3.2 จะเห็นว่า $P(X = 1) = \frac{1}{4}$

$$P(X = 2) = 1-\frac{2+1}{4} = \frac{1}{4}$$

แสดงว่า $g(x) = \frac{1}{2}$, $x = 1, 2$

$= 0$ อื่น ๆ

จาก $F(x) = pG(x) + (1 - p)H(x)$

แสดงว่า $p = 1-p = \frac{1}{2}$

ดังนั้น

$$F(x) = \frac{x^2}{2} \quad , \quad 0 \leqslant x < 1$$

$$= \frac{x}{2} \quad , \quad 1 \leqslant x < 2$$

$$= 1 \quad , \quad x \geqslant 2$$

$$E(X) = \frac{1}{2}\left(1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\left[\int_0^1 x\cdot\frac{2x}{2}dx+\int_1^2 x\cdot\frac{1}{2}dx\right]$$

$$= \frac{3}{4}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{4-1}{4}\right) = \frac{31}{24}$$

3.3 $$E(X^2) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+4\cdot\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\left[\int_0^1 x^3dx+\int_1^2\frac{x^2}{2}dx\right.$$

$$= \frac{5}{4}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{8-1}{6}\right) = \frac{47}{24}$$

$$E(X^2)-\{E(X)\}^2 = \frac{47}{24}-\left(\frac{31}{24}\right)^2 = \frac{167}{567}$$

ความแปรปรวนของ $X = \frac{167}{567}$

3.4 $$P\left(\frac{1}{4} < X < 1\right) = F(1^-)-F\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{\frac{1}{16}}{4} = \frac{15}{64}$$

$$P(X = 1) = \frac{1}{4}$$

$$P\left(X = \frac{1}{2}\right) = F\left(\frac{1}{2}\right) - F\left(\frac{1^-}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{16} - \frac{1}{16} = 0$$

$$P\left(\frac{1}{2} \leqslant X < 2\right) = F(2^-) - F\left(\frac{1}{2}\right) + P\left(X = \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{2+1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{11}{16}$$

4. ในเกมส์การเล่นหนึ่งซึ่งมีกติกาว่า หากโยนเหรียญที่ไม่เอียงเฉแล้วได้หัว ผู้เล่นจะได้เงิน 200 บาท แต่ถ้าเหรียญออกก้อยผู้เล่นจะต้องหมุนวงล้อที่มีสเกลจาก 0 ถึง 1 เมื่อวงล้อหยุดหมุนและเข็มชี้ที่จุดใด ผู้เล่นจะได้รับเงินเป็นจำนวน 100 เท่าของจุดนั้น กำหนดตัวแปรเชิงสุ่ม X เป็นจำนวนเงิน (หน่วยร้อยบาท) ที่ผู้เล่นได้รับ จงหา

   4.1 ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ X

   4.2 จงแสดง F(x) ด้วยกราฟ

   4.3 ค่าคาดหมายของ X

เฉลย

โยนเหรียญที่ไม่เอียงเฉ จะมีโอกาสเกิดขึ้น 2 ทาง

ดังนั้น ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมจะมีโอกาสเกิดขึ้นในแต่ละกรณีเป็น $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$

ค่าที่เป็นไปได้ของตัวแปรเชิงสุ่มไม่ต่อเนื่องมีเพียงค่าเดียว

ดังนั้น
$$\begin{aligned} G(x) &= 0 \quad , \ x < 2 \\ &= 1 \quad , \ x \geqslant 2 \end{aligned}$$

ค่าที่เป็นไปได้ของตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่อง x จะเป็นค่าในช่วง [0, 1]

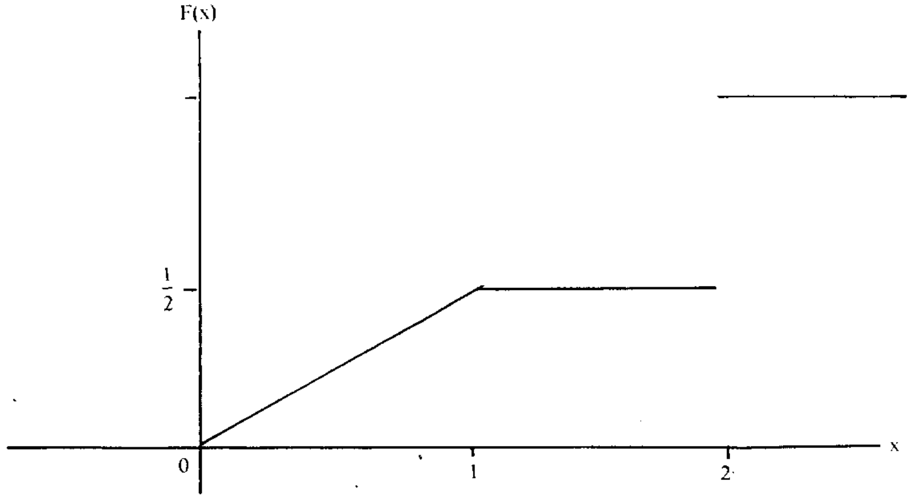
ดังนั้น
$$\begin{aligned} H(x) &= 0 \quad , \ x < 0 \\ &= x \quad , \ 0 \leqslant x < 1 \\ &= 1 \quad , \ x \geqslant 1 \end{aligned}$$

จาก
$$F(x) = \frac{1}{2}G(x) + \frac{1}{2}H(x)$$

เราจะได้

4.1 $$F(x) = \begin{cases} 0 & , \; x < 0 \\ \frac{x}{2} & , \; 0 \leqslant x < 1 \\ \frac{1}{2} & , \; 1 \leqslant x < 2 \\ 1 & , \; x \geqslant 2 \end{cases}$$

4.2 แสดง F(x) ให้เห็นด้วยกราฟ ดังนี้



4.3 $$E(X) = \frac{1}{2}\sum_i a_i g(a_i) + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x dH(x)$$

$$= \frac{1}{2}(2)(1) + \frac{1}{2}\int_0^1 x dx$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}$$

ค่าคาดหมายของ X $= \frac{5}{4}(100) = 125$ บาท

5. ในการทดลองเชิงประกอบ ครั้งแรกโยนลูกเต๋า 1 ลูก ถ้าออกหมายเลข 1 หรือ 2 เลือกจุดอย่างสุ่มในช่วง [0, 1] ถ้าออกหมายเลข 3, 4, 5 หรือ 6 เลือกจุดอย่างสุ่มในช่วง [1, 2] จงแสดงให้เห็นจริงว่าฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวเลขที่เลือกได้ (X) คือ

$$F(x) = 0 \quad , \; x < 0$$

$$= \frac{x}{3} \quad , \; 0 \leqslant x < 1$$

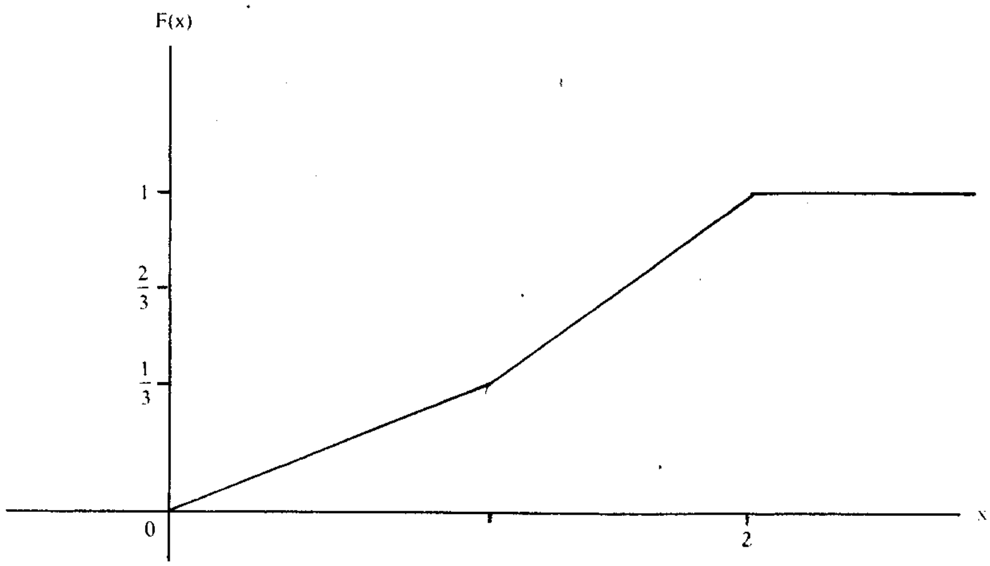
$$= \frac{(2x-1)}{3} \quad , \quad 1 \leqslant x < 2$$

$$= 1 \qquad , \quad 2 \leqslant x$$

จงแสดง F(x) ด้วยกราฟ F จะเป็นแบบต่อเนื่องเพียงอย่างเดียวหรือไม่ ถ้าเป็น จงหาฟังก์ชันความหนาแน่นของ X

เฉลย

เขียนกราฟแสดง F(x) ได้ดังนี้



จากกราฟ แสดงให้เห็นว่า F เป็นแบบต่อเนื่องตลอด

ดังนั้น F(x) เป็นฟังก์ชันแจกแจงสะสมของตัวแปรต่อเนื่อง X

เนื่องจาก $\frac{d(0)}{dx} = 0 = \frac{d(1)}{dx}$

$$\frac{d\frac{x}{3}}{dx} = \frac{1}{3}$$

และ $\frac{d}{dx}\left(\frac{2x-1}{3}\right) = \frac{2}{3}$

จะได้ฟังก์ชันหนาแน่นของ X

$$f(x) = \frac{1}{3} \qquad , \quad 0 < x < 1$$

$$= \frac{2}{3} \qquad , \quad 1 \leqslant x < 2$$

$$= 0 \qquad \text{อื่น ๆ}$$

แบบฝึกหัดระคน

1. X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นกำหนดไว้ดังนี้

$$f(x) = c\sin \pi x \quad , \quad 0 < x < 1$$
$$= 0 \quad , \quad \text{อื่น ๆ}$$

จงหา

1.1 ค่าของ c และ $P\left(\frac{1}{3} < X < \frac{1}{2}\right)$

1.2 ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ X

1.3 ค่าของ k ที่ทำให้ $P\left(k-\frac{1}{2} < X < k+\frac{1}{2}\right) = 0.95$

เฉลย

f(x) เป็นฟังก์ชันหนาแน่นของ X ดังนั้น

$$F(x) = \int_0^x c \sin \pi x dx \quad , \quad 0 < x < 1$$

$$= \frac{c}{\pi}\left(-\cos \pi x \Big|_0^x\right) = \frac{c}{\pi}(1-\cos \pi x) \quad , \quad 0 < x < 1$$

เป็นฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ X

$$\Longrightarrow \quad F(1) = \frac{c}{\pi}(1-\cos \pi) = 1$$

1.1 จะได้ $\qquad c = \frac{\pi}{2} \qquad (\cos \pi = -1)$

และ
$$P\left(\frac{1}{3} < X < \frac{1}{2}\right) = F\left(\frac{1}{2}\right)-F\left(\frac{1}{3}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{\pi}{3}\right)$$
$$= \frac{1}{2}(1-0)-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

1.2 ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ X คือ

$$F(x) = 0 \quad , \quad x < 0$$
$$= \frac{1}{2}(1-\cos \pi x) \quad , \quad 0 \leqslant x < 1$$
$$= 1 \quad , \quad x \geqslant 1$$

1.3 $$P\left(k-\frac{1}{2} < X < k+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[\cos \pi\left(k-\frac{1}{2}\right)-\cos \pi\left(k+\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$0.95 = \frac{1}{2}\left[2\sin \pi k \sin\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\Longrightarrow \quad \sin \pi k = 0.95 = \sin(\sin^{-1}.95)$$

$$k = \frac{1}{\pi}\sin^{-1}.95$$

2. k ควรจะมีค่าเท่าใด จึงจะทำให้

$$f(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x} \quad , \quad 0 < x < k$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นของ X และจงหาฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ X

P(0.25 < X < 0.64)

เฉลย

f(x) เป็นฟังก์ชันหนาแน่นของ X ดังนั้น

$$\int_0^k \frac{3}{2}\sqrt{x}dx = 1$$

$$\frac{3}{2}\left.\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^k = k^{\frac{3}{2}} = 1$$

$$k = 1$$

ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ X ก็คือ

$$F(x) = 0 \quad , \quad x < 0$$
$$= x\sqrt{x} \quad , \quad 0 \leqslant x < 1$$
$$= 1 \quad , \quad x \geqslant 1$$

$$P(0.25 < X < 0.64) = F(0.64) - F(0.25)$$
$$= 0.64\sqrt{0.64} - 0.25\sqrt{0.25}$$
$$= 0.387$$

3. อุปสงค์ของสินค้าชนิดหนึ่งเป็นตัวแปรเชิงสุ่ม X ที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นดังนี้

$$f(x) = kx \quad , \quad 0 < x < 10$$
$$= k(20-x) \quad , \quad 10 < x < 20$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

3.1 จงหาค่าของ k และเขียนกราฟของ f(x)

3.2 จงเขียนกราฟแสดงฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ X

3.3 จงคำนวณค่าของ $P(X \geq 10)$ และ $P(15 < X \leq 20)$

เฉลย

3.1 f(x) เป็นฟังก์ชันหนาแน่นของ X ดังนั้น

$$\int_0^{10} kx\,dx + \int_{10}^{20} k(20-x)\,dx \qquad 1$$

$$k\frac{10^2}{2} + k\left[20(20-10) - \frac{20^2 - 10^2}{2}\right] = 1$$

$$k = \frac{1}{100}$$

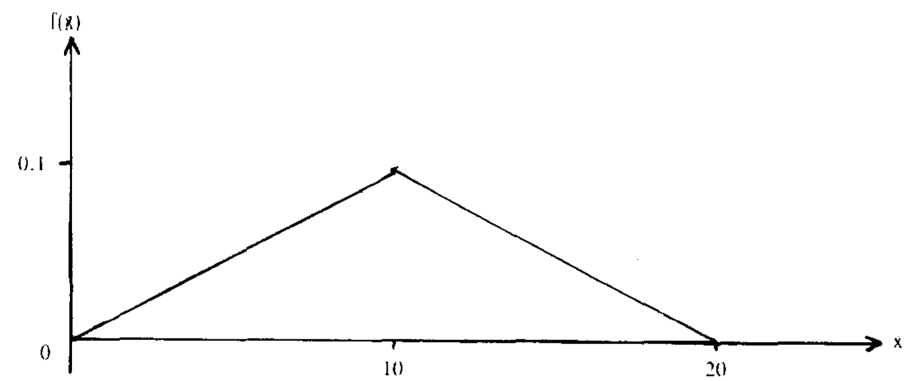
ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ X คือ

$$F(x) = 0 \quad , \quad x < 0$$

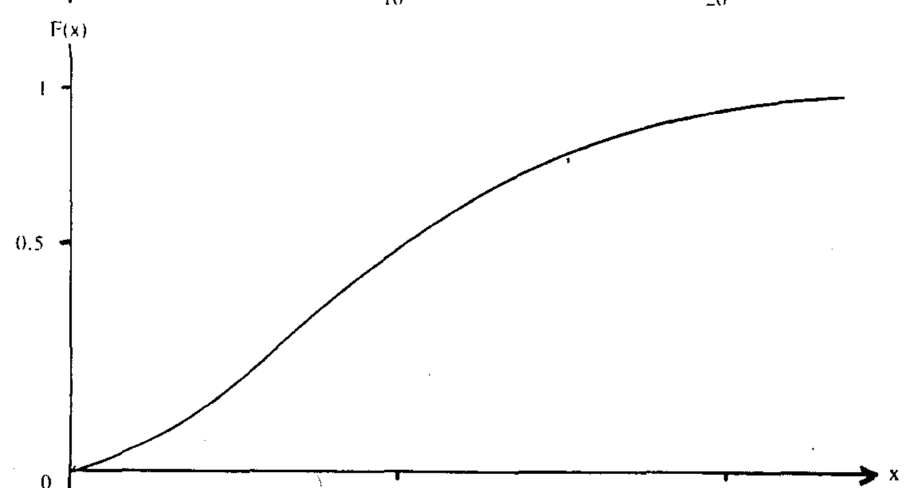
$$= \frac{x^2}{200} \quad , \quad 0 \leq x < 10$$

$$\frac{40x - x^2 - 200}{200} \quad 10 \leq x < 20$$

3.1



3.2



$1 \qquad , \quad x \geqslant 20$

เขียนกราฟของ f(x) และ F(x) ตามลำดับ ดังนี้ (ดูรูปหน้า 87)

3.3 $\qquad P(X \geqslant 10) = 1\text{-}F(10) = 1-\frac{100}{200} = \frac{1}{2}$

$$P(15 < X \leqslant 20) = F(20)-F(15)$$

$$= 1-\frac{40(15)-15^2-200}{200} = \frac{1}{8}$$

4. X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่องที่มีฟังก์ชันการแจกแจงสะสม F(x) กำหนดไว้ดังนี้

$$F(x) = 1-e^{-0.01x} \quad , \quad x > 0$$

4.1 จงหาฟังก์ชันความหนาแน่นของ X

4.2 จงคำนวณค่าของ $P(X > 100)$

4.3 จงหาฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ $Y = 2X+5$

เฉลย

4.1 $\qquad \frac{d}{dx}(1-e^{-0.01x}) = -e^{-0.01x}(-0.01) \quad , \quad x > 0$

ฟังก์ชันหนาแน่นของ X คือ

$$f(x) = 0.01e^{-0.10x} \quad , \quad x > 0$$

$$= 0 \qquad \text{อื่น ๆ}$$

4.2 $\qquad P(X > 100) = 1-F(100)$

$$= 1-(1-e^{-0.01(100)}) = e^{-1}$$

4.3 $\qquad P(Y \leqslant y) = P(2X+5 \leqslant y) \quad , \quad y > 5$

$$= P\left(X \leqslant \frac{y-5}{2}\right)$$

$$= F_X\left(\frac{y-5}{2}\right) = 1-e^{-0.01\left(\frac{y-5}{2}\right)}$$

ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ $Y = 2X+5$ คือ

$$F(y) = 0 \qquad , \quad y < 5$$

$$= 1-e^{-.005(y-5)}, \quad 5 \leqslant y < \infty$$

5. X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่องที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น f(x) และฟังก์ชันการแจกแจงสะสม F(x)

5.1 ถ้า a และ b เป็นค่าคงที่ใด ๆของ X, $b > a$ จงแสดงให้เห็นจริงว่า

$$P(a < X \leqslant b) = F(b)-F(a)$$

5.2 อาศัยนิยามค่าความหมายของ X :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)dx$$

จงแสดงให้เห็นจริงว่า

$$E(X^2) = \int_{\infty}^{\infty} x^2 dF(x)$$

เฉลย

5.1 ดูการพิสูจน์ทฤษฎี 2.4.1

5.2 $$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

$$\Longrightarrow \quad E(X^2) = \int_{\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx$$

แต่ $$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

นั่นคือ $$dF(x) = f(x)dx$$

ดังนั้น $$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF(x)$$

6. ถ้าฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ X คือ

$$\begin{aligned} F(x) &= 0 && , \quad x < 0 \\ &= x - \frac{1}{4}x^2 && , \quad 0 \leqslant x < 2 \\ &= 1 && , \quad x \geqslant 2 \end{aligned}$$

6.1 จงพิสูจน์ว่า X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่อง

6.2 จงหาฟังก์ชันความหนาแน่นของ X

6.3 จงคำนวณค่าของ $P(1 < 4X^2 \leqslant 9)$

เฉลย

6.1 $$P(X = 0) = F(0) - F(0^-) = \left\{0 - \frac{1}{4}(0)\right\} - 0 = 0$$

$$P(X = 2) = F(2) - F(2^-) = 1 - \left\{2 - \frac{1}{4}(2^2)\right\} = 0$$

$$P(X = x) = 0, \quad 0 < x < 2$$

แสดงว่า X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่อง

6.2 $$\frac{d}{dx}\left\{x-\frac{1}{4}x^2\right\} = 1-\frac{1}{4}(2x) \quad , \quad 0 \leqslant x < 2$$

$$\frac{d0}{dx} = 0 = \frac{d1}{dx}$$

ฟังก์ชันหนาแน่นของ X คือ

$$f(x) = 1-\frac{x}{2} \quad , \quad 0 < x < 2$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

6.3 $$P(1 < 4X^2 \leqslant 9) = P\left(\frac{1}{2} < X \leqslant \frac{3}{2}\right)$$
$$= F\left(\frac{3}{2}\right)-F\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$= \left\{\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\left(\frac{9}{4}\right)\right\} - \left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)\right\} = \frac{1}{2}$$

7. X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบไม่ต่อเนื่องที่มีฟังก์ชันน่าจะเป็น $f(x)$ กำหนดไว้ว่า $f(x) > 0$ ถ้า $x = -1, 0, 1$ นอกนั้นเป็น 0

7.1 ถ้า $f(0) = \frac{1}{2}$ จงหาค่าของ $E(X^2)$

7.2 ถ้า $f(0) = \frac{1}{2}$ และ $E(X) = \frac{1}{6}$ จงหา $f(-1)$ และ $f(1)$

7.3 จงหาฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ $Y = 2X^2-1$

เฉลย

7.1 $$E(X^2) = (-1)^2f(-1)+(0)^2f(0)+(1)^2f(1)$$
$$= f(-1)+f(1)$$

แต่ $f(-1)+f(0)+f(1) = 1$ คุณสมบัติของ p.f. ของ X

ดังนั้น $f(-1)+f(1) = 1-f(0) = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ .... (1)

จะได้ $E(X^2) = \frac{1}{2}$

7.2 $E(X) = (-1)f(-1)+(0)f(0)+(1)f(1) = \frac{1}{6}$

ดังนั้น $-f(-1)+f(1) = \frac{1}{6}$ ....(2)

$\frac{(1)+(2)}{2}$ จะได้ $$f(1) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{3}$$

จาก (2) เราจะได้

$$f(-1) = \frac{1}{3}-\frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

7.3 $$P(Y \leqslant y) = P(2X^2-1 \leqslant y) \quad , \quad y = -1, 1$$
$$= P\left(-\sqrt{\frac{y+1}{2}} \leqslant X \leq \sqrt{\frac{y+1}{2}}\right)$$

$$P(Y \leqslant y) = f(0) = \frac{1}{2}, \quad -1 \leqslant y < 1$$
$$= f(-1)+f(0)+f(1) \quad , \quad y \geqslant 1$$

ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ $Y = 2X^2-1$ คือ

$$F(y) = 0 \quad , \quad y \leqslant -1$$
$$= \frac{1}{2} \quad , \quad -1 \leqslant y < 1$$
$$= 1 \quad , \quad y \geqslant 1$$

8. 8.1 จงพิสูจน์ว่า ถ้า $E(X^2) = 0$ แล้ว $P(X = 0) = 1$

8.2 สมมติว่า f เป็นฟังก์ชัน ซึ่งมีคุณสมบัติว่า $f(x) > 0$ ถ้า $x \neq 0$ และ $f(0) = 0$ จงพิสูจน์ว่า ถ้า $E[|X-a|] = 0$ แล้ว $P(X = a) = 1$

เฉลย

8.1 $$E(X^2) = \sum_{\forall x} x^2 f(x)$$

$$\Longrightarrow \quad 0 = \sum_{x\neq 0} x^2 f(x) + 0f(0) = \sum_{x \neq 0} x^2 f(x)$$

แสดงว่า $P(X = x) = f(x) = 0$ ทุกค่า $x \neq 0$

แต่ $\sum_{\forall x} f(x) = 1$ คุณสมบัติของฟังก์ชันน่าจะเป็น

ดังนั้น $P(X = x) = f(0) = 1$

8.2 $f(x) > 0, \quad x \neq 0, \quad f(0) = 0$

$$E[|X-a|] = \sum_{\substack{\forall x \\ x\neq 0}} |x-a| f(x) = 0$$

$|x-a| \geqslant 0$ ทุกค่า x และ $f(x) > 0, \ x \neq 0$

$E[|X-a|]$ จะเป็น 0 ก็ต่อเมื่อ $x-a = 0$ หรือ $f(x) = 0$

เมื่อ $f(x) > 0$ ก็แสดงว่า $x-a = 0$ หรือ $x = a$

นั่นคือ $P(X = a) > 0$

เมื่อ $x \neq a$, $|x-a| > 0$ แสดงว่า $f(x) = 0$, $\forall x \neq 0$

สรุปได้ว่า $P(X = a) = 1$ (คุณสมบัติฟังก์ชันน่าจะเป็น)

9. จงหาค่าของ p และ q ที่ทำให้

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ px & , 0 \leqslant x < 2 \\ qx^2 & , 2 \leqslant x < 4 \\ 1 & , x \geqslant 4 \end{cases}$$

เป็นฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่อง X

และจงคำนวณค่าของ $P(1 < X \leqslant 4|X \leqslant 3)$

เฉลย

F(x) เป็นฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแปรต่อเนื่อง X ดังนั้น

$$0 = P(X = 2) = F(2)-F(2^-) = q(2^2)-p(2) \qquad \text{..........(1)}$$

$$0 = P(X = 4) = F(4)-F(4^-) = 1-q(4^2) \qquad \text{..........(2)}$$

จาก (2) จะได้ $q = \frac{1}{16}$

แทนค่าดูใน (1) จะได้

$$0 = \frac{4}{16}-2p \qquad \text{นั่นคือ} \qquad p = \frac{1}{8}$$

$$P(1 < X \leqslant 4|X \leqslant 3) = \frac{P(1 < X \leqslant 3)}{P(X \leqslant 3)}$$

$$= \frac{F(3)-F(1)}{F(3)}$$

$$= \frac{\frac{1}{16}(3^2)-\frac{1}{8}(1)}{\frac{1}{16}(3^2)} = \frac{7}{9}$$

10. กำหนด f(x) เป็น p.d.f. ของตัวแปรเชิงสุ่ม X จงหา

ก. ค่าคาดหมายของ X

ข. c.d.f. ของ X

ค. median ของ X

เมื่อ

10.1 $f(x) = \frac{x}{15}$, x = 1, 2, 3, 4, 5

$= 0$ อื่น ๆ

10.2 $f(x) = 3(1-x)^2$, $0 < x < 1$

$= 0$ อื่น ๆ

10.3 $f(x) = \frac{1}{3}$, $0 < x < 1$ หรือ $2 < x < 4$

$= 0$ อื่น ๆ

เฉลย

10.1 ก. $E(X) = \sum_{x=1}^{5} x \cdot \frac{x}{15}$

$= \frac{1}{15}+\frac{4}{15}+\frac{9}{15}+\frac{16}{15}+\frac{25}{15} = 3\frac{2}{3}$

ข. c.d.f. ของ x

$$
\begin{aligned}
F(x) &= 0 &&, \quad x < 1 \\
&= \frac{1}{15} &&, \quad 1 \leqslant x < 2 \\
&= \frac{1}{15}+\frac{2}{15} = \frac{3}{15} &&, \quad 2 \leqslant x < 3 \\
&= \frac{3}{15}+\frac{3}{15} = \frac{6}{15} &&, \quad 3 \leqslant x < 4 \\
&= \frac{6}{15}+\frac{4}{15} = \frac{10}{15} &&, \quad 4 \leqslant x < 5 \\
&= \frac{10}{15}+\frac{5}{15} = 1 &&, \quad x \geqslant 5
\end{aligned}
$$

ค. จาก ข. จะเห็นว่า

$F(4^-) = \frac{6}{15} < \frac{1}{2}$

$F(4) = \frac{10}{15} > \frac{1}{2}$

แสดงว่า มัธยฐานของ $X = 4$

10.2 ก. $E(X) = \int_0^1 x \cdot 3(1-x)^2 dx$

$$= \int_0^1 (3x - 6x^2 + 3x^3) dx$$

ค่าคาดหมายของ $X = \frac{3}{2} - \frac{6}{3} + \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

ข. $\int_0^x 3(1-x)^2 dx = -(1-x)^3 \Big|_0^x \cdot, \quad 0 < x < 1$

ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ X คือ

$$F(x) = 0 \quad , \quad x<0$$

$$= 3x - 3x^2 + x^3 \quad , \quad 0 \leqslant x < 1$$

$$= 1 \quad , \quad x \geqslant 1$$

ค. ถ้า m เป็นมัธยฐานของ x เราจะได้

$$F(m) = 3m - 3m^2 + m^3 = \frac{1}{2}$$

$$2m^3 - 6m^2 + 6m - 1 = 0$$

มัธยฐานของ X = .206

10.3 ก. $E(X) = \int_0^1 \frac{x}{3} dx + \int_2^4 \frac{x}{3} dx$

$$= \frac{x^2}{6}\Big|_0^1 + \frac{x^2}{6}\Big|_2^4$$

ค่าคาดหมายของ $X = \frac{1}{6} + \frac{16-4}{6} = 2\frac{1}{6}$

ข. ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ X คือ

$$F(x) = 0 \quad , \quad x < 0$$

$$= \int_0^x \frac{1}{3} dx = \frac{x}{3} \quad , \quad 0 \leqslant x < 1$$

$$= \frac{1}{3} \quad , \quad 1 \leqslant x < 2$$

$$= \frac{1}{3} + \int_{2}^{x} \frac{1}{3} dx = \frac{x-1}{3} \quad , \quad 2 \leqslant x < 4$$

$$= 1 \quad , \quad x \geqslant 4$$

ค. $F(2) = \frac{2-1}{3} = \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$

แสดงว่ามัธยฐานของ X มีค่ามากกว่า 2

ถ้า m เป็นมัธยฐานของ X เราจะได้

$$\frac{m-1}{3} = \frac{1}{2} \quad , \quad m > 2$$

$$m = \frac{3}{2} + 1$$

$$\text{มัธยฐาน } X = \frac{5}{2}$$

11. กำหนดฟังก์ชันความหนาแน่นของ X ดังนี้

$$\begin{aligned} f(x) &= x+1 \quad , \quad -1 < x < 0 \\ &= x-3 \quad , \quad 3 < x < c, \ c > 3 \\ &= 0 \quad , \quad \text{อื่น ๆ} \end{aligned}$$

จงหาค่าของ c และ

11.1 ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ X

11.2 $P(X > 2)$, $P\left(-\frac{1}{2} < X \leqslant \frac{5}{2}\right)$

11.3 มัธยฐานของ X

เฉลย

f(x) เป็นฟังก์ชันหนาแน่นของ X ดังนั้น

$$\int_{-1}^{0} (x+1)dx + \int_{3}^{c} (x-3)dx = 1$$

$$\left\{\frac{0-(-1)^2}{2} + 0 - (-1)\right\} + \left\{\frac{c^2-3^2}{2} - 3(c-3)\right\} = 1$$

$$c^2 - 6c + 8 = 0$$

$$(c-2)(c-4) = 0$$

$$c = 2, 4$$

แสดงว่า $f(x) = x+1, -1 < x < 0$

$= x-3 \quad , \quad 3 < c < 4$

$= 0 \quad$ อื่น ๆ

11.1 $\int_{-1}^{x}(x+1)dx = \frac{x^2-1}{2}+x-(-1) = \frac{1}{2}(x^2+2x+1) \quad , \quad -1 < x < 0$

$= \frac{1}{2}(0+0+1) = \frac{1}{2} \quad , \quad 0 \leqslant x < 3$

$\frac{1}{2}+\int_{3}^{x}(x-3)dx = \frac{1}{2}\ \frac{x^2-9}{2}-3(x-3) = \frac{1}{2}(x^2-6x+10), \quad 3 \leqslant x < 4$

ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ x คือ

$$
\begin{aligned}
F(x) &= 0 && , \quad x < -1 \\
&= \frac{(x+1)^2}{2} && , \quad -1 \leqslant x < 0 \\
&\ \ \frac{1}{2} && , \quad 0 \leqslant x < 3 \\
&\ \ \frac{x^2-6x+10}{2} && , \quad 3 \leqslant x < 4 \\
&\ \ 1 && , \quad x \geqslant 4
\end{aligned}
$$

11.2 $P(X > 2) = 1 - F(2)$

$= 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$P\left(-\frac{1}{2} < X \leqslant \frac{5}{2}\right) = F\left(\frac{5}{2}\right)-F\left(-\frac{1}{2}\right)$

$= \frac{1}{2} - \frac{\left(-\frac{1}{2}+1\right)^2}{2} = \frac{3}{8}$

11.3 มัธยฐานของ $X = 0$

12. กำหนดฟังก์ชันความหนาแน่นของ X ดังนี้

$f(x) = 3x^2 \quad , \quad 0 < x < 1$

$= 0 \quad ,$ อื่น ๆ

จงหา

12.1 $\lim_{h \to 0} P(0.1 - h < X \leqslant 0.1)$

12.2 $P(\lim_{h \to 0} \{0.1 - h < x \leqslant 0.1\})$

12.3 $\lim_{h \to 0} P(0.2 < X \leqslant 0.5 + h)$

12.4 $P(\lim_{h \to 0} \{0.2 < x \leqslant 0.5 + h\})$

12.5 p.d.f. และ c.d.f. ของ $Y = X^3$

เฉลย

$$P(a < X \leqslant b) = \int_a^b 3x^2dx \quad , \quad 0 < a < b < 1$$

$$= b^3 - a^3$$

12.1 $$\lim_{h \to 0} P(0.1 - h < X \leqslant 0.1) = \lim_{h \to 0} [(0.1)^3 - (0.1 - h)^3]$$

$$= (0.1)^3 - (0.1)^3 = 0$$

12.2 $$P(\lim_{h \to 0} \{0.1 - h < x \leqslant 0.1\}) = P(X = 0.1) = 0$$

12.3 $$\lim_{h \to 0} P(0.2 < X \leqslant 0.5 + h) = \lim_{h \to 0} [(0.5 + h)^3 - (0.2)^3]$$

$$= 0.125 - 0.008 = 0.117$$

12.4 $$P(\lim_{h \to 0} \{0.2 < x \leqslant OS + h\}) = P(0.2 < x \leqslant 0.5)$$

$$= (0.5)^3 \quad (0.2)^3 = 0.125 - 0.008 = 0.117$$

12.5 $$P(Y \leqslant y) = P(X^3 \leqslant y) \quad , \quad 0 < y < 1$$

$$= P(X \leqslant y^{\frac{1}{3}})$$

$$= \int_0^{y^{\frac{1}{3}}} 3x^2dx = (y^{\frac{1}{3}})^3$$

ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ $Y = X^3$ คือ

$$F(y) = 0 \quad , \quad y < 0$$

$$= y \quad , \quad 0 \leqslant y < 1$$

$$= 1 \quad , \quad y \geqslant 1$$

$$\frac{dy}{dy} = 1 \quad , \quad \frac{d0}{dy} = 0 = \frac{d1}{dy}$$

ฟังก์ชันหนาแน่นของ $Y = X^3$ ก็คือ

$$f(y) = 1 \quad , 0 < y < 1$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

13. $A_1 = \{x : 1 \leqslant x < 15\}$, $A_2 = \{x : 15 \leqslant x \leqslant 30\}$

ถ้า $P(A_1) = \frac{2}{7}$, $P(A_2) = \frac{4}{7}$ และ $A = A_1 \cup A_2$

13.1 จงคำนวณค่าของ $P(A)$

13.2 ถ้า X เป็น indicator r.v. ของ set A

13.2.1 จงหาฟังก์ชันการแจกแจงของ X

13.2.2 ค่าคาดหมายของ X จะเป็นเท่าใด

13.2.3 จงหาฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ $Y = 2X^2 - 1$

13.2.4 จงหาค่าคาดหมายและค่าความแปรปรวนของ Y

เฉลย

13.1 $A_1 \cup A_2 = \{x : 1 \leqslant x \leqslant 30\}$, $A_1 \cap A_2 = \phi$

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{2}{7} + \frac{4}{7} = \frac{6}{7}$$

13.2 X เป็น indicator r.v. ของ set A ดังนั้น

$$E(X) = P(X = 1) = P(A) = \frac{6}{7}$$

13.2.1 ฟังก์ชันการแจกแจงของ x ก็คือ

$$f(x) = \frac{1}{7} \quad , x = 0$$
$$= \frac{6}{7} \quad , x = 1$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

13.2.2 ค่าคาดหมายของ $X = \frac{6}{7}$

13.2.3 ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ $Y = 2X^2 - 1$ คือ

$$F(y) = 0 \quad , y < -1$$
$$= \frac{1}{7} \quad , -1 \leqslant y < 1$$
$$= 1 \quad , y \geqslant 1$$

13.2.4 $$E(Y) = (-1)\left(\frac{1}{7}\right)+(1)(1-\frac{1}{7})$$

ค่าคาดหมายของ $Y = \frac{5}{7}$

$$E(Y^2) = (-1)^2\left(\frac{1}{7}\right)+(1)^2\left(1-\frac{1}{7}\right) = 1$$

ความแปรปรวนของ $Y = 1-\left(\frac{5}{7}\right)^2 = \frac{24}{49}$

หมายเหตุ การคำนวณในข้อ 13.2.4 นักศึกษาอาจคำนวณโดยใช้ทฤษฎีของค่าคาดหมายก็ได้

14. X_A และ X_B เป็นตัวแปรเชิงสุ่มดัชนี (indicator r.v.) ของ A และ B ตามลำดับ กำหนด $x = x_A + x_B$ ถ้า $E(X) = \frac{5}{6}$ และ $P(A) = \frac{1}{2}$ จงหา

14.1 ค่าของ P(B)

14.2 ค่าของ $P(A \cup B)$ ถ้า $P(X = 2) = \frac{1}{5}$

14.3 ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ x

เฉลย

X_A เป็นตัวแปรเชิงสุ่มดัชนีของ A จะได้ $E(X_A) = P(A) = \frac{1}{2}$

X_B เป็นตัวแปรเชิงสุ่มดัชนีของ B จะได้ $E(X_B) = P(B)$

$$X = X_A + X_B$$

$$E(X) = E(X_A+X_B) = E(X_A)+E(X_B)$$

$$\frac{5}{6} = \frac{1}{2}+P(B)$$

$$P(B) = \frac{5}{6}-\frac{1}{2} = \frac{1}{3} \qquad \text{.........(14.1)}$$

$$\frac{1}{5} = P(x = 2) = P(X_A = 1,\ X_B = 1) = P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5} = \frac{19}{30} \qquad \text{.........(14.2)}$$

$$P(X = 0) = 1-P(A \cup B) = 1-\frac{19}{30} = \frac{11}{30}$$

$$P(X = 1) = 1 - \frac{1}{5} - \frac{11}{30} = \frac{13}{30}$$

จะได้

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \ x < 0 \\ \frac{11}{30} & , \ 0 \leqslant x < 1 \\ \frac{24}{30} & , \ 1 \leqslant x < 2 \\ 1 & , \ x \geqslant 2 \end{cases} \qquad \ldots\ldots (14.3)$$

15. กล่องใบหนึ่งบรรจุหลอดไฟ 10 หลอด เป็นหลอดชำรุด 3 หลอด สุ่มหลอดไฟมาทดสอบ 3 หลอด

15.1 จงคำนวณค่าของความน่าจะเป็นที่จะได้

1) ไม่มีหลอดใดชำรุด
2) หลอดชำรุด 1 หลอด
3) หลอดชำรุด 2 หลอด
4) หลอดชำรุดทั้ง 3 หลอด

15.2 กำหนด A_i เป็นเหตุการณ์ที่สุ่มครั้งที่ i ได้หลอดชำรุด $i = 1, 2, 3$ และกำหนดตัวแปรเชิงสุ่มดัชนีดังนี้

$$X_i(s) = 1 \quad \text{ถ้า } s \text{ อยู่ใน } A_i,\ i = 1, 2, 3$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

ถ้า $X = X_1 + X_2 + X_3$

จงหาฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X

15.3 เปรียบเทียบผลที่ได้จาก 15.1 และ 15.2

เฉลย

15.1 สุ่มหลอดไฟมาทดสอบ 3 หลอดจากที่มีอยู่ 10 หลอด
ให้ X เป็นจำนวนหลอดชำรุด

จะได้ $$P(X = x) = \binom{3}{x}\frac{3^{(x)}7^{(3-x)}}{10^{(3)}} \quad , \quad x = 0, 1, 2, 3$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

1) P(ไม่มีหลอดชำรุด) $= P(X = 0)$

$$= \binom{3}{0}\frac{3^{(0)}7^{(3)}}{10^{(3)}} = \frac{7}{24}$$

2) P(หลอดชำรุด 1 หลอด) = P(X = 1)

$$= \binom{3}{1}\frac{3^{(1)}7^{(2)}}{10^{(3)}} = \frac{21}{40}$$

3) P(หลอดชำรุด 2 หลอด) = P(X = 2)

$$= \binom{3}{2}\frac{3^{(2)}7^{(1)}}{10^{(3)}} = \frac{7}{40}$$

4) P(หลอดชำรุด 3 หลอด) = P(X = 3)

$$= \binom{3}{3}\frac{3^{(3)}7^{(0)}}{10^{(3)}} = \frac{1}{120}$$

15.2 A_i = เหตุการณ์ที่สุ่มครั้งที่ i ได้หลอดชำรุด , i = 1, 2, 3

ดังนั้น $$P(A_i) = \frac{3\cdot 9^{(2)}}{10^{(3)}} = \frac{3}{10} \Longrightarrow S_1 = \binom{3}{1}\frac{3}{10} = \frac{9}{10}$$

$$P(A_i \cap A_j) = \frac{3^{(2)}\cdot 8}{10^{(3)}} = \frac{1}{15} \Longrightarrow S_2 = \binom{3}{2}\frac{1}{15} = \frac{1}{5}$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{3^{(3)}}{10^{(3)}} = \frac{1}{120} \Longrightarrow S_3 = \frac{1}{120}$$

จาก $$P(X = x) = \sum_{k=0}^{3-x} (-1)^k \binom{x+k}{x} S_{x+k}$$

จะได้ $$P(X = 0) = S_0 - S_1 + S_2 - S_3$$

$$= 1 - \frac{9}{10} + \frac{1}{5} - \frac{1}{120} = \frac{7}{24}$$

$$P(X = 1) = S_1 - \binom{2}{1}S_2 + \binom{3}{1}S_3$$

$$= \frac{9}{10} - 2\left(\frac{1}{5}\right) + 3\left(\frac{1}{120}\right) = \frac{21}{40}$$

$$P(X = 2) = S_2 - \binom{3}{1}S_3$$

$$= \frac{1}{5} - 3\left(\frac{1}{120}\right) = \frac{7}{40}$$

$$P(X = 3) = S_3 = \frac{1}{120}$$

15.3 ผลที่ได้จาก 15.1 และ 15.2 จะเป็นผลลัพธ์เดียวกัน

16. X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น f(x) กำหนดไว้ดังนี้

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \quad , \quad 0 \leqslant x$$
$$= 0 \quad , \quad x < 0$$

จงหา

16.1 ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมและฟังก์ชันความหนาแน่นของ $Y = \frac{1}{X}$

16.2 $P(Y \geqslant 5)$, $P(Y \leqslant 10 | Y > 7)$

16.1
$$P(Y \leqslant y) = P\left(\frac{1}{X} \leqslant y\right) \quad , \quad y \geqslant 0$$
$$= P\left(X \geqslant \frac{1}{y}\right)$$
$$= \int_{1/y}^{\infty} \frac{1}{(1+x)^2} dx$$
$$= -\frac{1}{1+x}\Bigg|_{1/y}^{\infty} = \frac{y}{y+1} \quad , \quad y \geqslant 0$$
$$\frac{d}{dy}\left\{\frac{y}{y+1}\right\} = \frac{y+1-y}{(y+1)^2}$$

ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ $Y = \frac{1}{X}$ ก็คือ

$$F(y) = 0 \quad , \quad y < 0$$
$$= \frac{y}{1+y} \quad , \quad 0 \leqslant y < \infty$$

ฟังก์ชันหนาแน่นของ $Y = \frac{1}{X}$ ก็คือ

$$f(y) = \frac{1}{(1+y)^2} \quad , \quad y \geqslant 0$$
$$= 0 \quad , \quad y < 0$$

16.2
$$P(Y \geqslant 5) = 1 - F_Y(y)$$
$$= 1 - \frac{5}{1+5} = \frac{1}{6}$$
$$P(Y \leqslant 10 | Y > 7) = \frac{P(7 < Y \leqslant 10)}{P(Y > 7)}$$

$$= \frac{F_Y(10) - F_Y(7)}{1 - F_Y(7)}$$

$$\frac{\frac{10}{1+10} - \frac{7}{1+7}}{1 - \frac{7}{1+7}} = \frac{3}{11}$$

17. X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น $f(x)$ กำหนดไว้ดังนี้

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} &&, \quad 0 < x < 1 \\ &= \frac{1}{2x^2} &&, \quad 1 < x \\ &= 0 &&, \quad x < 0 \end{aligned}$$

จงหา

17.1 c.d.f. ของ X

17.2 $P\left(1 < \frac{1}{X} \leqslant 10\right)$

17.3 มัธยฐานของ X

เฉลย

17.1

$$\begin{aligned} F(x) &= 0 &&, \quad x < 0 \\ &= \int_0^x \frac{1}{2}dx = \frac{x}{2} &&, \quad 0 \leqslant x < 1 \\ &= \frac{1}{2} + \int_1^x \frac{1}{2x^2}dx = 1 - \frac{1}{2x} &&, \quad x \geqslant 1 \end{aligned}$$

17.2
$$\begin{aligned} P\left(1 < \frac{1}{X} \leqslant 10\right) &= P\left(\frac{1}{10} \leqslant X < 1\right) \\ &= F(1) - F\left(\frac{1}{10}\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{20} = \frac{9}{20} \end{aligned}$$

17.3 ถ้า m เป็นมัธยฐานของ X เราจะได้

$$F(m) = \frac{1}{2} = F(1)$$

มัธยฐานของ $X = 1$

18. กำหนดฟังก์ชันความหนาแน่นของ X ดังนี้

$$f(x) = e^{-x} \quad , \quad 0 \leqslant x$$
$$\quad = 0 \quad , \quad x < 0$$

จงหา

18.1 $P(10 < X \leqslant 100)$

18.2 ค่าคาดหมายของ X

18.3 ฟังก์ชันความหนาแน่นของ $Y = \frac{X}{(1+X)}$

18.1 $$P(10 < X \leqslant 100) = \int_{10}^{100} e^{-x}dx$$
$$= e^{-10} - e^{-100}$$

18.2 $$E(X) = \int_0^{\infty} xe^{-x}dx$$
$$= 1 \qquad \left(\int_0^{\infty} x^n e^{-x} = n!\right)$$

18.3 $$F(y) = P(Y \leqslant y) = P\left(\frac{X}{1+X} \leqslant y\right) \quad , \quad 0 \leqslant y < 1$$
$$= P\left(X \leqslant \frac{y}{1-Y}\right)$$
$$= \int_0^{\frac{y}{1-Y}} e^{-x}dx$$
$$= 1 - e^{-\frac{y}{1-y}}$$
$$\frac{dF(y)}{dy} = \frac{d}{dy}\left(1 - e^{-\frac{Y}{1-y}}\right) = -e^{-\frac{y}{1-y}}\left[-\frac{(1-y)-y(-1)}{(1-y)^2}\right]$$

จะได้ฟังก์ชันหนาแน่นของ $Y = \frac{X}{1+X}$ คือ

$$f(y) = \frac{1}{(1-y)^2}e^{\frac{v}{1-y}} \quad , \quad 0 \leqslant y < 1$$
$$= 0 \qquad \text{อื่น ๆ}$$

19. X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันการแจกแจงสะสม $F(x)$ กำหนดไว้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
F(x) &= 0 && x < -1 \\
&= \frac{1}{9}(x+1)^2 \ , && -1 \leqslant x < 2 \\
&= 1 && x \geqslant 2
\end{aligned}
$$

จงหา p.d.f. และ c.d.f. ของ $Y = X^2$

เฉลย

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= P(Y \leqslant y) = P(X^2 \leqslant y) \qquad , \ 0 < y < 4 \\
&= P(-\sqrt{y} \leqslant X \leqslant \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})
\end{aligned}
$$

$-1 \leqslant x < 1$ จะได้

$$F_Y(y) = \frac{1}{9}(\sqrt{y}+1)^2 - \frac{1}{9}(-\sqrt{y}+1)^2 = \frac{4\sqrt{y}}{9} \ , \quad 0 \leqslant y < 1$$

$1 \leqslant x < 2$ จะได้

$$F_Y(y) = \frac{1}{9}(\sqrt{y}+1)^2 - 0 \qquad , \ 1 \leqslant y < 4$$

ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ $Y = X^2$ คือ

$$
\begin{aligned}
F(y) &= 0 && , \ y < 0 \\
&= \frac{4\sqrt{y}}{9} && , \ 0 \leqslant y < 1 \\
&= \frac{1}{9}(\sqrt{y}+1)^2 && , \ 1 \leqslant y < 4 \\
&= 1 && , \ y \geqslant 4
\end{aligned}
$$

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{4\sqrt{y}}{9}\right) = \frac{4}{9}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}} \qquad , \ 0 < y < 1$$

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{9}(\sqrt{y}+1)^2\right) = \frac{2}{9}(\sqrt{y}+1)\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}} \ , \quad 1 \leqslant y < 4$$

ฟังก์ชันหนาแน่นของ $Y = X^2$ คือ

$$
\begin{aligned}
f(y) &= \frac{2}{9\sqrt{y}} && , \ 0 < y < 1 \\
&= \frac{\sqrt{y}+1}{9\sqrt{y}} && , \ 1 \leqslant y < 4 \\
&= 0 && \text{อื่น ๆ}
\end{aligned}
$$

20. ร้านขายขนมปังแห่งหนึ่งขายขนมปังในแต่ละวันได้เป็นจำนวน X ร้อยปอนด์ ถ้า X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น f(x) กำหนดไว้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x}{25} &&, \quad 0 < x < 5 \\
&= \frac{(10-x)}{25} &&, \quad 5 \leqslant x < 10 \\
&= 0 && \text{อื่น ๆ}
\end{aligned}
$$

20.1 จงคำนวณความน่าจะเป็นที่ร้านนี้จะขายขนมปังในวันต่อไปได้

1) มากกว่า 500 ปอนด์
2) น้อยกว่า 500 ปอนด์
3) ระหว่าง 250 ถึง 750 ปอนด์

20.2 กำหนด A, B และ C เป็นเหตุการณ์ที่ขายขนมปังในแต่ละวันได้ มากกว่า 500 ปอนด์ น้อยกว่า 500 ปอนด์ และระหว่าง 250 ถึง 750 ปอนด์ ตามลำดับ

1) จงคำนวณค่าของ $P(A|B)$, $P(A|C)$
2) A และ B เป็นเหตุการณ์ที่เป็นอิสระต่อกันหรือไม่
3) A และ C เป็นเหตุการณ์ที่เป็นอิสระต่อกันหรือไม่

เฉลย

$$
\begin{aligned}
F(x) = P(X \leqslant x) &= \int_0^x \frac{x}{25}dx = \frac{x^2}{50} &&, \quad 0 < x < 5 \\
&= \frac{5^2}{50} + \int_5^x \frac{10-x}{25}dx = \frac{20x - x^2 - 50}{50} &&, \quad 5 \leqslant x < 10
\end{aligned}
$$

20.1 1) P(ขายมากกว่า 500 ปอนด์)

$$= P(X > 5) = 1 - \frac{5^2}{50} = \frac{1}{2}$$

2) P(ขายน้อยกว่า 500 ปอนด์)

$$= P(X < 5) = \frac{5^2}{50} = \frac{1}{2}$$

3) P(ขายได้ระหว่าง 250 ปอนด์ ถึง 750 ปอนด์)

$$= P\left(2\frac{1}{2} < X \leqslant 7\frac{1}{2}\right)$$

$$= F\left(\frac{15}{2}\right) - F\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$= \frac{20\left(\frac{15}{2}\right)-\left(\frac{15}{2}\right)^2-50}{50} \quad \frac{\left(\frac{5}{2}\right)^2}{50} = \frac{3}{4}$$

20.2 1) $P(A|B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(\phi)}{P(X < 5)} = 0$

$$P(A|C) = \frac{P(A\cap C)}{P(C)} = \frac{P(5 < X \leqslant 7.5)}{P(2.5 < X \leqslant 7.5)}$$

$$= \frac{F(7.5)-F(5)}{\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{\frac{7}{8}-\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$$

2) $P(A)P(B) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4} \neq P(A\cap B)$

A และ B เป็นเหตุการณ์ขจัดกัน แต่ไม่เป็นอิสระกัน

3) $P(A)P(C) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{8} = P(A\cap C)$

แสดงว่า A และ C เป็นอิสระกัน

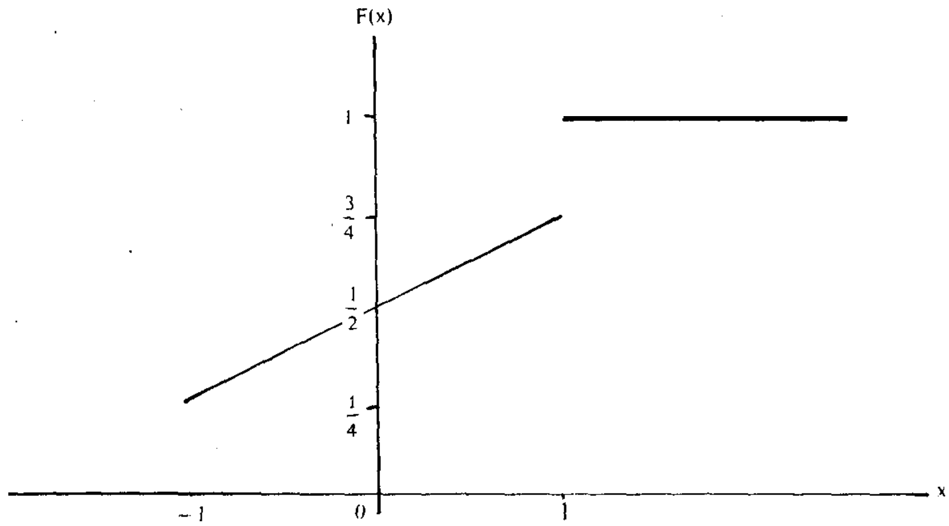
21. กำหนดฟังก์ชันการแจกแจงสะสมโดย

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \ x < -1 \\ \dfrac{(2+x)}{4} & , \ -1 \leqslant x < 1 \\ 1 & , \ x \geqslant 1 \end{cases}$$

จงแสดง F(x) ด้วยกราฟ และคำนวณค่าของ $P\left(-\frac{1}{2} < X \leqslant \frac{1}{2}\right)$, $P(X = 0)$, $P(X = 1)$, $P(2 < X \leqslant 3)$

เฉลย

เฉลย



$$P\left(-\frac{1}{2} < X < \frac{1}{2}\right) = F\left(\frac{1}{2}\right) - F\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{2+\frac{1}{2}}{4} - \frac{2-\frac{1}{2}}{4} = \frac{1}{4}$$

$$P(X = 0) = 0$$

$$P(X = 1) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$P(2 < x \leqslant 3) = 0$$

22. X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบผสม ที่มีฟังก์ชันการแจกแจงสะสมกำหนดไว้โดย

$$
\begin{aligned}
F(x) &= 0 &&. \ x < -1 \\
&= \frac{(1+x)}{4} &&, \ -1 \leqslant x < 0 \\
&= \frac{1}{4} &&, \ 0 \leqslant x < 1 \\
&= \frac{(1+x)}{4} &&, \ 1 \leqslant x < 2 \\
&= \frac{3}{4} &&, \ 2 \leqslant x < 3 \\
&= 1 &&, \ x \geqslant 3
\end{aligned}
$$

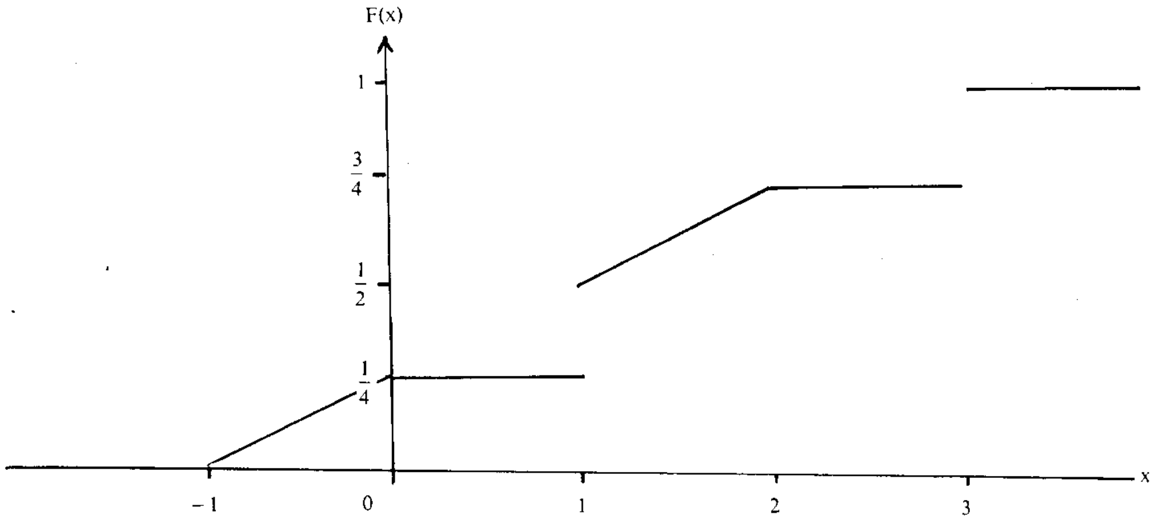
22.1 จงเขียนกราฟแสดง F(x)

22.2 จงคำนวณค่าคาดหมายของ X

22.3 จงคำนวณค่าของ $P\left(|X| \leqslant \frac{1}{2}\right)$, $P\left(\frac{1}{2} < X < 1\right)$, $P(X > 1)$, $P\left(\frac{3}{4} < X < 2\right)$, $P(2 < X < 3)$

เฉลย

22.1 กราฟแสดง F(x)



จากกราฟจะเห็นว่า $P(X = 1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

$$P(X = 3) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

แสดงว่าตัวแปรเชิงสุ่มไม่ต่อเนื่อง X มีเพียง 2 ค่า คือ 1 และ 2
และตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่องจะมี 2 ช่วง คือ $(-1, 0)$ และ $(1, 2)$

$$p = 1 - p = \frac{1}{2}$$

ดังนั้น $F(x) = \frac{1}{2}G(x) + \frac{1}{2}H(x)$

จะได้
$$G(x) = \begin{cases} 0 & , \ x < 1 \\ \frac{1}{2} & , \ 1 \leqslant x < 3 \\ 1 & , \ x \geqslant 3 \end{cases}$$

และ

$$
\begin{aligned}
H(x) &= 0 &&, \; x < -1 \\
&= \frac{1+x}{2} &&, -1 \leqslant x < 0 \\
&= \frac{1}{2} &&, \; 0 \leqslant x < 1 \\
&= \frac{x}{2} &&, \; 1 \leqslant x < 2 \\
&= 1 &&, \; x \geqslant 2
\end{aligned}
$$

2.2.2

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \frac{1}{2}\left(1 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left[\int_{-1}^{0} x \cdot \frac{1}{2} dx + \int_{1}^{2} x \cdot \frac{1}{2} dx\right] \\
&= \frac{1}{2}(2) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4} + \frac{4-1}{4}\right) = \frac{5}{4}
\end{aligned}
$$

22.3

$$
\begin{aligned}
P\left(|X| \leqslant \frac{1}{2}\right) &= P\left(-\frac{1}{2} \leqslant X \leqslant \frac{1}{2}\right) \\
&= F\left(\frac{1}{2}\right) - F\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1-\frac{1}{2}}{4} = \frac{1}{8} \\
P\left(\frac{1}{2} < X < 1\right) &= F(1^-) - F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0 \\
P(X > 1) &= 1 - F(1) = 1 - \frac{1+1}{4} = \frac{1}{2} \\
P\left(\frac{3}{4} < X < 2\right) &= F(2^-) - F\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1+2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \\
P(2 < X < 3) &= F(3^-) - F(2) = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = 0
\end{aligned}
$$