ทฤษฎีความน่าจะเป็นเบื้องต้น
(Elementary Probability Theory)

1.1 พีชคณิตของเซต (ALGEBRA OF SETS)

กำหนด S เป็นกลุ่มผลทดลอง (sample space หรือ universal set) ซึ่งหมายถึง เซตของบรรดาสิ่งทั้งหลายที่อยู่ในข่ายการพิจารณา

และ A เป็นเซตของสิ่งทั้งหลายที่เป็นสมาชิกของ S ที่มีคุณสมบัติตามที่กำหนดไว้

หาก A_1 และ A_2 เป็นเซตใด ๆ ที่อยู่ใน S แล้ว

เซตของ A_1 และ/หรือ A_2 ($A_1 \cup A_2$: the union of A_1 and A_2) จะเป็นเซตของสมาชิกของ S ซึ่งอยู่ใน A_1 หรืออยู่ใน A_2 หรืออยู่ในทั้ง A_1 และ A_2

ตัวอย่างที่ 1.1

$$S = (x: -2 < x \leqslant 10\}$$

$$A_1 = \{x : 0 < x \leqslant 3\}$$

$$A_2 = \{x : x^2 \leqslant 1\}$$

ดังนั้น $A_1 \cup A_2 = \{x : -1 \leqslant x \leqslant 3\}$

ตัวอย่างที่ 1.2

$$S = \{(x, y) : -3 < x < 3, 0y \leqslant 4\}$$

$$A_1 = \{(x, y) : -1 < x \leqslant 2, 0 < y < 2\}$$

$$A_2 = \{(x, y) : -1 < x \leqslant 2, 1 \leqslant y < 3\}$$

ดังนั้น $A_1 \cup A_2 = \{(x, y) : -1 < x \leqslant 2, 0 < y < 3)$

เซตของการเกิดร่วมกันของ A_1 และ A_2 ($A_1 \cap A_2$ or A_1A_2 : the intersection of A_1 and A_2) จะเป็นเซตของสมาชิกของ S ซึ่งอยู่ใน A_1 และอยู่ใน A_2

1.3 เซตฟังก์ชันน่าจะเป็น (THE PROBABILITY SET FUNCTION)

นิยาม ความน่าจะเป็นก็คือ เซตฟังก์ชัน P ซึ่งกำหนดให้แก่แต่ละเหตุการณ์ A ในกลุ่มผลทดลอง S ตัวเลข P(A) ซึ่งเรียกว่าความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A จะมีคุณสมบัติดังนี้

1. $P(A) > 0$ สำหรับทุก ๆ A ที่อยู่ใน S
2. ถ้า $A_1, A_2, \ldots$ เป็นเหตุการณ์ที่แยกต่างหากจากกัน (mutually exclusive events) นั่นคือ $A_i \cap A_j = \phi,\ i \neq j$ แล้ว

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots$$

3. $P(S) = 1$

ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A จะมีค่าเท่ากับ P(A) เราเรียก (S, P) ว่า ตัวแบบน่าจะเป็น (probability model หรือ probability space)

ถ้า (S, P) เป็นตัวแบบน่าจะเป็น P เป็นฟังก์ชันซึ่งกำหนดให้กับทุกเหตุการณ์ $\mathcal{G}$, power set ของ S เราสามารถคำนวณค่าของ P โดยอาศัยคุณสมบัติข้อที่ (2) ได้ดังนี้

หาก $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ และมีความน่าจะเป็น $P(\{q_1\}), P(\{a_2\}), \ldots, P(\{a_n\})$ สำหรับทุก ๆ เหตุการณ์ A ที่อยู่ใน $\mathcal{G}$ จะได้

$$(2')\ P(A) = P\left(\{a_{i1}\}\right) + P(\{a_{i2}\}) + \ldots + P(\{a_{ik}\})$$

ในเมื่อ $A = \{a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ik}\}$

ทฤษฎีเกี่ยวกับเซตฟังก์ชันน่าจะเป็น

1. สำหรับทุก ๆ A ที่เป็นสับเซตของ S

$$P(A) = 1 - P(A')$$

2. ความน่าจะเป็นของเซตว่างเป็น 0 นั่นคือ

$$P(\phi) = 0$$

3. ถ้า A และ B เป็นสับเซตของ S โดยที่ $A \subseteq B$ แล้ว

$$P(A) \leqslant P(B)$$

4. สำหรับทุก ๆ A ที่เป็นสับเซตของ S

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$$

5. ถ้า A_1 และ A_2 เป็นสับเซตของ S แล้ว

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

6. ถ้า $\{A_n\}$ เป็นลำดับของเหตุการณ์ที่นับได้แล้ว

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

กรณีที่ S เป็นกลุ่มผลทดลองต่อเนื่อง การคำนวณค่าความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A, P(A) มักจะใช้วิธีการวัดทางเรขาคณิต

เฉลยแบบฝึกหัดที่ 1.3

1. จงพิจารณาความน่าจะเป็นต่อไปนี้ว่า มีข้อใดบ้างที่ไม่เป็นฟังก์ชันน่าจะเป็น โดยไม่ต้องสนใจว่าฟังก์ชัน P จะกำหนดค่าความน่าจะเป็นอะไรให้กับเหตุการณ์ที่เป็นไปได้อื่น ๆ อธิบายเหตุผลการพิจารณาของท่าน

1.1 $P(\{a, b\}) = \frac{1}{2}, \quad P(\{a\}) = \frac{2}{3}$

ถ้า $A_1 = \{a\}, \quad A_2 = \{b\}$

$A_1 \cup A_2 = \{a, b\}$ และ $A_1 \cap A_2 = \phi$

เราจะได้
$$P(A_1 \cup A_2) = P(\{a, b\}) = P(\{a\}) + P(\{b\})$$
$$\frac{1}{2} = \frac{2}{3} + P(A_2)$$
$$\Longrightarrow \quad P(A_2) = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} < 0$$

แสดงว่า P ไม่เป็นฟังก์ชันน่าจะเป็น

1.2 $P(\{a, b\}) = \frac{1}{4}, \quad P(\{c, d\}) = \frac{1}{2}$

ถ้า $A = \{a, b, c, d\}$ เราจะได้

$$P(A) = P(\{a, b\}) + P(\{c, d\}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

นั่นคือ $P(A) > 0$

ถ้า $A_1 = \{a, b\}, \quad A_2 = \{c, d\}$

$A_1 \cup A_2 = \{a, b, c, d\}, \quad A_1 \cap A_2 = \phi$

เราจะได้ $P(A_1 \cup A_2) = P(\{a, b\}) + P(\{c, d\}) = P(A_1) + P(A_2)$

แสดงว่า P เป็นฟังก์ชันน่าจะเป็น

1.3 $P(\{a, b\}) = \frac{1}{2}, \quad P(\{b, c, d\}) = \frac{1}{2}, \quad P(\{a\}) = \frac{1}{4}$

พิจารณา $P(\{a, b\}) = P(\{a\}) + P(\{b\})$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + P(\{b\}),$$

จะเห็นว่า ถ้ากำหนด $A = \{b\}$ เราจะได้

$$P(A) = P(\{b\}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

พิจารณา $P(\{b, c, d\}) = P(\{b\}) + P(\{c, d\})$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + P(\{c, d\})$$

จะเห็นว่า ถ้ากำหนด $A = \{c, d\}$ เราจะได้

$$P(A) = P(\{c, d\}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

ถ้ากำหนด $A = \{a, c, d\}$ เราจะได้

$$P(A) = P(\{a\}) + P(\{c, d\}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

และถ้ากำหนด $A = \{a, b, c, d\}$ เราจะได้

$$P(A) = P(\{a\}) + P(\{b\}) + P(\{c, d\}) = \frac{3}{4}$$

แสดงว่า $P(A) > 0$ ทุก ๆ เหตุการณ์ $A \subseteq \mathcal{S}$

และมีคุณสมบัติของ $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$

สรุปได้ว่า P เป็นฟังก์ชันน่าจะเป็น

1.4 $P(\{b\}) = P(\{c\}) = P(\{d\}) = \frac{1}{3}$

กำหนด $A = \{b, c\}$ จะได้ $P(A) = P(\{b\}) + P(\{c\}) = \frac{2}{3}$

$A = \{b, d\}$ จะได้ $P(A) = P(\{b\}) + P(\{d\}) = \frac{2}{3}$

$A = \{c, d\}$ จะได้ $P(A) = P(\{c\}) + P(\{d\}) = \frac{2}{3}$

$A = \{b, c, d\}$ จะได้ $P(A) = P(\{b\}) + P(\{c\}) + P(\{d\}) = 1$

แสดงว่า $P(A) > 0$ ทุก ๆ เหตุการณ์ $A \subseteq \mathcal{S}$

และมีคุณสมบัติของ $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$

สรุปได้ว่า P เป็นฟังก์ชันน่าจะเป็น