5$

$= 0$ อื่น ๆ

จงหาฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วมของ X และ Y

และคำนวณค่าของ $P(X \leqslant 1, 2 < Y \leqslant 4)$

เฉลย

$$\int_1^y\int_0^x \frac{xy+1}{32}dxdy = \frac{1}{32}\int_1^y\left(\frac{x^2}{2}y+x\right)dy$$

$$= \frac{1}{32}\left[\frac{x^2}{2}\left(\frac{y^2-1}{2}\right)+x(y-1)\right]$$

จะได้ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วมของ X และ Y ดังนี้

$$
\begin{aligned}
F(x, y) &= 0 && , x < 0 \text{ และ/หรือ } y < 1 \\
&= \frac{x}{128}(xy^2 - x + 4y - 4) && , 0 \leqslant x < 2, \ 1 \leqslant y < 5 \\
&= 1 && , x \geqslant 2, \ y \geqslant 5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(X \leqslant 1, \ 2 < Y \leqslant 4) &= F(1, 4) - F(1, 2) \\
&= \frac{1}{128}(16 - 1 + 16 - 4) - \frac{1}{128}(4 - 1 + 8 - 4) \\
&= \frac{5}{32}
\end{aligned}
$$

6. X, Y, Z เป็นตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่อง ที่มีฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วม $F(x, y, z)$ กำหนดไว้ดังนี้

$$F(x, y, z) = \frac{x^2yz}{8}(2y + z), \ 0 < x < 1, \ 0 < y < 1, \ 0 < z < 2$$

จงหา

6.1 $P(X \leqslant 0.1, Y \leqslant 0.2, Z \leqslant 1)$

6.2 $P(0.2 < X \leqslant 0.5, \ Y > 0.5, \ 1 < Z \leqslant 2)$

6.3 ฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X, Y และ Z

6.4 ฟังก์ชันหนาแน่นทางเดียวของ X

เฉลย 6.1 $P(X \leqslant 0.1, Y \leqslant 0.2, Z \leqslant 1) = F(0.1, 0.2, 1)$

$$= \frac{(0.1)(0.2)(1)}{8}(0.4 + 1) = 0.00035$$

6.2

$$
\begin{aligned}
P(0.2 < X \leqslant 0.5, \ Y > 0.5, \ 1 < Z \leqslant 2) &= P(0.2 < x \leqslant 0.5, \ 0.5 < Y \leqslant 1, \ 1 < z \leqslant 2) \\
&= F(0.5, 1, 2) - F(0.2, 1, 2) - F(0.5, 0.5, 2) \\
&\quad - F(0.5, 1, 1) + F(0.2, 0.5, 2) + F(0.2, 1, 1) \\
&\quad + F(0.5, 0.5, 1) - F(0.2, 0.5, 1) \\
&= \frac{2}{8} - \frac{0.32}{8} - \frac{0.75}{8} - \frac{0.75}{8} + \frac{0.12}{8} + \frac{0.12}{8} \\
&\quad + \frac{0.25}{8} - \frac{0.04}{8} \\
&= 0.07875
\end{aligned}
$$

6.3 $\frac{\partial^3}{\partial x\partial y\partial z}\left[\frac{2x^2y^2z+x^2yz^2}{8}\right] = \frac{\partial^2}{\partial y\partial z}\left[\frac{4xy^2z+2xyz^2}{8}\right]$

$= \frac{a}{\partial z}\left[\frac{8xyz+2xz^2}{8}\right] = \frac{8xy+4x2}{8}$

จะได้ฟังก์ชันหนาแน่นร่วมของ X และ Y คือ

$$f(x, y) = \frac{x}{2}(2y+z),\ 0 < x < 1,\ 0 < y < 1,\ 0 < z < 2$$
$$= 0, \quad \text{อื่น ๆ}$$

6.4 $\frac{d}{dx} F(x,1,2) = \frac{d}{dx}\left[\frac{2x^2}{8}(2+2)\right] = 2x$

จะได้ฟังก์ชันหนาแน่นทางเดียวของ X คือ

$$g(x) = 2x,\ 0 \angle x \angle 1$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

7. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วม F(x, y) กำหนดไว้ดังนี้

$$F(x, y) = 0 \qquad , x < 0 \text{ และ/หรือ } y < 0$$
$$= \frac{x^2y}{12}(4x+y) \qquad , 0 \leqslant x < 1, 0 \leqslant y < 2$$
$$= \frac{y}{12}(y+4) \qquad , x \geqslant 1, 0 < y \leqslant 2$$
$$= \frac{x^2}{3}(2x+ \quad 1) \qquad , 0 < x \leqslant 1, y \geqslant 2$$
$$= 1 \qquad , x \geqslant 1, y \geqslant 2$$

จงหา

7.2 $P(2X < 1, Y \leqslant 2)$

7.2 $P(X \leqslant 1, Y \leqslant 1)$

7.3 $P\left(\frac{1}{2} < X \leqslant \frac{3}{2}, \frac{3}{2} < Y \leqslant \frac{5}{2}\right)$

7.4 ฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X และ Y

7.1 $P(2X < 1, Y \leqslant 2) = P\left(X \leqslant \frac{1}{2}, Y \leqslant 2\right)$

$$= F\left(\frac{1}{2}, 2\right) = \frac{\frac{1}{4}}{3}(1+1) = \frac{1}{6}$$

7.2 $RX \leqslant I, Y \leqslant I) = F(1, 1) = \frac{1}{12}(1+4) = \frac{5}{12}$

7.3 $P\left(\frac{1}{2} < X \leqslant \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \leqslant Y \leqslant \frac{5}{2}\right) = F\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right) - F\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right) - F\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) + F\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

$$= 1 - \frac{\frac{1}{4}(1+1)}{3} - \frac{\frac{3}{2}}{12}\left(\frac{3}{2}+4\right) + \frac{\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\right)}{12}\left(2+\frac{3}{2}\right)$$

$$= \frac{49}{192}$$

1.4 $\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left[\frac{4x'y + x^2y^2}{12}\right], \quad 0 \leqslant x < 1, \quad 0 \leqslant y < 2$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{12x^2y + 2xy^2}{12}\right] = \overline{12x^2 + 4x12}$$

$= 0$ อื่น ๆ

ดังนั้น ฟังก์ชันหนาแน่นร่วมของ x และ Y คือ

$$f(x, y) = \frac{3x^2 + xy}{3}, \quad 0, < x < 1, \quad 0 < y < 2$$

$= 0$ อื่น ๆ

8. ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วมของ X และ Y กำหนดไว้

$$\begin{aligned}
F(x, y) &= 0 &&, \quad x < 2 \text{ และ/หรือ } y < 0 \\
&= \frac{1}{8x^2}(7x^2y + x^2y^2 - 4y^2 - 28y) &&, \quad 2 \leqslant x < \infty, \quad 0 \leqslant y < 1 \\
&= 1 - \frac{4}{x^2} &&, \quad 2 \leqslant x < \infty, \quad y \geqslant 1 \\
&= \frac{1}{8}(7y + y^2) &&, \quad x > \infty, \quad 0 \leqslant y < 1 \\
&= 1 &&, \quad x > \infty, \quad y \geqslant 1
\end{aligned}$$

จงคำนวณค่าของ $P(5 < X \leqslant 10, .2 < Y \leqslant .5)$ และจงหาฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X และ Y

$P(5 < X \leqslant 10,\ .2 < Y \leqslant .5)$

$$= F(10,\ .5) - F(10,\ .2) - F(5,\ .5) + F(5,\ .2)$$

$$= \frac{1}{800}(350 + 25 - 1 - 14) - \frac{1}{800}\left(140 + 4 - \frac{4}{25} - \frac{28}{5}\right)$$

$$- \frac{1}{200}\left(\frac{175}{2} + \frac{25}{4} - 1 - 14\right) + \frac{1}{200}\left(35 + 1 - \frac{4}{25} - \frac{28}{5}\right)$$

$$= \frac{693}{20{,}000}$$

$$\frac{\partial^2 F(x,\ y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left[\frac{7}{8}y + \frac{y^2}{8} - \frac{y^2}{2x^2} - \frac{7y}{2x^2}\right] \quad , \quad 2 \leqslant x,\ 0 \leqslant y < 1$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{y^2}{x^3} + \frac{7y}{x^3}\right] = \frac{2y}{x^3} + \frac{7}{x^3} \quad , \quad 2 \leqslant x,\ 0 \leqslant y < 1$$

$$= 0 \qquad \text{อื่น ๆ}$$

ฟังก์ชันหนาแน่นร่วมของ X และ Y คือ

$$f(x,\ y) = \frac{1}{x^3}(2y + 7) \quad , \quad x \geqslant 2,\ 0 \leqslant y < 1$$

$$= 0 \qquad \text{อื่น ๆ}$$

4.4 การแจกแจงแบบ MARGINAL ของตัวแปรเชิงสุ่ม และการแจกแจงภายใต้เงื่อนไข

เมื่อมีตัวแปรเชิงสุ่มทวิคูณ X และ Y ที่มีฟังก์ชันน่าจะเป็นร่วมหรือฟังก์ชันความหนาแน่นร่วม f(x, y) และเราสนใจจะพิจารณาดูการแจกแจงของตัวแปรเชิงสุ่ม X (หรือ Y) เพียงตัวเดียว โดยไม่คำนึงว่าตัวแปรอีกตัวหนึ่งจะมีผลลัพธ์เป็นอย่างไร เราเรียกการแจกแจงที่ได้นี้ว่าการแจกแจงแบบ marginal ของ X (หรือของ Y) ซึ่งนิยามโดย

$$g(x) = \sum_{\forall y} f(x,\ y) \qquad \text{..........(4.4.1)}$$

$$h(y) = \sum_{\forall x} f(x,\ y)$$

เมื่อ X และ Y เป็นตัวแปรแบบไม่ต่อเนื่อง

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,\ y)dy \qquad \text{..........(4.4.2)}$$

$$h(y(= \int_{-\infty}^{\infty} f(x,\ y)dx$$

ในเมื่อ X และ Y ต่างเป็นตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่อง

ทั้ง g(x) และ h(y) ต่างมีคุณสมบัติที่จะเป็นฟังก์ชันน่าจะเป็นหรือฟังก์ชันความหนาแน่น แล้วแต่ว่า X และ Y จะเป็นตัวแปรไม่ต่อเนื่องหรือต่อเนื่อง เราจึงเรียก g(x) และ h(y) นี้ว่า ฟังก์ชันน่าจะเป็นหรือฟังก์ชันความหนาแน่นแบบ marginal (marginal p.d.f.) ของ X และของ Y ตามลำดับ

การคำนวณความน่าจะเป็นที่ตัวแปร X (หรือ Y) เพียงตัวเดียว จะมีผลลัพธ์ในช่วง (a, b) ก็คำนวณได้วิธีเดียวกัน กล่าวคือ

$$\begin{aligned} P(a < X \leqslant b) &= \int_a^b g(x)dx \\ &= \int_a^b \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dydx \\ &= P(a < X \leqslant b, Y \leqslant \infty) = F(b, \infty) - F(a, \infty) \end{aligned}$$

ทำนองเดียวกัน

$$\begin{aligned} P(a < Y \leqslant b) &= \int_a^b \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dxdy \\ &= P(X \leqslant \infty, a < Y \leqslant b) = F(\infty, b) - F(\infty, a) \end{aligned}$$

ในเมื่อ g(x) และ h(y) ต่างมีสมบัติเป็นฟังก์ชันความหนาแน่นหรือฟังก์ชันน่าจะเป็น เรากำหนด G(x) และ H(y) ซึ่งเรียกว่าฟังก์ชันการแจกแจงสะสม marginal (marginal c.d.f.) ของ X และของ Y ตามลำดับ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_{-\infty}^{x} g(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dydx \\ &= P(X \leqslant x, Y \leqslant \infty) = F_{X,Y}(x, \infty) \end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกัน $H(y) = F_{X,Y}(\infty, y)$

ในบางกรณีการแจกแจงของตัวแปรใดตัวแปรหนึ่ง จะขึ้นอยู่กับตัวแปรตัวอื่นเสมอ ซึ่งเราเรียกว่า เป็นการแจกแจงภายใต้เงื่อนไข การพิจารณาฟังก์ชันหนาแน่นหรือฟังก์ชันการแจกแจงสะสมภายใต้เงื่อนไข อาศัยกฎของความน่าจะเป็นภายใต้เงื่อนไข และเราสรุปได้ว่า

ถ้า X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่อง เราจะได้ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมภายใต้เงื่อนไขของ X เมื่อรู้ค่า $Y = y$, $F_{X|Y=y}(x|y)$ หรือเขียนสั้น ๆ ว่า $F(x|y)$ จะกำหนดได้โดย

$$F(x|y) = P(X \leqslant x|Y = y) = \frac{\frac{\partial F(x,\ y)}{\partial y}}{\frac{dH(y)}{dy}}$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{x} f(t,\ y)dt}{h(y)}$$

ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมภายใต้เงื่อนไขของ Y เมื่อรู้ค่า $X = x$ ก็คือ

$$F(y|x) = \frac{\frac{\partial F(x,\ y)}{\partial x}}{\frac{dG(x)}{dx}}$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{y} f(x,\ t)dt}{g(x)}$$

และฟังก์ชันความหนาแน่นภายใต้เงื่อนไข (conditional probability density) ของ X เมื่อรู้ค่า $Y = y$, $f(x|y)$ จะกำหนดได้โดย

$$f(x|y) = \frac{f(x,\ y)}{h(y)}, \quad h(y) > 0$$

ทำนองเดียวกัน ถ้ารู้ว่าค่าของ X เป็น x เราหาฟังก์ชันความหนาแน่นภายใต้เงื่อนไขของ y, $f(y|x)$ ได้ดังนี้

$$f(y|x) = \frac{f(x,\ y)}{g(x)}, \quad g(x) > 0$$

ดังนั้น ในการคำนวณค่าของ $P(X \in A|Y = y)$ หรือ $P(Y \in B|X = x)$ จะคำนวณได้จาก

$$P(X \in A|Y = y) = \int_A f(x|y)dx$$

$$P(Y \in B / X = x) = \int_B f(y|x)dy$$

จากผลที่ได้เราสรุปได้ว่า ไม่ว่า X และ Y จะเป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบต่อเนื่องหรือไม่ต่อเนื่องก็ตาม เราจะได้

$$f(x, y) = h(y)\, f(x|y) = g(x)\, f(y|x)$$

เฉลยแบบฝึกหัดที่ 4.4

1. กำหนด $f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันน่าจะเป็นร่วมของตัวแปรเชิงสุ่ม X และ Y ซึ่งกำหนดไว้โดย $f(1, 4) = \frac{3}{10}$, $f(2, 1) = \frac{2}{10}$, $f(3, 3) = \frac{1}{10}$, $f(4, 1) = \frac{3}{10}$, $f(4, 2) = \frac{1}{10}$ นอกนั้นเป็น 0 จงหา

   1.1 ฟังก์ชันน่าจะเป็นแบบ marginal ของ X และของ Y

   1.2 ฟังก์ชันน่าจะเป็นเงื่อนไขของ X เมื่อ $Y = 1$

   1.3 ฟังก์ชันน่าจะเป็นเงื่อนไขของ Y เมื่อ $X \in A = \{2, 4\}$

เฉลย

1.1 $g(x)$ เป็นฟังก์ชันน่าจะเป็นแบบ marginal ของ X จะได้

$$\begin{aligned} g(x) &= f(1, 4) &&= \frac{3}{10}, && x = 1 \\ &= f(2, 1) &&= \frac{2}{10}, && x = 2 \\ &= f(3, 3) &&= \frac{1}{10}, && x = 3 \\ &= f(4, 1) + f(4, 2) &&= \frac{4}{10}, && x = 4 \\ &= 0 && \text{อื่น ๆ} \end{aligned}$$

$h(y)$ เป็นฟังก์ชันน่าจะเป็นแบบ marginal ของ Y จะได้

$$\begin{aligned} h(y) &= f(2, 1) + f(4, 1) &&= \frac{5}{10}, && y = 1 \\ &= f(4, 2) &&= \frac{1}{10}, && y = 2 \\ &= f(3, 3) &&= \frac{1}{10}, && y = 3 \\ &= f(1, 4) &&= \frac{3}{10}, && y = 4 \\ &= 0 && \text{อืน ๆ} \end{aligned}$$

1.2 $f(x|1)$ เป็นฟังก์ชันเงื่อนไขของ X เมื่อ $Y = 1$ จะได้

$$f(x|1) = \frac{f(x, 1)}{h(1)} \quad , \quad x = 2, 4$$

นั่นคือ

$$f(x|1) = \frac{\frac{2}{10}}{\frac{5}{10}} = \frac{2}{5} \quad , \quad x = 2$$

$$= \frac{\frac{3}{10}}{\frac{5}{10}} = \frac{3}{5} \quad , \quad x = 4$$

$$= 0 \qquad \text{อื่น ๆ}$$

1.3 ฟังก์ชันน่าจะเป็นเงื่อนไขของ Y เมื่อ $X \in A = \{2, 4\}$ ก็คือ

$$f_{Y|X \in A}(y|A) = \frac{P(X \in A, Y = y)}{P(X \in A)}$$

$$P(X \in A) = \sum_{x=2}^{4} g(x) = \frac{2}{10} + \frac{1}{10} + \frac{4}{10} = \frac{7}{10}$$

ดังนั้น

$$f(y|A) = \frac{f(2, 1) + f(4, 1)}{\frac{7}{10}} = \frac{5}{7} \quad , \quad y = 1$$

$$= \frac{f(4, 2)}{\frac{7}{10}} = \frac{1}{7} \quad , \quad y = 2$$

$$= \frac{f(3, 3)}{\frac{7}{10}} = \frac{1}{7} \quad , \quad y = 3$$

2. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นร่วม $f(x, y)$ กำหนดไว้โดย

$$f(x, y) = \frac{1}{8}(6 - x - y), \quad 0 < x < 2, \ 2 < y < 4$$

$$= 0 \qquad \text{อื่น ๆ}$$

จงหา

2.1 ฟังก์ชันความหนาแน่นแบบ marginal ของ X และของ Y

2.2 ฟังก์ชันความหนาแน่นเงื่อนไขของ X เมื่อ $Y = y,\ 2 < y < 4$

2.3 $P(1 < Y < 3|X = 2)$ และ $P(X > 1|Y < 3)$

เฉลย

2.1 ให้ g(x) เป็นฟังก์ชันหนาแน่นทางเดียวของ X จะได้

$$g(x) = \int_2^4 \frac{1}{8}(6-x-y)dy \quad , \quad 0 < x < 2$$

$$= \frac{1}{8}\left(6y - xy - \frac{y^2}{2}\Big|_{y=2}^{4}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left[6(4-2) - x(4-2) - \frac{16-4}{2}\right]$$

ดังนั้น

$$g(x) = \frac{3-x}{4} \quad , \quad 0 < x < 2$$

$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

ถ้า h(y) เป็นฟังก์ชันหนาแน่นทางเดียวของ Y จะได้

$$h(y) = \int_0^2 \frac{1}{8}(6-x-y)dx \quad , \quad 2 < y < 4$$

$$= \frac{1}{8}\left(6x - \frac{x^2}{2} - xy\Big|_{x=0}^{2}\right)$$

$$= \frac{1}{8}(12-2-2y)$$

ดังนั้น

$$h(y) = \frac{5-y}{4} \quad , \quad 2 < y < 4$$

$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

2.2
$$\frac{f(x,\ y)}{h(y)} = \frac{\frac{1}{8}(6-x-y)}{\frac{5-y}{4}} \quad , \quad 0 < x < 2,\ 2 < y < 4$$

ฟังก์ชันหนาแน่นเงื่อนไขของ X เมื่อ Y = y ก็คือ

$$f(x|y) = \frac{6-x-y}{10-2y} \quad , \quad 0 < x < 2,\ 2 < y < 4$$

$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

2.3 $$P(1 < Y < 3|X = 2) = \int_1^3 f(y|2)dy$$

แต่ $$f(y|2) = \left.\frac{\frac{1}{8}(6-x-y)}{\frac{3-x}{4}}\right|_{x=2} \quad , \quad 2 < y < 4$$

$$= \frac{4-y}{2} \quad , \quad 2 < y < 4$$

$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

ดังนั้น

$$P(1 < Y < 3|X = 2) = \int_2^3 \frac{4-y}{2}dy$$

$$= \frac{1}{2}\left(4y - \frac{y^2}{2}\Big|_{y=2}^{3}\right) = \frac{3}{4}$$

$$P(X > 1|Y < 3) = \frac{P(X > 1, Y < 3)}{P(Y < 3)}$$

$$P(X > 1, Y < 3) = \int_2^3\int_1^2 \frac{1}{8}(6-x-y)dxdy$$

$$= \int_2^3 \frac{1}{8}\left[6(2-1) - \frac{4-1}{2} - (2-1)y\right]dy$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{9}{2}(3-2) - \frac{9-4}{2}\right] = \frac{1}{4}$$

$$P(Y < 3) = \int_2^3 \frac{5-y}{4}dy$$

$$= \frac{1}{4}\left[5(3-2) - \frac{9-4}{2}\right] = \frac{5}{8}$$

$$P(X > 1|Y < 3) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{8}} = \frac{2}{5}$$

3. กำหนด $f(x, y) = 6xy(2-x-y) \quad , \quad 0 < x, y < 1$

$= 0$ อื่น ๆ

เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X และ Y

3.1 จงหาฟังก์ชันความหนาแน่นแบบ marginal ของ X และของ Y

3.2 จงหาฟังก์ชันความหนาแน่นเงื่อนไขของ X เมื่อ $Y = y,\ 0 < y < 1$

3.3 จงคำนวณค่าของ $P\left(X > \frac{1}{2} \middle| Y < \frac{1}{4}\right)$ และ $P\left(X > Y \middle| Y > \frac{1}{2}\right)$

เฉลย

3.1 $$\int_0^1 6xy(2-x-y)dy = 6xy^2 - 3x^2y^2 - 2xy^3\Big|_{y=0}^{1} \quad , \quad 0 < x < 1$$

จะได้ฟังก์ชันหนาแน่นทางเดียวของ X คือ

$$g(x) = 4x - 3x^2 \quad , \quad 0 < x < 1$$

$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

และฟังก์ชันหนาแน่นทางเดียวของ Y คือ

$$h(y) = 4y - 3y^2 \quad , \quad 0 < y < 1$$

$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

3.2 $$\frac{f(x,\ y)}{h(y)} = \frac{6xy(2\ \ x-y)}{4y-3y^2} \quad , \quad 0 < x < 1,\ 0 < y < 1$$

จะได้ฟังก์ชันหนาแน่นเงื่อนไขของ X เมื่อ $Y = y$ คือ

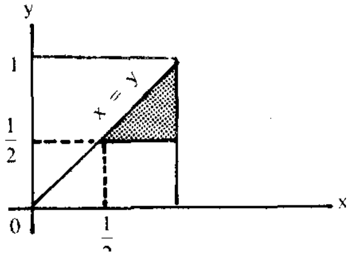
$$f(x|y) = \frac{6x(2-x-y)}{4-3y} \quad , \quad 0 < x < 1,\ 0 \leqslant y < 1$$

3.3 $$P\left(X > \frac{1}{2} \middle| Y < \frac{1}{4}\right) = \frac{P\left(X > \frac{1}{2}, Y < \frac{1}{4}\right)}{P\left(Y <_4 \frac{1}{4}\right)}$$

$$= \frac{\int_0^{1/4}\int_{1/2}^{1} 6xy(2-x-y)dxdy}{\int_0^{1/4} (4y-3y^2)dx}$$

$$= \frac{\int_0^{1/4} \left[6y\left(1-\frac{1}{4}\right) - 2y\left(1-\frac{1}{8}\right) - 3y^2\left(1-\frac{1}{4}\right)\right]dy}{2\left(\frac{1}{16}-0\right) - \left(\frac{1}{64}-0\right)}$$

$$= \frac{\frac{11}{8}\left(\frac{1}{16}\right) - \frac{3}{4}\left(\frac{1}{64}\right)1}{\frac{7}{64}} = \frac{9}{28}$$



$$P\left(X > Y \middle| Y > \frac{1}{2}\right) = \frac{P\left(X > Y > \frac{1}{2}\right)}{P\left(Y > \frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{\int_{1/2}^{1}\int_{y}^{1} 6xy(2-x-y)dxdy}{\int_{1/2}^{1}(4y-3y^2)dy}$$

$$= \frac{\int_{1/2}^{1}\left[6y(1-y^2)-2y(1-y^3)-3y^2(1-y^2)\right]dy}{2\left(1-\frac{1}{4}\right)-\left(1-\frac{1}{8}\right)}$$

$$= \frac{4\cdot\frac{1-\frac{1}{4}}{2}-\left(1-\frac{1}{8}\right)-6\cdot\frac{1-\frac{1}{16}}{4}+\left(1-\frac{1}{32}\right)}{\frac{5}{8}} = \frac{3}{10}$$

4. ฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X และ Y กำหนดไว้โดย

$$f(x, y) = 6x \quad , \quad 0 < x < 1, \ 0 < y < 1-x$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

4.1 จงหาฟังก์ชันความหนาแน่นเงื่อนไขของ Y เมื่อ $X = x$, $0 < x < 1$

4.2 จงหาฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ X ภายใต้เงื่อนไข $Y = 0.5$

4.3 จงคำนวณค่าของ $P(X > 0.3|Y = 0.5)$ และ $P(Y < 0.2|X = 0.2)$

เฉลย

4.1 $$g(x) = \int_0^{1-x} 6xdy = 6x(1-x) \quad , \quad 0 < x < 1$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

$$\frac{f(x, y)}{g(x)} = \frac{6x}{6x(1-x)} = \frac{1}{1-x} \quad , \quad 0 < y < 1-x, \ 0 < x < 1$$

จะได้ฟังก์ชันหนาแน่นเงื่อนไขของ Y เมื่อ X = x คือ

$$f(y|x) = \frac{1}{1-x}, \quad 0 < y < 1-x, \; 0 < x < 1$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

4.2 $$h(y) = \int_0^{1-y} 6x\,dx = 3(1-y)^2, \quad 0 < y < 1$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

$$f(x|y) = \frac{6x}{3(1-y)^2}, \quad 0 < x < 1-y, \; 0 < y < 1$$

$$f(x|0.5) = 8x, \quad 0 < x < 0.5$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

$$\int_0^x 8x\,dx = 4x^2, \quad 0 < x < 0.5$$

ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ x ภายใต้เงื่อนไข Y = 0.5 ก็คือ

$$F(x|0.5) = 0, \quad x < 0$$
$$= 4x^2, \quad 0 \leqslant x < 0.5$$
$$= 1, \quad x \geqslant 0.5$$

4.3 $P(X > 0.3|Y = 0.5) = 1 - F_{X|y}(0.3|0.5) = 1 - 4(0.3)^2 = 0.64$

$$P(Y < 0.2|X = 0.2) = \int_0^{0.2} \frac{1}{1-0.2}\,dy = \frac{0.2}{0.8} = 0.25$$

5. ฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของตัวแปรเชิงสุ่ม x และ Y กำหนดไว้โดย

$$f(x, y) = 2, \quad 0 < x < y < 1$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

จงคำนวณค่าของ

5.1 $P(0.2 < x \leqslant 0.5)$

5.2 $P(0.3 < Y \leqslant 0.7)$

5.3 $P(0.25 < X < 0.5|Y = 0.75)$

5.4 $P(Y \leqslant 0.5|X = 0.1)$

เฉลย

5.1 $$P(0.2 < x \leqslant 0.5) = \int_{0.2}^{0.5}\int_x^1 2\,dy\,dx$$

$$= \int_{0.2}^{0.5} 2(1-x)dx$$

$$= 2(0.5-0.2)-(0.25-0.04) = 0.39$$

5.2 $$P(0.3 < Y \leqslant 0.7) = \int_{0.3}^{0.7}\int_{0}^{y} 2dxdy$$

$$= \int_{0.3}^{0.7} 2ydy$$

$$= 0.49-0.09 = 0.40$$

5.3 $$h(y) = \int_{0}^{Y} 2dx = 2y \quad , \quad 0 < y < 1$$

$$f_{X|y}(x|0.75) = \left.\frac{2}{2Y}\right|_{y=0.75} \quad \frac{4}{3} \quad , \quad 0 < x < \frac{3}{4}$$

$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

$$P(0.25 < X < 0.5|Y = 0.75) = \int_{0.25}^{0.5} \frac{4}{3}dx$$

$$= \frac{4}{3}(0.5-0.25) = \frac{1}{3}$$

5.4 $$g(x) = \int_{x}^{1} 2dy = 2(1-x) \quad , \quad 0 < x < 1$$

$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

$$f_{Y|x}(y|0.1) = \left.\frac{2}{2(1-x)}\right|_{x=0.1} = \frac{10}{9} \quad , \quad 0.1 < y < 1$$

$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

$$P(Y \leqslant 0.5|X = 0.1) = \int_{0.1}^{0.5} \frac{10}{9}dy = \frac{10}{9}(0.5-0.1) = \frac{4}{9}$$

6. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบต่อเนื่องที่มี $f(x|y)$ เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นเงื่อนไขของ X เมื่อ Y = y

6.1 จงพิสูจน์ว่า

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x|y)dx = 1$$

6.2 ถ้า

$$f(x|y) = \frac{k(1-x)}{(1-y)^2} \quad , \quad 0 < y < x < 1$$
$$= 0 \qquad \text{อื่น ๆ}$$

6.2.1 จงคำนวณค่าของ k

6.2.2 ถ้า h(y) เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นแบบ marginal ของ Y ซึ่งกำหนดไว้โดย

$$h(y) = 12y(1-y)^2 \quad , \quad 0 < y < 1$$
$$= 0 \qquad \text{อื่น ๆ}$$

จงหาฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X และ Y

6.2.3 จงคำนวณค่าของ P(2X > 1)

เฉลย

6.1 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x|y)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x, y)}{h(y)}dx$ นิยามฟังก์ชันหนาแน่นเงื่อนไข

$$= \frac{1}{h(y)}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx$$

$= \frac{1}{h(y)} \cdot h(y)$ นิยามฟังก์ชันทางเดียวของ Y

$$= 1$$

6.2 f(x|y) เป็นฟังก์ชันหนาแน่นเงื่อนไขของ X เมื่อ Y = y ดังนั้น

$$\int_{y}^{1} \frac{k(1-x)}{(1-y)^2}dx = 1$$

$$\frac{k}{(1-y)^2}\left[(1-y) - \frac{1-y^2}{2}\right] = 1$$

$$k\left|2-(1+y)\right| = 2(1-y)$$

จะได้ $k = 2$ ..,........ (6.2. 1)

$$f(x|y)h(y) = \frac{2(1-x)}{(1-y)^2} \cdot 12y(1-y)^2 \quad , \quad 0 < y < x < 1$$

นั่นคือ $f(x, y) = 24y(1-x) \quad , \quad 0 < y < x < 1$ . . (6.2.2)

$= 0$ อื่น ๆ

$$P(2X > 1) = P\left(X > \frac{1}{2}\right)$$

$$= \int_{1/2}^{1}\int_{0}^{x} 24y(1-x)dydx$$

$$= \int_{1/2}^{1} 12x^2(1-x)dx$$

$$= 4\left(1-\frac{1}{8}\right)-3\left(1-\frac{1}{16}\right) = \frac{11}{16} \qquad \text{..........6.2.3}$$

7. ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วมของ X และ Y กำหนดไว้โดย

$$F(x, y) = \frac{1}{40}(2x^3y+5x^2y^2+2xy^3) \quad , \quad 0 \leqslant x < 1, \ 0 \leqslant y < 2$$

จงหา

7.1 ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมแบบ marginal ของ X และของ Y

7.2 $P(3X > 2)$, $P\left(\frac{1}{2} < Y \leqslant \frac{3}{2}\right)$

เฉลย

7.1 $$F(x, 2) = \frac{1}{40}\left|2x^3(2)+5x^2(2^2)+2x(2^3)\right| \quad , \quad 0 \leqslant x < 1$$

ดังนั้น ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมทางเดียวของ X ก็คือ

$$\begin{aligned} G(x) &= 0 &&, \ x < 0 \\ &= \frac{1}{10}(x^3+5x^2+4x) &&, \ 0 \leqslant x < 1 \\ &= 1 &&, \ x \geqslant 1 \end{aligned}$$

$$F(1, y) = \frac{1}{40}\left|2(1^3)y+5(1^2)y^2+2(1)y^3\right| \quad , \quad 0 \leqslant y < 2$$

ดังนั้น ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมทางเดียวของ Y ก็คือ

$$\begin{aligned} H(y) &= 0 &&, \ y < 0 \\ &= \frac{1}{40}(2y+5y^2+2y^3) &&, \ 0 \leqslant y < 2 \\ &= 1 &&, \ y \geqslant 2 \end{aligned}$$

7.2 $$\begin{aligned} P(3X > 2) &= P\left(X > \frac{2}{3}\right) \\ &= 1-G\left(\frac{2}{3}\right) \\ &= 1-\frac{1}{10}\left(\frac{8}{27}+\frac{20}{9}+\frac{8}{3}\right) = \frac{13}{27} \end{aligned}$$

$$P\left(\frac{1}{2} < Y \leqslant \frac{3}{2}\right) = H\left(\frac{3}{2}\right) - H\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{40}\left(3 + \frac{45}{4} + \frac{27}{4}\right) - \frac{1}{40}\left(1 + \frac{5}{4} + \frac{1}{4}\right) = \frac{37}{80}$$

8. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมกำหนดไว้ดังนี้

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x + y, \quad 0 < x,\ y < 1 \\ &= 0 \qquad \text{อื่น ๆ} \end{aligned}$$

จงหาฟังก์ชันการแจกแจงสะสมภายใต้เงื่อนไขของ Y เมื่อกำหนดให้ $X \in A = \left[0, \frac{1}{n}\right]$ และถ้า $n \to \infty$ จะเกิดอะไรขึ้น

เฉลย

กำหนด $F(y|A)$ เป็นฟังก์ชันการแจกแจงสะสมเงื่อนไขของ Y เมื่อ $X \in A\left[0, \frac{1}{n}\right]$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} F(y|A) &= P(Y \leqslant y | X \in A) \\ &= \frac{P(X \in A,\ Y \leqslant y)}{P(X \in A)} \end{aligned}$$

$$P(X \in A,\ Y \leqslant y) = \int_0^y \int_0^{1/n} (x + y)dxdy \quad , \quad 0 < y < 1$$

$$= \int_0^y \left(\frac{1}{2n^2} + \frac{y}{n}\right)dy = \frac{y}{2n^2} + \frac{y^2}{2n}$$

$$P(X \in A) = \int_0^1 \int_0^{1/n} (x + y)dxdy = \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2n}$$

จะได้

$$\begin{aligned} F(y|A) &= 0 \quad , \quad y < 0 \\ &= \frac{y + ny^2}{1 + n} \quad , \quad 0 \leqslant y < 1 \\ &= 1 \quad , \quad y \geqslant 1 \end{aligned}$$

$$\lim_{n \to \infty} F(y|A) = \lim_{n \to \infty} \left[\frac{y + ny^2}{1 + n}\right] = y^2$$

ถ้า $n \to \infty$ จะได้ $F(y|A) = F(y|0)$ และ

$$\begin{aligned} F(y|0) &= 0 \quad , \quad y < 0 \\ &= y^2 \quad , \quad 0 \leqslant y < 1 \\ &= 1 \quad , \quad y \geqslant 1 \end{aligned}$$

9. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วม กำหนดไว้โดย

$$F(x, y) = \frac{x^3y^2 + 8y^2}{144}, \quad -2 < x < 2, \ 0 < y < 3$$

9.1 จงคำนวณค่าของ $P(|X| < 1)$ และ $P(Y > 2)$

9.2 จงแสดงให้เห็นจริงว่า

$$f(x|y) = g(x)$$

เฉลย

9.1

$$P(|X| \leqslant 1) = P(-1 \leqslant X \leqslant 1)$$

$$= F(1, 3) - F(-1, 3)$$

$$= \frac{(1^3)(3^2) + 8(3^2)}{144} - \frac{(-1)^3(3^2) + 8(3^2)}{144} = \frac{1}{8}$$

$$P(Y > 2) = 1 - P(Y \leqslant 2)$$

$$= 1 - F(2, 2)$$

$$= 1 - \frac{(2^3)(2^2) + 8(2^2)}{144} = \frac{5}{9}$$

9.2

$$\frac{dF(x, 3)}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\frac{x^3(3^2) + 8(3^2)}{144}\right] = \frac{3x^2}{16}, \quad -2 < x < 2$$

ดังนั้น

$$g(x) = \frac{3x^2}{16}, \quad -2 < x < 2$$

$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

$$\frac{dF(2, y)}{dy} = \frac{d}{dy}\left[\frac{2^3y^2 + 8y^2}{144}\right] = \frac{2y}{9}, \quad 0 < y < 3$$

ดังนั้น

$$h(y) = \frac{2y}{9}, \quad 0 < y < 3$$

$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left[\frac{x^3y^2 + 8y^2}{144}\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2y^2}{48}\right) = \frac{x^2y}{24}$$

$$f(x, y) = \frac{x^2y}{24}, \quad -2 < x < 2, \ 0 < y < 3$$

$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

$$f(x|y) = \frac{\frac{x^2y}{24}}{\frac{2y}{9}} = \frac{3x^2}{16}, \quad -2 < x < 2$$

แสดงว่า $f(x|y) = g(x)$

4.5 การเป็นอิสระซึ่งกันและกันระหว่างตัวแปรเชิงสุ่ม

ตามปกติ $f(x|y)$ จะเป็นฟังก์ชันที่มีลักษณะแตกต่างกัน สำหรับแต่ละค่า y ที่แตกต่างกัน แต่มีบางกรณีที่ $f(x|y)$ เป็นฟังก์ชันที่มีลักษณะเดียวกันกับ $g(x)$ ฟังก์ชันการแจกแจงแบบ marginal ของ X โดยไม่ขึ้นกับค่าของ y กล่าวคือ

$$f(x|y) = g(x)$$

อาศัยนิยามของ $f(x|y)$ เราจะได้

$$\frac{f(x, y)}{h(y)} = g(x)$$

หรือ $$f(x, y) = g(x) \cdot h(y)$$

เมื่อ $f(x|y)$ ไม่ขึ้นกับค่าของ y นั่นคือ การแจกแจงของ X ภายใต้เงื่อนไขของ $Y = y$ เป็นอิสระจากข้อสมมติใด ๆ ของ Y เราเรียกตัวแปรเชิงสุ่ม X และ Y นี้ว่า ตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน และให้นิยามของการเป็นอิสระระหว่างตัวแปรเชิงสุ่ม X และ Y ดังต่อไปนี้

นิยาม 4.5.1 ให้ X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบไม่ต่อเนื่องหรือแบบต่อเนื่อง ที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นร่วม $f(x, y)$ และมีฟังก์ชันความหนาแน่นแบบ marginal $g(x)$ และ $h(y)$ ตามลำดับ ตัวแปรเชิงสุ่ม X และ Y จะเป็นอิสระซึ่งกันและกันก็ต่อเมื่อ

$$f(x, y) = g(x)\, h(y)$$

สำหรับทุก ๆ ค่าของ (x, y)

ตัวแปรเชิงสุ่มที่ไม่เป็นอิสระต่อกันเรียกว่า ตัวแปรเชิงสุ่มที่พึ่งพิงกัน

ทฤษฎี 4.5.1 X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วม F, X และ Y จะเป็นอิสระต่อกันก็ต่อเมื่อ

$$F(x, y) = G(x)\, H(y)$$

สำหรับทุก ๆ ค่าของ (x, y)

ทฤษฎี 4.5.2 ถ้า X และ Y เป็นตัวแปรที่เป็นอิสระต่อกันแล้ว

$$P(a < X \leqslant b, c < Y \leqslant d) = P(a < X \leqslant b),\ P(c < Y \leqslant d)$$

ในเมื่อ $a < b$, $c < d$ และ a, b, c, d เป็นค่าคงที่

เฉลยแบบฝึกหัดที่ 4.5

1. ฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X และ Y กำหนดไว้โดย

$$f(x, y) = 2y(1-y)^2, \quad -3 < x < 3, \ 0 < y < 1$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

X และ Y จะเป็นอิสระต่อกันหรือไม่

เฉลย

$$g(x) = \int_0^1 2y(1-y)^2 dy = 1 - 4\left(\frac{1}{3}\right) + 2\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$g(x) = \frac{1}{6} \quad , \quad -3 < x < 3$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

$$h(y) = \int_{-3}^{3} 2y(1-y)^2 dx = 2y(1-y)^2(3+3)$$

$$h(y)) = 12y(1-y)^2 \quad , \quad 0 < y < 1$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

$$g(x)h(y) = \left(\frac{1}{6}\right)(12y(1-y)^2) = 2y(1-y)^2 \quad , \quad -3 < x < 3, \ 0 < y < 1$$
$$= f(x, y)$$

แสดงว่า x และ Y เป็นอิสระต่อกัน

2. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นร่วม f(x, y) กำหนดไว้โดย

$$f(x, y) = \frac{x+1}{2y^2} \quad |x| < 1, \ y > 1$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

จงแสดงให้เห็นจริงว่า

2.1 X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน

2.2 $P(0 < X < 1, \ 1 < Y < 2) = P(0 < X < 1) \cdot P(1 < Y < 2)$

เฉลย

2.1

$$g(x) = \int_1^\infty \frac{x+1}{2y^2} dy = -\frac{x+1}{2y} \Big|_{y=1}^{\infty} \quad , \quad |x| < 1$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{x+1}{2} \quad , \quad |x| < 1$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

$$h(y) = \int_{-1}^{1} \frac{x+1}{2y^2}dx = \frac{1}{2y^2}\left(\frac{x^2}{2}+x\Big|_{x=-1}^{1}\right) \quad , \quad y > 1$$

$$\Rightarrow \quad h(y) = \frac{1}{y^2} \quad , \quad y > 1$$

$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

$$g(x)h(y) = \left(\frac{x+1}{2}\right)\left(\frac{1}{y^2}\right) = \frac{x+1}{2y^2} \quad , \quad |x| < 1, \; y > 1$$

$$= f(x, y)$$

แสดงว่า X และ Y เป็นตัวแปรที่เป็นอิสระต่อกัน

2.2 $P(0 < x < 1, \; 1 < Y < 2) = \int_{1}^{2}\int_{0}^{1} \frac{x+1}{2y^2}\, dxdy$

$$= \int_{1}^{2} \frac{\frac{1}{2}+1}{2y^2}dy = \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{2}+1\right) = \frac{3}{8}$$

$$P(0 < X < 1) = \int_{0}^{1} \frac{x+1}{2}dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{3}{4}$$

$$P(1 < Y < 2) = \int_{1}^{2} \frac{1}{y^2}dy = -\frac{1}{2}+\frac{1}{1} = \frac{1}{2}$$

$$P(0 < x < 1) \; P(1 < Y < 2) \left(\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8}$$

แสดงว่า

$$P(0 < x < 1, 1 < Y < 2) = P(0 < x < 1) \; P(1 < Y < 2)$$

3. ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วมของ X และ Y กำหนดไว้โดย

$$F(x, y) = \frac{y\sqrt{x}}{2-2y} \quad , \quad 0 < x < 4, \; 0 < y < \frac{1}{2}$$

จงแสดงให้เห็นจริงว่า

3.1 X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระกัน

3.2 $P(2 < X < 3, .2 < Y < .3) = P(2 < X < 3) \cdot P(.2 < Y < .3)$

เฉลย

3.1 $G(x) = F\left(x, \frac{1}{2}\right) = \dfrac{\frac{1}{2}\sqrt{x}}{2-2\left(\frac{1}{2}\right)} = \dfrac{\sqrt{x}}{2} \quad , \quad 0 < x < 4$

$$H(y) = F(4, y) = \frac{y\sqrt{4}}{2-2y} = \frac{y}{1-y} , \quad 0 < y < \frac{1}{2}$$

$$G(x)H(y) = \left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)\left(\frac{y}{1-y}\right) = \frac{y\sqrt{x}}{2-2y} , \quad 0 < x < 4, \; 0 < y < \frac{1}{2}$$

$$= F(x, y)$$

แสดงว่า X และ Y เป็นตัวแปรที่เป็นอิสระต่อกัน

3.2 $P(2 < X < 3, .2 < Y < .3) = F(3, .3) - F(3, .2) - F(2, .3) + F(2, .2)$

$$= \frac{.3\sqrt{3}}{2-.6} - \frac{.2\sqrt{3}}{2-.4} - \frac{.3\sqrt{2}}{2-.6} + \frac{.2\sqrt{2}}{2-.4}$$

$$= \frac{5}{56}(\sqrt{3} - \sqrt{2})$$

$$P(2 < X < 3) = G(3)-G(2) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$P(.2 < Y < .3) = H(.3) - H(.2) = \frac{.3}{1-.3} - \frac{.2}{1-.2} = \frac{5}{28}$$

$$P(2 < X < 3)\, P(.2 < Y < .3) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{5}{28}\right) = \frac{5}{56}(\sqrt{3} - \sqrt{2})$$

แสดงว่า

$$P(2 < X < 3, .2 < Y < .3) = P(2 < X < 3)\, P(.2 < Y < .3)$$

4. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น $f(x, y)$ ดังนี้

$$f(x, y) = 2e^{-x-y} , \quad 0 < x < y, \; 0 < y < \infty$$

$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

จงแสดงให้เห็นจริงว่า X และ Y เป็นตัวแปรที่พึ่งพิงกัน

เฉลย

$$g(x) = \int_x^{\infty} 2e^{-x-y}dy = 2e^{-x}\left(-e^{-y}\Big|_{y=x}^{\infty} \right) , \quad 0 < x < \infty$$

ดังนั้น

$$g(x) = 2e^{-2x} , \quad 0 < x < \infty$$

$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

$$h(y) = \int_0^{y} 2e^{-x-y}\, dx = 2e^{-y}\left(-e^{-x}\Big|_{x=0}^{y} \right) , \quad 0 < y < \infty$$

ดังนั้น

$$h(y) = 2e^{-y}(1 - e^{-y}) \;,\; 0 < y < \infty$$

$$g(x)h(y) = \left[2e^{-2x}\right]\left[2e^{-y}(1 \quad e^{-y})\right] \;,\; 0 < x < \infty,\; 0 < y < \infty$$

$$= 4e^{-2x-y}(1 - e^{-y})$$

$$\neq f(x, y)$$

แสดงว่า X และ Y เป็นตัวแปรที่พึงพิงกัน

5. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน และมีฟังก์ชันความหนาแน่นแบบ marginal รูปเดียวกัน คือ

$$f(t) = .1e^{-.1t} \;,\; t \geq 0$$

$$= 0 \qquad \text{อื่น ๆ}$$

จงหา

5.1 ฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X และ Y

5.2 ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วมของ X และ Y

5.3 จงแสดงให้เห็นจริงว่า $f(x|10) = g(x)$

เฉลย

X และ Y เป็นตัวแปรที่เป็นอิสระต่อกัน ดังนั้น

$$f(x, y) = .01e^{-.1(x+y)} \;,\; x, y \geq 0$$

$$= 0 \qquad \text{อื่น ๆ} \qquad \text{..........(5.1)}$$

$$F_X(t) = F_Y(t) = \int_0^t .1e^{-.1t}dt = \;, --- ^{.1t} \;.\; t \geq 0$$

$$F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

$$= (1 - e^{-.1x})(1 - e^{-.1y}) \;,\; x, y \geq 0$$

จะได้ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วมของ **X** และ **Y** คือ

$$F(x, y) = 1 - e^{-.1x} - e^{-.1y} + e^{-.1(x+y)} \;,\; x, y \geq 0 \qquad \text{(5.2)}$$

$$f(x|10) = \left.\frac{f(x, y)}{f_Y(y)}\right|_{y=10} \qquad x \geq 0$$

$$= \frac{.01e^{-.1(x+10)}}{.1e^{-1}} = .1e^{-.1x} = f_X(x)$$

นั่นคือ

$$f(x|10) = g(x) \qquad \text{(ในเมือ } g(x) \text{ ก็คือ } f_X(x)\text{)} \qquad \text{..........(5.3)}$$

6. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน และมีฟังก์ชันการแจกแจงสะสมแบบ marginal ในรูปเดียวกัน คือ

$$F(t) = \begin{cases} 0 & , \ t < 0 \\ t - \frac{1}{4}t^2 & , \ 0 \leqslant t < 2 \\ 1 & , \ t \geqslant 2 \end{cases}$$

จงหา

6.1 ฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X และ Y

6.2 $P\left(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}, Y > \frac{4}{3}\right)$

6.3 $P(X > 1 | Y \leqslant 1)$

เฉลย

6.1 X และ Y เป็นอิสระต่อกัน ดังนั้น

$$f(x, y) = g(x)\,h(y)$$

$$= \frac{dF_X(x)}{dx} \cdot \frac{dF_Y(y)}{dy}$$

$$= \left[\frac{d}{dx}\left(x - \frac{1}{4}x^2\right)\right]\left[\frac{d}{dy}\left(y - \frac{1}{4}y^2\right)\right] \quad , \quad 0 \leqslant x, y < 2$$

ดังนั้น ฟังก์ชันหนาแน่นร่วมของ X และ Y คือ

$$f(x, y) = \left(1 - \frac{x}{2}\right)\left(1 - \frac{y}{2}\right) \ , \quad 0 \leqslant x, Y < 2$$

$$= 0 \qquad \text{อื่น ๆ}$$

6.2 $P\left(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}, Y > \frac{4}{3}\right) = P\left(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}\right) P\left(Y > \frac{4}{3}\right)$

$$= \left[F\left(\frac{3}{2}\right) - F\left(\frac{1}{2}\right)\right]\left[1 - F\left(\frac{4}{3}\right)\right]$$

$$= \left[\left(\frac{3}{2} - \frac{9}{16}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{16}\right)\right]\left[1 - \left(\frac{4}{3} - \frac{4}{9}\right)\right] = \frac{1}{18}$$

6.3 $P(X > 1 | Y \leqslant 1) = \frac{P(X > 1, Y \leqslant 1)}{P(Y \leqslant 1)}$

$$= \frac{\left[1 - \left(1 - \frac{1}{4}\right)\right]\left(1 - \frac{1}{4}\right)}{1 - \frac{1}{4}} = \mathbf{1}_{a} = P(X > 1)$$

7. ถ้า (X, Y) เป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง และมีค่าที่จุด (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3) ด้วยความน่าจะเป็น $\frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \frac{1}{18}, \frac{1}{3}$, a, b

a และ b ควรจะมีค่าเท่าใด จึงจะทำให้ X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน

เฉลย

X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน ดังนั้น

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)\,P(Y = y) \quad \text{ทุกค่า } x \text{ และ } y$$

นั่นคือ

$$a = P(X = 2, Y = 2) = P(X = 2)\,P(Y = 2) \qquad \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$b = P(X = 2, Y = 3) = P(X = 2)\,P(Y = 3) \qquad \ldots\ldots\ldots(2)$$

แต่ $$P(Y = 2) = P(X = 1, Y = 2) + P(X = 2, Y = 2) = \frac{1}{9} + a \qquad \ldots(3)$$

และ $$P(Y = 3) = P(X = 1, Y = 3) + P(X = 2, Y = 3) = \frac{1}{18} + b \qquad \ldots(4)$$

(1) ÷ (2) และผลจาก (3), (4) จะได้

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{1}{9} + a}{\frac{1}{18} + b}$$

$$\frac{a}{18} = \frac{b}{9} \quad \text{หรือ} \quad a = 2b$$

อาศัยคุณสมบัติฟังก์ชันน่าจะเป็นร่วม จะได้

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18} + \frac{1}{3} + a + b = 1$$

ดังนั้น

$$3b = \frac{6}{18}$$

$$b = \frac{1}{9}$$

$$a = \frac{2}{9}$$

8. X และ Y ต่างเป็นตัวแปรเชิงสุ่มดัชนี (indicator random variable) ถ้า P(X = 1) = .3 และ P(Y = 1) = .4 ฟังก์ชันน่าจะเป็นร่วมของ X และ Y จะเป็นอย่างไร ถ้า X และ Y เป็นตัวแปรที่เป็นอิสระต่อกัน

เฉลย

X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มดัชนีที่เป็นอิสระต่อกัน ดังนั้น

$$f(x, y) = P(X = x)\ P(Y = y)\ ,\ x, y = 0, 1$$

$$f(1, 1) = P(X = 1)\ P(Y = 1) = (.3)(.4) = .12$$

$$.3 = P(X = 1) = f(1, 0) + f(1, 1)$$

$$\Rightarrow f(1, 0) = .3 - .12 = .18$$

$$.4 = P(Y = 1) = f(0, 1) + f(1, 1)$$

$$\Rightarrow f(0, 1) = .4 - .12 = .28$$

$$f(0, 0) = 1 - f(0, 1) - f(1, 0) - f(1, 1) = .42$$

จะได้ฟังก์ชันน่าจะเป็นร่วมของ X และ Y ดังนี้

(x, y)	(0, 0)	(0, 1)	(1, 0)	(1, 1)
f(x, y)	.42	.28	.18	.12

9. จงคำนวณค่าความน่าจะเป็นของ union ของเหตุการณ์ $a < X < b, -\infty < Y < \infty$ และ $-\infty < X < \infty, c < Y < d$ ถ้า X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มทีเป็นอิสระต่อกัน และมี $P(a < X < b) = \frac{2}{3}$, $P(c < Y < d) = \frac{5}{8}$

เฉลย

ให้ $A = \{(x, y) : a < x < b, -\infty < y < \infty\}$

$B = \{(x, y) : -\infty < x < \infty, c < y < d\}$

$$P(A) = P(a < X < b) = \frac{2}{3}$$

$$P(B) = P(c < Y < d) = \frac{5}{8}$$

$$P(AB) = P(a < X < b,\ c < Y < d)$$

$$= P(a < X < b)\ P(c < Y < d) \qquad \text{(X, Y เป็นอิสระต่อกัน)}$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{5}{8}\right) = \frac{5}{12}$$

ดังนั้น

$$P(A \cup B) = \frac{2}{3} + \frac{5}{8} - \frac{5}{12} = \frac{7}{8}$$

10. จงคำนวณค่าของ $P\left(0 < X < \frac{1}{3}, 0 < Y < \frac{1}{3}\right)$ ถ้า X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม

ที่เป็นอิสระกัน และมีฟังก์ชันความหนาแน่นแบบ marginal ของ X และของ Y กำหนดไว้โดย

$$g(x) = 2x, \quad 0 < x < 1 \qquad \text{และ} \qquad h(y) = 2(1-y), \quad 0 < y < 1$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ} \qquad\qquad = 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

เฉลย

X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระกัน ดังนั้น

$$P\left(0 < X < \frac{1}{3}, 0 < Y < \frac{1}{3}\right) = P(\left(0 < X < \frac{1}{3}\right) P\left(0 < Y < \frac{1}{3}\right)$$
$$= \left(\int_0^{1/3} 2x\,dx\right)\left(\int_0^{1/3} 2(1-y)\,dy\right)$$
$$= \left(\frac{1}{9}\right)\left[2\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{9}\right]$$
$$= \frac{5}{81}$$

11. กำหนดฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วมของ X กับ Y โดย

$$F(x, y) = \frac{1}{2}(3xy^2 - x^3) \quad , \quad 0 < x < y < 1$$

11.1 จงหาฟังก์ชันการแจกแจงสะสมแบบ marginal ของ X และของ Y

11.2 X และ Y จะเป็นตัวแปรที่เป็นอิสระกันหรือไม่

11.3 จงคำนวณค่าของ $P\left(\frac{1}{5} < X \leqslant \frac{1}{2}, \frac{1}{3} < Y \leqslant \frac{4}{5}\right)$

11.4 จงหาฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X กับ Y

เฉลย

11.1 G(x) เป็นฟังก์ชันการแจกแจงสะสมทางเดียวของ X จะได้

$$G(x) = F(x, 1) = \frac{1}{2}(3x - x^3) \quad , \quad 0 < x <$$
$$= 1 \quad , \quad x \geqslant 1$$

H(y) เป็นฟังก์ชันการแจกแจงสะสมทางเดียวของ Y จะได้

$$H(y) = F(y, y) = y^3 \quad , \quad 0 < y < 1$$
$$= 1 \quad , \quad y \geqslant 1$$

11.2 $G(x)\,H(y) = \frac{1}{2}(3xy^3 - x^3y^3) \neq F(x, y)$

แสดงว่า X และ Y ไม่เป็นอิสระกัน

11.3 $P\left(\frac{1}{5} < X \leqslant \frac{1}{2}, \frac{1}{3} < Y \leqslant \frac{4}{5}\right)$

$$= F\left(\frac{1}{2}, \frac{4}{5}\right) - F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) - F\left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right) + F\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[3\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{16}{25}\right) - \frac{1}{8}\right] - \frac{1}{2}\left[3\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{9}\right) - \frac{1}{27}\right]$$

$$- \frac{1}{2}\left[3\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{16}{25}\right) - \frac{1}{125}\right] + \frac{1}{2}\left[3\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{9}\right) - \frac{1}{125}\right]$$

$$= 0.22$$

11.4 $$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left[\frac{1}{2}(3xy^2 - x^3)\right] \quad , \quad 0 < x < y < 1$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{2}(3y^2 - 3x^2)\right] = 3y$$

ฟังก์ชันหนาแน่นร่วมของ X กับ Y คือ

$$f(x, y) = 3y \quad , \quad 0 < x < y < 1$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

12. ถ้า $F(x, y) = \frac{x^2y^2}{16}$, $0 \leqslant x, y \leqslant 2$ เป็นฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วมของ X กับ Y จงแสดงให้เห็นจริงว่า

12.1 X กับ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน และมีฟังก์ชันหนาแน่นรูปเดียวกัน

12.2 P(ตัวแปร 1 ตัวเท่านั้นที่มีค่ามากกว่า 1) $= \frac{3}{8}$

12.3 $P(|X - Y| > 1) = \frac{7}{48}$

เฉลย

12.1 $$\frac{dF(x, 2)}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\frac{x^2 \cdot 2^2}{16}\right] \quad , \quad 0 \leqslant x \leqslant 2$$

$$\Rightarrow \quad g(x) = \frac{x}{2} \quad , \quad 0 \leqslant x \leqslant 2$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

$$\frac{dF(2, y)}{dy} = \frac{d}{dy}\left[\frac{2^2 \cdot y^2}{16}\right] \quad , \quad 0 \leqslant y \leqslant 2$$

$$\Rightarrow \quad h(y) = \frac{y}{2} \quad , \quad 0 \leqslant y \leqslant 2$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

$$\frac{\partial^2 F(x,\ y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left[\frac{x^2y^2}{16}\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{2xy^2}{16}\right]$$

$$\Longrightarrow \quad f(x,\ y) = \frac{xy}{4} \quad ,\ 0 \leqslant x,\ y \leqslant 2$$

$$g(x)h(y) = \frac{x}{2}\cdot\frac{y}{2} \quad ,\ 0 \leqslant x \leqslant 2,\ 0 \leqslant y \leqslant 2$$

$$= f(x,\ y)$$

แสดงว่า X กับ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน และมีฟังก์ชันหนาแน่นรูปเดียวกัน

12.2 P(ตัวแปร 1 ตัวเท่านั้นที่มีค่ามากกว่า 1)

$$= P(X > 1,\ Y \leqslant 1) + P(X \leqslant 1,\ Y > 1)$$

$$= 2P(1 < x \leqslant 2,\ Y \leqslant 1)\ , \quad x,\ Y \text{ มีฟังก์ชันรูปเดียวกัน}$$

$$= 2[F(2,\ 1) - F(1,\ 1)]$$

$$= 2\left[\frac{2^2\cdot 1^2}{16} - \frac{1^2\cdot 1^2}{16}\right] = \frac{3}{8}$$

12.3 $P(|X-Y| > 1) = P(X-Y > 1) + P(X-Y < -1)$

$$= 2P(X-Y > 1)\ , \quad X \text{ และ } Y \text{ มีฟังก์ชันรูปเดียวกัน}$$

$$= 2\int_0^1\int_{1+y}^2 \frac{xy}{4}\,dxdy$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^1 \left[2^2 - (1+y)^2\right] y\ dy$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^1 (3y - 2y^2 - y^3)dy$$

$$= \frac{1}{4}\left[3\left(\frac{1}{2}\right) - 2\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4}\right] = \frac{7}{48}$$

บทสรุป

เราสรุปการแจกแจงที่เกี่ยวกับสองตัวแปรเชิงสุ่ม X และ Y ได้ดังนี้

1. $$F(x,\ y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(\alpha,\ \beta)d\alpha d\beta$$

$$F(x, -\infty) = F(-\infty, y) = 0 \;, \quad F(\infty, \infty) = 1$$

$$G(x) = F(x, \infty) \quad \text{และ} \quad H(y) = F(\infty, y)$$

2. $$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$$

$$g(x) = \frac{dF(x, \infty)}{dx} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy$$

และ $$h(y) = \frac{dF(\infty, y)}{dy} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx$$

3. $$f(x|y) = \frac{f(x, y)}{h(y)} \;, \quad f(y|x) = \frac{f(x, y)}{g(x)}$$

$$F(x|y) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(x|y)dx \\[2ex] \dfrac{\dfrac{\partial F(x, y)}{\partial y}}{\dfrac{dF(\infty, y)}{dy}} \end{cases}$$

4. $$P(a < X \leqslant b,\ c < Y \leqslant d) = \begin{cases} \displaystyle\int_{c}^{d}\int_{a}^{b} f(x, y)dxdy \\[2ex] F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c) \end{cases}$$

$$P(a < X \leqslant b | Y = c) = \begin{cases} \displaystyle\int_{a}^{b} f(x|c)dx \\[2ex] F(b|c) - F(a|c) \end{cases}$$

5. X และ Y จะเป็นอิสระต่อกัน ก็ต่อเมื่อ

$$f(x, y) = g(x)\ h(y)$$

$$F(x, y) = G(x)\ H(y)$$

ถ้า X และ Y เป็นอิสระต่อกัน จะได้

$$P(a < X \leqslant b,\ c < Y \leqslant d) = P(a < X \leqslant b)\ P(c < y \leqslant d)$$

เฉลยแบบฝึกหัดระคน

1. กำหนดฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X และ Y โดย

$$f(x, y) = k, \quad 1 < x < 3,\ 1 < y < 2$$
$$= 0, \quad \text{อื่น ๆ}$$

1.1 จงหาค่าของ k

1.2 จงหาฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วมของ X กับ Y

1.3 จงคำนวณค่าของ $P(X > Y)$

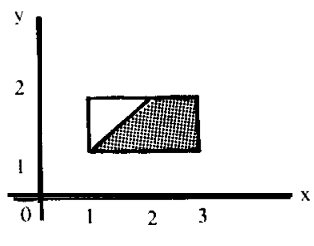
$$F(x, y) = \int_1^y \int_1^x k\,d\alpha\,d\beta \qquad 1 < x < 3,\ 1 < y < 2$$
$$= k\int_1^y (x-1)\,d\beta$$
$$= k(x-1)(y-1)$$

$$1 = F(3, 2) = k(3-1)(2-1) = 2k$$

จะได้ $$k = \frac{1}{2}$$

และ
$$F(x, y) = 0 \quad , x < 1 \text{ และ/หรือ } y < 1$$
$$= \frac{1}{2}(xy - x - y + 1) \quad , 1 \leqslant x < 3,\ 1 \leqslant y < 2$$
$$= 1 \quad , x \geqslant 3,\ y \geqslant 2$$

$$P(X > Y) = \int_1^2 \int_y^3 \frac{1}{2}\,dx\,dy$$
$$= \frac{1}{2}\int_1^2 (3-y)\,dy$$
$$= \frac{1}{2}\left[3(2-1) - \frac{4-1}{2}\right] = \frac{3}{4}$$



2. จงหาค่าของ k ที่ทำให้

$$F(x, y) = kx(y-2)(10-y-x) \quad , \quad 0 < x < 2, 2 < y < 4$$

เป็นฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วมของ X กับ Y จงหาฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X กับ Y และคำนวณค่าของ $P(X < 1, Y < 3)$, $P(X+Y < 3)$

$F(x, y)$ เป็นฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วมของ X กับ Y ดังนั้น

$$1 = F(2, 4) = 2k(4-2)(10-4-2)$$

$$k = \frac{1}{16}$$

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left[\frac{x}{16}(y-2)(10-y-x)\right] \quad , \quad 0 < x < 2, 2 < y < 4$$

$$f(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{y-2}{16}(10-y-2x)\right] = \frac{12-2y-2x}{16}$$

ฟังก์ชันหนาแน่นร่วมของ X กับ Y ก็คือ

$$f(x, y) = \frac{1}{8}(6-y-x) \qquad 0 < x < 2, 2 < y < 4$$

$$= 0 \qquad \text{อื่น ๆ}$$

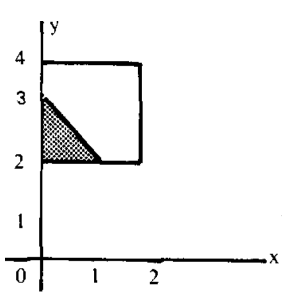
$$P(X < 1, Y < 3) = F(1, 3)$$

$$= \frac{1}{16}(3-2)(10-3-1) = \frac{3}{8}$$

$$P(X+Y < 3) = \int_2^3 \int_0^{3-y} \frac{1}{8}(6-y-x)dxdy$$

$$= \frac{1}{8}\int_2^3 \left[6(3-y) - y(3-y) - \frac{(3-y)^2}{2}\right]dy$$

$$= \frac{1}{16}\int_2^3 (27 - 12y + y^2)dy$$



$$= \frac{1}{16}\left[27(3-2) - 6(9-4) + \frac{27-8}{3}\right]$$

$$= \frac{5}{24}$$

3. ฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X กับ Y กำหนดโดย

$$f(x, y) = 4xy \quad , \quad 0 < x, y < 1$$
$$= 0 \quad , \quad \text{อื่น ๆ}$$

จงคำนวณค่าของ

3.1 $P\left(0 < X < \frac{1}{2}, \frac{1}{4} < Y < \frac{5}{4}\right)$

3.2 $P(X = Y)$

3.3 $P(X \leqslant Y)$

3.4 $P\left(X + Y > \frac{1}{2}\right)$

เฉลย

3.1 $$P\left(0 < X < \frac{1}{2}, \frac{1}{4} < Y < \frac{5}{4}\right) = \int_{1/4}^{1}\int_{0}^{1/2} 4xydxdy$$
$$= \int_{1/4}^{1} 2y\left(\frac{1}{4} - 0\right)dy$$
$$= \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{16}\right) = \frac{15}{64}$$

3.2 $$P(X = Y) = 0$$

3.3 $$P(X \leqslant Y) = \int_{0}^{1}\int_{0}^{y} 4xydxdy$$
$$= \int_{0}^{1} 2y(y^2 - 0)dy$$
$$= 2\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

3.4 $$P\left(X + Y > \frac{1}{2}\right) = 1 - P\left(X + Y \leqslant \frac{1}{2}\right)$$
$$= 1 - \int_{0}^{1/2}\int_{0}^{1/2 - y} 4xydxdy$$