บทที่ 2
ตัวแปรเชิงสุ่ม
(Random Variable)

2.1 ตัวแปรเชิงสุ่มและชนิดของตัวแปรเชิงสุ่ม

นิยาม ตัวแปรเชิงสุ่ม X เป็นฟังก์ชันค่าจริง ซึ่งนิยามในโดเมนที่เป็นตัวแบบน่าจะเป็น (S, P) โดยการกำหนดตัวเลขค่าจริงให้แก่แต่ละผลทดลอง (sample point) ซึ่งเรียกว่าค่าของตัวแปรเชิงสุ่ม นั่นคือ มีพิสัย (range) เป็นตัวเลขจำนวนจริง

ผลลัพธ์ที่จะเป็นไปได้ทั้งหมดของตัวแปรเชิงสุ่ม X รวมกันเข้าเป็นชุดของตัวเลข เรียกว่า พิสัยของ X บางครั้งก็เรียกว่า space ของ X หากในชุดนี้มีจำนวนตัวเลข (ซึ่งอาจเป็นตัวเลขตัวเต็มหรือไม่เป็นเลขตัวเต็ม) มากที่สุด เป็นจำนวนที่นับได้ เราเรียกตัวแปรเชิงสุ่ม X ประเภทนี้ว่า **ตัวแปรเชิงสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง** (discrete random variable) ตัวแปรเชิงสุ่มประเภทนี้มักจะเกิดจากการนับเชิงสุ่ม (random counting)

มีบางกรณีที่ชุดของตัวเลขที่เป็นพิสัยของ X มีจำนวนตัวเลขมากเป็นอนันต์จนนับไม่ได้ (uncountably infinite) หรือ space ของ X เป็นแบบต่อเนื่อง เราเรียกตัวแปรเชิงสุ่มว่า **ตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่อง** (continuous random variable) ตัวแปรเชิงสุ่มชนิดนี้ส่วนมากเกิดจากการวัดเชิงสุ่ม

กำหนด X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มซึ่งนิยามในกลุ่มผลทดลอง S และ R เป็นพิสัยของ X หาก E เป็นสับเซตของ R เราคำนวณความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ E ซึ่งเราแทนด้วยสัญลักษณ์ $P(X \in E)$ ได้ด้วยวิธีการเดียวกันกับการคำนวณความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A

เราจึงกล่าวได้ว่า $P(X \in E)$ ก็คือ การกำหนดความน่าจะเป็นให้แก่เซต E ซึ่งเป็นสับเซตของ R (พิสัยของ X) ค่าที่ได้จะถูกกำหนดโดยใช้เซตฟังก์ชันน่าจะเป็น P และตัวแปรเชิงสุ่ม X และมักจะแทนด้วยสัญลักษณ์ $P_X(E)$ นั่นคือ

$$P(X \in E) = P_X(E) = P(A)$$

ในเมื่อ $A = \{s : s \in S$ และ $X(s) \in E\}$

ดังนั้น ตัวแปรเชิงสุ่ม X เป็นฟังก์ชันซึ่งทอดภาพความน่าจะเป็นจากกลุ่มผลทดลอง S ไปสู่พิสัยของ X เราเรียกความน่าจะเป็นที่ได้นี้ว่า induced probability

ฟังก์ชัน $P_X(E)$ ซึ่งเรานิยมเขียนสั้น ๆ ว่า P(E) จะมีคุณสมบัติเช่นเดียวกับคุณสมบัติของเซตฟังก์ชันน่าจะเป็น กล่าวคือ

1. $P(E) = P(A) > 0$
2. $P(R) = P(S) = 1$

   เมื่อ $S = \{s : s \in S$ และ $X(s) \in R\}$
3. $P(E_1 \cup E_2) = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) = P(E_1) + P(E_2)$

ในเมื่อ $A_1 \cup A_2 = \{s : s \in S$ และ $X(s) = E_1\} \cup \{s : s \in S$ และ $X(s) = E_2\}$

และ $A_1 \cap A_2 = \phi$ ดังนั้น $E_1 \cap E_2 = \phi$ ด้วย

นั่นคือ P(E) เป็นเซตฟังก์ชันน่าจะเป็นด้วย

เหตุการณ์ E อาจจะเป็นค่าใดค่าหนึ่งของ X หรืออาจเป็นค่าของ X ที่อยู่ในพิสัย (a, b) ก็ได้

เฉลยแบบฝึกหัด 2.1

1. จงพิจารณาตัวแปรเชิงสุ่ม X ต่อไปนี้ว่า เป็นตัวแปรเชิงสุ่มชนิดใด

		คำตอบ
1.1	จำนวนอุบัติเหตุที่เกิดขึ้นในโรงงานแห่งหนึ่งใน 1 วัน	ตัวแปรไม่ต่อเนื่อง
1.2	เวลาที่ใช้เดินทางจากบ้านจนถึงมหาวิทยาลัย	ตัวแปรต่อเนื่อง
1.3	จำนวนบัณฑิตที่จบในภาคการศึกษาหนึ่ง	ตัวแปรไม่ต่อเนื่อง
1.4	อัตราความเร็วของโมเลกุลของก๊าซ	ตัวแปรต่อเนื่อง
1.5	ภาษีเงินได้ที่ประชาชนคนหนึ่งต้องเสียในปีหนึ่ง	ตัวแปรต่อเนื่อง
1.6	ปริมาณน้ำฝนที่ตกใน 1 วันในเดือนตุลาคม	ตัวแปรต่อเนื่อง
1.7	จำนวนบ้านที่มีทั้งโทรทัศน์และรถยนต์ในหมู่บ้านหนึ่ง	ตัวแปรไม่ต่อเนื่อง
1.8	อายุการใช้งานของหลอดไฟ	ตัวแปรต่อเนื่อง

2. จงหาค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดของตัวแปรเชิงสุ่ม X (พิสัยของ X) ต่อไปนี้

   2.1 X เป็นผลต่างระหว่างจำนวนหัวและก้อยที่ได้จากการโยนเหรียญ 3 ครั้ง

   $R = \{x : x = -3, -1, 1, 3\}$, R = พิสัยของ X

   2.2 X เป็นจำนวนบอลสีขาวที่ได้จากการสุ่มบอล 3 ลูก โดยไม่ซ้ำกัน จากกล่องที่มีบอลสีขาว 4 ลูก และสีแดง 6 ลูก

   $R = \{x : x = 0, 1, 2, 3\}$

2.3 X เป็นจำนวนกล่องว่างเมื่อสุ่มบอล 10 ลูกลงในกล่อง 7 กล่อง

$R = \{x : x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

2.4 X เป็นอายุ (เดือน) ใช้งานของแบตเตอรี่ ซึ่งมีอายุใช้งานไม่เกิน 12 เดือน

$R = \{x : x \leqslant 12\}$

2.5 X เป็นรายได้ของพนักงานคนหนึ่งในสำนักงาน ซึ่งรายได้ของพนักงานจะอยู่ระหว่าง 900 ถึง 12,000 บาท

$R = \{x : 900 \leqslant x \leqslant 12{,}000\}$

3. X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มซึ่งมีพิสัยของ X เป็น $R = \{x : |x| \leqslant 10\}$ และ $P(E_1) = \frac{2}{7}$ ในเมื่อ $E_1 = \{x : 0 < x < 5\}$

3.1 จงพิสูจน์ว่า $P(E_2) < \frac{5}{7}$ ในเมื่อ $E_2 = \{x : 5 \leqslant x \leqslant 10\}$

3.2 ถ้า $P(E_3) = \frac{1}{7}$ ในเมื่อ $E_3 = \{x : -10 \leqslant x \leqslant 0\}$

จงหาค่าของ $P(E_3')$, $P(E_1 \cup E_3)$, $P(E_1' \cap E_2')$

3.1

$$\begin{aligned} P(R) &= P(|X| \leqslant 10) = P(-10 \leqslant X \leqslant 10) \\ 1 &= P((-10 \leqslant X \leqslant 0) \cup (0 < X < 5) \cup (5 \leqslant X \leqslant 10)) \\ &= P(-10 \leqslant X \leqslant 0) + P(0 < X < 5) + P(5 \leqslant X \leqslant 10) \\ &= P(-10 \leqslant X \leqslant 0) + P(E_1) + P(E_2) \\ 1 - \frac{2}{7} &= P(-10 \leqslant X \leqslant 0) + P(E_2) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P(E_2) < \frac{5}{7} \qquad (\because P(-10 \leqslant X \leqslant 0) > 0)$$

3.2

$$\begin{aligned} P(E_3) &= P(-10 \leqslant X \leqslant 0) = \frac{1}{7} \\ P(E_3') &= 1 - P(E_3) = \frac{6}{7} \\ P(E_1 \cup E_3) &= P(E_1) + P(E_3) \text{ , } E_1, E_3 \text{ ขจัดกัน} \\ &= \frac{2}{7} + \frac{1}{7} = \frac{3}{7} \\ P(E_1' \cap E_2') &= P(E_3) = \frac{1}{7} \end{aligned}$$

$\because$ E_1, E_2, E_3 เป็นส่วนแบ่งของ R

4. สุ่มเลข 2 ตัวโดยไม่ซ้ำกัน จากเลขจำนวนเต็มบวกที่มีค่าไม่เกิน 5 กำหนดตัวแปรเชิงสุ่ม X ดังนี้

$$X(s) = 1 \text{ ถ้า } s \text{ เป็นเลขที่มีค่าน้อยกว่า } 30$$

$$X(s) = 2 \text{ ถ้า } s \text{ เป็นเลขคู่ที่มีค่ามากกว่า } 30$$

และ $X(s) = 3$ อื่น ๆ

สมมติว่า P(E) กำหนดความน่าจะเป็น $\frac{1}{20}$ ให้แก่ผลลัพธ์ s แต่ละตัว จงหาเซตฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X และจงหาค่าของ P(E) เมื่อ E เป็นเซตของค่าใดค่าหนึ่งในพิสัย R

$$R = \{x : x = 1, 2, 3\}$$

กำหนด A_1 = เซตของเลขที่มีค่าน้อยกว่า 30

A_2 = เซตของเลขคู่ที่มีค่ามากกว่า 30

A_3 = เซตของเลขคี่ที่มีค่ามากกว่า 30

จะได้ $P_X(E) = P(A) = \sum_{s \in A} \frac{1}{20}$

เมื่อ E เป็นสับเซตของ $R = \{x : x = 1, 2, 3\}$

เซตฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X ก็คือ

$$P(E) = \frac{1}{40}(5x^2 - 21x + 32), \quad x = 1, 2, 3$$

จะได้
$$P(E) = \frac{8}{20}, \quad E = \{x : x = 1\}$$
$$= \frac{5}{20}, \quad E = \{x : x = 2\}$$
$$= \frac{7}{20}; \quad E = \{x : x = 3\}$$

5. กำหนดเซตฟังก์ชันน่าจะเป็นของตัวแปรเชิงสุ่ม X ดังนี้

$$P(E) = \int_E \frac{3x^2}{8} dx, \quad x \in R = \{x : 0 < x < 2\}$$

ถ้า $E_1 = \left\{x : 0 < x < \frac{1}{2}\right\}$ และ $E_2 = \{x : 1 < x < 2\}$ ต่างเป็นสับเซตของ R จงคำนวณค่าของ $P(E_1)$, $P(E_2)$, $P(E_1 \cup E_2)$, $P(E_1' \cap E_2')$

$$P(E) = \int_E \frac{3x^2}{8} dx, \quad x \in R = \{x : 0 < x < 2\}$$

จะได้ $P(E_1) = \int_0^{1/2} \frac{3x^2}{8}dx = \frac{x^3}{8}\Big|_0^{1/2} = \frac{1}{64}$

$$P(E_2) = \int_1^2 \frac{3x^2}{8}dx = \frac{x^3}{8}\Big|_1^2 = \frac{7}{8}$$

E_1, E_2 เป็นเหตุการณ์ขจัดกัน ดังนั้น

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) = \frac{57}{64}$$

$$E_1' \cap E_2' = \left\{x : \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1\right\}$$

$$P(E_1' \cap E_2') = \int_{1/2}^{1} \frac{3x^2}{8}dx = \frac{x^3}{8}\Big|_{1/2}^{1} = \frac{7}{64}$$

2.2 ฟังก์ชันมวลน่าจะเป็น (PROBABILITY MASS FUNCTION)

นิยาม ฟังก์ชัน $f(x)$ ซึ่งนิยามสำหรับค่า x แต่ละค่าในพิสัย R ของตัวแปรเชิงสุ่มไม่ต่อเนื่อง X และ $f(x) = P(X = x)$ สำหรับทุก ๆ ค่า x ที่อยู่ในพิสัย R จะเป็นฟังก์ชันมวลน่าจะเป็นของ X (หรือ p.f. ของ X) ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่มีสมบัติดังนี้

1. $f(x) \geqslant 0, \quad x \in R$
2. $\sum_{x \in R} f(x) = 1$

การคำนวณความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ E หาได้จาก

$$P(X \in E) = \sum_{x \in E} f(x)$$

แบบฝึกหัดที่ 2.2

1. จงหาค่าของ k ที่ทำให้ฟังก์ชัน $f(x)$ ต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันน่าจะเป็นของตัวแปรเชิงสุ่ม X

1.1 $f(x) = k, \quad x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$
$\quad = 0$ อื่น ๆ

$f(x)$ เป็นฟังก์ชันน่าจะเป็นของตัวแปรเชิงสุ่ม X ดังนั้น

$$\sum_{x=-3}^{3} k = 1$$

$$\Longrightarrow \quad 7k = 1$$

$$k = \frac{1}{7}$$

1.2 $f(x) = k(|x|+1)^2, \quad x = -1, 0, 1$

$= o$ อื่น ๆ

f(x) เป็นฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X ดังนั้น

$$\sum_{x=-1}^{1} k(|x|+1)^2 = 1$$

$$k(4+1+4) = 1$$

$$k = \frac{1}{9}$$

1.3 $f(x) = k\left(\frac{2}{3}\right)^x, \quad x = 1, 2, 3, \ldots$

$= o$ อื่น ๆ

f(x) เป็นฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X ดังนั้น

$$\sum_{x=1}^{\infty} k\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1$$

$$k\left[\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\ldots\right] = 1 \qquad \left(\text{เป็น G.P. ที่มี } a = r = \frac{2}{3}\right)$$

$$k\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} = ,$$

$$k = \frac{1}{2}$$

1.4 $f(x) = \frac{2}{27}, \quad x = 1$

$= \frac{x^2-1}{27}, \quad x = k, 2k, k > 0$

$= \frac{7}{27}, \quad x = 5$

$= 0$ อื่น ๆ

f(x) เป็นฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X ดังนั้น

$$\frac{2}{27}+\frac{k^2-1}{27}+\frac{4k^2-1}{27}+\frac{7}{27} = 1$$

$$5k^2 - 20 = 0$$

$$k = \pm\sqrt{\frac{20}{5}}$$

$$\Longrightarrow \quad k = 2 \qquad (k > 0)$$

2. ถ้า $f(x) = \frac{1}{6}, \quad x = 0.3\,k \quad k = 0, 1$

$= \frac{1}{9}, \quad x = 0.3k, \quad k = 2, 3, 5$

$= \frac{1}{15}, \quad x = 0.3k, \quad k = 4, 6, 7, 8, 9$

$= 0$ อื่น ๆ

เป็นฟังก์ชันน่าจะเป็นของตัวแปรเชิงสุ่ม X จงคำนวณค่าของ $P(E_1)$, $P(E_2)$, $P(E_1 \cap E_2)$ ถ้า $E_1 = \{x : 0 \leqslant x \leqslant 2\}$ และ $E_2 = \{x : 1 \leqslant x < 6\}$

$E_1 = \{x : 0 \leqslant x \leqslant 2\}$ จะได้

$$P(E_1) = \sum_{x=0}^{0.3(6)} f(x) = \frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{15}+\frac{1}{15} = \frac{4}{5}$$

$E_2 = \{x : 1 \leqslant x < 6\}$ จะได้

$$P(E_2) = \sum_{x=0.3(4)}^{0.3(9)} f(x) = \frac{1}{9}+5\times\frac{1}{15} = \frac{4}{9}$$

$E_1 \cap E_2 = \{x : 1 \leqslant x \leqslant 2\}$ จะได้

$$P(E_1 \cap E_2) = f(0.3\times 4) + f(0.3\times 5) + f(0.3\times 6)$$

$$= \frac{1}{15}+\frac{1}{9}+\frac{1}{15} = \frac{11}{45}$$

3. X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มไม่ต่อเนื่องซึ่งมีพิสัยของ X เป็น $R = \{x : x = 0, 1, 2, 3, 4\}$ ถ้า $P(1.5 < X < 3.5) = .55$, $P(X \leqslant 1.2) = .25$, $P(X = 2) = 2P(X = 1)$, และ $P(0.7 < X \leqslant 2) = .45$

จงหาฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X และคำนวณหาค่าของ

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} P(2-h < X \leqslant 3+h)$$

$f(x)$ เป็นฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X ดังนั้น

$$f(0)+f(1)+f(2)+f(3)+f(4) = 1 \qquad \text{..........} (1)$$

$$P(1.5 < X < 3.5) = f(2)+f(3) = 0.55 \qquad \text{..........} (2)$$

$$P(X \leqslant 1.2) = f(0)+f(1) = 0.25 \qquad \text{..........} (3)$$

$$P(0.7 < X \leqslant 2) = f(1)+f(2) = 0.45 \qquad \text{..........} (4)$$

$$P(X = 2) = 2P(X = 1) \Longrightarrow f(2) = 2f(1) \qquad \text{..........} (5)$$

จาก (4) และ (5) จะได้ $f(1) = 0.15,\ f(2) = 0.30$

จาก (3) จะได้ $f(0) = 0.25-0.15 = 0.10$

จาก (2) จะได้ $f(3) = 0.55-0.30 = 0.25$

จาก (1) จะได้ $f(4) = 1-0.55-0.25 = 0.20$

ดังนั้น ฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X ก็คือ

x	0	1	2	3	4
f(x)	0.10	0.15	0.30	0.25	0.20

ค่าของ $\lim\limits_{0<h\to 0} P(2-h < X \leqslant 3+h) = f(2)+f(3) = 0.55$

2.3 ฟังก์ชันหนาแน่นน่าจะเป็น (PROBABILITY DENSITY FUNCTION)

นิยาม X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่องที่มีพิสัยของ X เป็นเซตของจุดที่ต่อเนื่อง R ฟังก์ชัน $f(x)$ ของ X ซึ่งกำหนดไว้ว่า $f(x)dx = P(x < X \leqslant x+dx)$

จะเป็นฟังก์ชันหนาแน่นน่าจะเป็น (p.d.f.) ของ X ถ้า $f(x)$ มีคุณสมบัติดังนี้

1. $f(x) \geqslant 0,\quad x \in R$
2. $\int_R f(x)dx = 1$

ตัวอย่าง กำหนด

$$f(x) = \frac{3x^2-1}{6}, \quad -1 < x \leqslant 2$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

จงพิจารณาว่า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันหนาแน่นของตัวแปรเชิงสุ่ม X หรือไม่

วิธีทำ พิจารณาค่า $3x^2 - 1$ จะเห็นว่า มีค่ามากกว่า 0 ถ้า

$$3x^2 \geqslant 1$$

$$\Longrightarrow \qquad x \geqslant \sqrt{\frac{1}{3}} \qquad \text{หรือ} \qquad x \leqslant -\sqrt{\frac{1}{3}}$$

แสดงว่า $f(x) < 0, \quad -\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$

เราจึงสรุปว่า $f(x)$ ไม่เป็นฟังก์ชันหนาแน่นของ X

ข้อควรระวัง

ถ้าเราพิจารณาค่าของ $\int_{-1}^{2} \frac{3x^2 - 1}{6} dx$ จะเห็นว่ามีค่าเท่ากับ 1 แสดงว่ามีคุณสมบัติข้อ 2 ดังนั้น ถ้าเราพิจารณาคุณสมบัติข้อ 2 อย่างเดียว โดยละเลยคุณสมบัติข้อ 1 ก็จะทำให้เราผิดพลาดได้ง่าย

ตัวอย่าง จงพิจารณาว่า

$$\begin{aligned} f(x) &= 3\cos x\,, \quad \frac{\pi}{6} < x \leqslant \frac{\pi}{2} \\ &= 0 \qquad \text{อื่น ๆ} \end{aligned}$$

เป็นฟังก์ชันหนาแน่นของตัวแปรเชิงสุ่ม X หรือไม่

วิธีทำ พิจารณา $3\cos x$ จะเห็นว่าเป็นบวกทุกค่า $x, \ \frac{\pi}{6} < x \leqslant \frac{\pi}{2}$

แสดงว่า $f(x)$ มีคุณสมบัติ p.d.f. ข้อ (1)

ค่าของ
$$\begin{aligned} \int_{\pi/6}^{\pi/2} 3\cos x dx &= 3\sin x \Big|_{\pi/6}^{\pi/2} \\ &= 3\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

จะเห็นว่า $f(x)$ ไม่มีคุณสมบัติ p.d.f. ข้อ 2

เราจึงสรุปว่า $f(x)$ ไม่เป็นฟังก์ชันหนาแน่นของ X

อาศัยนิยามของฟังก์ชันหนาแน่นของตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่อง X เราสามารถคำนวณความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ E ซึ่งเป็นสับเซตของ R ได้ดังนี้

$$P(X \in E) = \int_{E} f(x) dx$$

ถ้า E ไม่เป็นสับเซตของ R แต่มีบางส่วนของ E คือ E_1 เป็นสับเซตของ R เราจะได้

$$P(X \in E) = \int_{E_1} f(x)dx$$

ตัวอย่าง x เป็นตัวแปรเชิงสุ่มทีมีฟังก์ชันหนาแน่น

$$f(x) = \frac{5-2x}{20}, -2 < x < 2$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

จงหาค่าของ $P(X^2 \geqslant 1)$, $P(0 < x \leqslant 3)$

วิธีทำ

$$P(X^2 \geqslant 1) = P(X \leqslant -1, x \geqslant 1)$$
$$= P(X \leqslant -1) + P(X \geqslant 1)$$
$$= \int_{-2}^{-1} \frac{5-2x}{20}dx + \int_{1}^{2} \frac{5-2x}{20}dx$$
$$= \frac{5(-1+2)-(1-4)+5(2-1)-(4-1)}{20 \qquad\qquad 20} = \frac{1}{2}$$

$$P(0 < x \leqslant 3) = \int_{0}^{2} \frac{5-2x}{20}dx$$
$$= \frac{5(2-0)-(4-0)}{20} = \frac{3}{10}$$

แบบฝึกหัดที่ 2.3

1. จงหาค่า k ที่ทำให้ฟังก์ชัน f(x) ต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันหนาแน่นน่าจะเป็นของตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่อง X

1.1 $f(x) = \frac{k}{\sqrt{x}}, \quad 0 < x < 1$

$= 0$ อื่น ๆ

f(x) เป็นฟังก์ชันหนาแน่นของ X ดังนั้น

$$\int_{0}^{1} \frac{k}{\sqrt{x}}dx = 1$$

$$2k\sqrt{x}\Big|_0^1 = 2k = 1$$

$$k = \frac{1}{2}$$

1.2 $f(x) = k - |1-x|, \quad 0 < x < 2$

$= 0$ อื่น ๆ

$f(x)$ เป็นฟังก์ชันหนาแน่นของ X ดังนั้น

$$\int_0^2 (k - |1-x|)dx = 1$$

$$\int_0^1 (k-1+x)dx + \int_1^2 (k+1-x)dx = 1$$

$$\left(k-1+\frac{1}{2}\right) + \left(k+1-\frac{3}{2}\right) = 1$$

$$k = 1$$

1.3 $f(x) = x + \frac{1}{2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant k$

$= 0$ อื่น ๆ

$f(x)$ เป็นฟังก์ชันหนาแน่นของ X ดังนั้น

$$\int_0^k \left(x+\frac{1}{2}\right)dx = 1$$

$$\frac{k^2}{2} + \frac{k}{2} = 1$$

$$k^2 + k - 2 = 0$$

$$k = -2, 1$$

จะได้ $k = 1 \qquad (\because \ k > 0)$

1.4 $f(x) = \frac{1}{3}(1-x)^2, \quad k < x < 2$

$= 0$ อื่น ๆ

$f(x)$ เป็นฟังก์ชันหนาแน่นของ X ดังนั้น

$$\int_k^2 \frac{1}{3}(1-x)^2 dx = 1$$

$$-\frac{(1-x)'}{9}\Big|_{k}^{2} - \quad \frac{(1-k)^3-(1-2)^3}{9} = 1$$

$$1-3k+3k^2-k^3+1 = 9$$

$$k^3-3k^2+3k+7 = 0$$

$$(k+1)(k^2-4k+7) = 0$$

จะได้ $\quad k = -1$

1.5 $\quad f(x) = \frac{1}{2}x^2 \quad , \quad 0 \leqslant x < 1$

$$= \frac{1}{2}\{x^2-3(x-1)^2\} \ , 1 \leqslant x < 2$$

$$= k\{x^2-3(x-1)^2+3(x-2)^2\} \ , \ 2 \leqslant x < 3$$

$= 0$ อื่น ๆ

$f(x)$ เป็นฟังก์ชันหนาแน่นของ x ดังนั้น

$$\int_0^1 \frac{x^2}{2}dx + \int_1^2 \frac{1}{2}\{x^2-3(x-1)^2\}dx + \int_2^3 k\{x^2-3(x-1)^2+3(x-2)^2\}dx = 1$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\left\{\frac{8-1}{3}-1+0\right\}+k\left\{\frac{27-8}{3}-8+1+1-0\right\} = 1$$

$$k = \frac{1-\frac{5}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

2. กล่าวกันว่า เวลาที่ต้องคอยรถเมล์ที่ป้ายรถหน้า มร. จะเป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันหนาแน่นน่าจะเป็น f(x) ซึ่งกำหนดไว้ดังนี้

$$f(x) = 4x-2x^2 \ , \quad 0 \leqslant x \leqslant 2$$

$= 0$ อื่น ๆ

ท่านเห็นด้วยกับคำกล่าวนี้หรือไม่ ถ้าไม่เห็นด้วย ท่านคิดว่าฟังก์ชันที่ถูกต้องควรมีรูปอย่างไร

พิจารณา $4x-2x^2 = 2x(2-x)$ จะเห็นว่ามีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 0 ทุก ๆ ค่า $0 \leqslant x \leqslant 2$ แสดงว่า f(x) มีคุณสมบัติข้อที่ 1

ค่าของ $\int_0^2 (4x-2x^2)dx = 4\cdot\frac{4}{2}-2\cdot\frac{8}{3} = \frac{8}{3} > 1$

แสดงว่า $f(x)$ ไม่มีคุณสมบัติข้อที่ 2

ดังนั้น $f(x)$ ไม่เป็นฟังก์ชันหนาแน่นของ X

ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันหนาแน่นของ X ฟังก์ชันที่ถูกต้องก็คือ

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{3}{4}(2x-x^2)\ , \quad 0 \leqslant x \leqslant 2 \\
&= 0 \qquad \text{อื่น ๆ}
\end{aligned}
$$

3. X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่องที่ p.d.f.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{x^2}\ , \quad 1 < x < \infty \\
&= 0 \qquad \text{อื่น ๆ}
\end{aligned}
$$

ถ้า $E_1 = \{x : 1 < x < 2\}$ และ $E_2 = \{x : 4 < x < 5\}$ จงคำนวณค่าของ $P(E_1 \cup E_2)$, $P(E_1 \cap E_2)$ และ $P(E_1|E_2)$

จะเห็นได้ว่า E_1 และ E_2 เป็นเหตุการณ์ขจัดกัน ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
P(E_1 \cup E_2) &= P(E_1)+P(E_2) \\
&= \int_1^2 \frac{1}{x^2}dx + \int_4^5 \frac{1}{x^2}dx \\
&= -\left(\frac{1}{2}-1\right) - \left(\frac{1}{5}-\frac{1}{4}\right) \quad = \quad \frac{11}{20}
\end{aligned}
$$

$$P(E_1 \cap E_2) = 0$$

$$P(E_1|E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} = 0$$

4. X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่องที่มี p.d.f กำหนดไว้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{9}(x+1)\ , \quad 0 \leqslant x < c \\
&= \frac{4}{9}\left(x-\frac{1}{2}\right)\ , \quad c \leqslant x < \frac{3}{2} \\
&= \frac{4}{9}\left(\frac{5}{2}-x\right)\ , \quad \frac{3}{2} \leqslant x < 2 \\
&= \frac{1}{9}(4-x)\ , \quad 2 \leqslant x < 3 \\
&= \frac{1}{9}\ , \quad 3 \leqslant x < k \\
&= 0 \qquad \text{อื่น ๆ}
\end{aligned}
$$

$P(E) = \frac{1}{2}$, เมื่อ $E = \{x : 0 \leqslant x \leqslant 2\}$ จงหาค่าของ c และ k

$$P(E) = P(0 \leqslant X \leqslant 2)$$

$$\frac{1}{2} = \int_0^c \frac{1}{9}(x+1)dx + \int_c^{3/2} \frac{4}{9}\left(x-\frac{1}{2}\right)dx + \int_{3/2}^2 \frac{4}{9}\left(\frac{5}{2}-x\right)dx$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{9}\left(\frac{c^2}{2}+c\right) + \frac{4}{9}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{9}{4}-c^2\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-c\right)\right\} + \frac{4}{9}\left\{\frac{5}{2}\left(2-\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(4-\frac{9}{4}\right)\right\}$$

$$\Longrightarrow \quad c^2-2c+1 = (c-1)^2 = 0$$

จะได้ค่าของ $c = 1$

เนื่องจาก $E' = \{x : 2 < x < k\}$ ดังนั้น

$$P(E') = P(2 < X < k)$$

$$1 - P(E) = \int_2^3 \frac{1}{9}(4-x)dx + \int_3^k \frac{1}{9}dx$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{9}\left\{4(3-2)-\frac{1}{2}(9-4)\right\}+\frac{1}{9}(k-3)$$

จะได้ค่าของ $k = 6$

5. สมมติว่า $f(x) = c \sin x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{3}$

$= 0$ อื่น ๆ

เป็นฟังก์ชันหนาแน่นน่าจะเป็นของตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่อง X จงหา

5.1 c

5.2 $P\left(\cos X \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

5.3 $P\left(X > \frac{\pi}{6} \middle| X \leqslant \frac{\pi}{4}\right)$

5.1 $f(x)$ เป็นฟังก์ชันหนาแน่นของ X ดังนั้น

$$\int_0^{\pi/3} c \sin x \, dx = 1$$

$$-c\cos x\Big|_0^{\pi/3} = -c\left(\frac{1}{2}-1\right) = 1$$

$$\Longrightarrow \quad c = 2$$

แสดงว่า $f(x) = 2 \sin x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{3}$

5.2 $$P\left(\cos X \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = P\left(\cos X \leqslant \cos\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= P\left(X \geqslant \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/3} 2\sin x\,dx$$

$$= -2\left(\cos\frac{\pi}{3} - \cos\right)$$

$$= -2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0.414$$

5.3 $$P\left(X > \frac{\pi}{6} \middle| X \leqslant \frac{\pi}{4}\right) = \frac{P\left(\frac{\pi}{6} < X \leqslant \frac{\pi}{4}\right)}{P\left(X \leqslant \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$= \frac{\int_{\pi/6}^{\pi/4} 2\sin x\,dx}{\int_{0}^{\pi/4} 2\sin x\,dx}$$

$$\frac{-2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{-2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)} = 0.542$$

6. k ควรจะมีค่าเท่าใด จึงจะทำให้

$$f(x) = ke^{-|x|}, \quad -\infty < x < \infty$$

มีคุณสมบัติเป็นฟังก์ชันหนาแน่นน่าจะเป็นของตัวแปรเชิงสุ่ม X แล้วคำนวณค่าของ

6.1 $\lim\limits_{h\to\infty} P\left(\frac{1}{h} \leqslant X \leqslant 2 - \frac{1}{h}\right)$

6.2 $P\left(\lim\limits_{h\to\infty}\left\{\frac{1}{h} \leqslant X \leqslant 2 - \frac{1}{h}\right\}\right)$

6.3 $\lim\limits_{h\to 0} P(5 < X \leqslant 5+h)$

6.4 $P\left(\lim\limits_{h\to 0}\{5 < x \leqslant 5+h\}\right)$

6.5 จงเปรียบเทียบผลที่ได้ระหว่าง (6.1) กับ (6.2) และผลระหว่าง (6.3) กับ (6.4) ท่านจะสรุปผลอย่างไร

f(x) เป็นฟังก์ชันหนาแน่นของ X ดังนั้น

$$\int_{-\infty}^{\infty} ke^{-|x|}dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{0} ke^{x}dx + \int_{0}^{\infty} ke^{-x}dx = 1$$

$$k(e^{0} - e^{-\infty}) - k(e^{-\infty} - e^{0}) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad k = \frac{1}{2}$$

6.1 $\lim\limits_{h\to\infty} P\left(\frac{1}{h} \leqslant X \leqslant 2-\frac{1}{h}\right) = \lim\limits_{h - m}\left\{\int_{I/h}^{2-1/h} \frac{1}{2}e^{-x}dx\right\}$

$$= \lim_{h\to\infty}\left\{\frac{1}{2}\left(e^{-1/h} - e^{-2+1/h}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}(e^{0} - e^{-2}) = \frac{1}{2}(1 - e^{-2})$$

6.2 $P\left(\lim\limits_{h\to\infty}\left\{\frac{1}{h} \leqslant x \leqslant 2-\frac{1}{h}\right\}\right) = P(0 < x < 2)$

$$= \int_{0}^{2}\frac{1}{2}e^{-x}dx$$

$$= \frac{1}{2}(e^{0} - e^{-2}) = \frac{1}{2}(1 - e^{-2})$$

6.3 $\lim\limits_{h\to 0} P(5 < X \leqslant 5+h) = \lim\limits_{h\to 0}\left\{\int_{5}^{5+h} \frac{1}{2}e^{-x}dx\right\}$

$$= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{1}{2}(e^{-5} - e^{-5-h})\right\}$$

$$= \frac{1}{2}(e^{-5} - e^{-5}) = 0$$

6.4 $P\left(\lim\limits_{h\to 0}\{5 < x \leqslant 5+h\}\right) = P(\phi) = 0$

6.5 จะเห็นได้ว่า ผลลัพธ์ของ 6.1 และ 6.2 กับผลลัพธ์ของ 6.3 กับ 6.4 จะมีค่าเท่ากัน สรุปได้ว่า การหาค่าความน่าจะเป็นของลิมิตของเซตใด ๆ เราอาจจะหาลิมิตของเซตก่อน แล้วหาค่าความน่าจะเป็น หรือจะหาค่าความน่าจะเป็นของเซตนั้น แล้วดูว่าลิมิตของผลที่ได้จะเป็นอย่างไรก็ได้

2.4 ฟังก์ชันการแจกแจงสะสม (CUMULATIVE DISTRIBUTION FUNCTION)

นิยาม X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชัน F(x) แสดงถึงความน่าจะเป็นที่ X จะมีค่าไม่เกินค่าจริง x กล่าวคือ

$$F(x) = P(X \leqslant x) = \begin{cases} \sum\limits_{a \leqslant x} f(a) & , \text{ X เป็นตัวแปรไม่ต่อเนื่อง} \\ \int_{-\infty}^{x} f(x)dx & , \text{ X เป็นตัวแปรต่อเนื่อง} \end{cases}$$

เราเรียก F ว่าเป็นฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ X ถ้า F มีคุณสมบัติดังนี้

1. F จะเป็นฟังก์ชันซึ่งมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อ x มีค่าใหญ่ขึ้น กล่าวคือ

$$F(x+h) \geqslant F(x), \quad \forall h > 0$$

2. $$\lim_{x \to -\infty} F(x) = F(-\infty) = 0$$

และ $$\lim_{x \to \infty} F(x) = F(+\infty) = 1$$

หรือ $$0 \leqslant F(x) \leqslant 1$$

3. F เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องทางขวา กล่าวคือ

$$\lim_{h \to 0} F(x+h) = F(x), \quad \forall h > 0, \quad -\infty < x < \infty$$

ตัวอย่าง X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันหนาแน่น

$$f(x) = \frac{5}{2x^2}, \quad 2 \leqslant x < 10$$
$$= 0 \qquad \text{อื่น ๆ}$$

จงหาฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ X และหาค่าของ F(5), F(6), F(8) และ $\lim\limits_{h \to 0} F(8+h)$

วิธีทำ

$$\int_2^x \frac{5}{2x^2}dx = -\frac{5}{2x}\bigg|_2^x = \frac{5}{4} - \frac{5}{2x}, \quad 2 \leqslant x < 10$$

ดังนั้น ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ X ก็คือ

$$F(x) = 0 \qquad , \; x < 2$$
$$= \frac{5}{4}\left(1 - \frac{2}{x}\right), \quad 2 \leqslant x < 10$$
$$= 1 \qquad , \; x \geqslant 10$$

จะได้ค่าของ

$$F(5) = \frac{5}{4}\left(1-\frac{2}{5}\right) = 0.75$$

$$F(6) = \frac{5}{4}\left(1-\frac{2}{6}\right) = 0.83$$

$$F(8) = \frac{5}{4}\left(1-\frac{2}{8}\right) = 0.94$$

$$\lim_{h\to 0} F(8+h) = \lim_{h\to 0}\left\{\frac{5}{4}\left(1-\frac{2}{8+h}\right)\right\} = 0.94$$

อาศัยนิยามและคุณสมบัติของฟังก์ชันการแจกแจงสะสม เราจะได้ทฤษฎีเกี่ยวกับฟังก์ชันการแจกแจงสะสมดังต่อไปนี้

ทฤษฎีที่ 2.4.1 ถ้า a และ b เป็นค่าคงที่ใด ๆ ของ X และ $b > a$ แล้ว

$$P(a < X \leqslant b) = F_X(b) - F_X(a)$$

ทฤษฎีที่ 2.4.2

$$P(X < a) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} F_X(a-h)$$

ทฤษฎีที่ 2.4.3

$$P(X = a) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \{F_X(a) - F_X(a-h)\}$$

ทฤษฎีที่ 2.4.4

$$P(X > a) = 1 - F_X(a)$$

จากนิยามฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่อง X

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

เราจะได้

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\int_{-\infty}^{x} f(x)dx\right) = f(x)$$

แบบฝึกหัดที่ 2.4

1. X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มไม่ต่อเนื่องที่มีฟังก์ชันน่าจะเป็น P_X และฟังก์ชันการแจกแจงสะสม F_X

   1.1 ถ้า $k > 0$ จงคำนวณค่าของ $P(|X| \leq k)$ และ $P(|X| \geq k)$ ในเทอมของ F_X และ P_X

   1.2 จงพิสูจน์ว่า

   1.2.1 $P(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a) - P_X(b)$

   1.2.2 $P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) + P_X(a)$

1.1

$$
\begin{aligned}
P(|X| \leq k) &= P(-k \leq X \leq k) \\
&= P(X = -k) + P(-k < X \leq k) \\
&= P_X(-k) + F_X(k) - F_X(-k) \\
P(|X| \geq k) &= P(X \leq -k, X \geq k) \\
&= P(X \leq -k) + P(X \geq k) \\
&= F_X(-k) + P(X = k) + P(X > k) \\
&= F_X(-k) + P_X(k) + 1 - F_X(k)
\end{aligned}
$$

1.2.1 เนื่องจาก $(X = b)$ และ $(a < X < b)$ เป็นส่วนแบ่งของ $(a < X \leq b)$

ดังนั้น $P(X = b) + P(a < X < b) = P(a < X \leq b)$

อาศัยนิยาม P_X และทฤษฎีที่ 2.4.1 เราจะได้

$$P_X(b) + P(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a)$$

นั่นคือ $$P(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a) - P_X(b)$$

1.2.2 เราแยกเหตุการณ์ $(a \leq X \leq b)$ เป็นเหตุการณ์ขจัดกัน 2 เหตุการณ์ คือ $(a < X \leq b)$ และ $(X = a)$ ดังนั้น

$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) + P(X = a)$$

อาศัยทฤษฎี 2.4.1 และนิยามของ P_X เราจะได้

$$P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) + P_X(a)$$

2. X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มไม่ต่อเนื่องที่มีฟังก์ชันน่าจะเป็น $f(x)$ กำหนดไว้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x}{10}, \quad x = 1, 2, 3, 4 \\
&= 0 \quad \text{อื่น ๆ}
\end{aligned}
$$

จงหาฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ X อาศัยฟังก์ชันที่ได้จงแสดงให้เห็นจริงว่า

2.1 $\lim\limits_{0<h\to 0} P(2-h < X \leqslant 2) = P(\lim\limits_{0<h\to 0} \{x : 2-h < x \leqslant 2\})$

2.2 $\lim\limits_{0<h\to 0} P(2 < X \leqslant 3+h) = P(\lim\limits_{0<h\to 0} \{x : 2 < x \leqslant 3+h\})$

ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ X ก็คือ

$$
\begin{aligned}
F(x) &= 0 && , \ x < 1 \\
&= \frac{1}{10} && , \ 1 \leqslant x < 2 \\
&= \frac{1}{10}+\frac{2}{10} = \frac{3}{10} && , \ 2 \leqslant x < 3 \\
&= \frac{3}{10}+\frac{3}{10} = \frac{6}{10} && , \ 3 \leqslant x < 4 \\
&= \frac{6}{10}+\frac{4}{10} = 1 && , \ x \geqslant 4
\end{aligned}
$$

2.1
$$
\begin{aligned}
\lim_{0<h\to 0} P(2-h < X \leqslant 2) &= \lim_{0<h\to} \{F(2)-F(2-h)\} \\
&= F(2) - \lim_{0<h\to 0} F(2-h) \\
&= \frac{3}{10}-\frac{1}{10} = \frac{2}{10}
\end{aligned}
$$

$$P(\lim_{0<h\to 0} \{x : 2-h < x \leqslant 2\}) = P(X = 2) = \frac{2}{10}$$

แสดงว่า $\lim\limits_{0<h\to 0} P(2-h < X \leqslant 2) = P(\lim\limits_{0<h\to 0} \{x : 2-h < X \leqslant 2\})$

2.2
$$
\begin{aligned}
\lim_{0<h\to 0} P(2 < X \leqslant 3+h) &= \lim_{0<h\to 0} \{F(3+h)-F(2)\} \\
&= \lim_{0<h\to 0} F(3+h)-F(2) \\
&= \frac{6}{10}-\frac{3}{10} = \frac{3}{10}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(\lim_{0<h\to 0} \{x : 2 < x \leqslant 3+h\}) &= P(2 < X \leqslant 3) \\
&= F(3)-F(2) \\
&= \frac{6}{10}-\frac{3}{10} = \frac{3}{10}
\end{aligned}
$$

แสดงว่า $\lim\limits_{0<h\to 0} P(2 < X \leqslant 3+h) = P(\lim\limits_{0<h\to 0} \{x : 2 < x \leqslant 3+h\})$

3. X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่องที่มีฟังก์ชันหนาแน่นน่าจะเป็น f(x) กำหนดไว้ดังนี้

$$f(x) = 2\sin x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{3}$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

จงหาฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ X และ $P\left(X = \frac{\pi}{4}\right)$, $P(3\tan^2 X > 1)$

$$\because \int_0^x 2\sin x dx = -2\cos x\Big|_0^x = 2(1-\cos x), \quad 0 < x < \frac{\pi}{3}$$

ดังนั้น

$$F(x) = 0 \quad , \quad x < 0$$
$$= 2(1-\cos x) \, , \quad 0 \leqslant x < \frac{\pi}{3}$$
$$= 1 \quad , \quad x \geqslant \frac{\pi}{3}$$

เป็นฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ X

$$P\left(X = \frac{\pi}{4}\right) = F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F\left(\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= 2\left(1-\cos\frac{\pi}{4}\right) - 2\left(1-\cos\frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$P(3\tan^2 X > 1) = P\left(\tan X > \frac{1}{\sqrt{3}}, \tan X < -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$
$$= P\left(\tan X > \tan\frac{\pi}{6}\right) + P\left(\tan X < \tan -\frac{\pi}{6}\right)$$
$$= P\left(X > \frac{\pi}{6}\right) + P\left(X < -\frac{\pi}{6}\right)$$
$$= 1 - F\left(\frac{\pi}{6}\right) + F\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$
$$= 1 - 2\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 0 = 0.732$$

4. สมมติว่า $f(x) = x, \quad 0 < x \leqslant 1$
$$= 2-x, \quad 1 < x \leqslant 2$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

เป็นฟังก์ชันหนาแน่นน่าจะเป็นของ X จงหา

4.1 ฟังก์ชันแจกแจงสะสมของ X

4.2 $P\left(\frac{1}{2} < X \leqslant \frac{3}{2}\right)$

4.3 $P(5X \leqslant 8)$

4.1 ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ X กำหนดได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
F(x) &= 0 \quad , \quad x < 0 \\
&= \int_0^x x\,dx = \frac{x^2}{2} \, , \quad 0 \leqslant x < 1 \\
&= \frac{1^2}{2} + \int_1^x (2-x)dx = \frac{4x - x^2 - 2}{2}, \quad 1 \leqslant x < 2 \\
&= \frac{4 \times 2 - 2^2 - 2}{2} = 1, \quad x \geqslant 2
\end{aligned}
$$

4.2 $$P\left(\frac{1}{2} < X \leqslant \frac{3}{2}\right) = F\left(\frac{3}{2}\right) - F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4\left(\frac{3}{2}\right) - \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2}{2} - \frac{\frac{1}{4}}{2} = \frac{3}{4}$$

4.3 $$P(5X \leqslant 8) = P\left(X \leqslant \frac{8}{5}\right) = \frac{4\left(\frac{8}{5}\right) - \left(\frac{8}{5}\right)^2 - 2}{2} = \frac{23}{25}$$

5. จงคำนวณค่าของ p และ q ที่ทำให้

$$
\begin{aligned}
F(x) &= 0 \quad , \quad x < 0 \\
&= \frac{x}{4} \quad , \quad 0 \leqslant x < 1 \\
&= \frac{p+x}{12} \quad , \quad 1 \leqslant x < 2 \\
&= \frac{x}{6} \quad , \quad 2 \leqslant x < 3 \\
&= \frac{1}{2} \quad , \quad 3 \leqslant x < 4 \\
&= \frac{x}{8} \quad , \quad 4 \leqslant x < q \\
&= 1 \quad , \quad x \geqslant q
\end{aligned}
$$

เป็นฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่อง X จากผลที่ได้

5.1 จงเขียนกราฟแสดง $F(x)$

5.2 จงคำนวณค่าของ $P(E_1)$, $P(E_2)$ และ $P(E_1|E_2)$ ในเมื่อ

$$E_1 = \{x : 1 < x \leqslant 3\}, \quad E_2 = \{x : 2 < x \leqslant 5\}$$

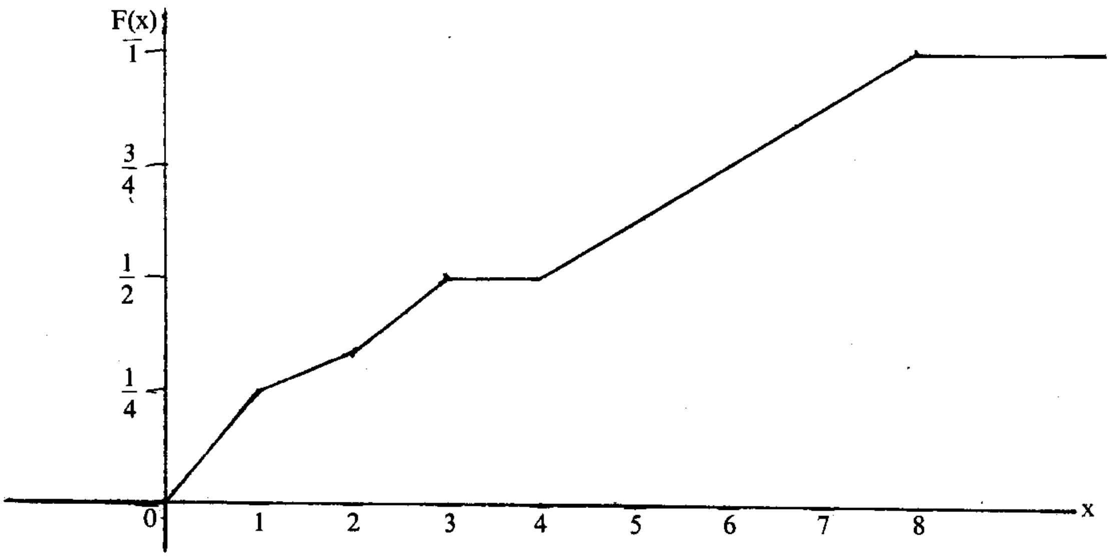
$F(x)$ เป็นฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่อง X ดังนั้น

$$P(X = 1) = F(1) - F(1^-) = \frac{p+1}{12} - \frac{1}{4} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad P = \frac{12}{4} - 1 = 2$$

และ $$P(X = q) = F(q) = F(q^-) = 1 - \frac{q}{8} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad q = 8$$



5.2 $$P(E_1) = P(1 < X \leqslant 3)$$

$$= F(3) - F(1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$P(E_2) = P(2 < X \leqslant 5)$$

$$= F(5) - F(2) = \frac{5}{8} - \frac{2}{6} = \frac{7}{24}$$

$$P(E_1 \cap E_2) = P(2 < X \leqslant 3)$$

$$= F(3) - F(2) = \frac{1}{2} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$$

$$P(E_1|E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{7}{24}} = \frac{4}{7}$$

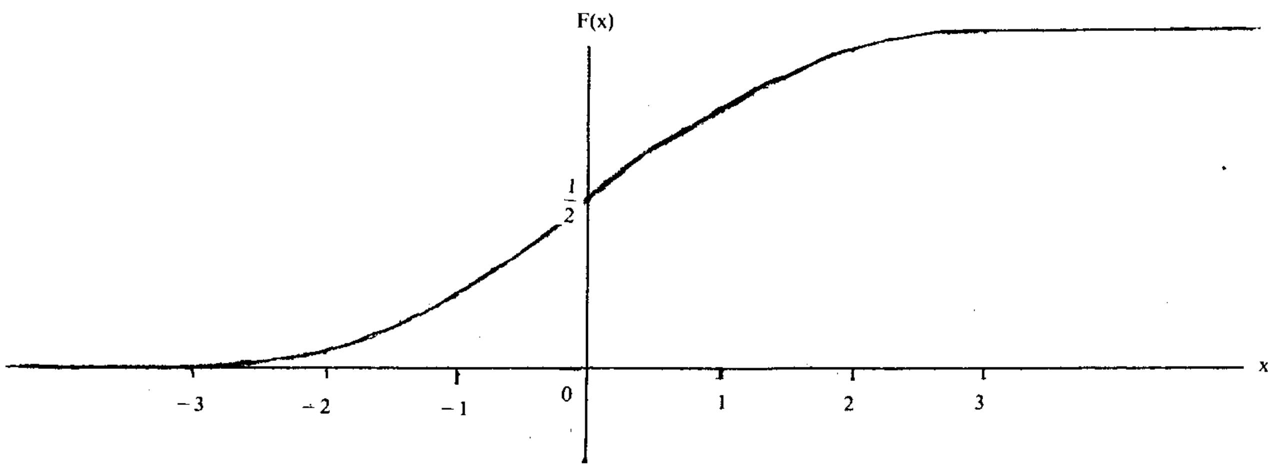
6. X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่องที่มีฟังก์ชันการแจกแจงสะสม F(x) กำหนดไว้ดังนี้

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \; x < -3 \\ \frac{(x+3)^2}{18} & , \; -3 \leqslant x < 0 \\ 1 - \frac{(3-x)^2}{18} & , \; 0 \leqslant x < 3 \\ 1 & , \; x \geqslant 3 \end{cases}$$

6.1 จงเขียนกราฟแสดง F(x)

6.2 จงคำนวณค่าของ $F(-1)$, $F(1.5)$ และ $P(|X| < 1.5)$

6.3 จงหาฟังก์ชันหนาแน่นน่าจะเป็นของ X และเขียนแสดงด้วยกราฟ



6.2

$$F(-1) = \frac{(-1+3)^2}{18} = \frac{2}{9}$$

$$F(1.5) = 1 - \frac{(3-1.5)^2}{18} = \frac{7}{8}$$

$$P(|X| < 1.5) = P(-1.5 < X < 1.5)$$

$$= F(1.5) - F(-1.5)$$

$$= \frac{7}{8} - \frac{(-1.5+3)^2}{18} = \frac{3}{4}$$

6.3 $$\frac{d(0)}{dx} = 0 = \frac{d(1)}{dx}$$

$$\frac{d\left\{\frac{(x+3)^2}{18}\right\}}{dx} = \frac{2(x+3)}{18} \quad , \quad -3 \leqslant x < 0$$

$$\frac{d\left\{1-\frac{(3-x)^2}{18}\right\}}{dx} = \frac{2(3-x)}{18} \quad , \quad 0 \leqslant x < 3$$

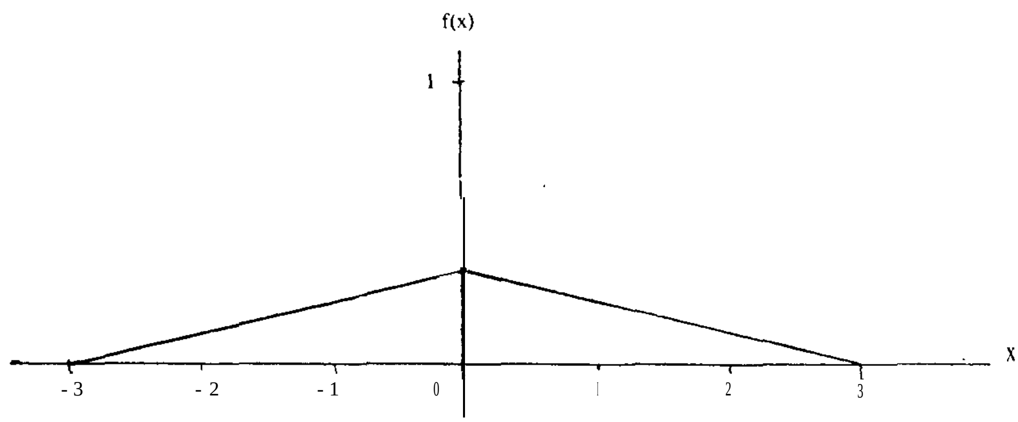
ดังนั้น ฟังก์ชันหนาแน่นของ X จะกำหนดได้ดังนี้

$$f(x) = \frac{x+3}{9} \quad , \quad -3 \leqslant x < 0$$

$$= \frac{3-x}{9} \quad , \quad 0 \leqslant x < 3$$

$$= 0 \qquad \text{อื่น ๆ}$$

หมายเหตุ เราอาจเขียนรวมกันว่า $f(x) = \frac{3-|x|}{9}, \quad -3 \leqslant x \leqslant 3$



7. กำหนด $F(x) = a + b \tan^{-1}x, \quad -\infty < x < \infty$

   7.1 จงหาค่าของ a และ b ที่ทำให้ F(x) เป็น c.d.f. ของ X

   7.2 จงหา p.d.f. ของ X

   7.3 จงคำนวณค่าของ

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} P(-1 < X \leqslant 1+h)$$

7.1 F(x) เป็นฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ X ดังนั้น

$$F(-\infty) = a + b\tan^{-1}(-\infty) = 0 \qquad \text{..........(1)}$$

และ
$$F(\infty) = a + b\tan^{-1}(\infty) = 1 \qquad \text{..........(2)}$$

(2) − (1) ;
$$b\{\tan^{-1}(\infty) - \tan^{-1}(-\infty)\} = 1$$

$$b = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\pi} \qquad \left(\tan\frac{\pi}{2} = \infty,\ \tan\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\infty\right)$$

แทนค่า b ใน (1) จะได้

$$a = -\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

7.2
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\tan^{-1}x\right) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{(1+x)^2} \quad , -\infty < x < \infty$$

จะได้ฟังก์ชันหนาแน่นของ X

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad -\infty < x < \infty$$

7.3
$$\begin{aligned}\lim_{0<h\to 0} P(-1 < X \leqslant 1+h) &= \lim_{0<h\to 0} F(1+h) - F(-1)\\ &= F(1) - F(-1)\\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\tan^{-1}(1)\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\tan(-1)\right)\\ &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

8. สมมติว่า X เป็นกำลังสองของค่าที่เลือกมาอย่างสุ่มจากหน่วยในพิสัย $[0, 1]$
X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่อง เพราะค่าของ X เป็นค่าใด ๆ ในพิสัย $[0, 1]$
ในที่นี้ $\{X \leqslant a\} = \{x \in [0, 1] : x^2 \leqslant a\} = \{x \in [0, 1] : x \leqslant \sqrt{a}\}$
นั่นคือ ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ X, F(x) ก็คือ

$$\begin{aligned}F(x) &= 0 \quad , \ x < 0\\ &= \sqrt{x} \ , \ 0 \leqslant x < 1\\ &= 1 \quad , \ x \geqslant 1\end{aligned}$$

จงหา

8.1 $P\left(X \leqslant \frac{1}{5}\right)$, $P\left(\frac{1}{4} < X \leqslant \frac{1}{2}\right)$, $P(7X > 3)$

8 . 2 p.d.f. ของ X

8.1 $$P\left(X \leqslant \frac{1}{5}\right) = F\left(\frac{1}{5}\right) = \sqrt{\frac{1}{5}} = 0.447$$

$$P\left(\frac{1}{4} < X \leqslant \frac{1}{2}\right) = F\left(\frac{1}{2}\right) - F\left(\frac{1}{4}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{4}} = 0.207$$

$$P(7X > 3) = P\left(X > \frac{3}{7}\right) = 1 - \sqrt{\frac{3}{7}} = 0.654$$

8.2 $$\frac{d\sqrt{x}}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad 0 \leqslant x < 1$$

ดังนั้น ฟังก์ชันหนาแน่นของ x

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad 0 \leqslant x < 1$$
$$= 0 \qquad \text{อื่น ๆ}$$

2.5 ค่าเฉลี่ย ฐานนิยม และมัธยฐาน (MEAN MODE AND MEDIAN)

การศึกษาเกี่ยวกับสมบัติของตัวแปรเชิงสุ่ม ในบางครั้งเรามักจะสนใจเกี่ยวกับค่าคงที่อันหนึ่งของตัวแปรเชิงสุ่มนั้น ซึ่งจะอธิบายหรือแสดงคุณลักษณะของตัวแปรเชิงสุ่มโดยค่ากลาง ๆ หรือลักษณะการแจกแจงของตัวแปรเชิงสุ่มนั้น มาตราวัดค่าที่เราสนใจในที่นี้คือ ค่าเฉลี่ย มัธยฐานและฐานนิยม

นิยาม 2.5.1 X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันหนาแน่นน่าจะเป็น f(x) เรานิยามค่าเฉลี่ยหรือค่าคาดหมาย (expected value) ของ X ด้วย E(X) ซึ่งกำหนดค่าไว้ดังนี้

$$E(X) = \begin{cases} \sum\limits_{x \in R} x\, f(x) & \text{..... X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มไม่ต่อเนื่อง} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx & \text{...... X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่อง} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x\, dF(x) & \end{cases}$$

และมักจะใช้สัญลักษณ์ μ (มิว) แทนค่า E(X)

นิยาม 2.5.2 X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันหนาแน่นน่าจะเป็น $f(x)$ ถ้า $X = x_0$ ทำให้ฟังก์ชันมีค่าสูงสุด เราเรียก x_0 ว่าเป็นฐานนิยม (mode) ของ X และสามารถหาค่าได้ดังนี้

ก. X เป็นตัวแปรไม่ต่อเนื่อง

ฐานนิยม x_0 จะมีสมบัติดังนี้

ก.1 x_0 เป็นค่าในพิสัย R ของ X

ก.2 $f(x_0) \geqslant f(x_0 - 1)$ และ $f(x_0) \geqslant f(x_0 + 1)$

ก.3 $f(x_0) \geqslant f(y), \ \forall y \in R$

ข. X เป็นตัวแปรต่อเนื่อง

เราจะหาฐานนิยมได้เสมอ ถ้า $\frac{df(x)}{dx}$ เป็นค่าของฟังก์ชัน x และเราจะได้ค่าฐานนิยม x_0 เมื่อ x_0 เป็นคำตอบของสมการ

$$\text{และ } \left.\frac{d^2f(x)}{(dx)^2}\right|_{x_0} \angle\, 0$$

โดยที่ $x_0 \in R$

นิยาม 2.5.3 X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันหนาแน่นน่าจะเป็น $f(x)$ และมีฟังก์ชันการแจกแจงสะสม $F(x)$ มัธยฐาน (median) ของ X ก็คือว่า $X = x_m$ ที่ทำให้ $F(x_m) \geqslant \frac{1}{2}$ และ $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} F(x_m - h) \leqslant \frac{1}{2}$

เราหาค่าของมัธยฐานได้ดังนี้

ก. X เป็นตัวแปรแบบไม่ต่อเนื่อง

มัธยฐานของ X คือค่า x_m ซึ่งมีคุณสมบัติดังนี้

1. $x_m \in$ พิสัย R ของ X

2. $\sum\limits_{x < x_m} f(x) \leqslant \frac{1}{2}$ และ $\sum\limits_{x \leqslant x_m} f(x) \geqslant \frac{1}{2}$

ข. X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่อง

มัธยฐานของ X คือ x_m ซึ่งเป็นคำตอบของสมการ

$$\int_{x \leqslant x_m} f(x)dx = \frac{1}{2} \quad \text{หรือ} \quad \int_{x \geqslant x_m} f(x)dx = \frac{1}{2}$$

และ $x_m \in R$

จะเห็นได้ว่า ฐานนิยมเป็นค่าที่หาได้ง่าย สะดวก และรวดเร็ว แต่เป็นการประมาณค่าที่หยาบ ค่าเฉลี่ยเป็นค่าที่ต้องใช้การคำนวณยุ่งยาก แต่เป็นค่าประมาณที่แม่นยำ ถูกต้องกว่าค่าอื่น ๆ สำหรับมัธยฐานจะเป็นค่าที่แบ่งการแจกแจงของ X ออกเป็น 2 ส่วนเท่า ๆ กัน

ถ้าการแจกแจงของตัวแปรเชิงสุ่มเป็นการแจกแจงที่มียอดเดียวและสมมาตรกัน ค่าทั้ง 3 จะเป็นค่าเดียวกัน อย่างไรก็ตาม การหาค่ากลางของตัวแปรเชิงสุ่มอาจใช้ไม่ได้สำหรับมาตรวัดบางอัน เราต้องเลือกใช้ให้เหมาะสมตามลักษณะการแจกแจงของตัวแปรเชิงสุ่มนั้น ๆ

แบบฝึกหัดที่ 2.5

1. สมมติว่าตัวแปรเชิงสุ่ม X มีค่าที่เป็นไปได้ 3 ค่า คือ 0, 1, 2 ถ้า $P(X = 2) = p$ และ $E(X) = m$

   1.1 จงหาฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X

   1.2 จากผลใน 1.1 จงแสดงให้เห็นจริงว่า

   $$2p \leqslant m \leqslant 1+p$$

   ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X เราจะได้

   $$f(0)+f(1)+f(2) = f(0)+f(1)+p = 1 \qquad \ldots\ldots\ldots (1)$$

   $$E(X) = 0f(0)+1f(1)+2f(2) = m$$

   $$f(1)+2p = m \qquad \ldots\ldots\ldots (2)$$

   จาก (2) จะได้

   $$f(1) = m-2p \geqslant 0 \qquad \text{(คุณสมบัติ } f(x) \text{ ข้อ 1)}$$

   $$m \geqslant 2p \qquad \ldots\ldots\ldots (3)$$

   (1) - (2) ;

   $$f(0)-p = 1-m$$

   $$f(0) = 1-m+p \geqslant 0 \qquad \text{(คุณสมบัติ } f(x) \text{ ข้อ 1)}$$

   $$1+p \geqslant m \qquad \ldots\ldots\ldots (4)$$

   จะได้ฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X ดังนี้

x	0	1	2
f(x)	$1-m+p$	$m-2p$	p

   .... **(1.1)**

   ผลจาก (3) และ (4) สรุปได้ว่า

   $$2p \leqslant m \leqslant 1+p \qquad \ldots\ldots\ldots \mathbf{(1.2)}$$

2. จงหาค่าเฉลี่ยของตัวแปรเชิงสุ่ม X ถ้า X มีฟังก์ชันความหนาแน่น f(x) และฟังก์ชันการแจกแจงสะสม F(x) กำหนดไว้ดังนี้

2.1 $f(x) = \frac{1}{5}, \quad -2 < x < 3$

$= 0$ อื่น ๆ

$$E(X) = \int_{-2}^{3} \frac{x}{5} dx = \left.\frac{x^2}{10}\right|_{-2}^{3} = \frac{9-4}{10}$$

ค่าเฉลี่ยของ $X = \frac{1}{2}$

2.2 $f(x) = 5x^4, \quad 0 < x < 1$

$= 0$ อื่น ๆ

$$E(X) = \int_0^1 5x^5 dx = \left.\frac{5x^6}{6}\right|_0^1 = \frac{5}{6}$$

ค่าเฉลี่ยของ $X = \frac{5}{6}$

2.3 $f(x) = x, \quad 0 < x < 1$

$= 2 - x, \quad 1 < x < 2$

$= 0$ อื่น ๆ

$$E(X) = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (2x - x^2) dx$$

$$= \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 + \left. x^2 - \frac{x^3}{3}\right|_1^2 = \frac{1}{3} + (4-1) - \frac{8-1}{3}$$

ค่าเฉลี่ยของ $X = 1$

2.4 $F(x) = 0, \quad x < 0$

$= x - \frac{1}{4}x^2, \quad 0 \leqslant x < 2$

$= 1, \quad x \geqslant 2$

$$E(X) = \int_0^2 x d\left(x - \frac{1}{4}x^2\right)$$

$$= \int_0^2 \left(x - \frac{1}{2}x^2\right) dx = \frac{4}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{8}{3}\right)$$

ค่าเฉลี่ยของ $X = \frac{2}{3}$

2.5 $$\begin{aligned} F(x) &= 0, & x < 0 \\ &= \frac{x}{2}, & 0 \leqslant x < 1 \\ &= \frac{1}{2}, & 1 \leqslant x < 2 \\ &= \frac{x}{4}, & 2 \leqslant x < 4 \\ &= 1, & x \geqslant 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^4 x dF(x) \\ &= \int_0^1 x d\frac{x}{2} + \int_2^4 x d\frac{x}{4} \\ &= 2\int_0^1 \frac{x}{2} d\frac{x}{2} + 4\int_2^4 \frac{x}{4} d\frac{x}{4} \end{aligned}$$

ค่าเฉลี่ยของ $X = 2 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} + 4 \cdot \frac{\left(\frac{4}{4}\right)^2 - \left(\frac{2}{4}\right)^2}{2} = \frac{7}{4}$

3. จงหาฐานนิยมของตัวแปรเชิงสุ่ม X ซึ่งมีฟังก์ชันหนาแน่นน่าจะเป็น f(x) กำหนดไว้ดังนี้

3.1 $$\begin{aligned} f(x) &= \left(\frac{1}{2}\right)^x, \quad x = 1, 2, 3, \ldots \\ &= 0 \quad \text{อื่น ๆ} \end{aligned}$$

พิจารณาค่าของ $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ จะเห็นว่าเป็นฟังก์ชันที่มีค่าลดลงเมื่อค่า x โตขึ้น และ $f(1) = \frac{1}{2}$ เป็นค่าโตที่สุด

แสดงว่า ฐานนิยมของ $X = 1$

3.2 $$\begin{aligned} f(x) &= 12x^2(1-x), \quad 0 < x < 1 \\ &= 0 \quad \text{อื่น ๆ} \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx}\{12x^2(1-x)\} = 24x - 36x^2 = 0$$

$$x = 0, \frac{2}{3}$$

ฐานนิยมของ $x = \frac{2}{3}$ $(f(0) = 0)$

3.3 $f(x) = \frac{1}{25}(2x^2 - 1), \quad x = 1, 2, 3$

$= 0$ อนื่ ๆ

พิจารณาค่าของ $f(x)$ เมื่อ $x = 1, 2, 3$ จะได้ว่า

x	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{25}$	$\frac{7}{25}$	$\frac{17}{25}$

แสดงว่า ฐานนิยมของ $x = 3$

3.4 $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 e^{-x}, \quad 0 < x < \infty$

$= 0$ อืน ๆ

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{2}x^2e^{-x}\right\} = \frac{1}{2}\{2xe^{-x} - x^2e^{-x}\} = 0$$

$$xe^{-x}(2-x) = 0$$

$$x = 2$$

แสดงว่า ฐานนิยมของ $X = 2$

4. จงหามัธยฐานของตัวแปรเชิงสุ่ม X ซึ่งมี p.d.f. $f(x)$ กำหนดไว้ดังนี้

4.1 $f(x) = \binom{4}{x}\left(\frac{1}{4}\right)^x\left(\frac{3}{4}\right)^{4-x}, \quad x = 0, 1, 2, 3, 4$

$= 0$ อื่น ๆ

หาค่าฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X จะได้ว่า

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	$\frac{81}{256}$	$\frac{108}{256}$	$\frac{54}{256}$	$\frac{12}{256}$	$\frac{1}{256}$

จะเห็นว่า $P(X < 1) = \frac{81}{256} < \frac{1}{2}$

และ $P(X \leq 1) = \frac{81}{256}+\frac{108}{256} = \frac{189}{256} > \frac{1}{2}$

แสดงว่า มัธยฐานของ x $= 1$

4.2 $f(x) = 0.2 \ , \ x = 2, 4, 5$

$= 0.4 \ , \ x = 7$

$= 0$ อื่น ๆ

จะเห็นว่า $P(X < 5) = 0.2+0.2 = 0.4 < \frac{1}{2}$

และ $P(X \leqslant 5) = 0.4+0.2 = 0.6 > \frac{1}{2}$

แสดงว่า มัธยฐานของ x $= 5$

4.3 $f(x) = 3x^2 \ , \ 0 < x < 1$

$= 0$ อื่น ๆ

ให้ x_m เป็นมัธยฐานของ X ดังนั้น

$$\int_0^{x_m} 3x^2dx = x_m^3 = \frac{1}{2}$$

$$x_m = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

แสดงว่า มัธยฐานของ X $= 2^{-\frac{1}{3}}$

4.4 $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \ , \ -\infty < x < \infty$

ให้ x_m เป็นมัธยฐานของ x ดังนั้น

$$\int_{-\infty}^{x_m} \frac{1}{\pi(1+x^2)}dx = \frac{1}{\pi}\left|\tan^{-1}x_m - \tan^{-1}(-\infty)\right| = \frac{1}{2}$$

จะได้ $\frac{1}{\pi}\tan^{-1}x_m - \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$

$$\tan^{-1}x_m = 0 = \tan^{-1} 0$$

แสดงว่า มัธยฐานของ x $= 0$

2.6 การแจกแจงของฟังก์ชันของตัวแปรเชิงสุ่ม X

หาก X เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม ฟังก์ชันของ X, h(X) ก็จะมีสมบัติเป็นตัวแปรเชิงสุ่มด้วย หากเรารู้ p.d.f. f(x) ของ X หรือ c.d.f. ของ X เราก็สามารถหา p.d.f. หรือ c.d.f. ของ h(X) ได้เช่นกัน

กรณีของตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่อง ไม่ว่าเราจะต้องการฟังก์ชันหนาแน่นหรือฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ h(X) เราต้องเริ่มต้นด้วยการหาฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ h(X) ก่อนเสมอ

ถ้า $Y = h(X)$ เราจะได้ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ h(X) ดังนี้

$$F(y) = P(h(X) \leqslant y)$$

เปลี่ยน $P(h(X) \leqslant y)$ ในเทอมของความน่าจะเป็นของ X แล้วคำนวณค่าที่ได้ จะเป็นค่า F(y) ที่ต้องการ

ถ้าต้องการฟังก์ชันหนาแน่นของ h(X) นั่นคือ f(y) เราจะหาได้จาก

$$f(y) = \frac{dF(y)}{dy}$$

แบบฝึกหัดที่ 2.6

1. X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น f(x) กำหนดไว้ดังนี้

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{5}, \quad 0 < x < 5 \\ &= 0 \quad \text{อื่น ๆ} \end{aligned}$$

จงหา p.d.f. และ c.d.f. ของ $Y = 2X-5$

$$\begin{aligned} F(y) &= P(Y \leqslant y) \\ &= P(2X-5 \leqslant y), \ -5 < y < 5 \\ &= P\left(X \leqslant \frac{y+5}{2}\right) \\ &= \int_0^{\frac{y+5}{2}} \frac{1}{5}dx = \frac{1}{5}\left(\frac{y+5}{2}\right) \end{aligned}$$

จะได้ c.d.f. ของ $Y = 2X-5$

$$\begin{aligned} F(y) &= 0, \quad y < -5 \\ &= \frac{y+5}{10}, \quad -5 \leqslant y < 5 \end{aligned}$$

$$= 1 \qquad y \geqslant 5$$

$$\frac{dF(y)}{dy} = 0 \qquad y < -5 \text{ หรือ } y \geqslant 5$$

$$= \frac{d}{dy}\left\{\frac{y+5}{10}\right\} = \frac{1}{10}, \quad -5 < y < 5$$

p.d.f. ของ $Y = 2X-5$ คือ

$$f(y) = \frac{1}{10}, \quad -5 < y < 5$$

$$= 0 \qquad \text{อื่น ๆ}$$

2. ฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X ถูกกำหนดไว้ดังนี้

$$f(x) = \frac{1}{2}, \quad x = 0$$

$$= \frac{1}{4}ke^{-x^2}, \quad x = -1, 1$$

$$= 0 \qquad \text{อื่น ๆ}$$

2.1 จงหาค่าของ k

2.2 ถ้า $Y = 1-X^2$ จงหา p.f. ของ Y

2.1 f(x) เป็นฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X ดังนั้น

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}ke^{-(-1)^2}+\frac{1}{4}ke^{-(1)^2} = 1$$

$$\frac{1}{2}ke^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$k = e$$

2.2 กำหนด f(y) เป็นฟังก์ชันน่าจะเป็นของ $Y = 1-X^2$

จะได้ $\quad f(y) = P(1-X^2 = y) = P(|X| = \sqrt{1-y})$

$$P(|X| = \sqrt{1-y}) = \frac{1}{2}, \quad y = 1$$

$$= \frac{1}{4}e^{-y}+\frac{1}{4}e^{-y}, \quad y = 0$$

ดังนั้น $\quad f(y) = \frac{1}{2}, \quad y = 0, 1$

$$= 0 \qquad \text{อื่น ๆ}$$

3 . กำหนด $f(x) = x + \frac{1}{2}$, $0 < x < 1$

$\qquad\qquad 0$ อื่น ๆ

เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นของ X จงหา

3.1 c.d.f. ของ X

3.2 c.d.f. และ p.d.f. ของ $Y = X^2$

3.3 $P(4Y > 1)$

3.1 $$\int_0^x \left(x + \frac{1}{2}\right) dx = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}, \quad 0 < x < 1$$

ดังนั้น c.d.f. ของ X ก็คือ

$$\begin{aligned} F(x) &= 0 &&, \ x < 0 \\ &= \frac{x}{2}(x+1) &&, \ 0 \leqslant x < 1 \\ &= 1 &&, \ x \geqslant 1 \end{aligned}$$

3.2 $$\begin{aligned} P(Y \leqslant y) &= P(X^2 \leqslant y), \quad 0 < y < 1 \\ &= P(-\sqrt{y} \leqslant x \leqslant \sqrt{y}) \\ &= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) \\ &= \frac{\sqrt{y}}{2}(\sqrt{y} + 1) - 0 \end{aligned}$$

จะได้ c.d.f. ของ Y

$$\begin{aligned} F(y) &= 0 &&, \ y < 0 \\ &= \frac{\sqrt{y}}{2}(\sqrt{y}+1) &&, \ 0 \leqslant y < 1 \\ &= 1 &&, \ y \geqslant 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dF(y)}{dy} &= &&, \ y < 0 \text{ หรือ } y \geqslant 1 \\ &= \frac{d}{dy}\left\{\frac{1}{2}(y + \sqrt{y})\right\} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{y}}\right) &&, \ 0 < y < 1 \end{aligned}$$

จะได้ p.d.f. ของ Y

$$\begin{aligned} f(y) &= \frac{2y + \sqrt{y}}{4y} &&, \ 0 < y < 1 \\ &= 0 && \text{อื่น ๆ} \end{aligned}$$

3.3 $$P(4Y > 1) = P\left(Y > \frac{1}{4}\right)$$
$$= 1 - F_Y\left(\frac{1}{4}\right)$$
$$= 1 - \frac{\sqrt{\frac{1}{4}}}{2}\left(\sqrt{\frac{1}{4}} + 1\right) = \frac{5}{8}$$

4. X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันน่าจะเป็น $f(x)$ ดังนี้

$$f(x) = \frac{1}{5}, \quad x = -1, 0, 1, 2, 3$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

จงหา

4.1 p.f. และ c.d.f. ของ $Y = X^2$

4.2 มัธยฐานของ $Y = X^2 + 2X - 1$

4.3 $P(3 - 2X \leqslant y)$

4.1 $$P(X^2 = y) = \begin{cases} f_X(-\sqrt{y}) &, x < 0 \\ f_X(\sqrt{y}) &, x \geqslant 0 \end{cases}$$

แต่ $f_X(x)$ มีค่าคงที่ทุก ๆ ค่า x ดังนั้น

ฟังก์ชันน่าจะเป็นของ $Y = X^2$

$$f(y) = P(X^2 = y) = \frac{1}{5}, \quad y = 0, 4, 9$$
$$= \frac{2}{5}, \quad y = 1$$

ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ $Y = X^2$

$$F(y) = 0, \quad y < 0$$
$$= \frac{1}{5}, \quad 0 \leqslant y < 1$$
$$= \frac{3}{5}, \quad 1 \leqslant y < 4$$
$$= \frac{4}{5}, \quad 4 \leqslant y < 9$$
$$= 1, \quad y \geqslant 9$$

4.2 เมื่อ $Y = X^2+2X-1$

จะได้ $y = -2, -1, 2, 7, 14$ เมื่อ $x = -1, 0, 1, 2, 3$ ตามลำดับ

จะเห็นได้ว่า

$$P(Y < 2) = P(X < 1) = \frac{1}{5}+\frac{1}{5} = \frac{2}{5} < \frac{1}{2}$$

$$P(Y \leqslant 2) = P(X \leqslant 1) = \frac{2}{5}+\frac{1}{5} = \frac{3}{5} > \frac{1}{2}$$

แสดงว่า มัธยฐานของ $Y = X^2+2X-1$ คือ 2

4.3 $P(3-2X \leqslant y) = P\left(X \geqslant \frac{3-y}{2}\right) = \sum_{x \geqslant \frac{3-y}{2}} f(x)$

พิจารณาจาก $3-2X = Y$ จะเห็นว่า

x	−1	0	1	2	3
y	5	3	1	−1	−3

เราจะได้

$$\begin{aligned}
P(3-2X \leqslant y) &= \frac{1}{5} &&, \quad -3 \leqslant y < -1 \\
&= \frac{2}{5} &&, \quad -1 \leqslant y < 1 \\
&= \frac{3}{5} &&, \quad 1 \leqslant y < 3 \\
&= \frac{4}{5} &&, \quad 3 \leqslant y < 5 \\
&= 1 &&, \quad y \geqslant 5
\end{aligned}$$

5. X เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม ซึ่งมีฟังก์ชันการแจกแจงสะสม F(x) ดังนี้

$$\begin{aligned}
F(x) &= 0 \quad , \quad x < 0 \\
&= x \quad , \quad 0 \leqslant x < 1 \\
&= 1 \quad , \quad x \geqslant 1
\end{aligned}$$

จงหา

5.1 $P\left(\frac{1}{5} < X < \frac{1}{2}\right)$, $P\left(\frac{X}{1-X} < \frac{1}{3}\right)$

5.2 c.d.f. และ p.d.f. ของ $Y = \frac{1}{X}$

5.3 c.d.f. และ p.d.f. ของ $Y = -\ell n\,X$

5.1 $$P\left(\frac{1}{5} < X < \frac{1}{2}\right) = F\left(\frac{1}{2}\right) - F\left(\frac{1}{5}\right)$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$$
$$P\left(\frac{X}{1-X} < \frac{1}{3}\right) = P(3X < 1-X)$$
$$= P\left(X < \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

5.2 $$F(y) = P(Y \leqslant y) = P\left(\frac{1}{X} \leqslant y\right), \quad 1 < y < \infty$$
$$= P\left(X \geqslant \frac{1}{y}\right)$$
$$= 1 - \frac{1}{y}$$

ดังนั้น ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ $Y = \frac{1}{X}$ ก็คือ

$$F(y) = 0 \quad , \quad y \leqslant 1$$
$$= 1 - \frac{1}{y} \quad , \quad 1 \leqslant y < \infty$$
$$\frac{d}{dy}\left\{1 - \frac{1}{y}\right\} = \frac{1}{y^2}$$

ดังนั้น ฟังก์ชันหนาแน่นของ $Y = \frac{1}{X}$ ก็คือ

$$f(y) = \frac{1}{y^2} \quad , \quad 1 \leqslant y < \infty$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

5.3 $$F(y) = P(Y \leqslant y) = P(-\ell n\,X \leqslant y)$$
$$= P(X \geqslant e^{-y}), \quad 0 < y < \infty$$
$$= 1 - F_X(e^{-y})$$

ดังนั้น ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ $Y = -\ell n\,X$ ก็คือ

$$F(y) = 0 \quad , \quad y < 0$$
$$= 1 - e^{-y} \quad , \quad 0 \leqslant y < \infty$$

$$\frac{d}{dy}(1-e^{-y}) = e^{-y}$$

ดังนั้น ฟังก์ชันหนาแน่นของ $Y = -\ell n\, X$ ก็คือ

$$f(y) = e^{-y} \quad , \quad 0 < y < \infty$$
$$= 0 \qquad \text{อื่น ๆ}$$

2.7 ตัวแปรเชิงสุ่มดัชนี (INDICATOR RANDOM VARIABLE)

ตัวแปรเชิงสุ่มที่น่าสนใจและนำไปใช้ประโยชน์ได้มากประเภทหนึ่งก็คือ ตัวแปรเชิงสุ่มซึ่งมีค่าที่เป็นไปได้เพียง 2 ค่าเท่านั้น คือ 0 กับ 1 นั่นคือ เรามีเหตุการณ์ A ซึ่งเป็นสับเซตของ S และ X_A เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีสมบัติดังนี้

$$X_A(s) = 1 \quad \text{ถ้า } s \text{ อยู่ใน } A$$
$$= 0 \quad \text{ถ้า } s \text{ ไม่อยู่ใน } A$$

เราเรียก X_A ว่า เป็นตัวแปรเชิงสุ่มดัชนี (indicator random variable) หรือบางทีก็เรียกว่า ฟังก์ชันดัชนี (indicator function) และใช้สัญลักษณ์แทนด้วย I_A

เราให้นิยามของตัวแปรเชิงสุ่มดัชนี ดังนี้

นิยาม ตัวแปรเชิงสุ่มดัชนี (indicator random variable) ก็คือตัวแปรซึ่งมีค่าที่เป็นไปได้เพียง 2 ค่า คือ 0 กับ 1 เท่านั้น

จากคุณสมบัติของตัวแปรเชิงสุ่มดัชนี เราจะได้ว่า

ถ้า X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มดัชนีของเหตุการณ์ A

และ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X

$$f(x) = P(A') \quad , \quad x = 0$$
$$= P(A) \quad , \quad x = 1$$
$$= 0 \qquad \text{อื่น ๆ}$$

ผลที่ตามมาก็คือ เราจะได้

$$E(X) = 0P(A') + 1P(A) = P(A)$$

นั่นคือ

ค่าคาดหมายของตัวแปรเชิงสุ่มดัชนีของเหตุการณ์ใดก็คือ ค่าความน่าจะเป็นของเหตุ-การณ์นั้น

ข้อเท็จจริงนี้สามารถนำไปใช้ในการหาค่าความน่าจะเป็นของผลรวมของเหตุการณ์ หาตัวแบบน่าจะเป็น และหาค่าคาดหมายของตัวแปรเชิงสุ่มใด ๆ ได้

คุณสมบัติขั้นมูลฐานของตัวแปรเชิงสุ่มดัชนีที่สำคัญ ๆ ได้แก่

1. $X_{A'} = 1 - X_A$
2. $X_{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n} = X_{A_1} \cdot X_{A_2} \ldots X_{A_n}$
3. $X_{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n} = 1 - (1 - X_{A_1})(1 - X_{A_2}) \ldots (1 - X_{A_n})$

จากคุณสมบัติและผลที่ได้ เรานำไปพิสูจน์ได้ว่า

ถ้า X_i เป็นตัวแปรเชิงสุ่มดัชนีของเหตุการณ์ A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$

และ $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม

เราจะได้ $$P(X = x) = \sum_{k=0}^{n-x} (-1)^k \binom{x+k}{x} S_{x+k}$$

และ $$P\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} S_k$$

ในเมื่อ $$S_a = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_a} P\left(\bigcap_{j=1}^{a} A_{i_j}\right)$$

เฉลยแบบฝึกหัดที่ 2.7

1. อาศัยคุณลักษณะของตัวแปรเชิงสุ่มดัชนี จงพิสูจน์ว่า

   1.1 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

   1.2 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

   1.3 $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

   1.4 $P(A \cap B \cap C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cup B) - P(A \cup C) - P(B \cup C) + P(A \cup B \cup C)$

   1.5 $X_A \leqslant X_B$ ก็ต่อเมื่อ $A \subseteq B$

   กำหนด X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มดัชนีของเหตุการณ์ จะได้

   1.1 $X_{(A \cap B) \cup (A \cap C)} = 1 - (1 - X_{A \cap B})(1 - X_{A \cap C})$ คุณสมบัติข้อ 3

   $= 1 - 1 + X_A X_B + X_A X_C - X_A X_B X_A X_C$ คุณสมบัติข้อ 2

   $= X_A X_B + X_A X_C - X_A X_B X_C$

   $= X_A(1 - 1 + X_B + X_C - X_B X_C)$

$$= X_A\{1-(1-X_B)(1-X_C)\}$$

$$= X_A \cdot X_{B\cup C} \qquad \text{คุณสมบัติข้อ 3}$$

$$= X_{A\cap(B\cup C)} \qquad \text{คุณสมบัติข้อ 2}$$

สรุปได้ว่า

$$A\cap(B\cup C) = (A\cap B) \cup (A\cap C)$$

1.2 $X_{(A\cup B)\cap(A\cup C)} = X_{A\cup B} \cdot X_{A\cup C}$ คุณสมบัติข้อ 2

$$= \{1-(1-X_A)(1-X_B)\}\{1-(1-X_A)(1-X_C)\} \qquad \text{คุณสมบัติข้อ 3}$$

$$= 1-(1-X_A)(1-X_B)-(1-X_A)(1-X_C)+(1-X_A)(1-X_B)(1-X_C)$$

$$= 1-(1-X_A)\{1-1+(1-X_B)+(1-X_C)-(1-X_B)(1-X_C)\}$$

$$= 1-(1-X_A)[1-\{1-X_B)\}\{1-(1-X_C)\}]$$

$$= 1-(1-X_A)[1-X_BX_C]$$

$$= 1-(1-X_A)(1-X_{B\cap C}) \qquad \text{คุณสมบัติข้อ 2}$$

$$= X_{A\cup(B\cap C)} \qquad \text{คุณสมบัติข้อ 3}$$

สรุปได้ว่า

$$A\cup(B\cap C) = (A\cup B) \cap (A\cup C)$$

1.3 $X_{A\cap B} = X_AX_B$ คุณสมบัติข้อ 2

$$= X_A+X_B+1-1-X_A-X_B+X_AX_B$$

$$= X_A+X_B-\{1-(1-X_A)(1-X_B)\}$$

$$= X_A+X_B-X_{A\cup B} \qquad \text{คุณสมบัติข้อ 3}$$

$$E(X_{A\cap B}) = E[X_A+X_B-X_{A\cup B}] = E(X_A)+E(X_B)-E(X_{A\cup B})$$

จะได้ $*P(A\cap B) = P(A)+P(B)-P(A\cup B)$

1.4 $X_A+X_B+X_C-X_{A\cup B}-X_{A\cup C}-X_{B\cup C}+X_{A\cup B\cup C}$

$$= X_A+X_B+X_C-\{1-(1-X_A)(1-X_B)\} - \{1-(1-X_A)(1-X_C)\}$$

$$- \{1-(1-X_B)(1-X_C)\} + \{1-(1-X_A)(1-X_B)(1-X_C)\} \qquad \text{คุณสมบัติข้อ 3}$$

$$= X_A+X_B+X_C - (X_A+X_B-X_AX_B) - (X_A+X_C-X_AX_C)$$

$$- (X_B+X_C-X_BX_C) + (X_B+X_C-X_BX_C+X_A-X_AX_B-X_AX_C+X_AX_BX_C)$$

$$= X_{A\cap B\cap C} \qquad \text{คุณสมบัติข้อ 2}$$

$$\Rightarrow E(X_{A\cap B\cap C}) = E[X_A+X_B+X_C-X_{A\cup B}-X_{A\cup C}-X_{B\cup C}+X_{A\cup B\cup C}]$$

$$E(X_{A\cap B\cap C}) = E(X_A)+E(X_B)+E(X_C)-E(X_{A\cup B})-E(X_{A\cup C}) -E(X_{B\cup C})+E(X_{A\cup B\cup C})$$

จะได้

$$*P(A\cap B\cap C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cup B)-P(A\cup C) -P(B\cup C)+P(A\cup B\cup C)$$

*ค่าคาดหมายของตัวแปรเชิงสุ่มดัชนีของเหตุการณ์ใดก็คือ ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์นั้น

1.5 ($\Longrightarrow$)

$$X_A \leqslant X_B$$
$$E(X_A) \leqslant E(X_B)$$
$$\Rightarrow \quad P(A) \leqslant P(B)$$
แสดงว่า $A \subseteq B$

($\Longleftarrow$)

$$A \subseteq B$$
$$\Rightarrow \quad P(A) \leqslant P(B)$$
$$\Rightarrow \quad E(X_A) \leqslant E(X_B)$$
หรือ $X_A \leqslant X_B$

สรุปได้ว่า $X_A \leqslant X_B$ ก็ต่อเมื่อ $A \subseteq B$

2. กำหนด X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มดัชนีของ A ถ้า $P(A) = \frac{1}{5}$ จงหา
   2.1 ฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X
   2.2 ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ X
   2.3 ค่าคาดหมายของ $5X^2$

เฉลย

2.1 $$P(X=0) = P(A') = 1-P(A) = 1-\frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

$$P(X=1) = P(A) = \frac{1}{5}$$

ฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X ก็คือ

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{5} & , x = 0 \\ \frac{1}{5} & , x = 1 \\ 0 & \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

2.2 $F(x) = P(X \leqslant x)$

ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ X ก็คือ

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \ x < 0 \\ \frac{4}{5} & , \ 0 \leqslant x < 1 \\ = 1 & , \ x \geqslant 1 \end{cases}$$

2.3 ค่าคาดหมายของ $X = P(A) = \frac{1}{5}$

ค่าคาดหมายของ $5X^2 = 5E(X^2) = 5E(X) = 1$

3. ในการทดลองโยนเหรียญ 5 ครั้ง กำหนดตัวแปรเชิงสุ่มดัชนี

$X_i = 1$ ถ้าโยนครั้งที่ i ได้หัว, $i = 1, 2, 3, 4, 5$

$= 0$ อื่น ๆ

และ $X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$

จงหา

3.1 $P(X = 3)$

3.2 $E(X)$

เฉลย

โยนเหรียญ 5 ครั้ง จะมีจำนวนผลลัพธ์ $= 2^5$

ให้ A_i = เหตุการณ์ที่โยนครั้งที่ i ได้หัว, $i = 1, 2, 3, 4, 5$

= การโยนเหรียญแบบสุ่ม 4 ครั้ง

ดังนั้น จำนวนผลลัพธ์ของ $A_i = 2^4$

จะได้ $P(A_i) = \frac{2^4}{2^5} = \frac{1}{2}$

$A_{i_1}A_{i_2}A_{i_3}$ = เหตุการณ์ที่โยนเหรียญครั้งที่ i_1, i_2, i_3 ได้หัว เมื่อ $1 \leqslant i_1 < i_2 < i_3 \leqslant 5$

= การโยนเหรียญ 2 ครั้งที่เหลือแบบสุ่ม

จำนวนผลลัพธ์ของ $A_{i_1}A_{i_2}A_{i_3} = 2^2$

จะได้ $P(A_{i_1}A_{i_2}A_{i_3}) = \frac{2^2}{2^5} = \frac{1}{8}$, $1 \leqslant i_1 < i_2 < i_3 \leqslant 5$

$$\Longrightarrow \quad S_3 = \binom{5}{3}\frac{1}{8} = \left(\frac{5 \times 4}{2}\right)\frac{1}{8} = \frac{5}{4}$$

การโยนเหรียญ 4 ครั้งใด ๆ ให้ได้หัว จะมีทางเกิดได้ 2 หนทาง

ดังนั้น $$S_4 = \binom{5}{4}_{2^5} = (5)\frac{1}{16} = \frac{5}{16}$$

การโยนเหรียญให้ได้หัวทั้ง 5 ครั้ง มีทางเกิดได้เพียง 1 หนทาง

ดังนั้น $$S_5 = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$$

3.1 $$P(X = 3) = \binom{3}{3}S_3 - \binom{4}{3}S_4 + \binom{5}{3}S_5$$

$$= \frac{5}{4} - 4\left(\frac{5}{16}\right) + 10\left(\frac{1}{32}\right) = \frac{5}{16}$$

3.2 $$E(X_i) = P(A_i) = \frac{1}{2}$$

$$E(X) = E(X_1 + X_2 + \dots + X_5)$$

$$= \sum_{i=1}^{5} E(X_i) = \sum_{i=1}^{5} \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

4. มีเลขโดด 6 ตัว คือ 0, 1, 2, 3, 4 และ 5 เอาตัวเลขเหล่านี้มาสร้างเป็นเลข 3 หลัก ซึ่งมีค่าเกิน 100 โดยไม่ให้ซ้ำกัน กำหนดตัวแปรเชิงสุ่มดัชนี X_A ดังนี้

$X_A = 1$ ถ้าเป็นเลขคี่ที่มีค่าเกิน 100

$\quad = 0$ อื่น ๆ

จงหา

4.1 ฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X_A

4.2 ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ $Y = 2X_A + 3$

4.3 ค่าคาดหมายของ X_A^r

เฉลย

เอาตัวเลข 0, 1, 2, 3, 4, 5 มาสร้างเป็นเลข 3 หลัก ที่มีค่าเกิน 100 โดยไม่ซ้ำกัน จะได้

จำนวนผลลัพธ์ $= 5 \times 5^{(2)} = 100$

จำนวนผลลัพธ์ที่เป็นเลขคี่ที่มีค่าเกิน 100

= **# เลขที่ลงท้ายด้วย 1,3,5 และไม่มี 0 เป็นตัวแรก**

= **4 x 4 x 3**

= **48**

$$P(X_A = 1) = \frac{48}{100} = \frac{12}{25}$$

และ $$P(X_A = 0) = 1 - \frac{12}{25} = \frac{13}{25}$$

4.1 ฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X_A ก็คือ

$$f(x) = \begin{cases} \frac{13}{25} & , x = 0 \\ \frac{12}{25} & , x = 1 \\ 0 & \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

4.2 ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ $Y = 2X_A + 3$ ก็คือ

$$F(y) = \begin{cases} 0 & , y < 3 \\ \frac{13}{25} & , 3 \leqslant y < 5 \\ 1 & , y \geqslant 5 \end{cases}$$

4.3 $$E(X_A^r) = (0^r)\, f(0) + (1^r)\, f(1) = f(1)$$

ค่าคาดหมายของ $X_A^r = \frac{12}{25}$

5. สามีภรรยาคู่หนึ่งวางแผนครอบครัวไว้ว่า จะมีลูกเพียง 3 คน เขาคาดว่าโอกาสที่จะได้ลูกชายเป็นสองเท่าของที่จะได้ลูกสาว กำหนดตัวแปรเชิงสุ่มดัชนี X_i, $i = 1, 2, 3$ ดังนี้

$$X_i = 1 \quad \text{ถ้าลูกคนที่ } i \text{ เป็นชาย}, \quad i = 1, 2, 3$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

และ $$X = X_1 + X_2 + X_3$$

จงหาฟังก์ชันการแจกแจงของ X

เฉลย

P(ได้ลูกคนที่ i เป็นชาย) $= \frac{2}{3}$, $i = 1, 2, 3$

P(ได้ลูกคนที่ i และ j เป็นชาย) $= \frac{4}{9}$, $1 \leqslant i < j \leqslant 3$

P(ได้ลูกทั้ง 3 คนเป็นชาย) $= \frac{8}{27}$

จาก $P(X = x) = \sum_{k=0}^{3-x}(-1)^k\binom{x+k}{x}S_{x+k}$

เราจะได้

$$P(X = 0) = 1-\binom{3}{1}\frac{2}{3}+\binom{3}{2}\frac{4}{9}-\binom{3}{3}\frac{8}{27} = \frac{1}{27}$$

$$P(X = 1) = \binom{3}{1}\frac{2}{3}-\binom{2}{1}\binom{3}{2}\frac{4}{9}+\binom{3}{1}\frac{8}{27} = \frac{2}{9}$$

$$P(X = 2) = \binom{3}{2}\frac{4}{9}-\binom{3}{2}\frac{8}{27} = \frac{4}{9}$$

$$P(X = 3) = \frac{8}{27}$$

จะได้ฟังก์ชันการแจกแจงของ X

x	0	1	2	3
f(x)	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$

2.8 การแจกแจงแบบผสม (MIXED DISTRIBUTIONS)

นิยาม 2.8.1 หาก $0 \leqslant p \leqslant 1$ แล้ว F ซึ่งกำหนดไว้โดย

$$F(x) = p\cdot G(x) + (1-p)\cdot H(x), \quad -\infty < x < \infty$$

จะเป็นฟังก์ชันการแจกแจงสะสม ซึ่งเรียกว่า การผสมกันของ G กับ H

p และ $1-p$ เป็นค่าความน่าจะเป็น หรือน้ำหนักที่จะทำให้การทดลองครั้งที่ 2 มีฟังก์ชันการแจกแจงสะสมเป็น G และ H ตามลำดับ

นิยาม 2.8.2 X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบผสมที่มีค่าเป็นไปได้เท่ากับ a_i ด้วยความน่าจะเป็น $g(a_i)$, $i = 1, 2, \ldots$ และมีค่าต่อเนื่องซึ่งมีฟังก์ชันความหนาแน่น $h(x)$ ด้วยน้ำหนัก p และ $1-p$ ตามลำดับ ค่าคาดหมายของ X จะกำหนดได้ดังนี้

$$E(X) = p\sum_i a_i g(a_i)+(1-p)\int_{-\infty}^{\infty} xh(x)dx$$

เฉลยแบบฝึกหัดที่ 2.8

. X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบผสมที่มีฟังก์ชันสะสม F(x) กำหนดไว้โดย

$$F(x) = 0 \quad , \quad x < 0$$

$$= \frac{x^2}{4} \qquad 0 \leqslant x < 1$$

$$= \frac{1}{2} \qquad \leqslant x < 2$$

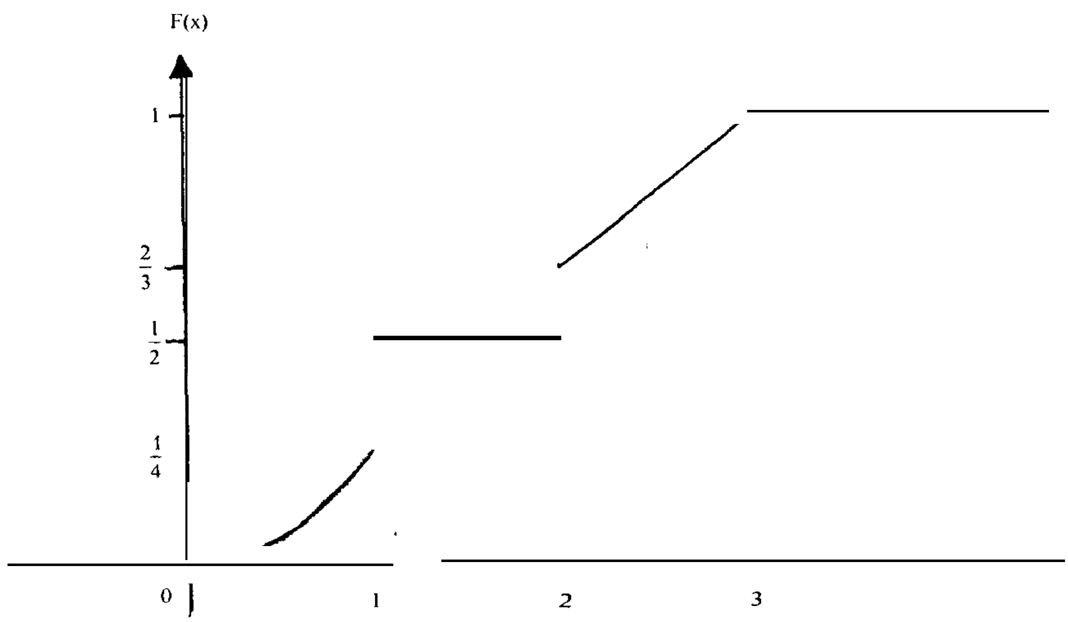
$$= \frac{x}{3} \qquad 2 \leqslant x < 3$$

$$= \qquad x \geqslant$$

1.1 จงเขียนกราฟแสดง F(x)

1.2 จงคำนวณค่าของ $P(0 < X < 1)$, $P(0 < X \leqslant 1)$, $P(X = 1)$, $P(1 \leqslant X \leqslant 2)$

เฉลย



1.2 ค่าของ

$$P(0 < X < 1) = F(1^-) - F(0)$$

$$= \frac{1^2}{4} - 0 = \frac{1}{4}$$

$P(0 < X \leqslant 1) = F(1) - F(0)$

$= \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$

$P(X = 1) = F(1) - F(1^-)$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

$P(1 \leqslant X \leqslant 2) = P(X = 1) + P(1 < X \leqslant 2)$

$= \frac{1}{4} + F(2) - F(1)$

$= \frac{1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{5}{12}$

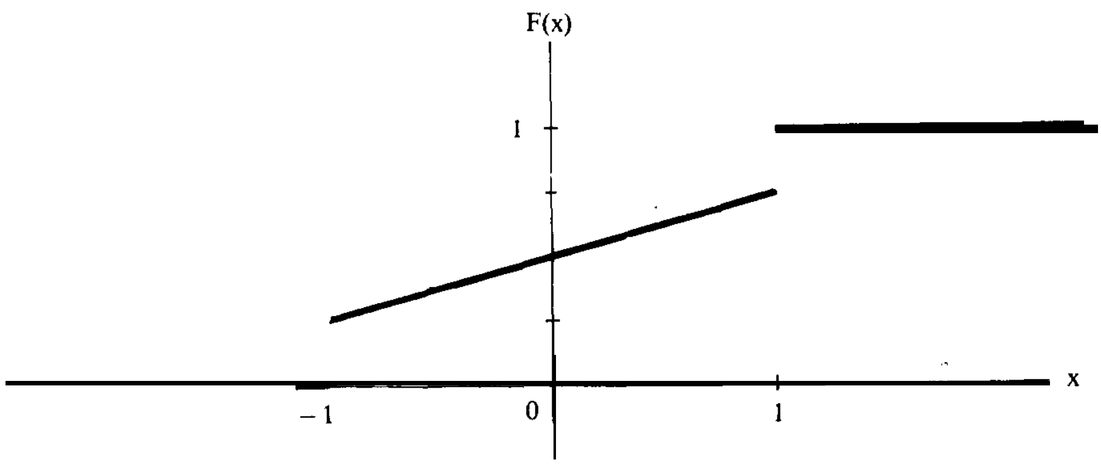
ข้อสังเกต ถ้าเราดูจากกราฟ จะเห็นว่า

$P(X = 1)$ = ระยะจาก $\frac{1}{4}$ ถึง $\frac{1}{2}$ ซึ่งเท่ากับ $\frac{1}{4}$

หรือ $P(1 \leqslant X \leqslant 2)$ = ระยะจาก $\frac{1}{4}$ ถึง $\frac{2}{3}$ ซึ่งเท่ากับ $\frac{5}{12}$

แสดงว่าเราจะหาค่าโดยใช้ทฤษฎีของการแจกแจงสะสมหรืออ่านจากกราฟโดยตรงก็ได้

2. จากกราฟของฟังก์ชันการแจกแจงสะสม F(x)



จงคำนวณค่าของ $P(X < 0)$, $P(X < -1)$, $P(X \leqslant -1)$, $P(X < 1)$

และ $P\left(-1 \leqslant X < \frac{1}{2}\right)$

เฉลย

$$P(X < 0) = \frac{1}{2}$$

$$P(X < -1) = 0$$

$$P(X \leqslant -1) = \frac{1}{4}$$

$$P(X < 1) = \frac{3}{4}$$

$$P\left(-1 \leqslant X < \frac{1}{2}\right) = F\left(\frac{1}{2}^{-}\right) = \frac{5}{8}$$

3. X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบผสมที่มีฟังก์ชัน F(x) กำหนดไว้โดย

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \ x < 0 \\ \dfrac{x^2}{4} & , \ 0 \leqslant x < 1 \\ \dfrac{(x+1)}{4} & , \ 1 \leqslant x < 2 \\ 1 & , \ x \geqslant 2 \end{cases}$$

3.1 จงเขียนกราฟแสดง F(x)

3.2 จงคำนวณค่าคาดหมายของ X

3.3 จงแสดงให้เห็นจริงว่าความแปรปรวนของ X คือ $E(X^2) - \{E(X)\}^2$ เท่ากับ $\frac{167}{576}$

3.4 จงคำนวณค่าของ $P\left(\frac{1}{4} < X < 1\right)$, $P(X = 1)$, $P\left(X = \frac{1}{2}\right)$, $P\left(\frac{1}{2} \leqslant X < 2\right)$

เฉลย