$$= 1-\int_0^{1/2} 2y\left(\frac{1}{4}-y+y^2\right)dy$$

$$= 1-\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)-2\left(\frac{1}{24}\right)+2\left(\frac{1}{64}\right)\right]$$

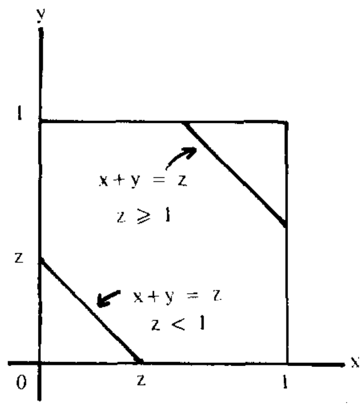
$$= \frac{95}{96}$$

4. X กับ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นร่วม $f(x, y)$ กำหนดไว้โดย

$$f(x, y) = 1 \;,\; 0 < x, y < 1$$
$$= 0 \;,\; \text{อื่น ๆ}$$

4.1 จงคำนวณค่าของ $P(X+Y \leqslant z)$, $0 < z < 2$

4.2 กำหนด $F(z) = P(X+Y \leqslant z)$ เป็นฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ Z จงหาฟังก์ชันความหนาแน่นของ Z และคำนวณค่าของ $P\left(|Z| \leqslant \frac{3}{2}\right)$



4.1 ถ้า $0 < z < 1$

$$P(X+Y \leqslant z) = \int_0^z \int_0^{z-y} dxdy$$

$$= \int_0^z (z-y)dy$$

$$= z(z)-\frac{z^2}{2} = \frac{z^2}{2}$$

ถ้า $1 \leqslant z < 2$

$$P(X+Y \leqslant z) = 1 - P(X+Y > z)$$

$$= 1 - \int_{z-1}^{1}\int_{z-y}^{1} dxdy$$

$$= 1 - \int_{z-1}^{1} (1-z+y)dy$$

$$= 1-(1-z)(1-z+1)-\frac{1-(z-1)^2}{2} = \frac{1}{2}(4z-z^2-2)$$

แสดงว่า

$$P(X+Y \leqslant z) = \frac{z^2}{2} \quad , \quad 0 < z < 1$$

$$= \frac{1}{2}(4z-z^2-2) \quad , \quad 1 \leqslant z < 2$$

4.2 $F(z) = P(X+Y \leqslant z)$

จะได้

$$F(L) = 0 \quad , \quad z < 0$$

$$\frac{z^2}{2} \quad , \quad 0 \leqslant z < 1$$

$$= \frac{1}{2}(4z-z^2-2) \quad , \quad 1 \leqslant z < 2$$

$$1 \quad , \quad z \geqslant 2$$

$$\frac{dF(z)}{dz} = z \quad , \quad 0 \leqslant z < 1$$

$$= \frac{1}{2}(4-2z) \quad , \quad 1 \leqslant z < 2$$

$$= 0 \quad , \quad z < o$$ หรือ $z \geqslant 2$

นั่นคือ

$$f(z) = z \quad , \quad 0 < z < 1$$

$$= 2-z \quad , \quad 1 \leqslant z < 2$$

$$= 0$$ อื่น ๆ

$$P\left(|Z| \leqslant \frac{3}{2}\right) = P\left(-\frac{3}{2} \leqslant Z \leqslant \frac{3}{2}\right)$$

$$= F_Z\left(\frac{3}{2}\right) - F_Z\left(-\frac{3}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[4\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{9}{4} - 2\right] - 0 = \frac{7}{8}$$

5. กำหนด $f(x|y) = \frac{mx}{y^2}$, $0 < x < y, 0 < y < 1$

และ $h(y) = ny^4$, $0 < y < 1$

นอกนั้นเป็น 0 เป็นฟังก์ชันภายใต้เงื่อนไขของ X เมื่อรู้ว่า $Y = y$ และฟังก์ชันความหนาแน่นแบบ marginal ของ Y ตามลำดับ จงหา

5.1 ค่าของ m และ n

5.2 ฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X กับ Y

5.3 $P\left(\frac{1}{4} < X < \frac{1}{2} \middle| Y = \frac{5}{8}\right)$ และ $P\left(\frac{1}{4} < X < \frac{1}{2}\right)$

เฉลย

5.1 $f(x|y)$ เป็นฟังก์ชันหนาแน่นเงื่อนไขของ $X|y$ ดังนั้น

$$\int_0^y \frac{mx}{y^2}dx = 1$$

$$\frac{m}{y^2}\cdot\frac{y^2}{2} = 1 \qquad \text{จะได้} \quad m = 2$$

$h(y)$ เป็นฟังก์ชันหนาแน่นทางเดียวของ Y ดังนั้น

$$\int_0^1 ny^4dy = 1$$

$$n\left(\frac{1}{5}\right) = 1 \qquad \text{จะได้} \quad n = 5$$

5.2

$$f(x|y)\,h(y) = \frac{2x}{y^2}\cdot 5y^4 \quad , \quad 0 < x < y, 0 < y < 1$$

จะได้

$$f(x, y) = 10xy^2 \quad , \quad 0 < x < y < 1$$
$$= 0 \qquad \text{อื่น ๆ}$$

5.3

$$P\left(\frac{1}{4} < X < \frac{1}{2} \middle| Y = \frac{5}{8}\right) = \int_{1/4}^{1/2} f\left(x \middle| \frac{5}{8}\right)dx$$

แต่ $f\left(x \middle| \frac{5}{8}\right) = \frac{2x}{\left(\frac{5}{8}\right)^2} = \frac{128}{25}x \quad , \quad 0 < x < \frac{5}{8}$

ดังนั้น

$$P\left(\frac{1}{4} < X < \frac{1}{2} \middle| Y = \frac{5}{8}\right) = \int_{1/4}^{1/2} \frac{128}{25}x\,dx$$

$$= \frac{64}{25}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{16}\right) = \frac{12}{25}$$

$$P\left(\frac{1}{4} < X < \frac{1}{2}\right) = \int_{1/4}^{1/2}\int_{x}^{1} 10xy^2\,dy\,dx$$

$$= \frac{10}{3}\int_{1/4}^{1/2} x(1 - x^3)\,dx$$

$$= \frac{10}{3}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{16}\right) - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{32} - \frac{1}{1,024}\right)\right] = \frac{449}{1,536}$$

6. ในจำนวนนักศึกษาที่เรียนวิชาโทคอมพิวเตอร์ 8 คน มี 3 คนที่เรียนวิชาเอกสถิติ 3 คน เรียนวิชาเอกคณิตศาสตร์ ส่วนอีก 2 คนเรียนวิชาฟิสิกส์ เลือกนักศึกษามา 4 คน แบบสุ่ม กำหนด X เป็นจำนวนนักศึกษาวิชาเอกสถิติ และ Y เป็นจำนวนนักศึกษาวิชาเอกฟิสิกส์ที่ได้รับเลือก จงหา

6.1 ฟังก์ชันน่าจะเป็นร่วมของ X กับ Y

6.2 $P[(X, Y) \in A]$ ในเมื่อ $A = \{(x, y) : x + y \leq 2\}$

6.3 $f_{Y|X=2}(Y|2)$ และ $P(Y = 0|X = 2)$

เฉลย

6.1 X = จำนวนนักศึกษาวิชาเอกสถิติ , $x = 0, 1, 2, 3$

Y = จำนวนนักศึกษาวิชาเอกฟิสิกส์ , $y = 0, 1, 2$

จะได้ฟังก์ชันน่าจะเป็นร่วมของ X กับ Y

$$f(x, y) = \frac{\binom{3}{x}\binom{2}{y}\binom{3}{4-x-y}}{\binom{8}{4}} \quad , 1 \leq x + y \leq 4,\ x = 0, 1, 2, 3,\ y = 0, 1, 2$$

$$= 0 \qquad \text{อื่น ๆ}$$

6.2 $P[(X, Y) \in A] = P(X + Y \leqslant 2)$

$$= f(0, 1) + f(0, 2) + f(1, 0) + f(1, 1) + f(2, 0)$$

$$= \frac{1}{70}[2 + 3 + 3 + 3(2)(3) + 3(3)] = \frac{1}{2}$$

6.3 $$f_{Y|X=2}(y|2) = \frac{f(2, y)}{f(2, 0) + f(2, 1) + f(2, 2)} \quad , \quad y = 0, 1, 2$$

$$f(2, 0) + f(2, 1) + f(2, 2) = \frac{1}{70}(9 + 18 + 3) = \frac{30}{70}$$

$$f(2, y) = \frac{3}{70}\binom{2}{y}\binom{3}{2-y} \quad , \quad y = 0, 1, 2$$

จะได้

$$f_{Y|X=2}(y|2) = \frac{1}{10}\binom{2}{y}\binom{3}{2-y} \quad y = 0, 1, 2$$

$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

$$P(Y = 0|X = 2) = \frac{1}{10}\binom{2}{0}\binom{3}{2-0} = \frac{3}{10}$$

7. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นร่วม กำหนดโดย

$$f(x, y) = 4xye^{-x^2-y^2} \quad , \quad x, y > 0$$

$$= 0 \quad , \quad \text{อื่น ๆ}$$

จงหา

7.1 ฟังก์ชันความหนาแน่นแบบ marginal ของ X และของ Y

7.2 X และ Y จะเป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระต่อกันหรือไม่

7.3 ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วมของ X กับ Y

7.4 $P(5 < X \leqslant 10, 5 < Y \leqslant 10)$

เฉลย

7.1 $$g(x) = \int_0^\infty 4xye^{-x^2-y^2}dy \quad , \quad y > 0$$

$$= 2xe^{-x^2}\int_0^\infty e^{-y^2}dy^2$$

จะได้

$$g(x) = 2xe^{-x^2} \quad , \quad x > 0$$
$$= 0 \qquad \text{อื่น ๆ}$$

$$h(y) = \int_0^{\infty} 4xye^{-x^2-y^2}dx \quad , \quad y > 0$$

จะได้

$$h(y) = 2ye^{-y^2} \quad , \quad y > 0$$
$$= 0 \qquad \text{อื่น ๆ}$$

7.2

$$g(x)\,h(y) = (2xe^{-x^2})(2ye^{-y^2}) \quad , \quad x > 0, y > 0$$
$$= 4xye^{-x^2-y^2}$$
$$= f(x, y)$$

แสดงว่า X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน และมีการแจกแจงรูปเดียวกัน

7.3

$$G(x) = \int_0^x 2xe^{-x^2}dx = 1-e^{-x^2} \quad ,x > 0$$

จะได้ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วมของ X กับ Y คือ

$$F(x, y) = (1-e^{-x^2})(1-e^{-y^2}) \quad , \quad x, y > 0$$

7.4

$$P(5 < X \leqslant 10, 5 < Y \leqslant 10) = P(5 < X \leqslant 10)\,P(5 < Y \leqslant 10)$$
$$= \{G(10)-G(5)\}^2$$
$$= \{(1-e^{-100})-(1-e^{-25})\}^2$$
$$= (e^{-25}-e^{-100})^2$$

8. กำหนดฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X กับ Y โดย

$$f(x, y) = 8xy \quad , \quad x < y < 1, 0 < x < 1$$
$$= 0 \quad , \quad \text{อื่น ๆ}$$

จงหา

8.1 ฟังก์ชันความหนาแน่นแบบ marginal ของ X และของ Y

8.2 ฟังก์ชันภายใต้เงื่อนไขของ X เมื่อรู้ว่า $Y = y, 0 < y < 1$

8.3 $P(2X < Y)$ และ $P\left(X < \frac{1}{2} \middle| Y > \frac{1}{2}\right)$

8.1 $$\int_x^1 8xy\,dy = 4x(1-x^2) \quad , \quad 0 < x < 1$$

นั่นคือ

$$g(x) = 4x(1-x^2) \quad , \quad 0 < x < 1$$
$$= 0 \qquad \text{อื่น ๆ}$$

$$\int_0^y 8xy\,dx = 4y(y^2-0) \quad , \quad 0 < y < 1$$

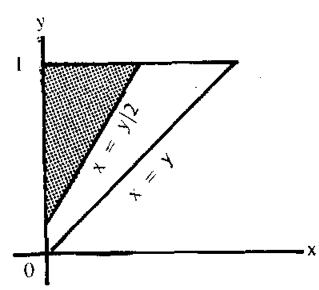
นั่นคือ

$$h(y) = 4y^3 \quad , \quad 0 < y < 1$$
$$= 0 \qquad \text{อื่น ๆ}$$

8.2 $$\frac{f(x, y)}{h(y)} = \frac{8xy}{4y^3} \quad , \quad 0 < x < y, 0 < y < 1$$

นั่นคือ

$$f(x|y) = 2xy^{-2} \quad , \quad 0 < x < y, 0 < y < 1$$
$$= 0 \qquad \text{อื่น ๆ}$$



8.3 $$P(2X < Y) = P\left(X < \frac{Y}{2}\right)$$

$$= \int_0^1 \int_0^{y/2} 8xy\,dxdy$$

$$= \int_0^1 4y\left(\frac{y^2}{4}\right)dy = \frac{1}{4}$$

$$P\left(X < \frac{1}{2} \middle| Y > \frac{1}{2}\right) = \frac{P\left(X < \frac{1}{2}, Y > \frac{1}{2}\right)}{P\left(Y > \frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{\int_{1/2}^{1}\int_{0}^{1/2} 8xydxdy}{\int_{1/2}^{1}\int_{0}^{y} 8xydxdy}$$

$$= \frac{\int_{1/2}^{1} 4y\left(\frac{1}{4}\right)dy}{\int_{1/?}^{1} 4y(y^2)dy} \qquad \frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{4}\right)}{1-\frac{1}{16}} = \frac{2}{5}$$

9. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นร่วม กำหนดไว้โดย

$$f(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{8} \cdot e^{-y} \quad , \quad y \geqslant 0, |x| \leqslant y$$

$$= 0 \quad , \quad \text{อื่น ๆ}$$

9.1 จงหาฟังก์ชันความหนาแน่นแบบ marginal ของ Y

9.2 จงคำนวณค่าของ $P(|X| \leqslant 2|Y = 5)$

9.1 $$\int_{-y}^{y} \frac{y^2 - x^2}{8} e^{-y}dx = \frac{e^{-y}}{8}\left[y^2(y+y) - \frac{y^3 + y^3}{3}\right] \quad , \quad y \geqslant 0$$

จะได้

$$h(y) = \frac{1}{6}y^3e^{-y} \quad , \quad y \geqslant 0$$

$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

9.2 $$P(|X| \leqslant 2|Y = 5) = P(-2 < x \leqslant 2|Y = 5)$$

$$= \int_{-2}^{2} f_{X|y}(x|5)dx$$

$$= \int_{-2}^{2} \frac{\frac{25 - x^2}{8} e^{-5}}{\frac{1}{6} \cdot 125 \cdot e^{-5}} dx$$

$$= \frac{3}{500}\left[25(2+2) - \frac{8+8}{3}\right] = \frac{71}{125}$$

10. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วม กำหนดไว้โดย

$$F(x, y) = (1 - e^{-x}) + \frac{(e^{-xy} - 1)}{y} , \quad x \geqslant 0, y \geqslant 1$$

10.1 จงหาฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X และ Y

10.2 จงหาฟังก์ชันการแจกแจงสะสมแบบ marginal ของ X

10.3 จงหาฟังก์ชันภายใต้เงื่อนไขของ Y เมื่อรู้ว่า $X = x, x \geqslant 0$

10.1
$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left[(1 - e^{-x}) + \frac{(e^{-xy} - 1)}{y}\right] , \quad x \geqslant 0, y \geqslant 1$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left[e^{-x} + \frac{e^{-xy}(-y)}{y}\right] = -e^{-xy}(x)$$

จะได้

$$f(x, y) = xe^{-xy} , \quad x \geqslant 0, y \geqslant 1$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

10.2
$$F(x, \infty) = (1 - e^{-x}) , \quad x \geqslant 0$$

นั่นคือ

$$G(x) = 1 - e^{-x} , \quad x \geqslant 0$$

10.3
$$\frac{f(x, y)}{g(x)} = \frac{xe^{-xy}}{\frac{d}{dx}(1 - e^{-x})} = \frac{xe^{-xy}}{e^{-x}} , \quad x \geqslant 0, y \geqslant 1$$

นั่นคือ

$$f(y|x) = xe^{x(1-y)} , \quad y \geqslant 1, x \geqslant 0$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

11. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน และมีฟังก์ชันรูปเดียวกัน คือ

$$f(t) = e^{-t} , t \geqslant 0$$

นอกนั้นเป็น 0 จงคำนวณค่าของ

11.1 $P(X + Y \leqslant 2)$

11.2 $P\left(\frac{X}{Y} \leqslant z\right)$ ถ้า $F(z) = P\left(\frac{X}{Y} \leqslant z\right)$ จงหา p.d.f. ของ Z

11.3 $P(X < Y | Y \leqslant 10)$

X และ Y เป็นตัวแปรที่เป็นอิสระต่อกัน ดังนั้น

$$f(x, y) = e^{-x-y} \quad , \quad x, y \geqslant 0$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

11.1 $$P(X+Y \leqslant 2) = \int_0^2 \int_0^{2-y} e^{-x-y} dxdy$$

$$= \int_0^2 e^{-y}(-e^{-2+y}+1)dy$$

$$= -e^{-2}(2)-(e^{-2}-1) = 0.595$$

11.2 $$P\left(\frac{X}{Y} \leqslant z\right) = \int_0^{\infty}\int_0^{yz} e^{-x-y} dxdy \quad , \quad z \geqslant 0$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-y}(1 - e^{-yz})dy = 1 - \frac{1}{1+z}(-0+1)$$

$$\Rightarrow \quad F(z) = \frac{z}{1+z} \quad , \quad z \geqslant 0$$

$$\frac{dF(z)}{dz} = \frac{(1+z)-z}{(1+z)^2}$$

จะได้

$$f(z) = \frac{1}{(1+z)^2} \quad , \quad z \geqslant 0$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

11.3 $$P(X < Y|Y \leqslant 10) = \frac{P(0 < x < Y \leqslant 10)}{P(Y \leqslant 10)}$$

$$= \frac{\int_0^{10}\int_0^{y} e^{-x-y}dxdy}{\int_0^{10} e^{-y}dy}$$

$$= \frac{\int_0^{10} e^{-y}(1 \quad e^{-y})dy}{, - e^{-10}}$$

$$\frac{(1-e^{-10})-\frac{1}{2}(1-e^{-20})}{, - e^{-10}} = 0.5$$

12. A และ B เป็นเหตุการณ์ที่ $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ และ $P(A|B) = \frac{1}{4}$ กำหนด X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มดัชนี (indicator r.v.'s) ของ A และ B ตามลำดับ จงแสดงให้เห็นจริงว่าข้อความต่อไปนี้ถูกหรือผิด

12.1 X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน

12.2 $P(X^2 + Y^2 = 1) = \frac{1}{4}$

12.3 $P(XY = X^2Y^2) = 1$

12.4 $g(x) = \frac{1}{2}, x = 0, 1$ นอกนั้นเป็น 0

12.5 X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีการแจกแจงเหมือนกัน

X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มดัชนีของ A ดังนั้น

$$P(X = 1) = P(A) = \frac{1}{4}$$

$$P(X = 0) = 1 - P(A) = \frac{3}{4}$$

Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มดัชนีของ B ดังนั้น

$$P(Y = 1) = P(B) = \frac{1}{2}$$

$$P(Y = 0) = 1 - P(B) = \frac{1}{2}$$

$$P(A|B) = \frac{1}{4} = \frac{P(AB)}{P(B)}$$ ดังนั้น

$$P(AB) = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$$

นั่นคือ

$$P(X = 1, Y = 1) = \frac{1}{8} = P(X = 1)\ P(Y = 1)$$

$$\frac{1}{4} = P(X = 1) = P(X = 1, Y = 1) + P(X = 1, Y = 0)$$

$$P(X = 1, Y = 0) = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

แต่ $P(X = 1)P(Y = 0) = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} = P(X = 1, Y = 0)$

$$P(X = 0, Y = 0) = P(Y = 0) - P(X = 1, Y = 0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

และ $P(X = 0, y = 1) = \frac{3}{4} - \frac{3}{8} = \frac{3}{8}$

$$P(X = 0)\ P(Y = 0) = \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8} = P(X = 0, Y = 0)$$

และ $P(X = 0, Y = 1) = P(X = 0)\ P(Y = 1)$

นั่นคือ

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)\ P(Y = y) \quad \text{ทุกค่า } x, y$$

แสดงว่า X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน

$\Longrightarrow$ ข้อความ 12.1 ถูกต้อง

$$\begin{aligned} P(X^2 + Y^2 = 1) &= P(X = 1, Y = 0) + P(X = 0, Y = 1) \\ &= \frac{1}{8} + \frac{3}{8} \\ &= \frac{1}{2} \neq \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ ข้อความ 12.2 ผิด

$$\begin{aligned} P(XY = X^2Y^2) &= P(X = 0, Y = 0) + P(X = 0, Y = 1) + \\ &\quad P(X = 1, Y = 0) + P(X = 1, Y = 1) \\ &= , \end{aligned}$$

ข้อความ 12.3 ถูกต้อง

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{3}{4} &&, x = 0 \\ &= \frac{1}{4} &&, x = 1 \\ &= 0 && \text{อื่น ๆ} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ ข้อความ 12.4 ผิด

X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีการแจกแจงต่างกัน

$\Longrightarrow$ ข้อความ 12.5 ผิด

13. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน และมีฟังก์ชันความหนาแน่นรูปเดียวกัน คือ $f(t) = 1 \;,\; 0 < t < 1$

นอกนั้นเป็น 0 จงหาฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X กับ Y และคำนวณค่าของ

13.1 $P(X+Y < 0.5)$

13.2 $P(X-Y < 0.5)$

13.3 $P(X^2+Y^2 < 0.5)$

13.4 $P(e^{-X} < 0.5)$

13.5 $P(\cos \pi Y < 0.5)$

X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน ดังนั้น

$$f(x, y) = g(x)h(y) = 1, \quad 0 < x, y < 1$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

13.1 $$P(X+Y < 0.5) = \int_0^{0.5}\int_0^{0.5-y} dxdy$$

$$= \int_0^{0.5} (0.5-y)dy = 0.5(0.5)-\frac{(0.5)^2}{2} = 0.125$$

13.2 $$P(X-Y < 0.5) = 1-P(X-Y \geqslant 0.5)$$

$$= 1-\int_0^{0.5}\int_{0.5+y}^{1} dxdy$$

$$= 1-\int_0^{0.5} (1-0.5-y)dy = 1-0.125 = 0.875$$

13.3 $$P(X^2+Y^2 < 0.5) = \int_0^{\sqrt{0.5}}\int_0^{\sqrt{0.5-y^2}} dxdy$$

$$= \int_0^{\sqrt{0.5}} \sqrt{0.5-y^2}dy = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(\sin^{-1}1-\sin^{-1}0)\right] = \frac{\pi}{8}$$

** $\int\sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]$, $a > 0$ **

13.4 $$P(e^{-X} < 0.5) = P(-X < \ell n\, 0.5)$$

$$= P(X > \ell n\, 2)$$

$$= \int_{\ell n 2}^{1} dx = 1-\ell n\, 2$$

13.5 $P(\cos \pi Y < 0.5) = P\left(\pi Y > \frac{\pi}{3}\right)$

$$= \int_{1/3}^{1} dy = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

14. โรงงานอุตสาหกรรมแห่งหนึ่งมีแผนกการผลิต 2 แผนก แต่ละแผนกจะมีอุบัติเหตุเกิดขึ้น X และ Y ครั้งต่อเดือน ตามลำดับ สมมติว่า X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน และมีการแจกแจงเหมือนกัน คือ

จำนวนอุบัติเหตุ (t)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P(T = t)	08	.12	.16	.13	.09	.12	10	.09	.06	.05

จงคำนวณค่าของ

14.1 $P(X = 6/Y \geqslant 3)$

14.2 $P(X > 6|Y \geqslant 3)$

14.3 $P(X+Y > 18)$

14.4 $P(X+Y \geqslant 18|X \leqslant 9)$

14.5 $P(3 < x \leqslant 6,\ 5 < Y < 8)$

เฉลย

X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน ดังนั้น

$$f(x, y) = P(X = x)\ P(Y = y)$$

14.1 $P(X = 6/Y \geqslant 3) = P(X = 6)$ $\because$ **X** และ Y เป็นอิสระกัน

$= 0.12$

14.2 $P(X > 6|Y \geqslant 3) = P(X > 6)$, x และ Y เป็นอิสระต่อกัน

$= .10 + .09 + .06 + .05 = .3$

14.3 $P(X+Y > 18) = f(9, 10) + f(10, 9) + f(10, 10)$

$= (.06)(.05) + (.05)(.06) + (.05)(.05) = .0085$

14.4 $P(X+Y \geqslant 18|X \leqslant 9) = \frac{P(X \leqslant 9,\ Y \geqslant 18-X)}{P(X \leqslant 9)}$

$$= \frac{f(8, 10) + f(9, 9) + f(9, 10)}{1 - P(X = 10)}$$

$$= \frac{(.09)(.05) + (.06)(.06) + (.06)(.05)}{1 - .05} = .0117$$

14.5 $P(3 < X \leqslant 6,\ 5 < Y < 8) = P(3 < X \leqslant 6)\ P(5 < Y < 8)$

$$= (.13+.09+.12)(.12+.10) = .0748$$

15. X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระกัน มี

$$F(x) = k(x^3+1) \quad , \quad -1 < x < 2$$

$$F(y|1) = m\cdot(y^2-2y+1) \quad , \quad 1 < y < n$$

เป็นฟังก์ชันการแจกแจงสะสมแบบ marginal ของ X และฟังก์ชันการแจกแจงสะสมเงื่อนไขของ Y เมื่อรู้ว่า X = 1 ตามลำดับ ถ้า $P(AB) = \frac{1}{36}$ ในเมื่อ $A = \{x : 0 < x < 1\}$ และ $B = \{y : 1 < y < 2\}$ จงคำนวณค่าของ

15.1 k, m, n

15.2 $P(A \cup B)$

15.3 จงหาฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X กับ Y

เฉลย

15.1 F(x) เป็นฟังก์ชันการแจกแจงสะสมทางเดียวของ X ดังนั้น

$$1 = F(2) = k(2^3+1)$$

จะได้ $$k = \frac{1}{9}$$

F(y|1) เป็นฟังก์ชันการแจกแจงสะสมเงื่อนไขของ Y|X = 1 ดังนั้น

$$1 = F(n|1) = m(n^2-2n+1) \qquad \text{.......... (1)}$$

$$P(AB) = P(0 < X < 1,\ 1 < Y < 2) = \frac{1}{36}$$

X และ Y เป็นอิสระต่อกัน ดังนั้น

$$F(y|1) = F(y)$$

และ $P(0 < X < 1,\ 1 < Y < 2) = P(0 < X < 1)\ P(1 < Y < 2)$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{36} = \left\{\frac{1+1}{9} - \frac{0+1}{9}\right\}\left\{m(4-4+1)-0\right\}$$

$$\frac{1}{4} = m$$

จาก (1) จะได้

$$\frac{1}{4}(n^2-2n+1) = 1$$

$$n^2-2n-3 = 0$$

$$n = 3 \qquad (\because\ n > 1)$$

15.2 $$P(A \cup B) = P(A)+P(B)-P(AB)$$
$$= \frac{1}{9}+\frac{1}{4}-\frac{1}{36} = \frac{1}{3}$$

15.3 $$f(x, y) = f_X(x)\, f_Y(y) = \left\{\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3+1}{9}\right)\right\}\left\{\frac{d}{dy}\left(\frac{y^2-2y+1}{4}\right)\right\}$$

จะได้

$$f(x, y) = \frac{x^2(y-1)}{6} \qquad -1 < x < 2,\ 1 < y < 3$$
$$= 0 \qquad \text{อื่น ๆ}$$

16. ถ้า $F(y|x)$ และ $F(x)$ เป็นฟังก์ชันการแจกแจงสะสมภายใต้เงื่อนไขของ Y เมื่อรู้ว่า $X = x,\ 0 < x < 1$ และฟังก์ชันการแจกแจงสะสมแบบ marginal ของ X ตามลำดับ กำหนดไว้โดย

$$F(y|x) = \frac{k\cdot(16x^3y+y^4)}{2x^3+1}, \quad 0 < y < 2,\ 0 < x < 1$$

และ $$F(x) = cx\cdot(x^3+2), \quad 0 < x < 1$$

จงหา

16.1 ค่าของ k และ c

16.2 ฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X กับ Y

16.3 ฟังก์ชันหนาแน่นภายใต้เงื่อนไขของ X เมื่อ $Y = y,\ 0 < y < 2$

16.4 ฟังก์ชันหนาแน่นแบบ marginal ของ X และของ Y

16.5 ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมแบบ marginal ของ Y

16.6 ค่าของ $P\left(\frac{1}{2} < Y < \frac{3}{2} \middle| X = \frac{1}{2}\right)$, $P\left(|X| \leq \frac{1}{3} \middle| Y = 1\right)$ และ $P\left(\frac{1}{4} < X < \frac{1}{2}\right)$

$P(Y > 1)$

เฉลย

16.1 $F(y|x)$ เป็นฟังก์ชันการแจกแจงสะสมเงื่อนไขของ $Y|X = x$ ดังนั้น

$$F(2|x) = \frac{k(32x^3+16)}{2x^3+1} = 1$$

จะได้ $$k = \frac{1}{16}$$

$F(x)$ เป็นฟังก์ชันการแจกแจงสะสมทางเดียวของ X ดังนั้น

$$F(1) = c(1+2) = 1$$

จะได้ $c = \frac{1}{3}$

16.2 $$f(x, y) = f(y|x)\,f(x) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{16x^3y+y^4}{32x^3+16}\right]\frac{d}{dx}\left[\frac{x}{3}(x^3+2)\right]$$

$$= \left(\frac{16x^3+4y^3}{32x^3+16}\right)\left(\frac{4x^3+2}{3}\right) \quad , \quad 0 < x < 1, 0 < y < 2$$

จะได้

$$f(x, y) = \frac{4x^3+y^3}{6} \quad , \quad 0 < x < 1, 0 < y < 2$$

$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

16.3 $$\frac{f(x, y)}{f(y)} = \frac{\frac{1}{6}(4x^3+y^3)}{\int_0^1 \frac{1}{6}(4x^3+y^3)dx} \quad , \quad 0 < x < 1, 0 < y < 2$$

จะได้

$$f(x|y) = \frac{4x^3+y^3}{1+y^3} \quad , \quad 0 < x < 1, 0 < y < 2$$

$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

16.4 ฟังก์ชันหนาแน่นทางเดียวของ X ก็คือ

$$f(x) = \frac{4x^3+2}{3} \quad , \quad 0 < x < 1$$

$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

ฟังก์ชันหนาแน่นทางเดียวของ Y คือ

$$f(y) = \frac{1+y^3}{6} \quad , \quad 0 < y < 2$$

$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

16.5 $$F(y) = \int_0^y \frac{1}{6}(1+y^3)dy \quad , \quad 0 < y < 2$$

$$= \frac{1}{6}\left(y+\frac{y^4}{4}\right)$$

ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมทางเดียวของ Y คือ

$$F(y) = 0 \quad , \quad y < 0$$

$$= \frac{y}{24}(4+y^3) \quad , \quad 0 \leqslant y < 2$$

$$= 1 \quad , \quad y \geqslant 2$$

16.6 $P\left(\frac{1}{2} < Y < \frac{3}{2} \middle| X = \frac{1}{2}\right) = F\left(\frac{3}{2}\middle|\frac{1}{2}\right) - F\left(\frac{1}{2}\middle|\frac{1}{2}\right)$

$$= \frac{1}{16}\left[\frac{16\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{3}{2}\right)^4}{2\left(\frac{1}{2}\right)^3+1}\right] - \frac{1}{16}\left[\frac{16\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^4}{2\left(\frac{1}{2}\right)^3+1}\right]$$

$$= \frac{7}{20}$$

$$P\left(|X| \leqslant \frac{1}{3} \middle| Y = 1\right) = P\left(X \leqslant \frac{1}{3} \middle| Y = 1\right)$$

$$= \int_0^{1/3} \frac{4x^3+1}{1+1}dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{81}+\frac{1}{3}\right] = \frac{14}{81}$$

$$P\left(\frac{1}{4} < X < \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{8}+2\right) - \frac{1}{12}\left(\frac{1}{64}+2\right) = \frac{143}{768}$$

$$P(Y > 1) = 1 - \frac{1}{24}(4+1) = \frac{19}{24}$$

17. กำหนด

$$f(x, y) = \frac{1}{2x} \quad , \quad 0 < y < x < 1$$

$$= 1 \quad , \quad 0 < x < y < 1$$

นอกนั้นเป็น 0 เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X กับ Y

17.1 จงแสดงให้เห็นจริงว่า

$$g(x) = \frac{3}{2} - x, \ 0 < x < 1 \quad \text{และ} \quad h(y) = y - \ell n\sqrt{y}, \ 0 < y < 1$$

นอกนั้นเป็น 0 เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นแบบ marginal ของ X และ Y ตามลำดับ

17.2 จงคำนวณค่าของ $P\left(\frac{1}{3} < X < \frac{1}{2}\right)$, $P\left(\frac{1}{2} < Y \leqslant \frac{3}{2} \middle| \frac{1}{3} < X < \frac{1}{2}\right)$

17.3 จงหาฟังก์ชันการแจกแจงสะสมภายใต้เงื่อนไขของ Y เมื่อ X = x, $0 < x < 1$

17.1

$$g(x) = \int_0^x \frac{1}{2x}dy + \int_x^1 dy \quad , \quad 0 < x < 1$$

$$= \frac{1}{2x}(x-0) + (1-x)$$

แสดงว่า ฟังก์ชันหนาแน่นทางเดียวของ X คือ

$$g(x) = \frac{3}{2} - x \quad , \quad 0 < x < 1$$

$$= 0 \qquad \text{อื่น ๆ}$$

$$h(y) = \int_y^1 \frac{1}{2x}dx + \int_0^y dx \quad , \quad 0 < y < 1$$

$$= \frac{1}{2}(\ell n\ 1 - \ell n\ y) + (y-0)$$

แสดงว่า ฟังก์ชันหนาแน่นทางเดียวของ Y คือ

$$h(y) = y - \ell n\sqrt{y} \quad , \quad 0 < y < 1$$

$$= 0 \qquad \text{อื่น ๆ}$$

17.2 $$P\left(\frac{1}{3} < X < \frac{1}{2}\right) = \int_{1/3}^{1/2} \left(\frac{3}{2} - x\right)dx$$

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right) = \frac{13}{72}$$

$$P\left(\frac{1}{2} < Y \leqslant \frac{3}{2} \,\middle|\, \frac{1}{3} < X < \frac{1}{2}\right) = \frac{P\left(\frac{1}{3} < X < \frac{1}{2}, \frac{1}{2} < Y \leqslant 1\right)}{P\left(\frac{1}{3} < X < \frac{1}{2}\right)} \quad , \quad y < 1$$

$$P\left(\frac{1}{2} < Y \leqslant \frac{3}{2} \,\middle|\, \frac{1}{3} < X < \frac{1}{2}\right) = \frac{\int_{1/2}^{1}\int_{1/3}^{1/2} dxdy}{\frac{13}{72}}$$

$$= \frac{\int_{1/2}^{1} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)dy}{\frac{13}{72}} = \frac{12}{13}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{6}{13}$$

17.3 $f(y|x) = \dfrac{\frac{1}{2x}}{\frac{3}{2} - x} = \dfrac{1}{3x - 2x^2}$, $0 < y < x, 0 < x < 1$

$= \dfrac{1}{\frac{3}{2} - x} = \dfrac{2}{3 - 2x}$, $x < y < 1, 0 < x < 1$

$= 0$ อื่น ๆ

เมื่อ $0 < y < x,\ 0 < x < 1$

$$P(Y \leqslant y|x) = \int_0^y \frac{1}{3x - 2x^2} dy = \frac{y}{3x - 2x^2}$$

เมื่อ $x < y < 1$

$$P(Y \leqslant y|x) = \frac{x}{3x - 2x^2} + \int_x^y \frac{2}{3 - 2x} dy$$

$$= \frac{1}{3 - 2x} + \frac{2}{3 - 2x}(y - x)$$

นั่นคือ

$$\begin{aligned} F(y|x) &= 0 &&, \ y < 0,\ 0 < x < 1 \\ &= \frac{y}{3x - 2x^2} &&, \ 0 \leqslant y < x,\ 0 < x < 1 \\ &= \frac{1 + 2y - 2x}{3 - 2x} &&, \ x \leqslant y < 1,\ 0 < x < 1 \\ &= 1 &&, \ y \geqslant 1,\ 0 < x < 1 \end{aligned}$$

18. $f(x|y)$ และ $h(y)$ เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นเงื่อนไขของ X เมื่อ $Y = y$ และฟังก์ชันความหนาแน่นแบบ marginal ของ Y ตามลำดับ ซึ่งกำหนดโดย

$$f(x|y) = \frac{3x^2 + xy^2e^{1-y}}{8 + 2y^2e^{1-y}} \quad , \quad 0 < x < 2,\ y \geqslant 1$$

$$h(y) = \frac{1}{5y^2} \cdot (4 + y^2e^{1-y}) \quad , \quad y \geqslant 1$$

นอกนั้นเป็น 0 จงหา

18.1 ฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ X กับ Y

18.2 ฟังก์ชันความหนาแน่นและฟังก์ชันการแจกแจงสะสมแบบ marginal ของ X

18.3 ฟังก์ชันความหนาแน่นและฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ $Z = \sqrt{\frac{X}{2}}$

18.4 จงแสดงให้เห็นจริงว่า

$$\int_0^2 f(x|5)dx = 1$$

$$P\left(\frac{1}{2} < X \leqslant \frac{3}{2}\middle|Y = 2\right) \neq P\left(\frac{1}{2} < X \leqslant \frac{3}{2}\right)$$

18.1 $$f(x|y)\,h(y) = \frac{3x^2+xy^2e^{1-y}}{8+2y^2e^{1-y}}\cdot\frac{1}{5y^2}(4+y^2e^{1-y}) \quad , \quad 0 < x < 2,\ y \geqslant 1$$

นั่นคือ

$$f(x, y) = \frac{3x^2+xy^2e^{1-y}}{10y^2} \quad , \quad 0 < x < 2,\ y \geqslant 1$$

$$= 0 \qquad \text{อื่น ๆ}$$

18.2 $$\int_1^{\infty}\frac{3x^2+xy^2e^{1-y}}{10y^2}dy = \frac{3x^2}{10}(-0+1)+\frac{x}{10}(-e^{-\infty}+e^0) \quad , \quad 0 < x < 2$$

และ $$\int_0^x \frac{3x^2+x}{10}dx = \frac{1}{10}\left(x^3+\frac{x^2}{2}\right), \quad 0 < x < 2$$

นั่นคือ

$$g(x) = \frac{x}{10}(3x+1) \quad , \quad 0 < x < 2$$

$$= 0 \qquad \text{อื่น ๆ}$$

และ

$$G(x) = 0 \quad , \quad x < 0$$

$$= \frac{x^2}{20}(2x+1) \quad , \quad 0 \leqslant x < 2$$

$$= 1 \quad , \quad x \geqslant 2$$

18.3 $Z = \sqrt{\frac{X}{2}}$ จะได้

$$F(z) = P\left(\sqrt{\frac{X}{2}} \leqslant z\right) \quad , \quad 0 \leqslant z < 1$$

$$= P(X \leqslant 2z^2)$$

$$= \frac{(2z^2)^2}{20}(4z^2+1)$$

$$\frac{dF(z)}{dz} = \frac{4(6z^5)+4z^3}{5} \quad , \quad 0 < z < 1$$

นั่นคือ

$$
\begin{aligned}
F(z) &= 0 & , \quad z < o \\
&= \frac{z^4}{5}(4z^2+1) & , \quad 0 \leqslant z < 1 \\
&= 1 & , \quad z \geqslant 1
\end{aligned}
$$

และ

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{4z^3}{5}(6z^2+1) & , \quad 0 < z < 1 \\
&= 0 & \text{อื่น ๆ}
\end{aligned}
$$

18.4

$$
\begin{aligned}
\int_0^2 f(x|5)dx &= \int_0^2 \frac{3x^2+25xe^{-4}}{8+50e^{-4}}dx \\
&= \frac{2^3+25e^{-4}(2 \quad ^2|2)}{8+50e^{-4}}
\end{aligned}
$$

แสดงว่า

$$\int_{0}^{2} f(x|5)dx = 1,$$

$$
\begin{aligned}
P\left(\frac{1}{2} < X \leqslant \frac{3}{2} \middle| Y = 2\right) &= \int_{1/2}^{3/2} f(x|2)dx \\
&= \int_{1/2}^{3/2} \frac{3x^2+4xe^{-1}}{8+8e^{-1}}dx \\
&= \frac{1}{8+8e^{-1}}\left[\left(\frac{27}{8}-\frac{1}{8}\right)+2e^{-1}\left(\frac{9}{4}-\frac{1}{4}\right)\right] = 0.431
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P\left(\frac{1}{2} < X \leqslant \frac{3}{2}\right) &= G\left(\frac{3}{2}\right)-G\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{20}\left[2\left(\frac{27}{8}\right)+\frac{9}{4}\right]-\frac{1}{20}\left[2\left(\frac{1}{8}\right)+\frac{1}{4}\right] = 0.425
\end{aligned}
$$

แสดงว่า $P\left(\frac{1}{2} < X \leqslant \frac{3}{2} \middle| Y = 2\right) \neq P\left(\frac{1}{2} < X \leqslant \frac{3}{2}\right)$