8.1 เลือกพ่อบ้าน 5 คน มาเป็นคณะกรรมการหมู่บ้าน โดยวิธีสุ่มแบบไม่ใส่กลับ จงคำนวณความน่าจะเป็นที่

(1) จะได้คนที่มีทั้งทีวีและรถยนต์ 3 คน

(2) จะได้คนที่มีทีวีเพียงอย่างเดียว 2 คน

(3) จะได้คนที่มีรถยนต์เพียงอย่างเดียวอย่างน้อยที่สุด 4 คน

8.2 นายพิชัยต้องการสัมภาษณ์พ่อบ้านในหมู่บ้านนี้ โดยใช้วิธีเจอ ก็สัมภาษณ์คนนั้น แต่จะไม่สัมภาษณ์คนซ้ำกัน และจะสัมภาษณ์พ่อบ้านที่มีทั้งรถยนต์และทีวีคนใดคนหนึ่งเพียงคนเดียวปิดท้ายรายการสัมภาษณ์ จงคำนวณความน่าจะเป็นที่

(1) จะต้องสัมภาษณ์เป็นจำนวน 5 คน

(2) จะต้องสัมภาษณ์อย่างน้อยที่สุด 5 คน

จึงจะหยุดรายการสัมภาษณ์

เฉลย

8.1 (1) P(ได้คนที่มีทั้งทีวีและรถยนต์ 3 คน)

$$= \binom{5}{3}\frac{40^{(3)}60^{(2)}}{100^{(5)}}$$

$$= \frac{354(40^{(3)})}{99^{(4)}}$$

(2) P(ได้คนที่มีทีวีเพียงอย่างเดียว 2 คน)

$$= \binom{5}{2}\frac{30^{(2)}70^{(3)}}{100^{(5)}}$$

$$= \frac{87(70^{(3)})}{99^{(4)}}$$

(3) P(ได้คนที่มีรถยนต์เพียงอย่างเดียวอย่างน้อย 4 คน)

$$= \binom{5}{4}\frac{16^{(4)}84}{100^{(5)}} + \binom{5}{5}\frac{16^{(5)}}{100^{(5)}}$$

$$= \frac{72(15^{(3)})}{100^{(4)}}$$

8.2 (1) P(สัมภาษณ์เป็นจำนวน 5 คน)

$$= \frac{40(60^{(4)})}{100^{(5)}}$$

(2) P(สัมภาษณ์อย่างน้อยที่สุด 5 คน) $= \dfrac{60^{(4)}}{100^{(4)}}$

9. กล่องใบหนึ่งบรรจุบอล n ลูก หมายเลข 1, 2, ..., n สุ่มบอล m ลูกจากกล่องนี้ ให้ X เป็นบอลที่มีหมายเลขสูงสุด

ก) การสุ่มแบบใส่กลับ จงพิสูจน์

ก.1 $P(X = x) = \dfrac{x^m - (x-1)^m}{n^m}$, $x = 1, 2, \ldots, n$

ก.2 $E(X) = n - \sum_{x=0}^{n-1} \dfrac{x^m}{n^m}$

ข) การสุ่มแบบไม่ใส่กลับ จงพิสูจน์ว่า

ข1. $P(X = x) = \dfrac{\binom{x-1}{m-1}}{\binom{n}{m}}$, $x = m, m+1, \ldots, n$

ข.2 อาศัยผลจากข้อ ข.1 และคุณสมบัติของฟังก์ชันน่าจะเป็น จงแสดงให้เห็นว่า

$$\binom{a}{a} + \binom{a+1}{a} + \ldots + \binom{r}{a} = \binom{r+1}{a+1}$$

ข.3 $E(X) = \dfrac{m(n+1)}{m+1}$

เฉลย

ก. หยิบบอล m ลูกแบบสุ่มใส่กลับ จากกล่องที่มีบอล n ลูก

จะได้จำนวนผลลัพธ์ $= n^m$

ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่สุ่มบอล m ลูก จากบอลหมายเลข 1, 2, ..., x

$x = 1, 2, \ldots, n$

จำนวนผลลัพธ์ของ A $= x^m$

$$P(A) = \frac{x^m}{n^m} \quad , \quad x = 1, 2, \ldots, n$$

B เป็นเหตุการณ์ที่สุ่มบอล m ลูก จากบอลหมายเลข 1, 2, ..., x − 1

$x = 1, 2, \ldots, n$

จำนวนผลลัพธ์ของ B $= (x-1)^m$

$$P(B) = \frac{(x-1)^m}{n^m} \quad , \quad x = 1, 2, \ldots, n$$

AB′ เป็นเหตุการณ์ที่สุ่มบอล m ลูก ได้ x เป็นบอลที่มีหมายเลขสูงสุด

AB′ และ B เป็นส่วนแบ่งของ A

ดังนั้น $P(A) = P(AB') + P(B)$

นั่นคือ $P(X = x) = P(AB') = P(A) - P(B)$

$$P(X = x) = \frac{x^m - (x-1)^m}{n^m} \quad , \quad x = 1, 2, \ldots, n \qquad \ldots\ldots\ldots(ก.1)$$

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x=1}^{n} x \frac{x^m - (x-1)^m}{n^m} \\ &= \frac{1}{n^m}\left[n \cdot n^m + \sum_{x=1}^{n-1} x \cdot x^m - \sum_{x=2}^{n} x(x-1)^m \right] \\ &= n + \frac{1}{n^m}\left[\sum_{x=1}^{n-1} x \cdot x^m - \sum_{x=1}^{n-1} (x+1)x^m \right] \\ &= n + \frac{1}{n^m} \sum_{x=1}^{n-1} (x - x - 1)x^m = n - \sum_{x=0}^{n-1} \frac{x^m}{n^m} \qquad \ldots\ldots(ก.2) \end{aligned}$$

ข. หยิบบอล m ลูกแบบไม่ใส่กลับ จากกล่องที่มีบอล n ลูก

จะได้ผลลัพธ์ $= \binom{n}{m}$

การสุ่มบอลให้ได้ x เป็นบอลหมายเลขสูงสุด ต้องสุ่มจากบอลอย่างน้อย m ลูก นั่นคือ $x = m, m+1, \ldots, n$ การสุ่มแต่ละครั้งต้องมีบอลหมายเลข x เป็นค่าสูงสุด ซึ่งก็คือการสุ่มบอลหมายเลข x 1 ลูก ที่เหลือ $m-1$ ลูก สุ่มจากบอลหมายเลข $1, 2, \ldots, x-1$ เมื่อ $x = m, m+1, \ldots, n$

จะได้ จำนวนผลลัพธ์ $= \binom{x-1}{m-1}$

ดังนั้น

$$P(X = x) = \frac{\binom{x-1}{m-1}}{\binom{n}{m}} \quad , \quad x = m, m+1, \ldots, n \qquad \ldots\ldots(ข.1)$$

อาศัยคุณสมบัติฟังก์ชันน่าจะเป็น จะได้

$$\sum_{x=m}^{n} \frac{\binom{x-1}{m-1}}{\binom{n}{m}} = 1$$

หรือ $$\sum_{x=m}^{n} \binom{x-1}{m-1} = \binom{n}{m}$$

ให้ $a = m-1,\ r = n-1$ จะได้

$$\sum_{x=a+1}^{r+1} \binom{x-1}{a} = \binom{r+1}{a+1}$$

นั่นคือ

$$\binom{a}{a} + \binom{a+1}{a} + \ldots + \binom{r}{a} = \binom{r+1}{a+1} \qquad \text{..........(ข.2)}$$

$$E(X) = \sum_{x=m}^{n} x\frac{\binom{x-1}{m-1}}{\binom{n}{m}} = \frac{m}{\binom{n}{m}} \sum_{x=m}^{n} \binom{x}{m}$$

อาศัยผลจาก ข.2 เมื่อ $a = m,\ r = n$ จะได้

$$\mathbf{E(X)} = \frac{m}{\binom{n}{m}}\binom{n+1}{m+1} = \frac{m(n+1)}{m+1} \qquad \text{.........(ข.3)}$$

10. สุ่มตัวอย่างจากเลขจำนวนเต็มบวก ซึ่งมีค่าไม่เกิน 20 ด้วยวิธี

ก) สุ่มแบบใส่กลับ

ก.1 ให้ X เป็นจำนวนตัวเลขที่เป็นผลคูณของ 3 ที่ได้จากการสุ่ม 4 ครั้ง

ก1.1. จงเขียนตารางแสดงฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X

ก.1.2 อาศัยผลจากข้อ ก.1.1 จงแสดงให้เห็นจริงว่า $E(X) = n\frac{M}{N}$

ก.2 ให้ X เป็นจำนวนครั้งของการสุ่มจนได้ตัวเลขที่หารด้วย 5 ลงตัว

ก.2.1 จงเขียนตารางแสดงฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X

ก.2.2 อาศัยผลจากข้อ ก.2.1 จงแสดงให้เห็นจริงว่า $E(X) = \frac{N}{M}$

ก.2.3 จงหาฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ X และคำนวณค่าของมัธยฐานของ X และ $P(1 < X \leqslant 3 | X \leqslant 5)$

ข) สุ่มแบบไม่ใส่กลับ

ข.1 ให้ X เป็นค่าต่ำสุดถัดไปในจำนวนตัวเลขที่สุ่มมา 4 ตัว จงหาฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X

ข.2 ทำเช่นเดียวกับข้อ ก.2 และแสดงให้เห็นจริงว่า $\lim_{h \to 0} P(2-h < X \leqslant 2) = \frac{16}{95}$

เฉลย

ก) สุ่มแบบใส่กลับ

ก.1 X = จำนวนตัวเลขที่เป็นผลคูณของ 3 จากการสุ่ม 4 ครั้ง จะได้

$$P(X = x) = \binom{4}{x}\frac{6^x 14^{4-x}}{20^4} \quad , \quad x = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$$

แสดงค่า P(X = x) และ xP(X = x) ด้วยตารางดังนี้

x	0	1	2	3	4	**ผลรวม**
P(X = x)	0.2401	0.4116	0.2646	0.0756	0.0081	1
xP(X = x)	0	0.4116	0.5292	0.2268	0.0324	1.2

$$E(X) = \sum_{x=0}^{4} xP(X = x) = 1.2$$

$$n\frac{M}{N} = \frac{4(6)}{20} = 1.2$$

แสดงว่า $E(X) = \frac{nM}{N}$

ก.2 X = จำนวนครั้งของการสุ่มจนได้ตัวเลขที่หารด้วย 5 ลงตัว ดังนั้น

$$P(X = x) = \frac{4(16)^{x-1}}{20^x} \quad , \quad x = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

แสดงค่า P(X = x) และ xP(X = x) ด้วยตารางดังนี้

X	1	2	3	4	.
P(X = x)	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5^2}$	$\frac{4^2}{5^3}$	$\frac{4^3}{5^4}$	
xP(X = x)	$\frac{1}{5}$	$2\cdot\frac{4}{5^2}$	$3\cdot\frac{4^2}{5^3}$	$4\cdot\frac{4^3}{5^4}$	....

$$E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} xP(X = x)$$

นั่นคือ

$$E(X) = \frac{1}{5} + 2\cdot\frac{4}{5^2} + 3\cdot\frac{4^2}{5^3} + 4\cdot\frac{4^3}{5^4} + \ldots$$

$$\frac{4}{5}E(X) = \frac{4}{5^2} + 2\cdot\frac{4^2}{5^3} + 3\cdot\frac{4^3}{5^4} + 4\cdot\frac{4^4}{5^5} + \ \ldots$$

$$E(X) - \frac{4}{5}E(X) = \frac{1}{5} + \frac{4}{5^2} + \frac{4^2}{5^3} + \frac{4^3}{5^4}$$

$$\frac{1}{5}E(X) = \frac{1}{5}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^k = \frac{1}{5}\cdot\frac{5}{5-4}$$

$$E(X) = 5$$

$$\because \frac{N}{M} = \frac{20}{4} = 5$$

แสดงว่า $E(X) = \frac{N}{M}$

$F(x)$ = ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ x

$$= P(X \leqslant x) \quad , x = 1, 2, \ldots$$

$$= 1 - P(X > x) = 1 - \frac{16^x}{20^x}$$

นั่นคือ

$$F(x) = 0 \quad , x < 1$$

$$= 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^k, \ k \leqslant x < k+1, \ k = 1, 2, \ldots$$

ให้ m เป็นมัธยฐานของ X ดังนั้น

$$F(m) = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^m \geqslant \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^m \leqslant \frac{1}{2}$$

$$m = 3$$

$$P(1 < x \leqslant 3 | X \leqslant 5) = \frac{P(1 < x \leqslant 3)}{P(X \leqslant 5)}$$

$$= \frac{F(3) - F(1)}{F(5)}$$

$$= \frac{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^3 - 1 + \left(\frac{4}{5}\right)^2}{\left(\frac{4}{5}\right)^5} = 2\,\frac{5}{256}$$

ข) สุ่มแบบไม่ใส่กลับ

ข.1 X = ค่าต่ำสุดถัดไปในจำนวนตัวเลขที่สุ่มมา 4 ตัว

จำนวนผลลัพธ์ของการสุ่มแบบไม่ใส่กลับ $= \binom{20}{4}$

การสุ่มให้ได้ x เป็นตัวเลขที่มีค่าต่ำสุดถัดไป ก็คือการสุ่มให้ได้หมายเลข x 1 ตัว หมายเลขที่ต่ำกว่า x 1 ตัว และหมายเลขที่สูงกว่า x 2 ตัว เมื่อ x = 2, 4, ..., 18

จำนวนผลลัพธ์ของเหตุการณ์นี้ $= (x-1)\binom{20-x}{2}$

ดังนั้น $$P(X = x) = \frac{(x-1)\binom{20-x}{2}}{\binom{20}{4}} \quad , \quad x = 2, 3, \ldots, 18$$

หรือ $$P(X = x) = \frac{(x-1)(20-x)^{(2)}}{9.690} \quad ,x = 2, 3, \ldots, 18$$

ข.2 X = จำนวนครั้งการสุ่มจนได้ตัวเลขที่หารด้วย 5 ลงตัว

จะได้ $$P(X = x) = \frac{4(16)^{(x-1)}}{20^{(x)}} \quad , \quad \mathbf{x = 1, 2, \ldots . 17}$$

และ $$F(x) = 1 \quad P(X > x)$$

$$= 1-\frac{16^{(k)}}{20^{(k)}} \quad , \quad k \leqslant x < k+1, \ k = 1, 2, \ldots . 1$$

$$\lim_{h-0} P(2-h < X \leqslant 2) = F(2) - \lim_{h-0} F(2-h)$$

$$= \left[1-\frac{16^{(2)}}{20^{(2)}}\right] \quad \left[1-\frac{16}{20}\right]$$

$$= \frac{16}{20}\left(1-\frac{15}{19}\right) = \frac{16}{95}$$

11. มีกล่อง 2 กล่อง แต่ละกล่องมีฉลาก 10 ใบ หมายเลข 1, 2, 3, ..., 10

ก) หยิบฉลากจากกล่องทั้งสองกล่องละใบโดยไม่ให้ซ้ำกัน บันทึกค่าของผลบวกของหมายเลขบนฉลากที่สุ่มได้ ทำซ้ำวิธีการเดิมจนฉลากหมดกล่องทั้งสอง จงคำนวณความน่าจะเป็นที่

ก.1 ไม่มีฉลากคู่ใดมีผลบวกเท่ากับ 11

ก.2 ฉลากทุกคู่ที่หยิบได้ต่างมีผลบวกเท่ากับ 11

ก.3 มีฉลากอย่างน้อยที่สุด 8 คู่ที่มีผลบวกเท่ากับ 11

ข) สุ่มฉลากจากกล่องใบแรกทีละใบโดยไม่ให้ซ้ำกัน จนกว่าจะได้ฉลากที่มีหมายเลขคู่ ให้ X เป็นจำนวนครั้งที่สุ่ม

ข.1 จงพิสูจน์ว่า

$$P(X = x) = \frac{5^{(x-1)}5}{10^{(x)}} \quad , \quad x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

ข.2 จงคำนวณค่าของ $P(X \leqslant 4)$ และ $P(x \geqslant 2|X \leqslant 4)$

ข.3 อาศัยผลจาก ข.1 จงพิสูจน์ว่า

$$F(x) = 1-\frac{5^{(k)}}{10^{(k)}}, \quad k \leqslant x < k+1, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, 6$$

เฉลย

ก) ให้ X = จำนวนคู่ของฉลากที่มีผลบวกเท่ากับ 11

จะได้

$$P(X = x) = \sum_{k=0}^{3-x} \frac{(-1)^k}{k!x!} \quad , \quad x = 0, 1, 2, \ldots . 10$$

ก.1 P(ไม่มีฉลากคู่ใดมีผลบวกเท่ากับ 1 1)

$$= P(X = 0)$$

$$= \sum_{k=0}^{10} \frac{(-1)^{\prime\prime}}{k!} = \sum_{k=2}^{10} \frac{(-1)^k}{k!}$$

ก.2 P(ฉลากทุกคู่ต่างมีผลบวกเท่ากับ 11)

$$= P(X = 10)$$

$$= \frac{(-1)^{\text{“'}}}{10!} = \frac{1}{10!}$$

n.3 (มีฉลากอย่างน้อย 8 คู่ที่มีผลบวกเท่ากับ ii)

$$= P(X \geqslant 8)$$

$$= \sum_{k=0}^{10-8} \frac{(-1)^k}{k!8!} + \frac{1}{10!} = \frac{46}{10!}$$

ข) ให้ X = จำนวนครั้งการสุ่มฉลากจนได้หมายเลขคู่

จำนวนผลลัพธ์ของการสุ่มฉลาก x ครั้งไม่ซ้ำกัน $= 10^{(x)}$

สุ่มฉลาก $x-1$ ครั้งแรกได้เลขคี่ และครั้งที่ x ได้ฉลากเลขคู่ $(x = 1, 2, \ldots, 6)$

จะมีจำนวนผลลัพธ์เท่ากับ $5^{(x-1)} \cdot 5$

ดังนั้น

$$P(X = x) = \frac{5(5^{(x-1)})}{10^{(x)}}, \quad x = 1, 2, \ldots, 6$$ ข.1

"ข.2

$$P(X \leqslant 4) = 1 - P(X = 5) - P(X = 6)$$

$$= 1 - \frac{5(5^{(4)})}{10^{(5)}} - \frac{5(5^{(5)})}{10^{(6)}} = \frac{41}{42}$$

$$P(X \geqslant 2 | X \leqslant 4) = \frac{P(2 \leqslant X \leqslant 4)}{P(X \leqslant 4)}$$

$$\frac{\frac{5(5)}{10^{(2)}} + \frac{5(5^{(2)})}{10^{(3)}} + \frac{5(5^{(3)})}{10^{(4)}}}{\frac{41}{42}} = \frac{20}{41}$$

ข3 $\quad F(x) = P(X \leqslant x)$ นิยามของ $F(x)$

$$= 1 - P(X > x)$$

แต่ $\quad P(X > x) = \sum_{k=x+1}^{6} \frac{5(5^{(k-1)})}{10^{(k)}}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots . 6$

ให้ $j = k - x - 1$ หรือ $k = j + x + 1$

$$P(X > x) = \sum_{j=0}^{5-x} \frac{5(5^{(j-x)})}{10^{(j+x+1)}}$$

$$= \frac{5(5^{(x)})}{10^{(x+1)}} \sum_{j=0}^{5-x} \frac{(5-x)^{(j)}}{(9-x)^{(j)}}$$

$$= \frac{5(5^{(x)})}{10^{x}(10-x)} \frac{(9-x)+1}{(9-x)-(5-x)+1} = \frac{5^{(x)}}{10^{(x)}}$$

ดังนั้น

$$F(x) = 1 - \frac{5^{(k)}}{10^{(k)}}, \quad k \leqslant x < k+1, \; k = 0, 1, 2, \ldots . 6$$

12. พนักงานขายของหยิบตุ๊กตา 12 ตัว ซึ่งมีขนาดต่างกัน บรรจุในกล่องอย่างสุ่ม

ก) ถ้ามีกล่อง 12 กล่อง แต่ละกล่องมีเบอร์บอกขนาดตุ๊กตาที่จะบรรจุติดไว้ข้างกล่อง ให้ X เป็นจำนวนที่บรรจุได้ถูกต้อง

ก.1 จงแสดงให้เห็นจริงว่า

$$P(X = x-1) = \frac{1}{(x-1)!} \cdot \left[x! \, P(X = x) + \frac{(-1)^{13-x}}{(13-x)!} \right], \quad x = 1, 2, \ldots, 12$$

ก.2 จงคำนวณค่าของ $F_X(10)$

ข) มีกล่องบรรจุตุ๊กตา 4 กล่อง แต่ละกล่องสามารถบรรจุตุ๊กตาได้ทุกขนาดและมีจำนวนไม่เกิน 12 ตัว ให้ X เป็นจำนวนกล่องว่าง

ข.1 จงแสดงให้เห็นจริงว่า

$$\lim_{h\to 0}\{P(1-h < X \leqslant 2+h\} = P(\lim_{h\to 0}\{x : 1-h < x \leqslant 2+h\})$$

และ $E(X) = \dfrac{3^{12}}{4^{11}}$

ข.2 ถ้า $Y = 4-X$ จงเขียนสูตรการแจกแจงของ Y

เฉลย

ก) X = จำนวนกล่องที่บรรจุได้ถูกต้อง, $x = 0, 1, 2, \ldots, 12$

จะได้

$$P(X = x) = \sum_{k=0}^{12-x} \frac{(-1)^k}{k!x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, 12$$

ดังนั้น

ก.1 $$P(X = x-1) = \sum_{k=0}^{12-x+1} \frac{(-1)^k}{k!(x-1)!}, \quad x = 1, 2, \ldots, 12$$

$$= \sum_{k=0}^{12-x} \frac{(-1)^k}{k!(x-1)!} + \frac{(-1)^{13-x}}{(13-x)!(x-1)!}$$

$$= \frac{1}{(x-1)!}\left[\sum_{k=0}^{12-x} \frac{(-1)^k}{k!}\cdot\frac{x!}{x!} + \frac{(-1)^{13-x}}{(13-x)!}\right]$$

แสดงว่า

$$P(X = x-1) = \frac{1}{(x-1)!}\left(x!P(X = x) + \frac{(-1)^{13-x}}{(13-x)!}\right), \quad x = 1, 2, \ldots, 12$$

ก.2 $$F_X(10) = P(X \leqslant 10)$$

$$= 1-P(X = 11)-P(X = 12)$$

$$= 1-\frac{(-1)^0}{12!} = 1-\frac{1}{12!}$$

ข) x = จำนวนกล่องว่าง จะได้

$$P(X = x) = \sum_{k=0}^{3-x} (-1)^k \binom{4}{x}\binom{4-x}{k}\frac{(4-x-k)^{12}}{4^{12}} \quad x = 0, 1, 2, 3$$

11.1

$$\lim_{h\to 0}\{P(1-h < X \leqslant 2+h)\}$$

$$= \lim_{h\to 0} F(2+h) - \lim_{h\to 0} F(1-h)$$

$$= \sum_{x=0}^{2}\sum_{k=0}^{3-x}(-1)^k\binom{4}{x}\binom{4-x}{k}\frac{(4-x-k)^{12}}{4^{12}} - \sum_{k=0}^{3}(-1)^k\binom{4}{k}\frac{(4-k)^{12}}{4^{12}}$$

$$= \sum_{k=0}^{2}(-1)^k\binom{4}{1}\binom{3}{k}\frac{(3-k)^{12}}{4^{12}} + \sum_{k=0}^{1}(-1)^k\binom{4}{2}\binom{2}{k}\frac{(2-k)^{12}}{4^{12}}$$

$$= \frac{1}{4^{12}}\left[4\{3^{12}-3(2^{12})+3\}+6\{2^{12}-2\}\right] = \frac{3}{4^{11}}(3^{11}-2^{11})$$

$$P(\lim_{h\to 0}\{x : 1-h < x \leqslant 2+h\})$$

$$= P(1 \leqslant X \leqslant 2)$$

$$= P(X = 1)+P(X = 2)$$

$$= 4\left\{\frac{3^{12}}{4^{12}}-3\cdot\frac{2^{12}}{4^{12}}+3\frac{1}{4^{12}}\right\} + 6\left\{\frac{2^{12}}{4^{12}}-2\cdot\frac{1}{4^{12}}\right\} = \frac{3(3^{11}-2^{11})}{4^{11}}$$

แสดงว่า

$$\lim_{h\to 0}\{P(1-h < X \leqslant 2+h)\} = P(\lim_{h\to 0}\{x : 1-h < x \leqslant 2+h\})$$

จาก $\quad E(X) = \sum_{x=0}^{3} xP(X = x)$

จะได้ $\quad E(X) = \sum_{x=0}^{3} x \sum_{k=0}^{3-x}(-1)^k\binom{4}{x}\binom{4-x}{k}\frac{(4-x-k)^{12}}{4^{12}}$

$$= \frac{1}{4^{12}}\left[4\{3^{12}-3(2^{12})+3\} + 12\{2^{12}-2\}+12\right]$$

แสดงว่า $\quad E(X) = \frac{3^{12}}{4^{11}}$

11.2 $\quad Y = 4-X$

$$P(Y = y) = P(4-X = y) \quad , \quad y = 1, 2, 3, 4$$

$$= P(X = 4-y)$$

$$\Longrightarrow P(Y = y) = \sum_{k=0}^{y-1}(-1)^k\binom{4}{4-y}\binom{y}{k}\frac{(y-k)^{12}}{4^{12}} \quad , \quad y = 1, 2, 3, 4$$

13. จงแสดงให้เห็นจริงว่า สำหรับ $j = 1, 2, \ldots, n$ ความน่าจะเป็นภายใต้เงื่อนไขของการจับคู่กันได้ในตำแหน่งที่ j กำหนดว่าเกิดการจับคู่กันได้ m คู่ จะเท่ากับ

$$\frac{n}{m}$$

และสำหรับ j และ k ใด ๆ ที่ไม่เท่ากัน $j, k = 1, \ldots, n$ ความน่าจะเป็นภายใต้เงื่อนไขที่ไพ่ใบที่ j อยู่ในตำแหน่งที่ k กำหนดว่ามีการจับคู่กันได้ m คู่ จะเท่ากับ

$$\frac{(n-m)}{n(n-1)}$$

เฉลย

การเรียงไพ่ n ใบ ใน n ตำแหน่ง จะได้จำนวนผลลัพธ์ $= n!$

ให้ N_m เป็นจำนวนผลลัพธ์ที่จับคู่ได้เฉพาะ m คู่ที่กำหนดเท่านั้น แต่การจับคู่ได้ m คู่ในจำนวน n คู่ มีทางเกิดได้ $\binom{n}{m}$ หนทาง

ดังนั้น จำนวนผลลัพธ์ของการจับคู่ได้ m คู่ใด ๆ $= \binom{n}{m}N_m$

$$P(\text{จับคู่กันได้เพียง } m \text{ คู่}) = \binom{n}{m}\frac{N_m}{n!}$$

การจับคู่กันได้ m คู่ โดยมีคู่ที่ j จับคู่กันได้ ก็คือการจับคู่กันได้ในคู่ที่ j ส่วนที่เหลือ $n-1$ คู่ จะมีการจับคู่กันได้ $m-1$ คู่เท่านั้น ซึ่งจะมีทางเกิดขึ้นได้ $\binom{n-1}{m-1}$ หนทาง

$$\text{จำนวนผลลัพธ์ของเหตุการณ์นี้} = \binom{n-1}{m-1}N_m$$

ดังนั้น

$$P(\text{จับคู่กันได้ } m \text{ คู่ โดยมีคู่ที่ } j \text{ จับคู่กันได้}) = \binom{n-1}{m-1}\frac{N_m}{n!}$$

$P(\text{จับคู่กันได้ในตำแหน่งที่ } j | \text{จับคู่กันได้ } m \text{ คู่})$

$$= \frac{P(\text{จับคู่กันได้ } m \text{ คู่ โดยที่มีการจับคู่กันได้ในตำแหน่งที่ } j)}{P(\text{จับคู่กันได้ } m \text{ คู่})}$$

$$= \frac{\binom{n-1}{m-1}\frac{N_m}{n!}}{\binom{n}{m}\frac{N_m}{n!}}$$

$$= \frac{\binom{n-1}{m-1}}{\frac{n}{m}\binom{n-1}{m-1}} = \frac{m}{n}$$

การจับคู่กันได้ m คู่ โดยมีไพ่ใบที่ j อยู่ในตำแหน่งที่ k จะมีทางเกิดขึ้นได้ $\binom{n-2}{m}$ หนทาง

ในแต่ละหนทาง ก็คือการจับคู่โดยที่ j อยู่ในตำแหน่ง k และใน $(n-m-1)$ คู่ที่เหลือไม่มีการจับคู่กันเลย

$$\text{จำนวนผลลัพธ์ของเหตุการณ์นี้} = \frac{N_m}{n-m-1}$$

ดังนั้น

$$P(\text{จับคู่กันได้ } m \text{ คู่ โดยที่ } j \text{ อยู่ในตำแหน่ง } k) = \frac{\binom{n-2}{m}\frac{N_m}{n-m-1}}{n!}$$

P(ไพ่ใบที่ j อยู่ในตำแหน่ง k|จับคู่กันได้ m คู่)

$$= \frac{P(\text{จับคู่กันได้ } m \text{ คู่ โดยมี } j \text{ อยู่ใน } k)}{P(\text{จับคู่กันได้ } m \text{ คู่})}$$

$$= \frac{\frac{\binom{n-2}{m}\frac{N_m}{n-m-1}}{n!}}{\binom{n}{m}\frac{N_m}{n!}}$$

$$= \frac{(n-2)!}{m!(n-m-2)!} \cdot \frac{1}{n-m-1} \cdot \frac{m!(n-m)!}{n!}$$

$$= \frac{n-m}{n(n-1)}$$

14. ใส่บอล n ลูกที่เหมือนกันในกล่อง m กล่องแบบสุ่ม

ก) จงแสดงให้เห็นจริงว่า ความน่าจะเป็นที่จะมีกล่องว่างเพียง X กล่องก็คือ

$$\frac{\binom{m}{x}\binom{n-1}{m-x-1}}{\binom{m+n-1}{n}}$$

ข) จงแสดงให้เห็นจริงว่า ความน่าจะเป็นที่จะมีกล่องว่างอย่างน้อยที่สุด k กล่อง คือ

$$\sum_{j=k}^{m} \frac{\binom{m}{j}\binom{n-1}{m-j-1}}{\binom{m+n-1}{n}}$$

ค) จงแสดงให้เห็นจริงว่า ความน่าจะเป็นที่กล่อง ๆ หนึ่งจะมีบอล i ลูก คือ

$$\frac{\binom{m+n-i-2}{n-i}}{\binom{m+n-1}{n}}$$

ง) ถ้า $n = 5,\ m = 3$ จงคำนวณค่าของความน่าจะเป็นที่

ง.1 จะมีกล่องว่างเพียง 1 กล่อง

ง.2 จะมีกล่องว่างอย่างน้อยที่สุด 1 กล่อง

ง.3 กล่องแรกมีบอลเพียง 1 ลูก, เพียง 3 ลูก, เพียง 5 ลูก

จ) ถ้า $n = 8,\ m = 5$ จงคำนวณความน่าจะเป็นที่

จ.1 จะมีกล่องว่างเพียง 2 กล่อง

จ.2 จะมีกล่องว่างอย่างน้อยที่สุด 2 กล่อง

จ.3 กล่องที่ 4 มีบอลเพียง 1 ลูก, เพียง 4 ลูก, เพียง 8 ลูก

เฉลย

ก) ใส่บอล n ลูกที่เหมือนกัน ลงในกล่อง m กล่องแบบสุ่ม

$$\text{จะมีจำนวนผลลัพธ์} = \binom{n+m-1}{n}$$

เหตุการณ์ที่มีกล่องว่างเฉพาะ x กล่องที่กำหนด, $x = 0, 1, 2, \ldots, m-1$ ก็คือการใส่บอลลงใน $m-x$ กล่องที่เหลือกล่องละ 1 ลูก แล้วใส่ซ้ำบอลที่เหลือ $n-m+x$ ลูก ลงใน $m-x$ กล่องนี้แบบสุ่ม

$$\text{จะมีจำนวนผลลัพธ์} = \binom{n-m+x+m-x-1}{n-m+x} = \binom{n-1}{m-x-1}$$

แต่การที่มีกล่องว่าง x กล่องใด ๆ จะมีทางเกิดขึ้นได้ $\binom{m}{x}$ หนทาง

ดังนั้น

จำนวนผลลัพธ์ที่มีกล่องว่าง x กล่อง $= \binom{m}{x}\binom{n-1}{m-x-1}$

จะได้ $$P(X = x) = \frac{\binom{m}{x}\binom{n-1}{m-x-1}}{\binom{m+n-1}{n}}$$

ข) ความน่าจะเป็นที่จะมีกล่องว่างอย่างน้อยที่สุด k กล่อง

$$= P(X \geqslant k)$$

$$= \sum_{j=k}^{m} \frac{\binom{m}{j}\binom{n-1}{m-j-1}}{\binom{m+n-1}{n}}$$

ค) เหตุการณ์ที่กล่องหนึ่งมีบอล i ลูก ก็คือเหตุการณ์ที่ใส่บอล $n-i$ ลูก ลงใน $m-1$ กล่องที่เหลือแบบสุ่ม

จะมีจำนวนผลลัพธ์ $= \binom{m-1+n-i-1}{n-i} = \binom{m+n-i-2}{n-i}$

$$P(\text{กล่องหนึ่งจะมีบอล } i \text{ ลูก}) = \frac{\binom{m+n-i-2}{n-i}}{\binom{m+n-1}{n}}$$

ง) $n = 5, \ m = 3$ จะได้

ง.1 P(ที่มีกล่องว่างเพียง 1 กล่อง)

$$= \frac{\binom{3}{1}\binom{5-1}{3-1-1}}{\binom{5+3-1}{5}} = \frac{4}{7}$$

ง.2 P(ที่มีกล่องว่างอย่างน้อยที่สุด 1 กล่อง)

$$= \sum_{j=1}^{3} \frac{\binom{3}{j}\binom{4}{2-j}}{\binom{7}{5}} = \frac{5}{7}$$

9 . 3 P(กล่องแรกมีบอล 1 ลูก)

$$= \frac{\binom{5+3-1-2}{5-1}}{\binom{7}{5}} = \frac{5}{21}$$

P(กล่องแรกมีบอล 3 ลูก)

$$= \frac{\binom{5+3-3-2}{5-3}}{\binom{7}{5}} = \frac{1}{7}$$

P(กล่องแรกมีบอล 5 ลูก)

$$= \frac{\binom{5+3-5-2}{5-5}}{\binom{7}{5}} = \frac{1}{21}$$

จ) n = 8, m = 5 จะได้

จ.1 P(กล่องว่าง 2 กล่อง) $= \dfrac{\binom{5}{2}\binom{8-1}{5-2-1}}{\binom{8+5-1}{8}} = \dfrac{14}{33}$

จ.2 P(กล่องว่างอย่างน้อย 2 กล่อง)

$$= \sum_{j=2}^{5} \frac{\binom{5}{j}\binom{8-1}{5-j-1}}{\binom{8+5-1}{8}} = \frac{19}{33}$$

1.3 P(กล่อง 4 มีบอล 1 ลูก) $= \dfrac{\binom{8+5-1-2}{8-1}}{\binom{12}{8}} = \dfrac{8}{33}$

$$P(\text{กล่อง 4 มีบอล 4 ลูก}) = \frac{\binom{7}{4}}{\binom{12}{8}} = \frac{7}{99}$$

$$P(\text{กล่อง 4 มีบอล 8 ลูก}) = \frac{1}{\binom{12}{8}} = \frac{1}{495}$$

15. จงคำนวณค่าของความน่าจะเป็นที่

15.1 คน 6 คน จะมีวันเกิดใน 2 เดือนเท่านั้น

15.2 คน 12 คน จะไม่มีใครเกิดเดือนเดียวกัน

15.3 อย่างน้อย 2 คน (ในระหว่างคน 56 คน) ที่มีวันเกิดร่วมกัน (กำหนด 1 ปีมี 365 วัน)

เฉลย

15.1 จำนวนผลลัพธ์ที่คนใดคนหนึ่งจะมีเดือนเกิดในเดือนใด ๆ $= 12^6$

คน 6 คน มีวันเกิดใน 2 เดือน จะมีทางเกิดขึ้นได้ $\binom{12}{2}$ หนทาง

ในแต่ละหนทางก็คือเหตุการณ์ที่มีอย่างมาก 5 คน ใน 6 คน มีวันเกิดเดือนเดียวกัน ซึ่งมีจำนวนผลลัพธ์ $= 2^6 - 2$

ดังนั้น

$$P(\text{คน 6 คนจะมีวันเกิดใน 2 เดือน}) = \frac{\binom{12}{2}(2^6-2)}{12^6} = \frac{11}{12^5}(2^5-1)$$

15.2 จำนวนผลลัพธ์ที่คน 12 คน เกิดเดือนไม่ซ้ำกัน $= 12!$

ดังนั้น

$$P(\text{คน 12 คนไม่มีใครเกิดเดือนเดียวกัน}) = \frac{12!}{12^{12}}$$

15.3 จำนวนผลลัพธ์ที่คน 56 คน จะมีวันเกิดวันใด ๆ ใน 1 ปี $= 365^{56}$

จำนวนผลลัพธ์ที่คน 56 คน จะมีวันเกิดไม่ซ้ำกัน $= 365^{(56)}$

$$P(\text{ไม่มีวันเกิดซ้ำกัน}) = \frac{365^{(56)}}{365^{56}}$$

$$P(\text{อย่างน้อย 2 คนมีวันเกิดร่วมกัน}) = 1 - \frac{365^{(56)}}{365^{56}}$$

16. ในปัญหาการสุ่มตัวอย่าง

16.1 แบบใส่กลับ หาก x_m เป็นฐานนิยมของ X จงแสดงให้เห็นจริงว่า

$$\frac{M}{N}(n+1)-1 \leqslant x_m \leqslant \frac{M}{N}(n+1)$$

16.2 แบบไม่ใส่กลับ จงแสดงให้เห็นจริงว่า

$$p_k(N-1) < P_k(N) \qquad \text{ก็ต่อเมื่อ} \qquad N < \frac{nM}{k}$$

$$p_k(N-1) > p_k(N) \qquad \text{ก็ต่อเมื่อ} \qquad N > \frac{nM}{k}$$

ในเมื่อ $p_k(N)$ = ความน่าจะเป็นที่มีค่าสูงสุดซึ่งคำนวณได้จากประชากรขนาด N

เฉลย

16.1 สุ่มตัวอย่างแบบใส่กลับ จะได้

$$P(X = x) = \binom{n}{x}\frac{M^x(N-M)^{n-x}}{N^n}$$

ถ้า x_m เป็นฐานนิยมของ x แสดงว่า

$$P(X = x_m) \geqslant P(X = x_m - 1) \quad \text{และ} \quad P(X = x_m) \geqslant P(X = x_m + 1)$$

นั่นคือ
$$\binom{n}{x_m}\frac{M^{x_m}(N-M)^{n-x_m}}{N^n} \geqslant \binom{n}{x_m+1}\frac{M^{x_m+1}(N-M)^{n-x_m-1}}{N^n} \qquad \text{..........} (1)$$

และ
$$\binom{n}{x_m}\frac{M^{x_m}(N-M)^{n-x_m}}{N^n} \geqslant \binom{n}{x_m-1}\frac{M^{x_m-1}(N-M)^{n-x_m+1}}{N^n} \qquad \text{..........}(2)$$

จาก (1) จะได้

$$\frac{N-M}{n-x_m} \geqslant \frac{M}{x_m+1}$$

$$x_m(N-M+M) \geqslant nM-N+M$$

$$x_m \geqslant \frac{M}{N}(n+1)-1$$

จาก (2) จะได้

$$\frac{M}{x_m} \geqslant \frac{N-M}{n-x_m+1}$$

$$M(n-x_m+1) \geqslant (N-M)x_m$$

$$M(n+1) = (N-M+M)x_m$$

$$\frac{M}{N}(n+1) \geqslant x_m$$

แสดงว่า

$$\frac{M}{N}(n+1)-1 \leqslant x_m \leqslant \frac{M}{N}(n+1)$$

16.2 สุ่มตัวอย่างแบบไม่ใส่กลับ จะได้

$$P(X = x) = \binom{n}{x}\frac{M^{(x)}(N-M)^{(n-x)}}{N^{(n)}}$$

ให้

$$p_k(N) = \text{ความน่าจะเป็นที่มีค่าสูงสุดคำนวณจากประชากร } N$$

$$= \binom{n}{k}\frac{M^{(k)}(N-M)^{(n-k)}}{N^{(n)}}$$

และ $\quad p_k(N-1) = \binom{n}{k}\frac{M^{(k)}(N-M-1)^{(n-k)}}{(N-1)^{(n)}}$

ถ้า $\quad p_k(N-1) < p_k(N)$ แล้ว

$$\binom{n}{k}\frac{M^{(k)}(N-M-1)^{(n-k)}}{(N-1)^{(n)}} < \binom{n}{k}\frac{M^{(k)}(N-M)^{(n-k)}}{N^{(n)}}$$

$$\frac{N-M-n+k}{N-n} < \frac{N-M}{N}$$

$$N^2-NM-Nn+Nk < N^2-NM-Nn+nM$$

$$N < \frac{nM}{k}$$

ในทางกลับกัน ถ้า $N < \frac{nM}{k}$ แล้ว $p_k(N-1) < p_k(N)$

แสดงว่า $p_k(N-1) < p_k(N)$ ก็ต่อเมื่อ $N < \frac{nM}{k}$

ในทำนองเดียวกัน

$$p_k(N-1) > p_k(N) \text{ ก็ต่อเมื่อ } N > \frac{nM}{k}$$