บทที่ 3
ตัวแบบน่าจะเป็น
(Probability Models)

3.1 ปัญหาการจับคู่ (MATCHING PROBLEM)

การจับคู่แบบสุ่ม n คู่ จะมีจำนวนผลลัพธ์ = n!

ถ้า A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ เป็นเหตุการณ์ที่จับคู่ได้ในตำแหน่งที่ i

จำนวนผลลัพธ์ที่ได้จะ = $(n-1)!$

$$P(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

ถ้า $\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}$ เป็นเหตุการณ์ที่จับคู่ได้ในตำแหน่งที่ $i_1, i_2, \ldots$ และ i_k, $k \geqslant 2$

นั่นก็คือ การจับคู่แบบสุ่ม $n-k$ คู่ ยกเว้นคู่ที่ $i_1, i_2, \ldots$ และ i_k

จำนวนผลลัพธ์ของ $\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}$ จะ = $(n-k)!$

เราจะได้ $$P\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right) = \frac{(n-k)!}{n!} = \frac{1}{n^{(k)}}$$

หากเราสนใจการจับคู่ได้ k คู่ใด ๆ ในจำนวน n คู่ จะมีทางที่จะเกิดขึ้นได้ $\binom{n}{k}$ หนทาง ในแต่ละหนทางต่างมีผลลัพธ์เท่ากับ $\frac{1}{n^{(k)}}$

ดังนั้น ผลรวมของความน่าจะเป็นที่จะจับคู่ได้ใน k เหตุการณ์

หรือ $$S_k = \binom{n}{k}\frac{(n-k)!}{n!} = \frac{1}{k!}$$

ถ้า X = จำนวนคู่ที่จับคู่กันได้

เราจะได้ $$P(X = x) = \sum_{k=0}^{n-x} \frac{(-1)^k}{k!\,x!}, \quad x = 0, 1, \ldots, n$$

และ $E(X) = 1$ เสมอ

ผลที่ตามมาก็คือ

$$\sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{n-j} \frac{(-1)^k}{k!\,j!} = 1 \qquad \ldots\ldots\ldots (3.1)$$

เฉลยแบบฝึกหัดที่ 3.1

1. มีลูกบอล 10 ลูก หมายเลข 1, 2, ..., 10 เอาลูกบอลใส่กล่องหมายเลข 1, 2, ..., 10 กล่องละ 1 ลูก โดยไม่สนใจว่าหมายเลขบนลูกบอลกับหมายเลขกล่องจะตรงกันหรือไม่ แต่ถ้าใส่ได้หมายเลขตรงกัน แสดงว่าเกิดการจับคู่กันได้ตรงหมายเลขนั้น

   1.1 จำนวนผลลัพธ์ของการจับคู่ = 10!

   จำนวนผลลัพธ์ที่เกิดการจับคู่ตรงหมายเลข 2 = 9!

   จำนวนผลลัพธ์ที่เกิดการจับคู่ตรงหมายเลข 1, 3 และ 9 = 7!

   1.2 กำหนด A_i เป็นเหตุการณ์ที่การจับคู่กันได้เกิดขึ้นในตำแหน่ง i

$$P(A_1) = \frac{1}{10}$$

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{90} = \frac{17}{90}$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{10^{(3)}} = \frac{1}{720}$$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \binom{3}{1}\frac{1}{10} - \binom{3}{2}\frac{1}{90} + \binom{3}{3}\frac{1}{720}$$

$$= \frac{3}{10} - \frac{3}{90} + \frac{1}{720} = \frac{193}{720}$$

   1.3 ความน่าจะเป็นที่จะจับคู่กันไม่ได้เลย $= \sum_{k=2}^{10} \frac{(-1)^k}{k!}$

   ความน่าจะเป็นที่จะจับคู่กันได้เพียง 5 คู่ $= \frac{1}{5!}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120}\right] = \frac{11}{3,600}$

   ความน่าจะเป็นที่จะจับคู่กันได้เพียง 9 คู่ = 0

   ค่าคาดหมายของจำนวนคู่ที่จับคู่กันได้ = 1

2. ใส่ลูกหิน 5 ลูก หมายเลข 1, 2, 3, 4, 5 ลงในกล่อง 5 กล่อง หมายเลข 1, 2, 3, 4, 5 อย่างสุ่มกล่องละ 1 ลูก

   2.1 จงคำนวณความน่าจะเป็นที่จะเกิดการจับคู่กันได้ 0, 1, 2, 3, 4 และ 5 คู่

   2.2 จงหาจำนวนคู่ที่มีค่าความน่าจะเป็นมากที่สุด

เฉลย

ให้ X = จำนวนคู่ที่จับคู่กันได้

จะได้ $$P(X = x) = \sum_{k=0}^{5-x}\frac{(-1)^k}{k!x!} \quad , \quad x = 0, 1, 2, \ldots, 5$$

P(จับคู่กันได้ 0 คู่) = $P(X = 0) = \frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{24}-\frac{1}{120} = \frac{11}{30}$

P(จับคู่กันได้ 1 คู่) = $P(X = 1) = \frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{24} = \frac{3}{8}$

P(จับคู่กันได้ 2 คู่) = $P(X = 2) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6}$

P(จับคู่กันได้ 3 คู่) = $P(X = 3) = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{12}$

P(จับคู่กันได้ 4 คู่) = $P(X = 4) = \frac{1}{24}(1-1) = 0$

P(จับคู่กันได้ 5 คู่) = $P(X = 5) = \frac{1}{120}$

จำนวนคู่ที่มีค่าความน่าจะเป็นมากที่สุด = 1 คู่

3. ในการคำนวณค่าความน่าจะเป็นที่จะเกิดการจับคู่กันได้ x คู่ ตามสูตร 3.1.4 ค่าที่จะคำนวณได้ย่อมขึ้นอยู่กับค่าของ x และ n

 3.1 จงคำนวณค่า $P(X = 2)$ เมื่อ $n = 2, 3, \ldots, 8$ เราจะสรุปว่า $P(X = 2)$ มีค่าเพิ่มขึ้นในเมื่อค่าของ n สูงขึ้น ได้หรือไม่

 3.2 จงแสดงให้เห็นจริงว่า ความน่าจะเป็นที่จะเกิดการจับคู่กันได้เพียง $n-1$ คู่ จะเท่ากับ 0 สำหรับทุก ๆ ค่าของ n

 3.3 จงพิสูจน์ว่า

$$\lim_{n\to\infty} P(X = 0) = e^{-1} \ , \quad \lim_{n\to\infty} P(X = x) = \frac{e^{-1}}{x!} \ , \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

เฉลย

3.1 $$P(X = 2) = \sum_{k=0}^{n-2}\frac{(-1)^k}{k!2!} = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n-2}\frac{(-1)^k}{k!}$$

$n = 2;$ $\quad P(X = 2) = \frac{1}{2}$

$n = 3;$ $\quad P(X = 2) = \frac{1}{2}-\frac{1}{2} = 0$

$n = 4;$ $\quad P(X = 2) = \frac{1}{2(2)} = \frac{1}{4}$

$n = 5;$ $\quad P(X = 2) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6}$

$n = 6;$ $\quad P(X = 2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{24}\right) = \frac{3}{16}$

$n = 7;$ $\quad P(X = 2) = \frac{3}{16} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{120}\right) = \frac{11}{60}$

$\quad P(X = 2) = \left(\frac{11}{60} + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{720} = \frac{53}{288}$

เราสรุปไม่ได้ว่า เมื่อค่าของ n สูงขึ้น $P(X = 2)$ จะมีค่าสูงขึ้น

3.2 ถ้าเรากำหนดให้มีการจับคู่กันได้ใน $n-1$ คู่แรก
คู่ที่ n ซึ่งเป็นคู่สุดท้าย จะจับคู่กันได้แน่ ๆ นั่นคือ เกิดการจับคู่กันได้ทั้งหมด n คู่
แสดงว่า ไม่มีเหตุการณ์ที่จะจับคู่กันได้ $n-1$ คู่
ดังนั้น $\quad P(X = n-1) = 0 \quad$ เสมอ
หรือ จากสูตรเรามี

$$P(X = x) = \sum_{k=0}^{n-x} \frac{(-1)^k}{k!x!}$$

ดังนั้น $P(X = n-1) = \sum_{k=0}^{1} \frac{(-1)^k}{k!(n-1)!} = \frac{1}{(n-1)!}(1-1) = 0$

$\Longrightarrow$ ความน่าจะเป็นที่จะจับคู่ได้ $n-1$ คู่ $= 0$ เสมอ ทุกค่า n

3.3 $\quad P(X = 0) = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!}$

$$\lim_{n\to\infty} P(X = 0) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = e^{-1}$$

$$\lim_{n\to\infty} P(X = x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-x} \frac{(-1)^k}{k!x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

$$= \frac{1}{x!} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-x} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{e^{-1}}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

4. กำหนดตัวแปรเชิงสุ่ม X เป็นจำนวนคู่ที่เกิดการจับคู่กันได้ในการเรียงไพ่ n ใบ หมายเลข 1, 2, ..., n ให้อยู่ใน n ตำแหน่ง หมายเลข 1, 2, ..., n จงพิสูจน์ว่า

4.1 $P(X = x+1) = \frac{1}{(x+1)!}\left[x!P(X = x) - \frac{(-1)^{n-x}}{(n-x)!}\right]$

4.2 $|P(X = 0) - P(X = 1)| = \frac{1}{n!}$

4.3 $E(X)^{(r)} = 1, \; r = 1, 2, \dots, n$

4.1 $$P(X = x) = \sum_{k=0}^{n-x} \frac{(-1)^k}{k!x!} \quad , \quad x = 0, 1, 2, \ldots, n$$

จะได้ $$P(X = x+1) = \sum_{k=0}^{n-x-1} \frac{(-1)^k}{k!(x+1)!}$$

$$= \frac{1}{(x+1)!}\left[\sum_{k=0}^{n-x-1} \frac{(-1)^k}{k!} + \frac{(-1)^{n-x}}{(n-x)!} - \frac{(-1)^{n-x}}{(n-x)!}\right]$$

$$= \frac{1}{(x+1)!}\left[x! \sum_{k=0}^{n-x} \frac{(-1)^k}{k!x!} - \frac{(-1)^{n-x}}{(n-x)!}\right]$$

แสดงว่า $$P(X = x+1) = \frac{1}{(x+1)!}\left[x!P(X = x) - \frac{(-1)^{n-x}}{(n-x)!}\right]$$

4.2 $$P(X = 0) - P(X = 1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{(-1)^n}{n!}$$

$$|P(X = 0) - P(X = 1)| = \left|\frac{(-1)^n}{n!}\right| = \frac{1}{n!}$$

4.3 $$E\left[X^{(r)}\right] = \sum_{x=0}^{n} \sum_{k=0}^{n-x} \frac{x^{(r)}(-1)^k}{k!x!} \quad , \quad r = 1, 2, \ldots, n$$

$$= \sum_{x=r}^{n} \sum_{k=0}^{n-x} \frac{x^{(r)}(-1)^k}{k!x!}$$

$$= \sum_{x=r}^{n} \sum_{k=0}^{n-x} \frac{(-1)^k}{k!(x-r)!}$$

ให้ $y = x-r, \ m = n-r$

จะได้ $$m-y = n-r-x+r = n-x$$

$$E\left[X^{(r)}\right] = \sum_{y=0}^{m} \sum_{k=0}^{m-y} \frac{(-1)^k}{k!y!} = 1$$

5. นางสาวสุดาพิมพ์จดหมาย 6 ฉบับ พร้อมด้วยจ่าหน้าซอง 6 ซอง ก่อนที่สุดาจะสอดจดหมายลงในซองมีโทรศัพท์เรียกเข้ามา ในขณะที่กำลังพูดโทรศัพท์สุดาก็สอดจดหมายใส่ซองด้วย โดยไม่ได้ดูว่าจดหมายกับจ่าหน้าซองจะตรงกันหรือไม่ กำหนดตัวแปรเชิงสุ่ม X เป็นจำนวนจดหมายที่สอดถูกซอง จงหาฟังก์ชันน่าจะเป็นและค่าคาดหมายของ X

เฉลย

X = จำนวนจดหมายที่สอดถูกซอง, $x = 0, 1, 2, 3, 4, 6$

ดังนั้น ฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X

$$P(X = x) = \sum_{k=0}^{6-x} \frac{(-1)^k}{k!x!} \quad , \quad x = 0, 1, 2, 3, 4, 6$$

$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

ค่าคาดหมายของ $X = 1$

6. สามีภรรยา 7 คู่จัดงานปาร์ตี้ ในขณะที่มีการเต้นรำกัน จงคำนวณค่าความน่าจะเป็นที่
   6.1 สามีภรรยาแต่ละคู่ไม่ได้เต้นรำด้วยกัน
   6.2 มีสามีภรรยา 3 คู่เท่านั้นที่เต้นรำด้วยกัน
   6.3 ทุก ๆ คู่ต่างเต้นรำกับคู่ของตนเอง
   6.4 มีสามีภรรยาอย่างน้อยที่สุด 2 คู่ที่จับคู่เต้นรำด้วยกัน

เฉลย ให้ X = จำนวนคู่สามีภรรยาที่เต้นรำด้วยกัน

จะได้ $$P(X = x) = \sum_{k=0}^{7-x} \frac{(-1)^k}{k!x!} \quad , \quad x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 7$$

$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

6.1 P(สามีภรรยาไม่ได้เต้นรำด้วยกัน) $= P(X = 0)$

$$= \sum_{k=0}^{7} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{103}{280}$$

6.2 P(มีสามีภรรยา 3 คู่เต้นรำด้วยกัน) $= P(X = 3)$

$$= \sum_{k=0}^{4} \frac{(-1)^k}{k!3!} = \frac{1}{16}$$

6.3 P(ทุกคู่ต่างเต้นรำกับคู่ของตน) $= P(X = 7) = \dfrac{1}{5{,}040}$

6.4 P(มีอย่างน้อย 2 คู่ที่จับคู่เต้นรำกันเอง) $= P(X \geqslant 2)$

$$= 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$$

$$= 1 - \frac{103}{280} - \frac{265}{720}$$

$$= \frac{1{,}331}{5{,}040}$$

7. ภายหลังการศึกษาเกี่ยวกับเรื่องราวของนักประดิษฐ์ 10 คน อาจารย์ได้ทดสอบความรู้โดยเขียนสรุปเรื่องราวของสิ่งประดิษฐ์ต่าง ๆ 10 สิ่ง ซึ่งนักประดิษฐ์แต่ละคนเป็นผู้คิดค้นกระทำขึ้น พร้อมด้วยรายชื่อนักประดิษฐ์ทั้ง 10 คนนั้น ให้นักศึกษาทำข้อทดสอบโดย

เขียนรายชื่อนักประดิษฐ์ให้ตรงกับเรื่องราวของสิ่งที่เขาประดิษฐ์ มีนักศึกษาคนหนึ่งเลือกได้ถูกต้อง 5 ราย จากผลที่ได้จะแสดงว่า นักศึกษาผู้นั้นได้ศึกษาเรื่องราวของนักประดิษฐ์ทั้ง 10 หรือว่าเขาทำถูก 5 รายโดยการเดา

เพื่อที่จะดูว่า ความน่าจะเป็นที่ได้ผลดีพอกันหรือดีกว่า การทำถูกต้อง 5 รายที่เกิดขึ้นโดยบังเอิญจะมีค่าเท่าใด เราคำนวณหา $P(X \geqslant 5)$ เมื่อ X = จำนวนรายที่เลือกได้ถูกต้อง

$$\text{จะได้ } P(X \geqslant 5) = \sum_{x=5}^{10} \sum_{k=0}^{10-x} \frac{(-1)^k}{k!x!}$$

$$= \frac{1}{120}\left(\frac{11}{30}\right) + \frac{1}{720}\left(\frac{3}{8}\right) + \frac{1}{5{,}040}\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{40{,}320}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3{,}628{,}800}$$

$$= 0.0037$$

ซึ่งจะเห็นว่าใช้วิธีการเดา โอกาสที่จะเดาได้ถูกต้อง 5 รายเกิดขึ้นได้น้อยมาก จากจำนวน 10,000 ครั้ง จะมี 37 ครั้งที่จะทำได้ถูกต้องถึง 5 ราย

สรุปได้ว่า การที่นักศึกษาเลือกได้ถูกต้อง 5 ราย แสดงว่าเขามีความรู้จริง

3.2 ปัญหาการใส่บอลในกล่องอย่างสุ่ม

ถ้าใส่บอล n ลูก ในกล่อง m กล่องแบบสุ่ม ๆ จำนวนผลลัพธ์ที่จะเกิดขึ้นจะแตกต่างกันไป ขึ้นอยู่กับว่าบอลแต่ละลูกเหมือนกันหรือไม่เหมือนกัน กรณีที่บอลแต่ละลูกแตกต่างกัน จำนวนผลลัพธ์ที่จะเกิดขึ้นจะเท่ากับ m^n และแต่ละผลลัพธ์จะมีค่าความน่าจะเป็นเท่ากับ $\frac{1}{m^n}$ ส่วนในกรณีของบอลเหมือนกัน จำนวนผลลัพธ์ที่จะเกิดขึ้นจะเท่ากับ $\binom{m+n-1}{n}$ และความน่าจะเป็นของแต่ละผลลัพธ์เท่ากับ $\frac{1}{\binom{m+n-1}{n}}$ ในการสุ่มบอลแต่ละกรณี เราสนใจเกี่ยวกับจำนวนบอลที่อยู่ในกล่องใดกล่องหนึ่ง แต่ที่สนใจมากที่สุดก็คือกรณีของจำนวนกล่องว่าง

กำหนด A_i เป็นเหตุการณ์ที่กล่อง i ว่าง, $i = 1, 2, \ldots, m$

และ S_k เป็นผลบวกของความน่าจะเป็นของการเกิดร่วมกันของ k เหตุการณ์, $k = 1, 2, \ldots, m$ เหตุการณ์ A_i ก็คือการใส่บอล n ลูก ใน $m-1$ กล่องที่เหลือ จะมีจำนวนผลลัพธ์เท่ากับ

$$\begin{cases} (m-1)^n & \text{ถ้าบอลต่างกัน} \\ \binom{m+n-2}{n} & \text{ถ้าบอลเหมือนกัน} \end{cases}$$

ดังนั้น
$$P(A_i) = \begin{cases} \dfrac{(m-1)^n}{m^n} & \text{บอลต่างกัน} \\ \dfrac{\binom{m+n-2}{n}}{\binom{m+n-1}{n}} & \text{บอลเหมือนกัน} \end{cases}$$

ทำนองเดียวกัน $A_{i1} \cap A_{i2} \cap \ldots \cap A_{ik}$, $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant m$, $k = 2, 3, 4, 5, \ldots, m$ เป็นเหตุการณ์ที่กล่อง $i_1, i_2, \ldots, i_k$ ว่าง ซึ่งเท่ากับการใส่บอล n ใน $m-k$ กล่องที่เหลือ จำนวนผลลัพธ์ $A_{i1} \cap A_{i2} \cap \ldots \cap A_{ik}$ จะเท่ากับ $(m-k)^n$ หรือ $\binom{m+n-k-1}{n}$ ขึ้นอยู่กับว่าบอลต่างกันหรือเหมือนกัน

เราจะได้
$$S_k = \binom{m}{k} P\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{ij}\right) = \begin{cases} \dbinom{m}{k}\dfrac{(m-k)^n}{m^n} & \text{บอลต่างกัน} \\ \dbinom{m}{k}\dfrac{\binom{m+n-k-1}{n}}{\binom{m+n-1}{n}} & \text{บอลเหมือนกัน} \end{cases}$$

ทุกค่า $k = 1, 2, 3, \ldots, m$

ถ้า X เป็นจำนวนกล่องว่าง

x จะเท่ากับ $0, 1, 2, \ldots, m-1$

เราจะได้การแจกแจงของ X ในกรณีที่ลูกบอลต่างกันและเหมือนกันตามลำดับ ดังนี้

$$P(X = x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{m-x-1} (-1)^k \binom{m}{x}\binom{m-x}{k}\frac{(m-x-k)^n}{m^n} \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{m-x-1} (-1)^k \binom{m}{x}\binom{m-x}{k}\frac{\binom{m+n-x-k-1}{n}}{\binom{m+n-1}{n}} \end{cases} \quad x = 0, 1, 2, \ldots, m-1$$

ค่าคาดหมายของจำนวนกล่องว่าง เมื่อบอลต่างกันและเหมือนกันตามลำดับ จะกำหนดได้ดังนี้

$$E(X) = \begin{cases} \dfrac{(m-1)^n}{m^{n-1}} \\ \dfrac{m(m-1)}{m+n-1} \end{cases} \qquad \text{.......... (3.2)}$$

ถ้า $m > n$ เราจะได้

$$\sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{m}{k} (m-k)^n = 0$$

$$\text{และ} \quad \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{m}{k} \binom{m+n-k-1}{n} = 0 \qquad \text{..........(3.3)}$$

ถ้า $m = n$ เราจะได้

$$\sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{m}{k} (m-k)^m = m!$$

$$\text{และ} \quad \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{m}{k} \binom{2m-k-1}{m} = 1 \qquad \text{.......... (3.4)}$$

จากคุณสมบัติของฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X เราจะได้

$$\sum_{x=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{m-x-1} (-1)^k \binom{m}{k} \binom{m-x}{k} (m-x-k)^n = m^n$$

$$\text{และ} \quad \sum_{x=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{m-x-1} (-1)^k \binom{m}{k} \binom{m-x}{k} \binom{m+n-x-k-1}{n} = \binom{m+n-1}{n} \qquad \text{.......... (3.5)}$$

เฉลยแบบฝึกหัดที่ 3.2

1. ใส่บอล 5 ลูก หมายเลข 1, 2, 3, 4 และ 5 ลงในกล่อง 5 กล่อง
   1.1 จงคำนวณความน่าจะเป็นที่กล่องใบแรกว่าง
   1.2 จงคำนวณความน่าจะเป็นที่กล่องที่ 1 และกล่องที่ 2 จะไม่ว่าง
   1.3 ให้ X เป็นจำนวนกล่องว่าง จงหา
      1.3.1 ฟังก์ชันการแจกแจงของ X
      1.3.2 ความน่าจะเป็นที่จะมีกล่องว่าง 3 กล่อง

1.1 P(กล่องใบแรกว่าง) $= \frac{(5-1)^5}{5^5} = \frac{1,024}{3,125}$

1.2 P(กล่องที่ 1 และกล่องที่ 2 ไม่ว่าง)

= 1 − P(ที่มีกล่องว่างอย่างน้อย 1 กล่องใน 2 กล่องแรก)

P(ที่มีกล่องว่างอย่างน้อย 1 กล่อง ใน 2 กล่องแรก)

= P(กล่องที่ 1 ว่าง) + P(กล่องที่ 2 ว่าง) − P(กล่องที่ 1และ 2 ว่าง)

$= \frac{4^5}{5^5}+\frac{4^5}{5^5}-\frac{3^5}{5^5} = \frac{361}{625}$

P(กล่องที่ 1 และกล่องที่ 2 จะไม่ว่าง) $= 1-\frac{361}{625} = \frac{264}{625}$

1.3 X = จำนวนกล่องว่าง

1.3.1 $P(X = x) = \sum_{k=0}^{4-x} (-1)^k\binom{5}{x}\binom{5-x}{k}\frac{(5-x-k)^5}{3,125}$, $x = 0, 1, 2, 3, 4$

1.3.2 $P(X = 3) = \binom{5}{3}\binom{2}{0}\frac{2^5}{3,125}-\binom{5}{3}\binom{2}{1}\frac{1^5}{3,125} = \frac{12}{125}$

2. ใส่บอลหมายเลข 1, 2, 3, ..., 20 ลงในกล่อง 12 กล่องแบบสุ่ม

2.1 ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่กล่องแรกว่าง

และ B เป็นเหตุการณ์ที่กล่องที่สองว่าง

จงคำนวณค่าของ $P(A \cup B)$

2.2 จงหาฟังก์ชันน่าจะเป็นและค่าคาดหมายของจำนวนกล่องที่ว่าง

2.3 จงคำนวณความน่าจะเป็นที่จะมีกล่องว่าง 10 กล่อง

2.1 A = เหตุการณ์ที่กล่องแรกว่าง จะได้ $P(A) = \frac{(12-1)^{20}}{12^{20}}$

B = เหตุการณ์ที่กล่องที่ 2 ว่าง จะได้ $P(B) = \frac{(12-1)^{20}}{12^{20}}$

$A \cap B$ = เหตุการณ์ที่ 2 กล่องแรกว่าง จะได้ $P(A \cap B) = \frac{(12-2)^{20}}{12^{20}}$

$$P(A \cup B) = P(A)+P(B)-P(A \cap B)$$

$$= \frac{11^{20}}{12^{20}}+\frac{11^{20}}{12^{20}}-\frac{10^{20}}{12^{20}} = \frac{2(11^{20})-10^{20}}{12^{20}}$$

2.2 X = จำนวนกล่องว่าง

ฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X

$$P(X = x) = \sum_{k=0}^{11-x} (-1)^k \binom{12}{x}\binom{12-x}{k}\frac{(12-x-k)^{20}}{12^{20}}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, 11$$

ค่าคาดหมายของ X

$$E(X) = \frac{(12-1)^{20}}{12^{20-1}} = \frac{11^{20}}{12^{19}}$$

2.3 $$P(X = 10) = \binom{12}{10}\binom{12-10}{0}\frac{(12-10)^{20}}{12^{20}} - \binom{12}{10}\binom{12-10}{1}\frac{(12-10-1)^{20}}{12^{20}}$$

$$= \frac{11(2^{19}-1)}{12^{19}}$$

3. ใส่บอล n ลูกที่แตกต่างกันลงในกล่อง m กล่องแบบสุ่ม จงเขียนตารางแสดงการแจกแจงของ X, $m = 2,\ n = 3;\ m = 3,\ n = 1;\ m = 3,\ n = 2;\ m = 4,\ n = 2;\ m = 4,\ n = 3;\ m = 4,\ n = 5$ และ $m = 5,\ n = 5$

3.1 อาศัยผลที่ได้ จงแสดงให้เห็นจริงว่า

$$E(X) = \frac{(m-1)^n}{m^{n-1}}$$

ทุก ๆ ค่าของ m และ n

3.2 จงพิสูจน์ว่า

$$E|X(X-1)| = \sum_{\forall x} x(x-1)\,P(X = x) = \frac{m(m-1)(m-2)^n}{m^n}$$

และโดยทั่ว ๆ ไป

$$E(X^{(r)}) = \sum_{\forall x} x(x-1)\ldots(x-r+1)\,P(X = x) = \frac{m^{(r)}(m-r)^n}{m^n}, \quad r = 1, 2, \ldots$$

3.3 อาศัยผลที่ได้จากตารางแสดงการแจกแจงของ X จงแสดงให้เห็นจริงว่า

$$E(X^{(2)}) = m(m-1)\frac{(m-2)^n}{m^n}$$

ทุกค่า m และ n

เฉลย X = จำนวนกล่องว่าง

จะได้

$$P(X = x) = \sum_{k=0}^{m-x-1} (-1)^k \binom{m}{x}\binom{m-x}{k}\frac{(m-x-k)^n}{m^n}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, m-1$$

3.2 $$E[X(X-1)] = \sum_{x=0}^{m-1} x(x-1) \sum_{k=0}^{m-x-1} (-1)^k \binom{m}{x}\binom{m-x}{k}\frac{(m-x-k)^n}{m^n}$$

$$= \sum_{x=2}^{m-1}\sum_{k=0}^{m-x-1} (-1)^k x(x-1)\frac{m(m-1)}{x(x-1)}\binom{m-2}{x-2}\binom{m-x}{k}\frac{(m-x-k)^n}{m^n}$$

ให้ $j = x-2,\ a = m-2$ จะได้ $a-j = (m-2)-(x-2) = m-x$

ดังนั้น

$$\sum_{x=2}^{m-1}\sum_{k=0}^{m-x-1} (-1)^k \binom{m-2}{x-2}\binom{m-x}{k}(m-x-k)^n$$

$$= \sum_{j=0}^{a-1}\sum_{k=0}^{a-j-1} (-1)^k \binom{a}{j}\binom{a-j}{k}(a-j-k)^n$$

$$= a^n = (m-2)^n$$

นั่นคือ

$$E[X(X-1)] = \frac{m(m-1)(m-2)^n}{m^n}$$

$$E[X^{(r)}] = \sum_{x=0}^{m-1} x(x-1)\ldots(x-r+1) \sum_{k=0}^{m-x-1} (-1)^k \binom{m}{x}\binom{m-x}{k}\frac{(m-x-k)^n}{m^n}$$

$$= \sum_{x=r}^{m-1}\sum_{k=0}^{m-x-1} (-1)^k x^{(r)}\cdot\frac{m^{(r)}}{x^{(r)}}\binom{m-r}{x-r}\binom{m-x}{k}\frac{(m-x-k)^n}{m^n}$$

$$= \frac{m^{(r)}}{m^n}\sum_{x=r}^{m-1}\sum_{k=0}^{m-x-1} (-1)^k \binom{m-r}{x-r}\binom{m-x}{k}(m-x-k)^n$$

ให้ $j = x-r,\ a = m-r$ จะได้ $a-j = (m-r)-(x-r) = m-x$

ดังนั้น

$$\sum_{x=r}^{m-1}\sum_{k=0}^{m-x-1} (-1)^k \binom{m-r}{x-r}\binom{m-x}{k}(m-x-k)^n$$

$$= \sum_{j=0}^{a-1}\sum_{k=0}^{a-j-1} (-1)^k \binom{a}{j}\binom{a-j}{k}(a-j-k)^n$$

$$= a^n$$

$$= (m-r)^n$$

นั่นคือ

$$E[X^{(r)}] = \frac{m^{(r)}(m-r)^n}{m^n}, \quad r = 1, 2,$$

3.1, 3.3 หา $P(X = x)$, $E(X)$ และ $E(X^{(2)})$ ทุกค่า m และ n

$m = 2, \quad n = 3$

$$\frac{(m-1)^n}{m^{n-1}} = \frac{(2-1)^3}{2^{3-1}} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)^n}{m^n} = \frac{2(2-1)(2-2)^3}{2^3} = 0$$

$$P(X = x) = \sum_{k=0}^{1-x} (-1)^k \binom{2}{x}\binom{2-x}{k}\frac{(2-x-k)^3}{2^3}, \quad x = 0, 1$$

แสดง $P(X = x)$, $E(X)$ และ $E(X^{(2)})$ ด้วยตารางดังนี้

x	P(X = x)	xP(X = x)	x(x - 1) P(X = x)
0	$\frac{3}{4}$	0	0
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0
		$E(X) = \frac{1}{4}$	$E(X^{(2)}) = 0$

แสดงว่า $E(X) = \frac{(m-1)^n}{m^{n-1}}$ และ $E(X^{(2)}) = \frac{m(m-1)(m-2)^n}{m^n}$

$m = 3, \quad n = 2$

$$\frac{(m-1)^n}{m^{n-1}} = \frac{(3-1)^2}{3^{2-1}} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)^n}{m^n} = \frac{3(3-1)(3-2)^2}{3^2} = \frac{2}{3}$$

$$P(X = x) = \sum_{k=0}^{2-x} (-1)^k \binom{3}{x}\binom{3-x}{k}\frac{(3-x-k)^2}{3^2}, \quad x = 1, 2$$

แสดงว่า $P(X = x)$, $E(X)$ และ $E(X^{(2)})$ ด้วยตารางดังนี้

x	$P(X = x)$	$xP(X = x)$	$x(x-1)\,P(X = x)$
1	$\binom{3}{1}\left[\binom{2}{0}\frac{4}{9}-\binom{2}{1}\frac{1}{9}\right] = \frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	0
2	$\binom{3}{2}\binom{1}{0}\frac{1}{9} = \frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
		$E(X) = \frac{4}{3}$	$E(X^{(2)}) = \frac{2}{3}$

แสดงว่า $E(X) = \frac{(m-1)^n}{m^{n-1}}$ และ $E(X^{(2)}) = \frac{m(m-1)(m-2)^n}{m^n}$

$m = 5,\quad n = 5$

$$\frac{(m-1)^n}{m^{n-1}} = \frac{(5-1)^5}{5^{5-1}} = \frac{1,024}{625}$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)^n}{m^n} = \frac{5(5-1)(5-2)^5}{5^5} = \frac{972}{625}$$

$$P(X = x) = \sum_{k=0}^{4-x}(-1)^k\binom{5}{x}\binom{5-x}{k}\frac{(5-x-k)^5}{5^5}, \quad x = 0, 1, 2, 3, 4$$

แสดง $P(X = x)$, $E(X)$ และ $E(X^{(2)})$ ด้วยตารางดังนี้

x	$P(X = x)$	$xP(X = x)$	$x(x-1)\,P(X = x)$
0	$1-\frac{1,024}{625}+\frac{486}{625}-\frac{64}{625}+\frac{1}{625} = \frac{24}{625}$	0	0
1	$\frac{1}{625}(1,024-972+192-4) = \frac{240}{625}$	$\frac{240}{625}$	0
2	$\frac{2}{625}(243-96+3) = \frac{300}{625}$	$\frac{600}{625}$	$\frac{600}{625}$
3	$\frac{2}{625}(32-2)$ 625 60	$\frac{180}{625}$	$\frac{360}{625}$
4	$\frac{1}{625}$ $\frac{1}{625}$	$\frac{4}{625}$	$\frac{12}{625}$
		$E(X) = \frac{1,024}{625}$	$E(X^{(2)}) = \frac{972}{625}$

แสดงว่า $E(X) = \frac{(m-1)^n}{m^{n-1}}$ และ $E(X^{(2)}) = \frac{m(m-1)(m-2)^n}{m^n}$

สรุปได้ว่า

$$E(X) = \frac{(m-1)^n}{m^{n-1}}$$

และ $$E(X^{(2)}) = \frac{m(m-1)(m-2)^n}{m^n}$$

ทุกค่า m และ n

4. แผนกการขายของบริษัทที่รายงานว่าจะส่งพนักงานขาย 4 คน ไปโฆษณาสินค้าของบริษัทในเขตต่าง ๆ 3 เขตด้วยกัน ในอีก 3 เดือนข้างหน้า

   4.1 จงคำนวณความน่าจะเป็นที่

      4.1.1 จะมีพนักงานขายไปที่เขตหนึ่ง 2 คน

      4.1.2 พนักงานขายทั้ง 4 ไปเพียง 2 เขตเท่านั้น

   4.2 จงคำนวณค่าคาดหมายของ

      4.2.1 จำนวนเขตที่พนักงานขายไม่ได้ไปโฆษณาสินค้า

      4.2.2 จำนวนพนักงานขายที่ไปโฆษณาสินค้าในเขตหนึ่ง

เฉลย

4.1.1 P(มีพนักงานขายไปที่เขตหนึ่ง 2 คน) $= \binom{4}{2}\frac{(3-1)^{4-2}}{3^4}$

$= \frac{8}{27}$

4.1.2 P(พนักงานขายทั้ง 4 ไปเพียง 2 เขตเท่านั้น)

= P(มี 1 เขตไม่มีใครไป)

$= \binom{3}{1}\left[\frac{16}{81}-2\left(\frac{1}{81}\right)\right] = \frac{14}{27}$

4.2.1 ค่าคาดหมายของจำนวนเขตที่ไม่มีใครไป $= \frac{(3-1)^4}{3^{4-1}} = \frac{16}{27}$

4.2.2 ค่าคาดหมายของจำนวนพนักงานที่ไปเขตหนึ่ง $= \frac{4}{3}$

5. จากปัญหาการใส่บอล n ลูก ใน m กล่องแบบสุ่ม ให้ X เป็นจำนวนบอลในกล่องหนึ่ง

5.1 ถ้าบอลแต่ละลูกแตกต่างกัน จงพิสูจน์ว่า

5.1.1 $P(X = x+1) = \frac{1}{m-1}\frac{n-x}{x+1}P(X = x), \quad x = 0, 1, 2, \ldots, n$

5.1.2 $E(X) = \frac{n}{m}$

5.2 ถ้าบอลทุกลูกเหมือนกัน จงพิสูจน์ว่า

$$P(X = x) = \frac{\binom{m+n-x-2}{n-x}}{\binom{m+n-1}{n}}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, n$$

เฉลย

X เป็นจำนวนบอลในกล่องหนึ่ง

$$P(X = x) = \binom{n}{x}\frac{(m-1)^{n-x}}{m^n} \quad x = 0, 1, 2, \quad n$$

5.1.1 ดังนั้น

$$P(X = x + \quad = \binom{n}{x+1}\frac{(m-1)^{n-x-1}}{m^n}, \quad x = 0, 1, 2, \quad n$$

$$= \frac{n!}{(x+1)!(n-x-1)!}\cdot\frac{(m-1)^{n-x}}{m^n(m-1)}$$

$$= \frac{n-x}{x+1}\cdot\frac{n!}{x!(n-x)!}\cdot\frac{(m-1)^{n-x}}{m^n(m-1)}$$

$$= \frac{1}{m-1}\cdot\frac{n-x}{x+1}\cdot\binom{n}{x}\frac{(m-1)^{n-x}}{m^n}$$

$$= \frac{1}{m-}\frac{n-x}{x+}P(X = \omega$$

5.1.2 อาศัยคุณสมบัติฟังก์ชันน่าจะเป็น เราจะได้

$$\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}\frac{(m-1)^{n-x}}{m^n} =$$

หรือ $$\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}(m- \quad)^{n-x} = m^n$$

จาก $$E(X) = \sum_{x=0}^{n} x\binom{n}{x}\frac{(m-1)^{n-x}}{m^n}$$

$$= \sum_{x=1}^{n} x\frac{n}{x}\binom{n-1}{x-1}\frac{(m-1)^{n-x}}{m^n}$$

$$= \frac{n}{m^n}\sum_{x-1=0}^{n-1}\binom{n-1}{x-1}(m-1)^{(n-1)-(x-1)}$$

$$= \frac{n}{m^n}\cdot m^{n-1}$$

นั่นคือ $$E(X) = \frac{n}{m}$$

5.2 ใส่บอลที่เหมือนกัน n ลูก ลงใน m กล่องแบบสุ่ม

จะมีจำนวนผลลัพธ์ $= \binom{m+n-1}{n}$

ให้บอล x ลูก อยู่ในกล่องหนึ่ง นั่นคือ การใส่บอล $n-x$ ลูกลงใน $m-1$ กล่องที่เหลือ, $x = 0, 1, 2, \ldots, n$

จะมีจำนวนผลลัพธ์ $= \binom{m+n-x-2}{n-x}$

บอลแต่ละลูกเหมือนกัน จึงมีทางเกิดขึ้นได้หนทางเดียว

ดังนั้น $$P(X = x) = \frac{\binom{m+n-x-2}{n-x}}{\binom{m+n-1}{n}}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, n$$

6. ใส่บอล n ลูก ลงในกล่อง m แบบสุ่ม กำหนดตัวแปรเชิงสุ่มดัชนี X_i ดังนี้

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{ถ้ากล่องที่ } i \text{ ว่าง} \\ 0 & \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

ให้ X เป็นจำนวนกล่องว่าง กล่าวคือ

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_m$$

6.1 หากบอลแต่ละลูกแตกต่างกัน จงพิสูจน์ว่า

$$E(X) = \frac{(m-1)^n}{m^{n-1}}$$

6.2 หากบอลแต่ละลูกเหมือนกัน จงพิสูจน์ว่า

$$E(X) = \frac{m(m-1)}{m+n-1}$$

6.3 ในกรณีที่บอลทุกลูกเหมือนกัน จงเขียนตารางแสดงฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X ใน เมื่อ m = 2, n = 4; m = 4, n = 4 และ m = 5, n = 3

6.4 อาศัยผลที่ได้จากข้อ 6.3 จงหาฐานนิยมของ X และจงแสดงให้เห็นจริงว่า

$$E(X) = \frac{m(m-1)}{m+n-1}$$

ทุกค่าของ m และ n

เฉลย

6.1 ใส่บอล n ลูกที่ต่างกัน ลงใน m กล่อง มีจำนวนผลลัพธ์ m^n

ให้กล่อง i ว่าง i = 1, 2, ..., m นั่นคือ การใส่บอล n ลูกลงใน m − 1 กล่อง

จะมีจำนวนผลลัพธ์ = $(m-1)^n$

ดังนั้น

$$P(\text{กล่องที่ } i \text{ ว่าง}) = \frac{(m-1)^n}{m^n} = P(X_i = 1)\ ,\ i = 1, 2, \ldots, m$$

$$x = X_1 + X_2 + \ldots + X_m$$

$$E(X) = E(X_1 + X_2 + \ldots + X_m)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} E(X_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} P(X_i = 1)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{(m-1)^n}{m^n} = \frac{m(m-1)^n}{m^n} = \frac{(m-1)^n}{m^{n-1}}$$

6.2 ใส่บอลเหมือนกัน n ลูก ลงใน m กล่อง มีจำนวนผลลัพธ์ = $\binom{m+n-1}{n}$

ให้กล่อง i ว่าง i = 1, 2, ..., m นั่นคือ การใส่บอล n ลูก ลงใน m − 1 กล่อง

จะมีจำนวนผลลัพธ์ = $\binom{m+n-2}{n}$

ดังนั้น

$$P(\text{กล่องที่ } i \text{ ว่าง}) = \frac{\binom{m+n-2}{n}}{\binom{m+n-1}{n}} = \frac{\frac{(m+n-2)!}{n!(m-2)!}}{\frac{(m+n-1)!}{n!(m-1)!}}$$

นั่นคือ

$$P(X_i = 1) = \frac{m-1}{m+n-1} = E(X_i) \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$E(X) = E(X_1 + X_2 + X + \ldots + X_m)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} E(X_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{m-1}{m+n-1} = \frac{m(m-1)}{m+n-1}$$

6.3 กรณีที่บอลเหมือนกัน จะได้

$$P(X = x) = \sum_{k=0}^{m-x-1} (-1)^k \left(\text{“II”‘,“]} \right) \frac{\binom{m+n-x-k-1}{n}}{\binom{m+n-1}{n}} \quad , \quad x = 0, 1, 2, \ldots, m-1$$

ตารางแสดง $P(X = x)$ เมื่อ $m = 2,\ n = 4$

x	P(X = x)
0	$1-\binom{2}{1}\frac{1}{\binom{5}{4}} = \frac{3}{5}$
1	$\binom{2}{1}\frac{1}{\binom{5}{4}} = \frac{2}{5}$

ตารางแสดง P(X = x) เมื่อ m = 4, n = 4

x	P(X = x)
0	$1-\binom{4}{1}\frac{\binom{6}{4}}{\binom{7}{4}}+\binom{4}{2}\frac{\binom{5}{4}}{\binom{7}{4}}-\binom{4}{3}\frac{1}{\binom{7}{4}} = \frac{1}{35}$
1	$\binom{4}{1}\left[\binom{3}{0}\frac{\binom{6}{4}}{\binom{7}{4}}-\binom{3}{1}\frac{\binom{5}{4}}{\binom{7}{4}}+\binom{3}{2}\frac{1}{\binom{7}{4}}\right] = \frac{12}{35}$
2	$\binom{4}{2}\left[\binom{2}{0}\frac{5}{\binom{7}{4}}-\binom{2}{1}\frac{1}{\binom{7}{4}}\right] = \frac{18}{35}$
3	$\binom{4}{3}\binom{1}{0}\frac{1}{\binom{7}{4}} = \frac{4}{35}$

ตารางแสดง P(X = x) เมื่อ m = 5, n = 3

x	P(X = x)
2	$\binom{5}{2}\left[\binom{3}{0}\frac{\binom{5}{3}}{\binom{7}{3}}-\binom{3}{1}\frac{\binom{4}{3}}{\binom{7}{3}}+\binom{3}{2}\frac{1}{\binom{7}{3}}\right] = \frac{2}{7}$
3	$\binom{5}{3}\left[\binom{2}{0}\frac{4}{\binom{7}{3}}-\binom{2}{1}\frac{1}{\binom{7}{3}}\right] = \frac{4}{7}$
4	$\binom{5}{4}\binom{1}{0}\frac{1}{\binom{7}{3}} = \frac{1}{7}$

6.4 ผลจาก 6.2 เราจะได้

ฐา	m = 2, n = 4	m = 4, n = 4	m = 5, n = 3
	x = 0	x = 2	x = 3

เปรียบเทียบค่าคาดหมายของ X กับ $\frac{m(m-1)}{m+n-1}$ ตามค่า m และ n

	ค่าคาดหมายของ X	$\frac{m(m-1)}{m+n-1}$
m = 2, n = 4	$0+\frac{12}{}+\frac{36}{}+\frac{12}{} = \frac{2}{5}$	$\frac{2(2-1)}{2+4-1} = \frac{2}{5}$
m = 4, n = 4		$\frac{4(4-1)}{4+4-1}$ $\frac{12}{7}$
m = 5, n = 3	$\frac{4}{7}+\frac{12}{7}+\frac{4}{7}$ 20	$\frac{5(5-1)}{5+3-1}$ $\frac{20}{7}$

แสดงว่า $E(X) = \frac{m(m-1)}{m+n-1}$ ทุกค่า m และ n

7. หัวหน้าคนงานมีลูกน้อง 6 คน ซึ่งเขาจะต้องแบ่งงาน 3 ชิ้นให้ทำ เขาได้เขียนชื่องานแต่ละชิ้นในบัตรแต่ละใบ แล้วใส่บัตรทั้งสามในหมวกให้ลูกน้องแต่ละคนมาหยิบบัตร 1 ใบจากหมวกทีละคน เมื่อคนที่ 1 หยิบได้บัตรใดให้บันทึกผลที่ได้เอาไว้ แล้วคืนบัตรลงในหมวกตามเดิม คนอื่น ๆ อีก 5 คนต่างก็ได้งานทำในวิธีการเดียวกัน ถือว่าลูกน้องทุกคนเหมือนกันเมื่อเทียบกับงานแต่ละชิ้น

7.1 จงคำนวณความน่าจะเป็นที่จะแบ่งงานให้ 2 คนทำชิ้นแรก 3 คนทำงานชิ้นที่สอง ส่วนงานชิ้นที่สามมีคนทำ 1 คน

7.2 ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่งานชิ้นแรกไม่มีใครทำ และ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มดัชนีของ A จงหาฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ X

เฉลย

คน 6 คน เลือกงานทำจากงาน 3 ชิ้น

$$\text{จำนวนผลลัพธ์} = \binom{6+3-1}{6} = \frac{8\times 7}{2} = 28$$

7.1 เหตุการณ์ที่มี 2 คนได้ชิ้นแรก 3 คนได้ชิ้นที่สอง 1 คนได้ชิ้นที่สาม เกิดขึ้นได้กรณีเดียว

ดังนั้น P(2 คนได้ชิ้นแรก 3 คนได้ชิ้นที่สอง 3 คนได้ชิ้นที่สาม) = $\frac{1}{28}$

7.2 A = เหตุการณ์ที่งานชิ้นแรกไม่มีใครทำ นั่นคือ การให้คน 6 คนเลือกงาน 2 ชิ้นที่เหลือ

ดังนั้น จำนวนผลลัพธ์ของ A $= \binom{6+2-1}{6} = 7$

จะได้ $P(A) = \frac{7}{28} = \frac{1}{4}$

X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มดัชนีของ A

ดังนั้น $P(X = 1) = \frac{1}{4}$

$P(X = 0) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

จะได้ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ X

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \frac{3}{4} & , 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & , x \geqslant 1 \end{cases}$$

8. สมมติว่ามีบอล n ลูก ใส่ในกล่อง m กล่องแบบสุ่ม และ r เป็นเลขจำนวนเต็มบวก $r \leqslant m$ ให้ X เป็นจำนวนบอลที่อยู่ใน r กล่อง ที่กำหนดไว้ให้

8.1 จงพิสูจน์ว่า

(1) $P(X = x) = \binom{n}{x}\frac{r^x(m-r)^{n-x}}{m^n}$, $x = 0, 1, 2, \ldots, n$

(2) $E(X) = \frac{rn}{m}$

8.2 จงเขียนตารางแสดงฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X เมื่อ $m = 5,\ n = 5,\ r = 2$

8.3 อาศัยผลที่ได้จากข้อ 8.2 จงคำนวณค่าของ $P(A|B)$

เมื่อ $A = \{x : x = 0, 1, 2\}$ และ $B = \{x : 1 \leqslant x < 4\}$

8.4 เมื่อ $m = 6,\ n = 4$ และ $r = 3$ จงหาค่าของมัธยฐานของ X และจงแสดงให้เห็นจริงว่า $E(X) = \frac{rn}{m}$

8.1 ใส่บอล n ลูกลงในกล่อง m กล่องแบบสุ่ม มีจำนวนผลลัพธ์ $= m^n$ ให้บอล x ลูกแรกอยู่ใน r กล่อง $r \leqslant m$ นั่นคือ การใส่บอล x ลูกแรก $(x = 0, 1, \ldots, n)$ ลงใน r กล่อง และใส่บอลที่เหลือ $n-x$ ลูก ลงใน $m-r$ กล่องที่เหลือ

จำนวนผลลัพธ์ $= r^x(m-r)^{n-x}$, $x = 0, 1, 2, \ldots, n$

แต่การใส่บอล x ลูกลงใน r กล่อง และ $n-x$ ลูกลงใน $m-r$ กล่องที่เหลือ มีทางเกิดขึ้นได้ $\binom{n}{x}$ หนทาง

ดังนั้น จำนวนผลลัพธ์ของการใส่บอล x ลูก ลงใน r กล่อง $r \leqslant m$ จะเท่ากับ

$$\binom{n}{x} r^x(m-r)^{n-x} , \quad x = 0, 1, 2, \ldots, n$$

ให้ X = จำนวนบอลที่อยู่ใน r กล่องที่กำหนดไว้
จะได้

$$(1) \quad P(X = x) = \binom{n}{x}\frac{r^x(m-r)^{n-x}}{m^n} , \quad x = 0, 1, 2, \ldots, n$$

อาศัยคุณสมบัติของฟังก์ชันน่าจะเป็น เราจะได้

$$\sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x}\frac{r^x(m-r)^{n-x}}{m^n} = $$

หรือ

$$\sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} r^x(m-r)^{n-x} = m^n$$

จาก

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x=0}^{n} x\binom{n}{x}\frac{r^x(m-r)^{n-x}}{m^n} \\ &= \sum_{x=1}^{n} x\frac{n}{x}\binom{n-1}{x-1}\frac{r^x(m-r)^{n-x}}{m^n} \\ &= \frac{nr}{m^n}\sum_{x-1=0}^{n-1}\binom{n-1}{x-1} r^{x-1}(m-r)^{(n-1)-(x-1)} \\ &= \frac{nr}{m^n} m^{n-1} \qquad \text{ผลจาก (1)} \end{aligned}$$

นั่นคือ

$$(2) \quad E(X) = \frac{rn}{m}$$

8.2 เมื่อ $m = n = 5, \ r = 2$ จะได้ฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X ดังตารางต่อไปนี้

x	$P(X = x) = \binom{5}{x}\frac{2^x(3)^{5-x}}{5^5}$
0	$\binom{5}{0}\frac{2^0(3)^5}{3,125} = \frac{243}{3,125}$
1	$\binom{5}{1}\frac{2(3)^4}{3,125} = \frac{162}{625}$
2	$\binom{5}{2}\frac{2^2(3)^3}{3,125} = \frac{216}{625}$
3	$\binom{5}{3}\frac{2^3(3)^2}{3,125} = \frac{144}{625}$
4	$\binom{5}{4}\frac{2^4(3)}{3,125} = \frac{48}{625}$
5	$\binom{5}{5}\frac{2^5(3)^0}{3,125} = \frac{32}{3,125}$

8.3 จากฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X ใน 8.2

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(1 \leqslant X \leqslant 2)}{P(1 \leqslant X < 4)}$$

$$= \frac{P(X = 1) + P(X = 2)}{P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)}$$

จะได้ $$P(A|B) = \frac{\frac{162}{625} + \frac{216}{625}}{\frac{162}{625} + \frac{216}{625} + \frac{144}{625}} = \frac{21}{29}$$

8.4 เมื่อ $m = 6, \ n = 4, \ r = 3$ จะได้

$$P(X = x) = \binom{4}{x}\frac{3^x(6-3)^{4-x}}{6^4} = \binom{4}{x}\frac{1}{16}, \quad x = 0, 1, 2, 3, 4$$

แสดงค่า $P(X = x)$, $xP(X = x)$ และ $P(X \leqslant x)$ ในตารางดังนี้

x	0	1	2	3	4	
$P(X = x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$	ผลรวม
$xP(X = x)$	0	$\frac{4}{16}$	$\frac{12}{16}$	$\frac{12}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{32}{16}$
$P(X \leqslant x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{11}{16}$	$\frac{15}{16}$	1	

แสดงว่า มัธยฐานของ $X = 2$

และ $$E(X) = \frac{32}{16} = 2$$

$$\frac{rn}{m} = \frac{3(4)}{6} = 2$$

นั่นคือ $$E(X) = \frac{rn}{m}$$

3.3 การสุ่มตัวอย่างจากประชากรที่มีสองจำพวก (SAMPLING FROM DICHOTOMOUS POPULATION)

3.3.1 การแจกแจงของจำนวนบอลสีขาวที่ได้จากการสุ่ม

สุ่มบอลทีละลูกจากกล่องที่มีลูกบอล N ลูก ให้ได้จำนวนรวมกัน n ลูก จะมีจำนวนผลลัพธ์เท่ากับ

N^n ถ้าเป็นการสุ่มแบบใส่กลับคืน

$N^{(n)}$ ถ้าเป็นการสุ่มแบบไม่ใส่กลับคืน

จากกล่องที่มีบอล N ลูก เป็นสีขาว M ลูก ที่เหลือ $N-M$ ลูกเป็นสีดำ สุ่มตัวอย่างบอลจากกล่องมา n ลูก

ให้ตัวแปรเชิงสุ่ม X = จำนวนบอลสีขาวที่ได้จากการสุ่ม

กรณีของการสุ่มแบบใส่กลับคืน เราจะได้

$$P(X = x) = \binom{n}{x}\frac{M^x(N-M)^{n-x}}{N^n}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, n$$

เนื่องจาก $P(X = x)$ เป็นฟังก์ชันน่าจะเป็นของตัวแปรเชิงสุ่ม X ดังนั้น อาศัยคุณสมบัติของฟังก์ชันน่าจะเป็น เราจะได้

$$\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}\frac{M^{x}(N-M)^{n-x}}{N^{n}} = 1$$

ผลที่ได้ตามมาก็คือ

$$\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}a^{x}b^{n-x} = (a+b)^{n} \qquad \text{..........(3.6)}$$

$$\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x} = 2^{n}$$

และ $$\sum_{x=0}^{n}(-1)^{x}\binom{n}{x} = 0$$

กรณีการสุ่มแบบไม่ใส่กลับคืน เราจะได้

$$P(X = x) = \binom{n}{x}\frac{M^{(x)}(N-M)^{(n-x)}}{N^{(n)}}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, n$$

อาศัยคุณสมบัติฟังก์ชันน่าจะเป็น จะได้

$$\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}\frac{M^{(x)}(N-M)^{(n-x)}}{N^{(n)}} = 1$$

ผลที่ตามมาก็คือ

$$\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}a^{(x)}b^{(n-x)} = (a+b)^{(n)}$$

หรือ $$\sum_{x=0}^{n}\binom{a}{x}\binom{b}{n-x} = \binom{a+b}{n}$$

ไม่ว่าจะเป็นการสุ่มแบบใส่กลับ หรือสุ่มแบบไม่ใส่กลับ ค่าคาดหมายของจำนวนบอลสีขาวจะเท่ากับอัตราส่วนระหว่างผลคูณของจำนวนบอลสีขาวและจำนวนครั้งการสุ่ม กับจำนวนประชากรเสมอ กล่าวคือ

$$E(X) = \frac{nM}{N}$$

ถ้าเรากำหนดตัวแปรเชิงสุ่ม X เสียใหม่ เป็น

X = จำนวนครั้งของการสุ่มจนได้บอลสีขาว

นั่นก็หมายความว่า การชักตัวอย่างไม่ได้กำหนดขนาดของตัวอย่าง แต่เป็นการชักตัวอย่างอาจเป็น 1 ครั้ง หรือ 2 ครั้ง หรือกี่ครั้งก็แล้วแต่ ขอแต่เพียงว่าเมื่อได้สีขาวเราก็หยุดการสุ่ม

กรณีของการสุ่มแบบใส่กลับคืน เราจะได้

$$P(X = x) = \frac{(N-M)^{x-1}M}{N^x}, \quad x = 1, 2, \ldots$$

อาศัยคุณสมบัติของฟังก์ชันน่าจะเป็นของตัวแปรเชิงสุ่ม จะได้

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{(N-M)^{x-1}M}{N^x} = , \qquad \ldots\ldots\ (3.7)$$

ผลที่ตามมาก็คือ

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^k = \frac{b}{b-a} \qquad ..(3.8)$$

ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่สุ่มได้ x ครั้งแรกเป็นสีดำทั้งหมด ซึ่งเรียกว่า tail probabilities กำหนดไว้โดย

$$P(X > x) = \frac{(N-M)^x}{N^x}, \quad x = 1, 2, \ldots \qquad \ldots\ldots\ (3.9)$$

หรือ

$$F(x) = \sum_{k=1}^{x} \frac{(N-M)^{k-1}M}{N^k} = 1 - \frac{(N-M)^x}{N^x}, \quad x = 1, 2, \ldots$$

ค่าคาดหมายของการรอคอยจนได้บอลสีขาว จะเท่ากับอัตราส่วนระหว่างจำนวนบอลทั้งหมดกับจำนวนบอลสีขาว กล่าวคือ

$$E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{(N-M)^{x-1}M}{N^x} = \frac{N}{M}$$

กรณีการสุ่มตัวอย่างแบบไม่ใส่กลับคืน เราจะได้

$$P(X = x) = \frac{(N-M)^{(x-1)}M}{N^{(x)}}, \quad x = 1, 2, \ldots N-M+1$$

อาศัยคุณสมบัติของฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X จะได้

$$\sum_{x=1}^{N-M+1} \frac{(N-M)^{(x-1)}M}{N^{(x)}} = 1 \qquad \text{..........(3.10)}$$

ผลที่ได้ก็คือ

$$\sum_{k=0}^{a} \frac{a^{(k)}}{b^{(k)}} = \frac{b+1}{b-a+1} \qquad \text{..........(3.11)}$$

tail probabilities ของ X จะกำหนดได้โดย

$$P(X > x) = \frac{(N-M)^{(x)}}{N^{(x)}}, \quad x = 1, 2, \ldots, N-M+1 \qquad \text{..........(3.12)}$$

หรือ

$$F(x) = \sum_{k=1}^{x} \frac{(N-M)^{(k-1)}M}{N^{(k)}} = 1 - \frac{(N-M)^{(x)}}{N^{(x)}}, \quad x = 1, 2, \ldots, N-M+1$$

ค่าคาดหมายของ X

$$E(X) = \sum_{x=1}^{N-M+1} x\frac{(N-M)^{(x-1)}M}{N^{(x)}} = \frac{N+1}{M+1}$$

เฉลยแบบฝึกหัดที่ 3.3

1. สุ่มบอล n ลูก จากกล่องที่มีบอลสีขาว M ลูก และสีดำ N−M ลูก
   ก) แบบใส่กลับ
   ข) แบบไม่ใส่กลับ

กำหนด A_i เป็นเหตุการณ์ที่สุ่มครั้งที่ i ได้สีขาว, $i = 1, 2, \ldots, n$

X เป็นจำนวนบอลสีขาวที่ได้จากการสุ่มสองครั้งแรก

จงหา

1.1 $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)$

1.2 ฟังก์ชันน่าจะเป็นและค่าคาดหมายของ X

เฉลย

A_i = สุ่มครั้งที่ i ได้สีขาว, $i = 1, 2, \ldots, n$

นั่นก็คือ การสุ่มบอล $n-1$ ลูก จากกล่องที่มีบอล N ลูก (ใส่กลับคืน) หรือ $N-1$ ลูก (ไม่ใส่กลับคืน) จะมีจำนวนผลลัพธ์

$$= \begin{cases} MN^{n-1} & \text{ใส่กลับคืน} \\ M(N-1)^{(n-1)} & \text{ไม่ใส่กลับคืน} \end{cases}$$

จะได้

$$P(A_i) = \begin{cases} \dfrac{MN^{n-1}}{N^n} = \dfrac{M}{N} & \text{ใส่กลับคืน} \\[2ex] \dfrac{M(N-1)^{(n-1)}}{N^{(n)}} = \dfrac{M}{N} & \text{ไม่ใส่กลับคืน} \end{cases}$$

$\bigcap\limits_{j=1}^{k} A_{ij}$ = สุ่มครั้งที่ $i_1, i_2, \ldots, i_k$ ได้สีขาว, $k \geqslant 2$

นั่นก็คือ การสุ่ม k ลูกที่กำหนดจากบอลสีขาว M ลูก และสุ่มบอล $n-k$ ลูก จากกล่องที่มีบอล N ลูก (แบบใส่กลับ) หรือ $N-k$ ลูก (แบบไม่ใส่กลับ) จะมีผลลัพธ์

$$= \begin{cases} M^k N^{n-k} & \text{ใส่กลับคืน} \\ M^{(k)}(N-k)^{(n-k)} & \text{ไม่ใส่กลับคืน} \end{cases}$$

จะได้

$$P\left(\sum_{j=1}^{k} A_{ij}\right) = \begin{cases} \dfrac{M^k N^{n-k}}{N^n} = \dfrac{M^l}{N^k} & \text{ใส่กลับคืน} \\[2ex] \dfrac{M^{(k)}(N-k)^{(n-k)}}{N^{(n)}} = \dfrac{M^{(k)}}{N^{(k)}} & \text{ไม่ใส่กลับคืน} \end{cases}$$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = \binom{4}{1}P(A_i) - \binom{4}{2}P(A_iA_j) + \binom{4}{3}P(A_iA_jA_k) - P(A_1A_2A_3A_4)$$

ให้ X_i เป็นตัวแปรเชิงสุ่มดัชนีของ A_i, $i = 1, 2$

และ $X = X_1 + X_2$ = จำนวนบอลสีขาวจากการสุ่ม 2 ครั้งแรก

จะได้ $$P(X = x) = \sum_{k=0}^{2-x} (-1)^{k-x}\binom{x+k}{x} S_{x+k}, \quad S_{x+k} = \binom{2}{x+k} P\left(\bigcap_{j=1}^{x+k} A_{ij}\right)$$

$$E(X) = E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) = P(A_1) + P(A_2)$$

ก) แบบใส่กลับคืน

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = \frac{4M}{N} - \frac{6M^2}{N^2} + \frac{4M^3}{N^3} - \frac{M^4}{N^4}$$

ฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X กำหนดได้โดย

$$P(X = 0) = 1-\binom{2}{1}\frac{M}{N}+\binom{2}{2}\frac{M^2}{N^2} = \frac{(N-M)^2}{N^2}$$

$$P(X = 1) = \binom{1}{1}\binom{2}{1}\frac{M}{N}-\binom{2}{1}\binom{2}{2}\frac{M^2}{N^2} = \frac{2M(N-M)}{N^2}$$

$$P(X = 2) = \binom{2}{2}\frac{M^2}{N^2} = \frac{M^2}{N^2}$$

ค่าคาดหมายของ X

$$E(X) = \frac{M}{N}+\frac{M}{N} = \frac{2M}{N}$$

ข) แบบไม่ใส่กลับ

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = \frac{4M}{N}-\frac{6M^{(2)}}{N^{(2)}}+\frac{4M^{(3)}}{N^{(3)}}-\frac{M^{(4)}}{N^{(4)}}$$

ฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X กำหนดได้โดย

$$P(X = 0) = 1-\frac{2M}{N}+\frac{M^{(2)}}{N^{(2)}}$$

$$P(X = 1) = \frac{2M}{N}-\frac{2M^{(2)}}{N^{(2)}}$$

$$P(X = 2) = \frac{M^{(2)}}{N^{(2)}}$$

ค่าคาดหมายของ X

$$E(X) = \frac{2M}{N}$$

2. สร้างเลข 3 หลักจากเลขจำนวนเต็มบวกที่มีค่าไม่เกิน 9 โดยให้เลขแต่ละหลัก
   ก) ซ้ำกันได้
   ข) แตกต่างกัน

2.1 ให้ A_i เป็นเหตุการณ์ที่เลขหลัก i เป็นเลขคู่, i = 1, 2, 3, (i = 1, 2, 3 หมายถึงหลักร้อย หลักสิบ และหลักหน่วย ตามลำดับ) และ X เป็นจำนวนเลขคู่ในเลข 3 หลัก กล่าวคือ $X = X_1+X_2+X_3$ จงหา

2.1.1 ฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X

2.1.2 ความน่าจะเป็นที่ผลบวกของตัวเลขทั้งสามเป็นเลขคู่

2.1.3 ความน่าจะเป็นที่ผลคูณของเลข 3 หลักเป็นจำนวนคู่

2.1.4 ความน่าจะเป็นของเลขคู่

2.2 ให้ X เป็นจำนวนตัวเลขที่เป็นผลคูณของ 4 จงหาฟังก์ชันน่าจะเป็นและค่าคาด-หมายของ X

เฉลย

2.1 จำนวนเลข 3 หลักที่สร้างจากเลข 9 ตัว $= \begin{cases} 9^3 & \text{ซ้ำกัน} \\ 9^{(3)} & \text{แตกต่างกัน} \end{cases}$

A_i = เหตุการณ์ที่เลขหลัก i (i = 1, 2, 3) เป็นเลขคู่ นั่นคือ การเลือกเลข 1 ตัว จากเลขคู่ 4 ตัว อีก 2 ตัวไม่กำหนด

$$\text{จำนวนผลลัพธ์ของ } A_i = \begin{cases} 4(9^2) & \text{ซ้ำกัน} \\ 4(8^{(2)}) & \text{แตกต่างกัน} \end{cases}$$

$$P(A_i) = \begin{cases} \dfrac{4(9^2)}{9^3} = \dfrac{4}{9} & \text{ซ้ำกัน} \\[2ex] \dfrac{4(8^{(2)})}{9^{(3)}} = \dfrac{4}{9} & \text{แตกต่างกัน} \end{cases}$$

A_iA_j จะเป็นเหตุการณ์ที่เลือกเลข 2 ตัว จากเลขคู่ 4 ตัว ส่วนเลขที่เหลือไม่กำหนด

$$\text{จำนวนผลลัพธ์ของ } A_iA_j = \begin{cases} 4^2(9) & \text{ซ้ำกัน} \\ 4^{(2)}(7) & \text{แตกต่างกัน} \end{cases}$$

$$P(A_iA_j) = \begin{cases} \dfrac{4^2(9)}{9^3} = \dfrac{4^2}{9^2} & \text{ซ้ำกันได้} \\[2ex] \dfrac{4^{(2)}(7)}{9^{(3)}} = \dfrac{4^{(2)}}{9^{(2)}} & \text{แตกต่างกัน} \end{cases}$$

$A_1A_2A_3$ = เลขคู่ทั้ง 3 หลัก นั่นคือ การเลือกเลข 3 ตัว จากเลขคู่ 4 ตัว

$$\text{จำนวนผลลัพธ์ของ } A_1A_2A_3 = \begin{cases} 4^3 & \text{ซ้ำกันได้} \\ 4^{(3)} & \text{แตกต่างกัน} \end{cases}$$

$$P(A_1A_2A_3) = \begin{cases} \dfrac{4^3}{9^3} & \text{ซ้ำกันได้} \\[2ex] \dfrac{4^{(3)}}{9^{(3)}} & \text{แตกต่างกัน} \end{cases}$$

$$X = X_1 + X_2 + X_3 = \text{จำนวนเลขคู่ในเลข 3 หลัก}$$

ก) ซ้ำกันได้

$$P(X = x) = \sum_{k=0}^{3-x} (-1)^k \binom{x+k}{x} \binom{3}{x+k} \frac{4^{x+k}}{9^{x+k}} \quad , \quad x = 0, 1, 2, 3$$

$$= \binom{3}{x}\frac{4^x}{9^x} \sum_{k=0}^{3-x} \binom{3-x}{k}\left(\frac{-4}{9}\right)^k$$

$$= \binom{3}{x}\frac{4^x}{9^x}\left(-\frac{4}{9}+1\right)^{3-x}$$

ฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X ก็คือ

$$P(X = x) = \binom{3}{x}\frac{4^x 5^{3-x}}{9^3} \quad , \quad x = 0, 1, 2, 3 \qquad \text{.......... (2.1.1)}$$

ความน่าจะเป็นที่ผลบวกของตัวเลขทั้ง 3 เป็นเลขคู่

$$= P(X = 1) + P(X = 3)$$

$$= \binom{3}{1}\frac{4(5)^2}{9^3} + \frac{4^3}{9^3} = \frac{364}{729} \qquad \text{.......... (2.1.2)}$$

ความน่าจะเป็นที่ผลคูณของเลข 3 หลักเป็นจำนวนคู่

$$= P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$$

$$= 1 - \binom{3}{0}\frac{4^0(5^{3-0})}{9^3} = \frac{604}{729} \qquad \text{.......... (2.1.3)}$$

ความน่าจะเป็นของเลขคู่ $= P(A_3) = \frac{4}{9}$ .... (2.1.4)

2.2 X เป็นตัวเลขที่เป็นผลคูณของ 4

$x = 0, 1, 2, 3$

ฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X

$$P(X = x) = \binom{3}{x}\frac{2^x 7^{3-x}}{9^3} \quad , \quad x = 0, 1, 2, 3$$

ค่าคาดหมายของ X

$$E(X) = \sum_{x=0}^{3} x\binom{3}{x}\frac{2^x 7^{3-x}}{9^3}$$

$$= \frac{3(2)}{9^3}\sum_{x=1}^{3}\binom{2}{x-1}2^{x-1}7^{2-(x-1)}$$

$$= \frac{3(2)}{9^3}(9^2) = \frac{2}{3}$$

ข) แตกต่างกัน

$$P(X = x) = \binom{3}{x}\sum_{k=0}^{3-x}(-1)^k\binom{3-x}{k}\frac{4^{(x+k)}}{9^{(x+k)}} \quad , \quad x = 0, 1, 2, 3$$

จะได้

$$P(X = 0) = \binom{3}{0}\left[1-\binom{3}{1}\frac{4}{9}+\binom{3}{2}\frac{4^{(2)}}{9^{(2)}}-\frac{4^{(3)}}{9^{(3)}}\right] = \frac{5^{(3)}}{9^{(3)}} = \frac{5}{42}$$

$$P(X = 1) = \binom{3}{1}\left[\binom{2}{0}\frac{4}{9}-\binom{2}{1}\frac{4^{(2)}}{9^{(2)}}+\binom{2}{2}\frac{4^{(3)}}{9^{(3)}}\right] = \binom{3}{1}\frac{4\cdot 5^{(2)}}{9^{(3)}} = \frac{20}{42}$$

$$P(X = 2) = \binom{3}{2}\left[\binom{1}{0}\frac{4^{(2)}}{9^{(2)}}-\binom{1}{1}\frac{4^{(3)}}{9^{(3)}}\right] = \binom{3}{2}\frac{4^{(2)}\cdot 5}{9^{(3)}} = \frac{15}{42}$$

$$P(X = 3) = \binom{3}{3}\frac{4^{(3)}}{9^{(3)}} = \frac{2}{42}$$

ดังนั้น ฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X

$$P(X = x) = \binom{3}{x}\frac{4^{(x)}\cdot 5^{(3-x)}}{9^{(3)}} \quad , x = 0, 1, 2, 3 \qquad \text{..........(2.1.1)}$$

ความน่าจะเป็นที่ผลบวกของตัวเลขทั้ง 3 เป็นเลขคู่

$$= P(X = 1)+P(X = 3)$$

$$= \frac{20}{42}+\frac{2}{42} = \frac{11}{21} \qquad \text{..........(2.1.2)}$$

ความน่าจะเป็นที่ผลคูณของเลข 3 หลักเป็นเลขคู่

$$= P(X = 1)+P(X = 2)+P(X = 3)$$

$$= \frac{20}{42}+\frac{15}{42}+\frac{2}{42} = \frac{37}{42} \qquad \text{..........(2.1.3)}$$

ความน่าจะเป็นของเลขคู่ $= \frac{4}{9}$ .... (2.1.4)

2.2 ฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X

$$P(X = x) = \binom{3}{x}\frac{2^{(x)}7^{(3-x)}}{9^{(3)}} \quad , \quad x = 0, 1, 2$$

ค่าคาดหมายของ X

$$E(X) = \sum_{x=0}^{2} x\binom{3}{x}\frac{2^{(x)}7^{(3-x)}}{9^{(3)}}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

3. กล่องใบหนึ่งบรรจุบอลสีขาว 24 ลูก และสีดำ 8 ลูก สุ่มบอลจากกล่องนี้แบบใส่กลับ n ลูก, $n \leqslant 8$ ให้ X เป็นจำนวนบอลสีขาวที่ได้จากการสุ่ม

3.1 จงพิสูจน์ว่า $P(X = x+1) = \frac{3\cdot(n-x)}{(x+1)}\cdot P(X = x)$

3.2 จงหาฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ X

X = จำนวนบอลสีขาวที่ได้จากการสุ่ม

จะได้

$$P(X = x) = \binom{n}{x}\frac{24^{x}8^{n-x}}{32^{n}} \quad , x = 0, 1, 2, \ldots, n$$

ดังนั้น

3.1 $$P(X = x+1) = \binom{n}{x+1}\frac{24^{x+1}8^{n-x-1}}{32^{n}}$$

$$= \frac{n!}{(x+1)!(n-x-1)!}\cdot\frac{(n-x)}{(n-x)}\cdot\frac{24^{x}\cdot 8^{n-x}}{32^{n}}\cdot\frac{24}{8}$$

$$= \frac{3(n-x)}{x+1}\cdot\binom{n}{x}\frac{24^{x}8^{n-x}}{32^{n}}$$

แสดงว่า

$$P(X = x+1) = \frac{3(n-x)}{x+1}P(X = x)$$

3.2 $$F(x) = \sum_{k=0}^{x}\binom{n}{k}\frac{24^{k}8^{n-k}}{32^{n}} \quad , \quad x = 0, 1, \ldots, n$$

4. ในรายการทายปัญหาชิงรางวัล เลือกผู้เข้าแข่งขัน 5 คน จากจำนวนผู้เข้าชมซึ่งเป็นเด็ก 20 คน และผู้ใหญ่ 10 คน โดยวิธีจับฉลาก จงคำนวณหา

4.1 ความน่าจะเป็นที่จะได้ผู้เข้าแข่งขันเป็นเด็ก 3 คน

4.2 ความน่าจะเป็นที่จะได้ผู้เข้าแข่งขันคนที่ 3 เป็นเด็ก ภายใต้เงื่อนไขว่ามีเด็กแข่งขัน 3 คน

4.3 ความน่าจะเป็นที่จะได้ผู้เข้าแข่งขันเป็นเด็ก 3 คน กำหนดว่าจะต้องมีเด็กอย่างน้อยที่สุด 2 คน

4.4 ค่าคาดหมายของจำนวนเด็กที่เข้าแข่งขัน

เฉลย ให้ X = จำนวนเด็กที่เข้าแข่งขัน

จะได้

$$P(X = x) = \binom{5}{x}\frac{20^{(x)}10^{(5-x)}}{30^{(5)}} \quad , \quad x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

4.1 ความน่าจะเป็นที่จะได้ผู้เข้าแข่งขันเป็นเด็ก 3 คน

$$= P(X = 3)$$

$$= \binom{5}{3}\frac{20^{(3)}10^{(2)}}{30^{(5)}} = 0.36$$

4.2 ความน่าจะเป็นที่ได้ผู้เข้าแข่งขันคนที่ 3 เป็นเด็ก ภายใต้เงื่อนไขว่ามีเด็ก 3 คน

$$= \frac{P(\text{มีเด็ก 3 คน และคนที่ 3 เป็นเด็ก})}{P(X = 3)}$$

$$= \frac{\binom{4}{2}20^{(3)}10^{(2)}}{\binom{5}{3}20^{(3)}10^{(2)}} = 0.6$$

4.3 ความน่าจะเป็นที่ได้เด็ก 3 คน กำหนดว่ามีเด็กอย่างน้อย 2 คน

$$= \frac{P(X = 3)}{P(X \geqslant 2)}$$

$$= \frac{0.36}{1-\frac{10^{(5)}}{30^{(5)}}-5\frac{20\cdot 10^{(4)}}{30^{(5)}}} = 0.37$$

4.4 ค่าคาดหมายของจำนวนเด็กที่เข้าแข่งขัน

$$= E(X) = 5\cdot\frac{20}{30} = 3.3$$

5. โรงงานผลิตลูกขนไก่ในแต่ละครั้ง 100 ลูก พบว่าทุกครั้งที่ผลิตจะมีเสีย 8% เสมอ สุ่มลูกขนไก่มาตรวจสอบแบบใส่กลับ 5 ลูก จงหา

5.1 ค่าคาดหมายของจำนวนลูกขนไก่ที่เสีย

5.2 ความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกเสีย 1 ลูก กำหนดว่ามีลูกเสียอย่างมากที่สุด 2 ลูก

5.3 ความน่าจะเป็นที่ได้ลูกที่ 4 เสียเป็นลูกแรก

5.4 ให้ X เป็นจำนวนครั้งของการสุ่มจนได้ลูกขนไก่เสียเป็นลูกแรก จงหาฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X

เฉลย

ให้ X = จำนวนลูกขนไก่ที่เสีย

จะได้

$$P(X = x) = \binom{5}{x}\frac{8^x 92^{5-x}}{100^5}, \quad x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

$$E(X) = \frac{5\times 8}{100} = 0.4 \qquad \text{..........(5.1)}$$

$$P(X = 1|X \leqslant 2) = \frac{P(X = 1)}{P(X \leqslant 2)}$$

$$= \frac{5(8)92^4}{92^5 + 5(8)92^4 + 10(8^2)92^3} = 0.288 \qquad \text{..........(5.2)}$$

$$P(\text{ลูกที่ 4 เสียเป็นลูกแรก}) = \frac{92^3(8)}{100^4} = 0.06 \qquad \text{..........(5.3)}$$

5.4 ให้ X = จำนวนครั้งการสุ่มจนได้ลูกขนไก่เสียเป็นลูกแรก

จะได้

$$P(X = x) = \frac{8\cdot 92^{x-1}}{100^x}, \quad x = 1, 2, 3, \ldots$$

6. องค์การแห่งหนึ่งมีคนงาน 50 คน ในจำนวนนี้เป็นคนงานที่มีทักษะ 10 คน เลือกคนงานมาโดยวิธีสุ่ม จงหาความน่าจะเป็นที่จะสุ่มคนงานมา

6.1 อย่างน้อยที่สุด 4 คน

6.2 ไม่เกิน 5 คน กำหนดว่าสุ่มมาแล้วอย่างน้อยที่สุด 4 คน

6.3 อย่างน้อยที่สุด 4 คน กำหนดว่าสุ่มมาแล้วไม่เกิน 5 คน

จึงจะได้คนงานที่มีทักษะเป็นคนแรก

เฉลย X = จำนวนคนงานที่ถูกเลือกแบบสุ่ม จนได้คนงานที่มีทักษะ

จะได้

$$P(X = x) = \frac{10 \cdot 40^{(x-1)}}{50^{(x)}} \quad , \quad x = 1, 2, 3, \ldots, 41$$

6.1 $$P(X \geqslant 4) = \sum_{x=4}^{41} \frac{10 \cdot 40^{(x-1)}}{50^{(x)}} = \frac{10 \cdot 40^{(3)}}{50^{(4)}} \sum_{k=0}^{37} \frac{37^{(k)}}{46^{(k)}}$$

$$= \frac{10 \cdot 40^{(3)}}{50^{(4)}} \cdot \frac{46+1}{46-37+1} = \frac{741}{1,470}$$

6.2 $$P(X \leqslant 5 | X \geqslant 4) = \frac{P(X = 4, 5)}{P(X \geqslant 4)}$$

$$= \frac{\frac{10 \cdot 40^{(3)}}{50^{(4)}} + \frac{10 \cdot 40^{(4)}}{50^{(5)}}}{\frac{40^{(3)}}{50^{(3)}}} = \frac{415}{1,081}$$

6.3 $$P(X \geqslant 4 | X \leqslant 5) = \frac{P(X = 4, 5)}{P(X \leqslant 5)}$$

$$= \frac{\frac{10 \cdot 40^{(3)}}{50^{(4)}} + \frac{10 \cdot 40^{(4)}}{50^{(5)}}}{1 - \frac{40^{(5)}}{50^{(5)}}} = \frac{830 \cdot 40^{(3)}}{50^{(5)} - 40^{(5)}}$$

7. ในการจับฉลากชิงโชค มีฉลาก 500 ใบ ในจำนวนนี้เป็นฉลากที่ได้รางวัล 5 ใบ หยิบฉลากมาก

ก) โดยวิธีสุ่มแบบใส่กลับ

ข) โดยวิธีสุ่มแบบไม่ใส่กลับ

ให้ X เป็นจำนวนคนที่มาหยิบฉลากทีละใบจนได้ฉลากที่มีรางวัลเป็นคนแรก จงหา

7.1 ฟังก์ชันน่าจะเป็นและค่าคาดหมายของ X

7.2 ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ X

7.3 ความน่าจะเป็นที่มีคนหยิบฉลากเพียง 3 คน

7.4 ความน่าจะเป็นที่มีคนมาหยิบฉลากอย่างน้อยที่สุด 3 คน

7.5 อาศัยผลจาก 7.1 จงหาค่าของ $\sum_{j=0}^{\infty} j\left(\frac{495}{500}\right)^j$ และ $\sum_{j=1}^{496} j\frac{(495)^{(j-1)}}{(500)^{(j)}}$

ก) สุ่มแบบใส่กลับ

7.1 ฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X

$$P(X = x) = \frac{5 \cdot 495^{x-1}}{500^x} \quad , \quad x = 1, 2, \ldots$$

ค่าคาดหมายของ $X = \frac{500}{5} = 100$

7.2
$$F(x) = \sum_{k=1}^{x} \frac{5 \cdot 495^{k-1}}{500^k} \quad , \quad x = 1, 2, \ldots$$

$$= 1 - P(X > x) = 1 - \frac{495^x}{500^x}$$

ดังนั้น ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ X

$$F(x) = 1 - \frac{495^x}{500^x} \quad , \quad x = 1, 2, \ldots$$

7.3 ความน่าจะเป็นที่มีคนจับฉลากเพียง 3 คน

$$= P(X = 3)$$

$$= \frac{5 \cdot 495^2}{500^3} = 0.0098$$

7.4 ความน่าจะเป็นที่มีคนมาหยิบฉลากอย่างน้อย 3 คน

$$= P(X \geqslant 3)$$

$$= 1 - F(2) = \frac{495^2}{500^2} = 0.98$$

7.5 จาก 7.1 จะเห็นว่า

$$E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{5 \cdot 495^{x-1}}{500^x} = 100$$

ดังนั้น

$$\sum_{j=0}^{\infty} j\left(\frac{495}{500}\right)^j = \frac{495}{5} \sum_{j=1}^{\infty} j \frac{5 \cdot 495^{j-1}}{500^j} = \frac{495}{5} \cdot \frac{500}{5} = 9{,}900$$

ข) โดยวิธีสุ่มแบบไม่ใส่กลับ

7.1
$$P(X = x) = \frac{5 \cdot 495^{(x-1)}}{500^{(x)}} \quad , \quad x = 0, 1, 2, \ldots, 496$$

$$E(X) = \frac{500+1}{5+1} = 83.5$$

7.2 $$F(X) = \sum_{k=1}^{x} \frac{5 \cdot 495^{(k-1)}}{500^{(k)}} = 1 - \frac{495^{(x)}}{500^{(x)}} \quad , \quad x = 1, 2, \ldots, 496$$

7.3 $$P(X = 3) = \frac{5 \cdot 495^{(2)}}{500^{(3)}} = 0.0098$$

7.4 $$P(X \geqslant 3) = \frac{495^{(2)}}{500^{(2)}} = 0.98$$

7.5 จาก 7.1 จะเห็นว่า

$$E(X) = \sum_{x=1}^{496} x \frac{5 \cdot 495^{(x-1)}}{500^{(x)}} = \frac{501}{6}$$

ดังนั้น

$$\sum_{j=1}^{496} j \frac{495^{(j-1)}}{500^{(j)}} = \frac{1}{5} \sum_{j=1}^{496} j \frac{5 \cdot 495^{(j-1)}}{500^{(j)}}$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{501}{6} = 16.7$$

เฉลยแบบฝึกหัดระคน

1. จงคำนวณค่าของผลบวกต่อไปนี้

1.1 $\sum_{x=1}^{10} \binom{10}{x} 2^{10-x}$

1.2 $\sum_{x=0}^{15} x \binom{15}{x} \frac{14^{15-x}}{5^{15}}$

1.3 $\sum_{k=0}^{10} (-1)^k \binom{10}{k} (10-k)^{10}$

1.4 $\sum_{k=0}^{12} (-1)^k \binom{12}{k} (12-k)^{10}$

1.5 $\sum_{j=0}^{18} \sum_{k=0}^{20-j} \frac{(-1)^k 20!}{k! \cdot j!}$

1.6 $\sum_{x=5}^{20} \sum_{y=0}^{20-x} (-1)^y \frac{5!}{(x-5)!\, y!}$

1.1
$$\sum_{x=1}^{10} \binom{10}{x} 2^{10-x} = \sum_{0=x}^{10} \binom{10}{x} 1^x 2^{10-x} - \binom{10}{0} 2^{10-0}$$
$$= (1+2)^{10} - 2^{10} = 3^{10} - 2^{10}$$

1.2
$$\sum_{x=0}^{15} x \binom{15}{x} \frac{4^{15-x}}{5^{15}} = \frac{15}{5^{15}} \sum_{x=1}^{15} \binom{14}{x-1} 4^{15-x}$$
$$= \frac{3}{5^{14}} \sum_{k=2}^{14} \binom{14}{k} 4^{14-k} \cdot 1^k$$
$$= \frac{3}{5^{14}} (4+1)^{14} = 3$$

1.3
$$\sum_{k=0}^{10} (-1)^k \binom{10}{k} (10-k)^{10} = 10!$$

1.4
$$\sum_{k=0}^{12} (-1)^k \binom{12}{k} (12-k)^{10} = 0$$

1.5 $$\sum_{j=0}^{18}\sum_{k=2}^{20-j}\frac{(-1)^k 20!}{k!j!} = 20!\left[\sum_{j=0}^{20}\sum_{k=0}^{20-j}\frac{(-1)^k}{k!j!} - \frac{(-1)^0}{0!20!}\right]$$
$$= 20! - 1$$

1.6 $$\sum_{x=5}^{20}\sum_{y=0}^{20-x}(-1)^y\frac{5!}{(x-5)!y!} = 5!\sum_{k=0}^{15}\sum_{y=0}^{15-k}\frac{(-1)^y}{k!y!}, \quad k = x-5$$
$$= 5! = 120$$

2. ในปัญหาการจับคู่ที่มี $n = 5$ ให้ X เป็นจำนวนคู่ที่เกิดการจับคู่กันได้

   2.1 จงเขียนฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X และเขียนกราฟเส้นแสดงฟังก์ชันของ X ฐานนิยมของ X จะมีค่าเท่าไร

   2.2 จงหาฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ X และเขียนแสดงด้วยกราฟ มัธยฐานจะมีค่าเท่าไร

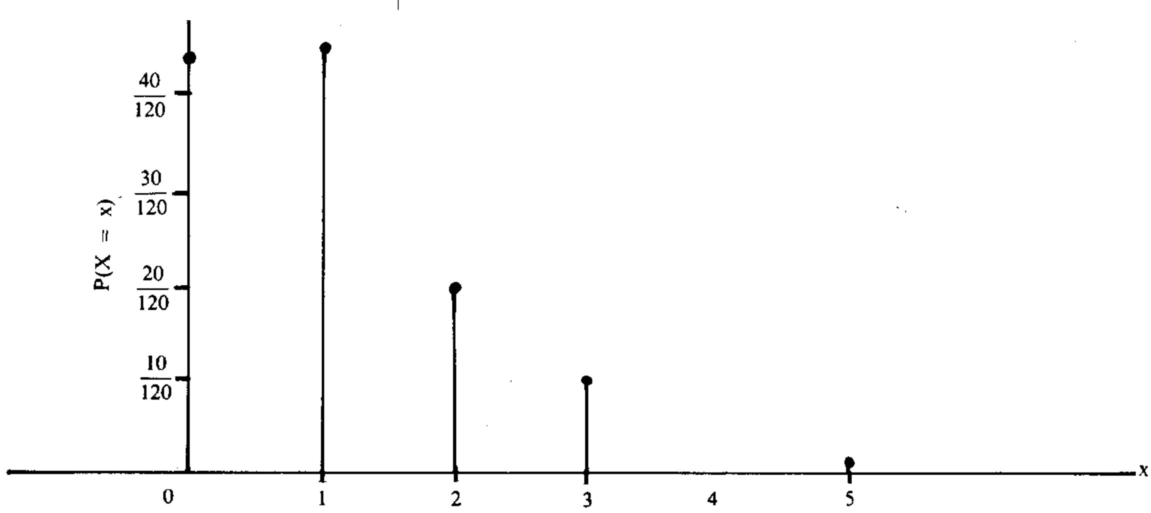
   2.3 จงคำนวณค่าของ $P(1 \leqslant X < 3 | X \leqslant 3)$

   2.4 ถ้า $A = \{x : x = 1, 2, 3\}$ และ $B = \{x : x = 3, 4, 5\}$ จงคำนวณค่าของ $P(A \cup B)$

2.1 $$P(X = x) = \sum_{k=0}^{5-x}\frac{(-1)^k}{k!x!}, \quad x = 0, 1, 2, 3, 5$$

แสดงให้เห็นด้วยตารางและกราฟ ดังนี้

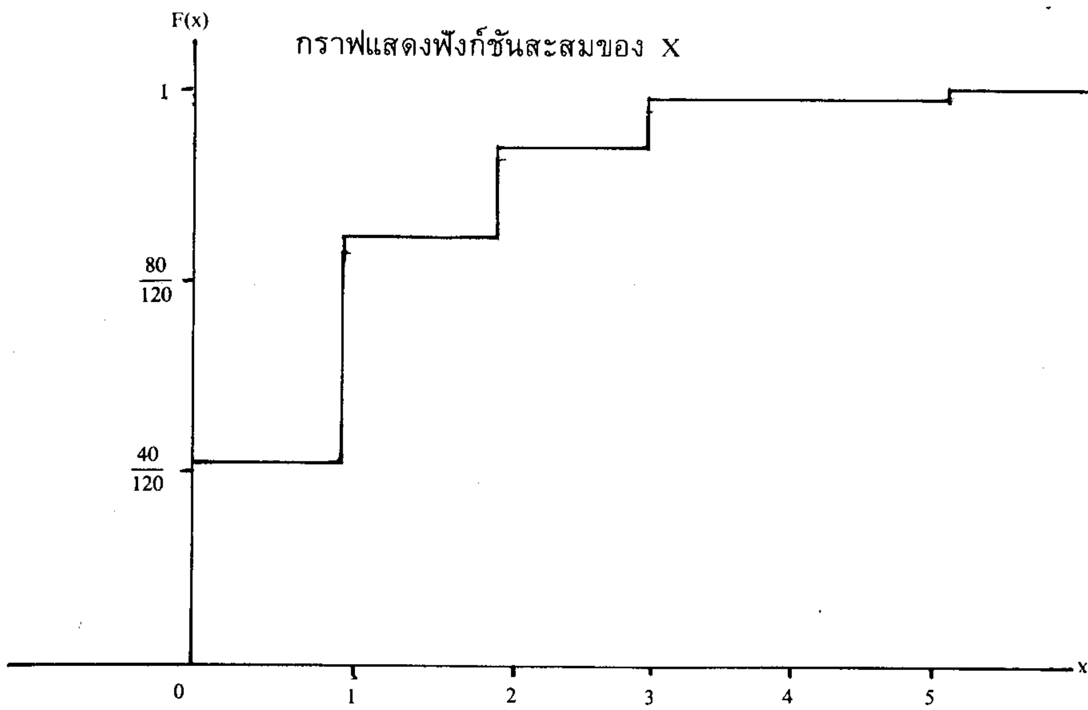
x	0	1	2	3	5
P(X = x)	$\frac{44}{120}$	$\frac{45}{120}$	$\frac{20}{120}$	$\frac{10}{120}$	$\frac{1}{120}$



ฐานนิยมของ X คือ 1

2.2 ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ X กำหนดได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
F(x) &= 0 &&, \quad x < 0 \\
&= \frac{44}{120} &&, \quad 0 \leqslant x < 1 \\
&= \frac{89}{120} &&, \quad 1 \leqslant x < 2 \\
&= \frac{109}{120} &&, \quad 2 \leqslant x < 3 \\
&= \frac{119}{120} &&, \quad 3 \leqslant x < 5 \\
&= 1 &&, \quad x \geqslant 5
\end{aligned}
$$



มัธยฐานของ X = 1

2.3 $P(1 \leqslant X < 3 | X \leqslant 3) = \dfrac{P(1 \leqslant X < 3)}{P(X \leqslant 3)}$

$$= \frac{F(2) - F(0)}{F(3)} = \frac{\frac{109}{120} - \frac{44}{120}}{\frac{119}{120}} = \frac{65}{119}$$

2.4 ถ้า $A = \{x : x = 1, 2, 3\}$ และ $B = \{x : x = 3, 4, 5\}$

จะได้ $A \cup B = \{x : x = 1, 2, 3, 4, 5\}$

$$P(A \cup B) = P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{44}{120} = \frac{19}{30}$$

3. มีรองเท้า n คู่ เลือกมาอย่างสุ่ม 2r ข้าง $(2r \leqslant n)$ ให้ X เป็นจำนวนคู่ของรองเท้าที่เข้าคู่กัน จงแสดงให้เห็นจริงว่า

$$P(X = x) = \binom{n}{x} \cdot \frac{\binom{n-x}{2r-2x} 2^{2r-2x}}{\binom{2n}{2r}}$$

อาศัยผลที่ได้ จงคำนวณค่าความน่าจะเป็นที่ไม่มีรองเท้าเข้าคู่กันเลย ที่จะมีรองเท้าเข้าคู่กันเพียง 1 คู่ ที่จะมีรองเท้าเข้าคู่กันเพียง 2 คู่

เฉลย

เลือกรองเท้าแบบสุ่ม 2r ข้าง $(r \leqslant n)$ จากรองเท้า n คู่ (2n ข้าง)

จะมีจำนวนผลลัพธ์ $= \binom{2n}{2r}$

การเลือกแบบสุ่มให้ได้รองเท้า x คู่ จาก n คู่ และให้ได้รองเท้า $2r - 2x$ ข้าง จาก $n - x$ คู่ จะมีทางเลือกได้

$$\binom{n}{x}\binom{n-x}{2r-2x} \text{ หนทาง }, \quad x = 0, 1, \ldots, r$$

ในแต่ละหนทางจะเป็นการเลือกรองเท้า $2r - 2x$ ข้าง จาก $2r - 2x$ คู่ ซึ่งจะมีจำนวนผลลัพธ์ $= 2^{2r-2x}$

ดังนั้น จำนวนผลลัพธ์ของการเลือกรองเท้าแบบสุ่ม 2r ข้าง ให้ได้รองเท้าที่เข้าคู่กันเพียง x คู่ จะเท่ากับ

$$\binom{n}{x}\binom{n-x}{2r-2x} 2^{2r-2x}$$

นั่นคือ

$$P(X = x) = \frac{\binom{n}{x}\binom{n-x}{2r-2x} 2^{2r-2x}}{\binom{2n}{2r}}, \quad x = 0, 1, \ldots, r$$

ความน่าจะเป็นที่ไม่มีรองเท้าเข้าคู่กันเลย

$$= P(X = 0) = \frac{\binom{n}{2r}2^{2r}}{\binom{2n}{2r}}$$

ความน่าจะเป็นที่จะมีรองเท้าเข้าคู่กันเพียง 1 คู่

$$= P(X = 1)$$

$$= \frac{\binom{n}{1}\binom{n-1}{2r-2}2^{2r-2}}{\binom{2n}{2r}}$$

ความน่าจะเป็นที่จะมีรองเท้าเข้าคู่กันเพียง 2 คู่

$$= P(X = 2)$$

$$= \frac{\binom{n}{2}\binom{n-2}{2r-4}2^{2r-4}}{\binom{2n}{2r}}$$

4. ในงานเลี้ยงอาหารค่ำซึ่งจัดที่นั่งตามจำนวนแขกผู้รับเชิญ และติดชื่อแขกประจำที่นั่งทุกตัว ถ้ามีแขกผู้รับเชิญ 10 คน แต่ละคนต่างเข้านั่งประจำที่ โดยไม่ได้ดูชื่อที่ติดไว้ จงคำนวณความน่าจะเป็น

4.1 ที่ทุกคนนั่งถูกที่พอดี

4.2 มีเพียง 2 คนเท่านั้นที่นั่งถูกที่

4.3 มีอย่างน้อยที่สุด 7 คนที่นั่งถูกที่ ถ้ามีคนนั่งตรงที่ของตนเองอยู่แล้วอย่างน้อยที่สุด 5 คน

เฉลย

กำหนดให้ X = จำนวนแขกผู้รับเชิญที่นั่งถูกที่

จะได้ $$P(X = x) = \sum_{k=0}^{10-x} \frac{(-1)^k}{k!x!} \quad , \quad x = 0, 1, 2, \ldots, 8, 10$$

4.1 ความน่าจะเป็นที่ทุกคนนั่งถูกที่พอดี

$$= P(X = 10) = \frac{1}{10!}$$

4.2 ความน่าจะเป็นที่มีเพียง 2 คนนั่งถูกที่

$$= P(X = 2)$$

$$= \sum_{k=0}^{8} \frac{(-1)^k}{k!2!} = \frac{2,119}{5,760}$$

4.3 ความน่าจะเป็นที่มีอย่างน้อย 7 คนนั่งถูกที่ ถ้ามีคนนั่งตรงที่อยู่แล้วอย่างน้อยที่สุด 5 คน

$$= P(X \geqslant 7 | X \geqslant 5)$$

$$= \frac{P(X \geqslant 7)}{P(X \geqslant 5)}$$

$$= \frac{\sum_{x=7}^{10} \sum_{k=0}^{10-x} \frac{(-1)^k}{k!x!}}{\sum_{x=5}^{10} \sum_{k=0}^{10-x} \frac{(-1)^k}{k!x!}} = \frac{143}{6,632}$$

5. ในงานแสดงสินค้าพื้นเมือง มีท้องถิ่นที่มาจากภาคต่าง ๆ มาออกร้านแสดงสินค้าของตน 20 แห่ง

5.1 ถ้ามีคนมาในงานนี้ 800 คน จงเขียนฟังก์ชันน่าจะเป็นและหาค่าคาดหมายของ

5.1.1 จำนวนคนที่เข้าร้านศรีพิมาย

5.1.2 จำนวนร้านที่ไม่มีคนเข้า

5.2 ถ้ามีของส่งในงานนี้ 25 กล่อง ทุกกล่องเหมือนกันหมด จงเขียนฟังก์ชันการแจกแจงและหาค่าคาดหมายของจำนวนร้านที่ไม่ได้รับของ

เฉลย

5.1 มีคนมาในงาน 800 คน ร้านค้า 20 แห่ง

5.1.1 ให้ X = จำนวนคนที่เข้าร้านศรีพิมาย

ดังนั้น

$$P(X = x) = \binom{800}{x} \frac{19^{800-x}}{20^{800}} \quad , \quad x = 0, 1, 2, \ldots, 800$$

และ $E(X) = \frac{800}{20} = 40$

5.1.2 ให้ X = จำนวนร้านที่ไม่มีคนเข้า

ดังนั้น

$$P(X = x) = \sum_{k=0}^{19-x} (-1)^k \binom{20}{x}\binom{20-x}{12}\frac{(20-x-k)^{800}}{20^{800}} \quad , \; x = 0, 1, \ldots, 19$$

และ $$E(X) = \frac{19^{800}}{20^{799}}$$

5.2 มีของ 25 กล่องที่เหมือนกัน ส่งให้ร้านค้า 20 แห่ง

ให้ X = จำนวนร้านที่ไม่ได้รับของ

จะได้

$$P(X = x) = \sum_{k=0}^{19-x} (-1)^k \binom{20}{x}\binom{20-x}{k}\frac{\binom{44-x-k}{25}}{\binom{44}{25}} \quad , \; x = 0, 1, \ldots, 19$$

และ $$E(X) = \frac{20(20-1)}{20+25-1} = \frac{95}{11}$$

6. 1) จงพิสูจน์โดยอุปนัยวิธี

1.1 $$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

1.2 $$(x+y)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{(k)} y^{(n-k)}$$

2) จงใช้ผลจากข้อ 1) แสดงให้เห็นจริงว่า

2.1 $$\sum_{j=0}^{n} j\binom{n}{j} = n2^{n-1}$$

2.2 $$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j j\binom{n}{j} = 0$$

2.3 $$\sum \binom{n}{j}^2 = \binom{2n}{n}$$

2.4 $$\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j} = 0$$

2.5 $$\sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j} = 2^k\binom{n}{k}$$

เมื่อ n และ k เป็นเลขจำนวนเต็มบวก

6.1.1 ให้ $f(n) = (x+y)^n$

เห็นชัดว่า

$$f(2) = (x+y)^2 = y^2+2xy+x^2 = \binom{2}{0}x^0y^{2-0}+\binom{2}{1}x^1y^{2-1}+\binom{2}{2}x^2y^{2-2}$$

$$= \sum_{k=0}^{2}\binom{2}{k}x^ky^{2-k}$$

นอกจากนี้

ถ้า f(j) จริงสำหรับจำนวนเต็มบวก j ดังนั้นเรามี

$$f(j) = (x+y)^j = \sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}x^ky^{j-k}$$

เมื่อเอา $(x+y)$ คูณทั้ง 2 ข้าง จะได้

$$(x+y)^j(x+y) = \left[\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}x^ky^{j-k}\right](x+y)$$

นั่นก็คือ

$$f(j+1) = (x+y)^{j+1} = y^{j+1}+\sum_{k=1}^{j}\left[\binom{j}{k-1}+\binom{j}{k}\right]x^ky^{j-k+1}+x^{k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{j+1}\binom{j+1}{k}x^ky^{j+1-k}$$

แสดงว่า ถ้า f(j) เป็นจริง ดังนั้น f(j+1) เป็นจริง เนื่องจากเราได้แสดงแล้วว่า f(2) เป็นจริงด้วย ทำให้ได้ผลตามมาว่า f(n) เป็นจริง สำหรับทุกค่า n ที่เป็นเลขเต็มบวก

1.2 ให้ $f(n) = (x+y)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{(k)}y^{(n-k)}$

เห็นชัดว่า

$$f(2) = (x+y)^{(2)} = (x+y)(x+y-1)$$

$$= y(y-1)+2xy+x(x-1)$$

$$= \binom{2}{0}x^{(0)}y^{(2-0)}+\binom{2}{1}x^{(1)}y^{(1)}+\binom{2}{2}x^{(2)}y^{(2-2)}$$

$$= \sum_{k=0}^{2}\binom{2}{k}x^{(k)}y^{(2-k)}$$

นอกจากนี้ ถ้า f(j) จริงสำหรับจำนวนเต็มบวก j ดังนั้นเรามี

$$f(j) = (x+y)^{(j)} = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} x^{(k)} y^{(j-k)}$$

เอา $(x+y-j)$ คูณทั้ง 2 ข้าง จะได้

$$(x+y)^{(j)}(x+y-j) = \left(\sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} x^{(k)} y^{(j-k)} \right)(x+y-j)$$

นั่นก็คือ

$$f(j+1) = (x+y)^{(j+1)} = y^{(j+1)} + \sum_{k=1}^{j} \left[\binom{j}{k-1} + \binom{j}{k} \right] x^{(k)} y^{(j-k+1)} + x^{(j+1)}$$

$$= \sum_{k=0}^{j+1} \binom{j+1}{k} x^{(k)} y^{(j-k+1)}$$

แสดงว่า ถ้า f(j) เป็นจริง แล้ว f(j+1) เป็นจริงด้วย
เนื่องจาก f(2) เป็นจริง ผลที่ตามมาก็คือ f(n) เป็นจริงทุก ๆ ค่า n ที่เป็นเลขจำนวนเต็มบวก

6. 2)

2.1
$$\sum_{j=0}^{n} j\binom{n}{j} = \sum_{j=1}^{n} j\frac{n}{j}\binom{n-1}{j-1}$$

$$= n \sum_{j-1=0}^{n-1} \binom{n-1}{j-1}$$

$$\sum_{j=0}^{n} j\binom{n}{j} = n(1+1)^{n-1} \qquad \text{จากข้อ 1.1 เมื่อ } x = y = 1$$

$$= n\,2^{n-1}$$

2.2
$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^{j} j\binom{n}{j} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j} j\frac{n}{j}\binom{n-1}{j-1}$$

$$= n \sum_{j-1=0}^{n-1} \binom{n-1}{j-1}(-1)^{j}$$

$$= n(-1+1)^{n-1} \qquad \text{จากข้อ 1.1 เมื่อ } x = -1,\ y = 1$$

$$= 0$$

2.3 $$\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}^2 = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\binom{n}{j}$$

$$= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{n^{(j)}}{j!}\cdot\frac{n!}{n!}$$

$$= \frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}n^{(j)}n^{(n-j)}$$

$$= \frac{1}{n!}(n+n)^{(n)}$$ จากข้อ 1.2 เมื่อ $x = y = n$

$$= \frac{(2n)^{(n)}}{n!} = \binom{2n}{n}$$

2.4 $$\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j} = \sum_{j=0}^{k}(-1)^j\cdot\frac{n!}{j!(n-j)!}\cdot\frac{(n-j)!}{(k-j)!(n-k)!}\cdot\frac{k!}{k!}$$

$$= \binom{n}{k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^j 1^{k-j}$$

$$= \binom{n}{k}(-1+1)^k = 0$$ ผลจากข้อ 1.1

2.5 $$\sum_{j=0}^{k}\binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j} = \binom{n}{k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}$$ ผลจากข้อ 2.4

$$= \binom{n}{k}2^k$$ ผลจากข้อ 1.1, $x = y = 1$

7. ในจำนวนหลอดไฟ 50 หลอด มีหลอดเสีย 2 หลอด เจ้าหน้าที่ตรวจสอบได้สุ่มหลอดไฟมาตรวจ 5 หลอด แบบไม่ใส่กลับ
   7.1 จงคำนวณความน่าจะเป็นที่จะได้หลอดเสียอย่างน้อยที่สุด 1 หลอด
   7.2 ควรจะสุ่มหลอดไฟมาตรวจกี่หลอด จึงจะทำให้ความน่าจะเป็นที่จะมีหลอดเสียอย่างน้อยที่สุด 1 หลอด มีค่าเกิน 0.5
   7.3 ถ้า X เป็นจำนวนหลอดไฟที่จะต้องนำมาตรวจจนกว่าจะพบหลอดเสีย จงหาฟังก์ชันการแจกแจงและค่าคาดหมายของ X

7.1 ให้ X = จำนวนหลอดเสียที่ได้จากการสุ่มแบบไม่ใส่กลับ
จะได้

$$P(X = x) = \binom{5}{x}\frac{2^{(x)}48^{(5-x)}}{50^{(5)}} \quad , \quad x = 0, 1, 2$$

$$= 0 \qquad \text{อื่น ๆ}$$

P(ได้หลอดเสียอย่างน้อย 1 หลอด)

$$= P(X \geqslant 1)$$

$$= 1-\binom{5}{0}\frac{2^{(0)}48^{(5.0)}}{50^{(5)}} = \frac{198}{245}$$

7.2 ถ้า X = จำนวนหลอดเสียที่ได้จากการสุ่มแบบไม่ใส่กลับ n หลอด จะได้

$$P(X \geqslant 1) = 1-\binom{n}{0}\frac{2^{(0)}48^{(n-0)}}{50^{(n)}} > 0.5$$

นั่นคือ

$$0.5 > \frac{(50-n)(49-n)}{50 \times 49}$$

$$n^2 - 99n + 1,225 < 0$$

$$n < \frac{99 \pm \sqrt{99^2 - 4(1,225)}}{2} = 14.5, \quad 84.5$$

ควรสุ่มมาตรวจอย่างมาก 14 หลอด

7.3 X = จำนวนหลอดไฟที่จะนำมาตรวจจนกว่าจะพบหลอดเสีย จะได้

$$P(X = x) = \frac{2 \cdot 48^{(x-1)}}{50^{(x)}} \quad , \quad x = 1, 2, \ldots, 49$$

$$= 0 \qquad \text{อื่น ๆ}$$

และ $$E(X) = \frac{50+1}{2+1} = 17 \text{ หลอด}$$

8. จากการสำรวจหมู่บ้านจัดสรรแพน ซึ่งมีอยู่ 100 ครอบครัว แยกออกเป็น

	มีรถยนต์	ไม่มีรถยนต์
มีทีวี	40	30
ไม่มีทีวี	16	14