บทที่ 1
ทฤษฎีความน่าจะเป็นเบื้องต้น
(Elementary Probability Theory)

1.1 พีชคณิตของเซต (ALGEBRA OF SETS)

กำหนด S เป็นกลุ่มผลทดลอง (sample space หรือ universal set) ซึ่งหมายถึง เซตของบรรดาสิ่งทั้งหลายที่อยู่ในข่ายการพิจารณา

และ A เป็นเซตของสิ่งทั้งหลายที่เป็นสมาชิกของ S ที่มีคุณสมบัติตามที่กำหนดไว้

หาก A_1 และ A_2 เป็นเซตใด ๆ ที่อยู่ใน S แล้ว

เซตของ A_1 และ/หรือ A_2 ($A_1 \cup A_2$: the union of A_1 and A_2) จะเป็นเซตของสมาชิกของ S ซึ่งอยู่ใน A_1 หรืออยู่ใน A_2 หรืออยู่ในทั้ง A_1 และ A_2

ตัวอย่างที่ 1.1

$$S = (x: -2 < x \leqslant 10\}$$
$$A_1 = \{x : 0 < x \leqslant 3\}$$
$$A_2 = \{x : x^2 \leqslant 1\}$$
ดังนั้น $$A_1 \cup A_2 = \{x : -1 \leqslant x \leqslant 3\}$$

ตัวอย่างที่ 1.2

$$S = \{(x, y) : -3 < x < 3, \ 0 y \leqslant 4\}$$
$$A, = \{(x, y) : -1 < x \leqslant 2, \ 0 < y < 2\}$$
$$A_2 = \{(x, y) : -1 < x \leqslant 2, \ 1 \leqslant y < 3\}$$
ดังนั้น $$A_1 \cup A_2 = \{(x, y) : -1 < x \leqslant 2, \ 0 < y < 3)$$

เซตของการเกิดร่วมกันของ A_1 และ A_2 ($A_1 \cap A_2$ or A_1A_2 : the intersection of A_1 and A_2) จะเป็นเซตของสมาชิกของ S ซึ่งอยู่ใน A_1 และอยู่ใน A_2

ตัวอย่างที่ 1.3

$$S = \{x : 0 < x \leqslant \pi\}$$

$$A_1 = \left\{x : \frac{\pi}{6} < x \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}$$

$$A_2 = \left\{x : \frac{\pi}{4} \leqslant x < \frac{2\pi}{3}\right\}$$

ดังนั้น $$A_1A_2 = \left\{x : \frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}$$

ตัวอย่างที่ 1.4

$$S = \{(x, y) : 0 < x, y < 5\}$$

$$A_1 = \{(x, y) : 1 \leqslant x < 3, y \geqslant 2\}$$

$$A_2 = \{(x, y) : x \geqslant 2, 1 \leqslant y < 4\}$$

ดังนั้น $$A_1A_2 = \{(x, y) : 2 \leqslant x < 3, 2 \leqslant y < 4\}$$

เซตของเหตุการณ์ที่ A ไม่เกิด (A^c or A' : complement of A) จะเป็นเซตของสมาชิกของ S ที่ไม่ใช่สมาชิกของ A

จากตัวอย่างที่ 1.3 เราจะได้

$$A_1^c = \left\{x : 0 < x \leqslant \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} < x \leqslant \pi\right\}$$

เราเรียก A_1 ว่าเป็นสับเซตของ A_2 ($A_1 \subseteq A_2$) ถ้าทุก ๆ สมาชิกของ A_1 เป็นสมาชิกของ A_2 ด้วย

เซต A_1 และ A_2 เท่ากัน ($A_1 = A_2$) ก็ต่อเมื่อ $A_1 \subseteq A_2$ และ $A_2 \subseteq A_1$

เราเรียกเซตสองเซตว่าเป็นเซตที่แยกต่างหากจากกัน (mutually exclusive set) หากทั้งสองเซตไม่มีสมาชิกร่วมกันเลย นั่นคือ การเกิดร่วมกันของเซตทั้งสองเป็นเซตว่างเปล่า (empty set : ϕ) ซึ่งหมายถึง เซตที่ไม่มีสมาชิกอยู่เลย

ตัวอย่างที่ 1.5

A_1, A_2 เป็นเซตใด ๆ ที่อยู่ใน S

ถ้า $A_1 = \{x : -1 \leqslant x \leqslant 3\}$, $A_2 = \{x : -2 < x < 4\}$ แล้ว A_1 จะเป็นสับเซตของ A_2 นั่นคือ $A_1 \subseteq A_2$

ถ้า $A_1 = \{x : -1 \leqslant x < 2\}$, $A_2 = \{x : 2 \leqslant x < 4\}$ เรากล่าวว่า A_1 และ A_2 เป็นเซตที่แยกต่างหากจากกันหรือขจัดกัน นั่นคือ $A_1A_2 = \phi$

เฉลยแบบฝึกหัดที่ 1.1

1. จงหา $A, \cup A_2$ และ $A, \cap A_2$ เมื่อกำหนดเซต A, และ A, ดังนี้

ก) $A, = \{x : x = 1, 3, 5\}$, $A_2 = \{x : 0 < x \leqslant 3\}$

จะได้ $A_1 \cup A_2 = (x : 0 < x \leqslant 3, x = 5)$

$A_1 \cap A_2 = \{x : x = 1, 3\}$

ข) $A, = \{x : -1 < x < 1\}$, $A_2 = \{x : 0 < x < 2\}$

จะได้ $A_1 \cup A_2 = \{x : -1 < x < 2\}$

$A_1 \cap A_2 = \{x : 0 < x < 1\}$

ค) $A, = \{(x, y) : -1 < x < 2, -1 < y < 1\}$, $A_2 = \{(x, y): 0 < x < 2, 0 < y < 2\}$

จะได้ $A_1 \cup A_2 = \{(x, y) : -1 < x < 2, -1 < y < 1$ หรือ

$0 < x < 2, 1 \leqslant y < 2\}$

$A_1 \cap A_2 = \{(x, y) : 0 < x < 2, 0 < y < 1\}$

2. กำหนด A เป็นสับเซตของกลุ่มผลทดลอง S จงหา A' เมื่อกำหนด S และ A ดังนี้

n) $S = \{x : 0 < x < 10\}$, $A = \{x : 3 < x \leqslant 7)$

จะได้ $A' = \{x : 0 < x \leqslant 3, 7 < x < 10)$

ข) $S = \{x : -3 < x \leqslant 5\}$, $A = \{x : 0 < x < 4\}$

จะได้ $A' = \{x : -3 < x \leqslant 0, 4 \leqslant x \leqslant 5\}$

ค) $S = \{(x, y) : 0 < x < 2, 0 < y < 2\}$, $A = \{(x, y) : 0 < x+y < 2)$

จะได้ $A' = ((x, y) : x+y \geqslant 2, x, y < 2\}$

ง) $S = \{(x, y) : |x| + |y| \leqslant 2\}$, $A = \{(x, y) : x^2+y^2 \leqslant 2\}$

จะได้ $A' = \{(x, y) : x^2+y^2 > 2$ และ $|x| + |y| \leqslant 2\}$

3 . กำหนด S เป็นเซตของเลขจำนวนจริงบวกที่มีค่าน้อยกว่า หรือเท่ากับ หาก

$A, = \{x : 1 \leqslant x \leqslant 6\}$, $A_2 = \{x : 4 < x \leqslant 11\}$, $A_3 = \{x : 6 \leqslant x < 9\}$

และ $A_4 = \{x : 0 < x \leqslant 4\}$

จงหา $A_1 \cup A_2$, $A_2 \cup A_3$, $A_2 \cap A_3$, $A_1 \cap A_2$, $A_2 \cap A_4$, A ; , A ; , $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ และ $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$

จะได้ $A_1 \cup A_2 = \{x : 1 \leqslant x \leqslant 11\}$, $A_1 \cap A_2 = \{x : 4 < x \leqslant 6\}$

$A_2 \cup A_3 = \{x : 4 < x \leqslant 11\}$, $A_2 \cap A_3 = A_3$

$A_2 \cap A_4 = \phi$

A; $= \{x : 0 < x < 1$ หรือ $6 < x \leqslant 11\}$

A; $= \{x : 0 < x \leqslant 4\}$

$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{x : x = 6\}$

$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = S$

4. จงหา $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ ถ้ากำหนด A_k ดังต่อไปนี้

ก) $A_k = \left\{x : 0 < x \leqslant 5 - \frac{1}{k}\right\}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$

จะเห็นได้ว่า A , $= \{x : 0 < x \leqslant 4\}$

$A_2 = \left\{x : 0 < x \leqslant 4\frac{1}{2}\right.$ I

A, $= \{x : 0 < x < 5\}$

ดังนั้น $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k = \{x : 0 < x < 5\}$

ข) $A_k = \left\{x : \frac{10}{k+1} < x < 10\right.$,1 $k = 1, 2, 3, \ldots$

เรามี A, $= \{x : 5 < x <$ lo]

A, $= \left\{x : 3\frac{1}{3} < x < 10\right.$ 1

A, $= \{x :$o $< x < 10)$

ดังนั้น $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k = (x : 0 < x < 10\}$

ค) $A_k = \left\{x : \frac{1}{k} \leqslant x \leqslant 3\right.$, $k = 1, 2, 3, \ldots$

เรามี A, $= \{x : 1 \leqslant x \leqslant 3\}$

$A_2 = $ I$x : \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 3|$

$$A_, = \left\{x : \frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 3\right\}$$

$$A_, = \{x : 0 < x \ 6 \ 3)$$

ดังนั้น $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \{x : 0 < x \leqslant 3\}$

5. จงหา $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ ถ้ากำหนด A_k ดังต่อไปนี้

n) $A_k = \left\{x : 2-\frac{1}{k} < x \leqslant 2\right\},\ k = 1, 2, 3, ..$

เรามี $A_, = \{x : 1 < x \leqslant 2)$

$$A_2 = \left\{x : 1\frac{1}{2} < x \leqslant 2\right\}$$

$$A_3 = \left\{x : 1\frac{2}{3} < x \leqslant 2\right\}$$

$$A_, = (x:x = 2)$$

ดังนั้น $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = (x: x = 2)$

ข) $A_k = \left\{x : 0 < x < \frac{1}{k}\right\},\quad k = 1, 2, 3, ...$

เรามี $A_, = \{x : 0 < x < 1)$

$$A_, = \left\{x : 0 < x < \frac{1}{2}\right\}$$

$$A_, = \left\{x : 0 < x < \frac{1}{3}\right\}$$

$$A_\infty = \phi$$

ดังนั้น $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \phi$

ค) $A_k = \left\{x : 10 < x \leqslant 10+\frac{1}{k}\right\},\quad k = 1, 2, 3, ..$

เรามี $A_, = \{x : 10 < x \leqslant 11)$

$$A_2 = \left\{x : 10 < x \leqslant 10\tfrac{1}{2}\right\}$$

$$A, = \left\{x : 10 < x \leqslant 10\tfrac{1}{3}\right\}$$

$$A_\infty = \phi$$

ดังนั้น $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \phi$

ง) $A, = \left\{x : \dfrac{8}{k+1} \leqslant x \leqslant 12\right\}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$

เรามี

$$A, = \{x : 4 \leqslant x \leqslant 12)$$

$$A_2 = \left\{x : 2\tfrac{2}{3} \leqslant x \leqslant 12\right\}$$

$$A, = (x : 2 \leqslant x \leqslant 12\}$$

$$A, = \{x : 0 < x \leqslant 12\}$$

ดังนั้น $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = [x : 4 \leqslant x \leqslant 12\}$

1.2 เซตฟังก์ชัน (SET FUNCTIONS)

นิยาม เซตฟังก์ชัน คือ กฎเกณฑ์หรือสูตรที่ใช้ในการกำหนดเลขจำนวนจริง ให้แก่แต่ละเซต ในกลุ่มของเซตที่รวบรวมขึ้นโดยเฉพาะ

ตัวอย่าง เช่น

A เป็นเซตของจุดบนเส้นตรงที่มีค่ามากกว่า 1 แต่ไม่เกิน 9 กำหนดเซตฟังก์ชัน A หรือ f(A) เป็นจำนวนจุดที่เป็นเลขจำนวนเต็มบน A เราจะได้ f(A) = 8

A เป็นเซตของจุดคู่ลำดับ (x, y) ที่มีคุณสมบัติว่า $0 < x < 4,\ 1 < y \leqslant 5$ ถ้าเซตฟังก์ชัน A หรือ f(A) เป็นจำนวนจุดคู่ลำดับ (x, y) ใน A ที่ทั้ง x และ y เป็นเลขจำนวนเต็ม เราจะได้ f(A) = 12

ถ้าเซตฟังก์ชัน A กำหนดโดยสูตร

$$f(A) = \int_A \frac{1}{2}\sin x \, dx$$

และ $A = \left\{x : 0 < x < \dfrac{\pi}{3}\right\}$ เราจะได้

$$f(A) = \int_0^{\pi/3} \frac{1}{2}\sin x \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\cos\frac{\pi}{3} + \cos\theta\right) = \frac{1}{4}$$

เป็นต้น

เฉลยแบบฝึกหัดที่ 1.2

1. กำหนด A เป็นเซตของจุดบนเส้นตรง และกำหนดเซตฟังก์ชัน A, f(A) เท่ากับจำนวนจุดใน A ที่มีค่าเป็นเลขจำนวนเต็มบวก จงหาค่าของ f(A) ถ้า

   ก) $A = \{x : 0 < x \leqslant 7\}$

   จุดใน A ที่มีค่าเป็นเลขจำนวนเต็มบวก คือ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

   ดังนั้น $f(A) = 7$

   ข) $A = \{x : |x| \leqslant 10\}$

   จุดใน A ที่มีค่าเป็นเลขจำนวนเต็มบวกคือ จุด 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

   ดังนั้น $f(A) = 10$

   ค) $A = \{x : x < 5\}$

   จุดใน A ที่มีค่าเป็นเลขจำนวนเต็มบวกคือ จุด 1, 2, 3, 4

   ดังนั้น $f(A) = 4$

   ง) A = {x : x เป็นผลคูณของ 3 ซึ่งมีค่าไม่เกิน 50}

   จุดใน A ที่มีค่าเป็นเลขจำนวนเต็มบวกคือ จุด 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45 และ 48

   ดังนั้น $f(A) = 16$

2. กำหนดเซตฟังก์ชัน A, f(A) ดังนี้

   จะได้ $$f(A) = \sum_A \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{1}{5}\right)^x$$

   เมื่อ x = 0, 1, 2, . . . นอกนั้นไม่กำหนดค่า

   ถ้า $A_1 = \{x : x = 0, 1, 2\}$ และ $A_2 = \{x : x^2 \leqslant 9\}$ จงหาค่าของ $f(A_1)$, $f(A_2)$

   จะได้ $$f(A_1) = \frac{4}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^0 + \frac{4}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^1 + \frac{4}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{124}{125}$$

$$f(A_2) = \sum_{x=0}^{3}\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{1}{5}\right)^x$$

$$= \frac{124}{125}+\frac{4}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{624}{625}$$

3. สมมติ

$$f(A) = \int_A 6x(1-x)dx$$

เมื่อ $0 < x < 1$ นอกนั้น $f(A)$ เป็น 0

ถ้า $A_1 = \left\{x : |x| \leqslant \frac{1}{2}\right\}$, $A_2 = \{x : 0 < x < 2\}$, $A_3 = \left\{x : \frac{1}{2} < x < \frac{3}{4}\right\}$ จงหา

ค่าของ $f(A_1)$, $f(A_2)$, $f(A_3)$, $f(A_1 \cap A_3)$ และ $f(A_1 \cup A_3)$

$$A_1 = \left\{x : |x| \leqslant \frac{1}{2}\right\} = \left\{x : -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\right\}$$

ดังนั้น $$f(A_1) = \int_0^{1/2} 6x(1-x)dx$$

$$= 6\frac{x^2}{2}-6\frac{x^3}{3}\Big|_0^{1/2} = \frac{3}{4}-\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$f(A_2) = \int_0^1 6x(1-x)dx = \frac{6}{2}-\frac{6}{3} = 1$$

$$f(A_3) = \int_{1/2}^{3/4} 6x(1-x)dx$$

$$= 3\left[\left(\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right] - 2\left[\left(\frac{3}{4}\right)^3-\left(\frac{1}{2}\right)^3\right] = \frac{11}{32}$$

$$A_1 \cap A_3 = \phi$$

ดังนั้น $f(A_1 \cap A_3) = 0$

$$A_1 \cup A_3 = \left\{x : -\frac{1}{2} \leqslant x < \frac{3}{4}\right\}$$

ดังนั้น $$f(A_1 \cup A_3) = \int_0^{3/4} 6x(1-x)dx$$

$$= 3\left(\frac{3}{4}\right)^2-2\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{32}$$

4. **สมมติว่าเซตฟังก์ชัน A, f(A) เป็นอัตราส่วนระหว่างความยาวของ A กับความยาวของ S ถ้า**

$$S = \{x : 0 < x < 20\}$$
$$A_1 = \{x : x < 8\}$$
$$A_2 = \{x : 6 < x < 9\}$$
$$A_3 = \{x : x > 7\}$$

จงหาค่าของ $f(A_1)$, $f(A_2)$, $f(A_3)$, $f(A_1')$, $f(A_1 \cup A_2)$, $f(A_2 \cup A_3)$, $f(A_1 \cup A_3)$, $f(A_1 \cap A_2)$ และ $f(A_2 \cap A_3)$

จะได้ $f(A_1) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$

$f(A_2) = \frac{3}{20}$

$f(A_3) = \frac{13}{20}$

$A_1' = \{x : 8 \leqslant x < 20\}$ ดังนั้น $f(A_1') = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$

$A_1 \cup A_2 = \{x : 0 < x < 9\}$ ดังนั้น $f(A_1 \cup A_2) = \frac{9}{20}$

$A_2 \cup A_3 = \{x : 6 < x < 20\}$ ดังนั้น $f(A_2 \cup A_3) = \frac{14}{20} = \frac{7}{10}$

$A_1 \cup A_3 = S$ ดังนั้น $f(A_1 \cup A_3) = 1$

$A_1 \cap A_2 = \{x : 6 < x < 8\}$ ดังนั้น $f(A_1 \cap A_2) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$

$A_2 \cap A_3 = \{x : 7 < x < 9\}$ ดังนั้น $f(A_2 \cap A_3) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$

5. กำหนดให้ f(A) เป็นจำนวนจุดของคู่ลำดับทั้งหลายในรูป (x, y) ที่อยู่ใน A โดยที่ทั้ง x และ y เป็นเลขจำนวนเต็มบวก

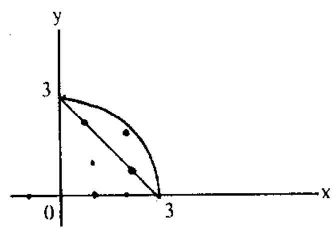
ถ้า $A_1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant 9\}$ และ $A_2 = \{x, y) : |x+y| \leqslant 3\}$

ก) A_2 เป็นสับเซตของ A_1 หรือไม่

จากรูป A_1 เป็นเซตของทุกจุดในวงกลม

A_2 **เป็นเซตของทุกจุดใน**สามเหลี่ยม

ดังนั้น A_2 **เป็นสับเซตของ** A_1



ข) จงหาค่าของ $f(A_1)$ และ $f(A_2)$

จุดใน A_1 ที่มีค่าของ x และ y เป็นเลขจำนนเต็มบวก คือจุด

$$(1, 1),\ (1, 2),\ (2, 1),\ (2, 2)$$

ดังนั้น $f(A_1) = 4$

จุดใน A_2 ที่มีค่าของ x และ y เป็นเลขจำนวนเต็มบวก คือจุด

$$(1, 1),\ (1, 2),\ (2, 1)$$

ดังนั้น $f(A_2) = 3$

6. จงหาเซตฟังก์ชันสำหรับ $A_1 = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$

และ $A_2 = \{(x, y) : 0 < x < y < 1\}$

เมื่อกำหนด f(A) ดังนี้

$$f(A) = \int_A\int 3x^2y^7dx\ dy,\ 0 < x < 2,\ 0 < y < 1$$

$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

จะได้ $f(A_1) = \int_0^1\int_0^1 3x^2y^7dx\ dy$

$$= \int_0^1 (1^3 - 0)y^7dy = \frac{1}{8}$$

$$f(A_2) = \int_0^1\int_0^y 3x^2y^7dx\ dy$$

$$= \int_0^1 (y^3 - 0)y^7dy = \frac{1}{11}$$

7. จงหาค่าของ $f(A_1)$ และ $f(A_2)$

ถ้า $A_1 = \{(x, y) : x^2+y^2 \leqslant 4\}$,

$A2 = ((x, y) : (x, y) = (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$

$$f(A) = \sum_A\sum (x+y)/15$$

ในเมือ $x = 0, 1, 2;\ y = 1, 2$ นอกนั้นไม่กำหนดค่า

จะได้ $f(A_1) = \frac{0+1}{15}+\frac{0+2}{15}+\frac{1+1}{15} = \frac{1}{3}$

$$f(A_2) = \frac{1+1}{15}+\frac{1+2}{15}+\frac{2+1}{15}+\frac{2+2}{15} = \frac{4}{5}$$

1.3 เซตฟังก์ชันน่าจะเป็น (THE PROBABILITY SET FUNCTION)

นิยาม ความน่าจะเป็นก็คือ เซตฟังก์ชัน P ซึ่งกำหนดให้แก่แต่ละเหตุการณ์ A ในกลุ่มผลทดลอง S ตัวเลข P(A) ซึ่งเรียกว่าความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A จะมีคุณสมบัติดังนี้

1. $P(A) > 0$ สำหรับทุก ๆ A ที่อยู่ใน S
2. ถ้า $A_1, A_2, \ldots$ เป็นเหตุการณ์ที่แยกต่างหากจากกัน (mutually exclusive events) นั่นคือ $A_i \cap A_j = \phi,\ i \neq j$ แล้ว

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots$$

3. $P(S) = 1$

ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A จะมีค่าเท่ากับ P(A) เราเรียก (S, P) ว่า ตัวแบบน่าจะเป็น (probability model หรือ probability space)

ถ้า (S, P) เป็นตัวแบบน่าจะเป็น P เป็นฟังก์ชันซึ่งกำหนดให้กับทุกเหตุการณ์ $\mathcal{G}$, power set ของ S เราสามารถคำนวณค่าของ P โดยอาศัยคุณสมบัติข้อที่ (2) ได้ดังนี้

หาก $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ และมีความน่าจะเป็น $P(\{q_1\}), P(\{a_2\}), \ldots, P(\{a_n\})$ สำหรับทุก ๆ เหตุการณ์ A ที่อยู่ใน $\mathcal{G}$ จะได้

$$(2')\ P(A) = P(\{a_{i1}\}) + P(\{a_{i2}\}) + \ldots + P(\{a_{ik}\})$$

ในเมื่อ $A = \{a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ik}\}$

ทฤษฎีเกี่ยวกับเซตฟังก์ชันน่าจะเป็น

1. สำหรับทุก ๆ A ที่เป็นสับเซตของ S

$$P(A) = 1 - P(A')$$

2. ความน่าจะเป็นของเซตว่างเป็น 0 นั่นคือ

$$P(\phi) = 0$$

3. ถ้า A และ B เป็นสับเซตของ S โดยที่ $A \subseteq B$ แล้ว

$$P(A) \leqslant P(B)$$

4. สำหรับทุก ๆ A ที่เป็นสับเซตของ S

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$$

5. ถ้า A_1 และ A_2 เป็นสับเซตของ S แล้ว

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

6. ถ้า $\{A_n\}$ เป็นลำดับของเหตุการณ์ที่นับได้แล้ว

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

กรณีที่ S เป็นกลุ่มผลทดลองต่อเนื่อง การคำนวณค่าความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A, P(A) มักจะใช้วิธีการวัดทางเรขาคณิต

เฉลยแบบฝึกหัดที่ 1.3

1. จงพิจารณาความน่าจะเป็นต่อไปนี้ว่า มีข้อใดบ้างที่ไม่เป็นฟังก์ชันน่าจะเป็น โดยไม่ต้องสนใจว่าฟังก์ชัน P จะกำหนดค่าความน่าจะเป็นอะไรให้กับเหตุการณ์ที่เป็นไปได้อื่น ๆ อธิบายเหตุผลการพิจารณาของท่าน

1.1 $P(\{a, b\}) = \frac{1}{2}, \quad P(\{a\}) = \frac{2}{3}$

ถ้า $A_1 = \{a\}, \quad A_2 = \{b\}$

$A_1 \cup A_2 = \{a, b\}$ และ $A_1 \cap A_2 = \phi$

เราจะได้

$$P(A_1 \cup A_2) = P(\{a, b\}) = P(\{a\}) + P(\{b\})$$

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{3} + P(A_2)$$

$$\Longrightarrow \quad P(A_2) = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} < 0$$

แสดงว่า P ไม่เป็นฟังก์ชันน่าจะเป็น

1.2 $P(\{a, b\}) = \frac{1}{4}, \quad P(\{c, d\}) = \frac{1}{2}$

ถ้า $A = \{a, b, c, d\}$ เราจะได้

$$P(A) = P(\{a, b\}) + P(\{c, d\}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

นั่นคือ $P(A) > 0$

ถ้า $A_1 = \{a, b\}, \quad A_2 = \{c, d\}$

$A_1 \cup A_2 = \{a, b, c, d\}, \quad A_1 \cap A_2 = \phi$

เราจะได้ $P(A_1 \cup A_2) = P(\{a, b\}) + P(\{c, d\}) = P(A_1) + P(A_2)$

แสดงว่า P เป็นฟังก์ชันน่าจะเป็น

1.3 $P(\{a, b\}) = \frac{1}{2}$, $P(\{b, c, d\}) = \frac{1}{2}$, $P(\{a\}) = \frac{1}{4}$

พิจารณา $P(\{a, b\}) = P(\{a\}) + P(\{b\})$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + P(\{b\}),$$

จะเห็นว่า ถ้ากำหนด $A = \{b\}$ เราจะได้

$$P(A) = P(\{b\}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

พิจารณา $P(\{b, c, d\}) = P(\{b\}) + P(\{c, d\})$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + P(\{c, d\})$$

จะเห็นว่า ถ้ากำหนด $A = \{c, d\}$ เราจะได้

$$P(A) = P(\{c, d\}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

ถ้ากำหนด $A = \{a, c, d\}$ เราจะได้

$$P(A) = P(\{a\}) + P(\{c, d\}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

และถ้ากำหนด $A = \{a, b, c, d\}$ เราจะได้

$$P(A) = P(\{a\}) + P(\{b\}) + P(\{c, d\}) = \frac{3}{4}$$

แสดงว่า $P(A) > 0$ ทุก ๆ เหตุการณ์ $A \subseteq \mathcal{G}$

และมีคุณสมบัติของ $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$

สรุปได้ว่า P เป็นฟังก์ชันน่าจะเป็น

1.4 $P(\{b\}) = P(\{c\}) = P(\{d\}) = \frac{1}{3}$

กำหนด $A = \{b, c\}$ จะได้ $P(A) = P(\{b\}) + P(\{c\}) = \frac{2}{3}$

$A = \{b, d\}$ จะได้ $P(A) = P(\{b\}) + P(\{d\}) = \frac{2}{3}$

$A = \{c, d\}$ จะได้ $P(A) = P(\{c\}) + P(\{d\}) = \frac{2}{3}$

$A = \{b, c, d\}$ จะได้ $P(A) = P(\{b\}) + P(\{c\}) + P(\{d\}) = 1$

แสดงว่า $P(A) > 0$ ทุก ๆ เหตุการณ์ $A \subseteq \mathcal{G}$

และมีคุณสมบัติของ $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$

สรุปได้ว่า P เป็นฟังก์ชันน่าจะเป็น

1.5 $P(\{a, b, c\}) = \frac{2}{3}$, $P(\{a, b\}) = P(\{b, c\}) = \frac{1}{4}$

ถ้ากำหนด $A_1 = \{a, b\}$, $A_2 = \{c\}$

$A_1 \cup A_2 = \{a, b, c\}$ และ $A_1 \cap A_2 = \phi$

จะได้ $P(A_1 \cup A_2) = P(\{a, b, c\}) = P(\{a, b\}) + P(\{c\}) = P(A_1) + P(A_2)$

และ $\frac{2}{3} = \frac{1}{4} + P(\{c\})$

ถ้า $A = \{c\}$

เราจะได้ $P(A) = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$

ถ้ากำหนด $A_1 = \{b\}$, $A_2 = \{c\}$

$A_1 \cup A_2 = \{b, c\}$, $A_1 \cap A_2 = \phi$

จะได้ $P(A_1 \cup A_2) = P(\{b, c\}) = P(\{b\}) + P(\{c\}) = P(A_1) + P(A_2)$

และ $\frac{1}{4} = P(\{b\}) + \frac{5}{12}$

ถ้า $A = \{b\}$

จะได้ $P(A) = \frac{1}{4} - \frac{5}{12} < 0$

แสดงว่า P ไม่เป็นฟังก์ชันน่าจะเป็น

2. เลือกตัวเลข 3 ตัว จากเลขโดด 1, 2, 3, 4, 5 โดยไม่ให้ซ้ำกันมาเรียงลำดับกัน กำหนดเหตุการณ์ A, B, C ดังนี้

A = {ตัวเลข 2 อยู่ในตำแหน่งที่ 2}

B = {จำนวนเลขที่มีค่ามากกว่า 500}

C = {จำนวนเลขที่เป็นเลขคี่}

ถ้าเซตฟังก์ชันน่าจะเป็นกำหนดค่า $\frac{1}{60}$ ให้แก่แต่ละผลลัพธ์ในกลุ่มผลทดลอง S

จงหาค่าของ $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cap C)$, $P(A \cup B)$, $P(A \cup C)$ และ $P(B \cup C)$

เลือกตัวเลข 3 ตัวจากเลข 5 ตัวโดยไม่ซ้ำกัน

จำนวนผลลัพธ์ทั้งหมด $= 5^{(3)} = 60$

A = {ตัวเลข 2 อยู่ในตำแหน่งที่ 2}

จำนวนผลลัพธ์ของ A $= 4^{(2)} = 12$

ดังนั้น $P(A) = \frac{12}{60} = \frac{1}{2}$

B = {จำนวนเลขที่มีค่ามากกว่า 500}

จำนวนผลลัพธ์ของ B = $4^{(2)} = 12$

ดังนั้น $P(B) = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}$

C = {จำนวนเลขที่เป็นเลขคี่}

จำนวนผลลัพธ์ของ C = $4^{(2)} \times 3 = 36$

$P(C) = \frac{36}{60} = \frac{3}{5}$

$A \cap B$ = {จำนวนเลขที่มีค่ามากกว่า 520}

จำนวนผลลัพธ์ของ $A \cap B$ = 3

ดังนั้น $P(A \cap B) = \frac{3}{60} = \frac{1}{20}$

$A \cap C$ = {จำนวนเลขคี่ที่มีเลข 2 อยู่ในตำแหน่งที่ 2}

จำนวนผลลัพธ์ของ $A \cap C = 3 \times 1 \times 3 = 9$

ดังนั้น $P(A \cap C) = \frac{9}{60} = \frac{3}{20}$

$A \cup B$ = {จำนวนเลขที่มี 2 อยู่ในตำแหน่ง 2 และ/หรือมีค่ามากกว่า 500}

จำนวนผลลัพธ์ของ $A \cup B = 12 + 12 - 3 = 21$

ดังนั้น $P(A \cup B) = \frac{21}{60} = \frac{7}{20}$

$A \cup C$ = {จำนวนเลขที่มี 2 ในตำแหน่ง 2 และ/หรือเป็นเลขคี่}

จำนวนผลลัพธ์ของ $A \cup C = 12 + 36 - 9 = 39$

ดังนั้น $P(AUC) = \frac{39}{60} = \frac{13}{20}$

$B \cup C$ = {จำนวนเลขที่มีค่ามากกว่า 500 และ/หรือเป็นเลขคี่}

จำนวนผลลัพธ์ของ $B \cup C = 12 + 36 - 6 = 42$

ดังนั้น $P(BUC) = \frac{42}{60} = \frac{7}{10}$

3 . จงหาค่าความน่าจะเป็นต่อไปนี้ในเทอมของ $P(A_1)$, $P(A_2)$ และ$P(A_1 \cap A_2)$

3 . 1 $P(A_1 \cup A_2')$, $P(A_1 \cap A_2)'$, $P(A_1 \cap A_2')'$, $P(A_1 \cup A_2)'$, $P(A_1 \cup A_2')'$, $P(A_1' \cap (A_1 \cup A_2))$

3.2 จงคำนวณค่าความน่าจะเป็นในข้อ 3.1 ถ้า $P(A_1) = 0.5$, $P(A_2) = 0.6$ และ $P(A_1 \cap A_2) = 0.2$

$$
\begin{aligned}
P(A_1 \cup A_2') &= P(A_1) + P(A_2') - P(A_1 \cap A_2') \\
&= P(A_1) + 1 - P(A_2) - P(A_1) + P(A_1 \cap A_2) \\
&= 1 - P(A_2) + P(A_1 \cap A_2) = 1 - 0.6 + 0.2 = 0.6 \\
P(A_1 \cap A_2)' &= 1 - P(A_1 \cap A_2) = 1 - 0.2 = 0.8 \\
P(A_1 \cup A_2)' &= 1 - P(A_1 \cup A_2) \\
&= 1 - P(A_1) - P(A_2) + P(A_1 \cap A_2) \\
&= 1 - 0.5 - 0.6 + 0.2 = 0.1 \\
P(A_1 \cup A_2')' &= 1 - P(A_1 \cup A_2') \\
&= P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) = 0.4 \\
P(A_1' \cap (A_1 \cup A_2)) &= P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) \\
&= \mathbf{0.6 - 0.2} = \mathbf{0.4}
\end{aligned}
$$

4. ถ้า $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.5$, $P(C) = 0.7$, $P(A \cap B) = 0.2$, $P(B \cap C) = 0.4$, $P(A \cap C) = 0.2$ และ $P(A \cap B \cap C) = 0.1$

จงหาค่าของ $P(A \cup B \cup C)$ และ $P(A \cup B \cup C')$

$$
\begin{aligned}
P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \\
&= 0.4 + 0.5 + 0.7 - 0.2 - 0.2 - 0.4 + 0.1 \\
&= \mathbf{0.9} \\
P(A \cup B \cup C') &= P(A \cup B) + P(C') - P((A \cup B) \cap C') \\
&= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C') - P(A \cup B \cup C) + P(C) \\
&= 0.4 + 0.5 - 0.2 + 0.3 - 0.9 + 0.7 \\
&= \mathbf{0.8}
\end{aligned}
$$

5. กำหนด $P(\{n\}) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ สำหรับทุก ๆ ค่าของ n ที่เป็นเลขจำนวนเต็มบวก กำหนด

$$
\begin{aligned}
A &= \{n : 1 \leqslant n \leqslant 10\} \\
B &= \{n : 1 \leqslant n \leqslant 20\} \\
C &= \{n : 11 \leqslant n \leqslant 20\}
\end{aligned}
$$

จงหา

5.1 **P(A)**	5.2 **P(B)**	5.3 **P(AUB)**
5.4 $P(A \cap B)$	5.5 **P(C)**	5.6 **P(B)**

5.1 $P(A) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\dots+\frac{1}{2^{10}} = \dfrac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{11}}}{1-\frac{1}{2}} = 1-\frac{1}{2^{10}}$

5.2 $P(B) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\dots+\frac{1}{2^{20}} = 1-\frac{1}{2^{20}}$

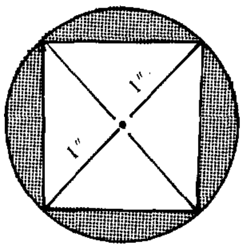
5.3 $A \cup B = B$ ดังนั้น $P(A \cup B) = 1-\frac{1}{2^{20}}$

5.4 $A \cap B = A$ ดังนั้น $P(A \cap B) = 1-\frac{1}{2^{10}}$

5.5 $P(C) = \frac{1}{2^{11}}+\frac{1}{2^{12}}+\frac{1}{2^{13}}+\dots+\frac{1}{2^{20}} = \dfrac{\frac{1}{2^{11}}-\frac{1}{2^{21}}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{10}}-\frac{1}{2^{20}}$

5.6 $P(B) = 1 - P(B) = \frac{1}{2^{20}}$

6. เลือกจุดแบบสุ่มภายในวงกลมที่มีรัศมีเท่ากับ 1″ จงหาความน่าจะเป็นที่จุดนี้จะไม่อยู่ภายในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีความยาวของเส้นทแยงมุมเท่ากับ 2″ และมีจุดศูนย์กลางร่วมกันกับวงกลม



วงกลมและสี่เหลี่ยมมีจุดศูนย์กลางร่วมกัน เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมจะเป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมด้วย

$$P(\text{ที่จุดในวงกลมจะอยู่ในสี่เหลี่ยม}) = \frac{\text{พ.ท.รูปสี่เหลี่ยม}}{\text{พ.ท.วงกลม}} = \frac{2\times\frac{1}{2}\times 1\times 2}{\pi \times 1^2}$$

$$P(\text{จุดในวงกลมจะไม่อยู่ในสี่เหลี่ยม}) = 1-\frac{2}{\pi}$$

7. รถเมล์ด่วนที่กำหนดปล่อยจากท่ารถในเวลา 7:30 มักจะออกจากท่ารถในช่วงเวลา 7:25 ถึง 7:40 เสมอ นายรามออกเดินทางจากบ้านเวลา 7:30 และใช้เวลาในการเดินทางจากบ้านถึงท่ารถ 5 นาที จงหาความน่าจะเป็นที่เขาจะไปทันรถเมล์ออก

ระยะเวลาที่รถออกจากท่า = 7:40 − 7:25 = 15 นาที

นายรามถึงท่ารถเวลา = 7:35

นายรามอยู่ในช่วงที่รถออก = 7:40 − 7:35 = 5 นาที

P(นายรามจะไปทันรถออก) = $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

8 . กำหนด $S = \{x, y : -\infty < x, y < \infty\}$; $A_1 = \{x, y : x \leqslant 5, y \leqslant 7\}$

$A_2 = \{x, y : x \leqslant 5, y \leqslant 1)$; $A_3 = \{x, y : x \leqslant 3, y \leqslant 7)$

$A_4 = \{x, y : x \leqslant 3, y \leqslant 1)$ และ $A_5 = (x, y : 3 < x \leqslant 5, 1 < y \leqslant 7\}$

หาก $P(A_1) = \frac{3}{4}$, $P(A_2) = \frac{1}{2}$, $P(A_3) = \frac{1}{2}$, $P(A_4) = \frac{3}{8}$

จงหาค่าของ $P(A_5)$

พิจารณาเหตุการณ์ A_i แต่ละเหตุการณ์ จะเห็นว่า

$A_2 \cup A_3 \cup A_5 = A_1$, $(A_2 \cup A_3) \cap A_5 = \phi$ และ $A_2 \cap A_3 = A_4$

ดังนั้น $P(A_2) + P(A_3) - P(A_4) + P(A_5) = P(A_1)$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{3}{8} + P(A_5) = \frac{3}{4}$$

$$P(A_5) = \frac{3}{4} - \frac{5}{8} = \frac{1}{8}$$

1.4 ความน่าจะเป็นภายใต้เงื่อนไขและความเป็นอิสระกัน (CONDITIONAL PROBABILITY AND INDEPENDENCE)

A และ B ต่างเป็นสับเซตของกลุ่มผลทดลอง S หากการเกิดขึ้นของ A และ B มีความสัมพันธ์กัน โดยที่การเกิดขึ้นของ A หรือของ B ก็ตาม จะส่งผลกระทบไปถึงเหตุการณ์ที่เกิดหลังทั้งสิ้น หากเหตุการณ์ B ได้เกิดขึ้นแล้ว ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A ก็จะเปลี่ยนไปจากเดิม ขึ้นอยู่กับว่าเหตุการณ์ B เป็นอย่างไร เราแทนความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A ภายใต้เงื่อนไขของการเกิดของเหตุการณ์ B ด้วย $P(A|B)$ (conditional probability of A given B) และนิยาม $P(A|B)$ ดังนี้

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) \neq 0$$

ทำนองเดียวกัน หาก $P(B|A)$ เป็นความน่าจะเป็น เงื่อนไขของเหตุการณ์ B เมื่อกำหนดว่าเหตุการณ์ A ได้เกิดขึ้นแล้ว จะได้

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \quad P(A) \neq 0$$

อาศัยนิยามและข้อเท็จจริงเกี่ยวกับความน่าจะเป็น เราสรุปได้ว่า

1. $0 \leqslant P(A|B) \leqslant 1$

2. $P(S|B) = 1$, $P(\phi|B) = 0$ และ $P(B|B) = 1$

3. ถ้า A_1, A_2, ... เป็นเหตุการณ์ที่ขจัดกัน หรือเหตุการณ์ที่แยกต่างหากจากกัน และ B เป็นสับเซตของ union ของ A_1, A_2, ... แล้ว

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots |B) = P(A_1|B) + P(A_2|B) + \ldots$$

กรณีที่ A_1 กับ A_2 ไม่เป็นเหตุการณ์ที่ขจัดกัน เราจะได้

$$P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B) - P(A_1 \cap A_2|B)$$

4. กฎการคูณ

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$$

หรือเขียนเป็นกฎการคูณทั่ว ๆ ไปว่า

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) = P(A_1)\, P(A_2|A_1)\, P(A_3|A_1 \cap A_2) \ldots P(A_k|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{k-1})$$

5. หาก B เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ของการทดลองเชิงสุ่ม และ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ เป็นส่วนแบ่ง (partition) ของ S นั่นคือ

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = S \quad \text{และ} \quad A_i \cap A_j = \phi, \quad i \neq j$$

แล้ว $\{B \cap A_1, B \cap A_2, \ldots, B \cap A_n\}$ ก็จะเป็น partition ของ S ด้วย และสามารถเขียนเป็นกฎแห่งการรวมความน่าจะเป็น (law of total probabilities) ได้ดังนี้

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\; P(B|A_i)$$

หาก $P(B) \neq 0$ จะได้กฎของเบยส์ (Bayes' rule) ดังนี้

$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k)P(B|A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)}$$

6. ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ที่เป็นอิสระต่อกัน เราจะได้

$$P(A \cap B) = P(A)\ P(B)$$

โดยทั่วไปหาก $A_1, A_2, \ldots, A_n$ เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ที่เป็นสับเซตของ S และ $P(A_i) \neq 0$, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ต่างก็เป็นอิสระต่อกันก็ต่อเมื่อ

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)\ P(A_j),\ 1 \leqslant i < j \leqslant n$$

$$P(A_i \cap A_j \cap A_k) = P(A_i)\ P(A_j)\ P(A_k),\ 1 \leqslant i < j < k \leqslant n$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)\ P(A_2)\ \ldots\ P(A_n)$$

เฉลยแบบฝึกหัดที่ 1.4

1. สุ่มตัวเลข 3 ตัวจากเลขโดด 1, 4, 5, 7 โดยไม่ซ้ำกันมาสร้างเลข 3 หลัก จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้

   1.1 เลขคี่

   1.2 เลขที่มีค่าน้อยกว่า 500

   1.3 เลขคี่ภายใต้เงื่อนไขว่าเป็นเลขที่มีค่าน้อยกว่า 500

   จำนวนเลข 3 หลักที่ได้มาจากการสุ่มเลขโดด 4 ตัว โดยไม่ซ้ำกัน

   $$= 4^{(3)}$$

   1.1 จำนวนที่เป็นเลขคี่ = # เลขที่ลงท้ายด้วย 1 หรือ 5 หรือ 7

   $$3 \times 3^{(2)}$$

   ความน่าจะเป็นที่จะได้เลขคี่ $= \dfrac{3\times3\times2}{4\times3\times2} = \dfrac{3}{4}$

   1.2 จำนวนเลขที่มีค่าน้อยกว่า 500 คือจำนวนตัวเลขที่ขึ้นต้นด้วย 1 หรือ 4 ซึ่งจะเท่ากับ $2\times3^{(2)}$

   ความน่าจะเป็นที่จะได้เลขที่มีค่าน้อยกว่า 500

   $$= \frac{2\times3^{(2)}}{4^{(3)}} = \frac{1}{2}$$

   1.3 จำนวนเลขคี่ที่มีค่าน้อยกว่า 500

   $$= 1\times3^{(2)} + 1\times1\times2 + 1\times2^{(2)}$$

   ความน่าจะเป็นที่จะได้เลขคี่ที่มีค่าน้อยกว่า 500

   $$= \frac{6+2+2}{4^{(3)}} = \frac{5}{12}$$

   ความน่าจะเป็นที่จะได้เลขคี่ภายใต้เงื่อนไขว่ามีค่าน้อยกว่า 500

   $$= \frac{\frac{5}{12}}{\frac{1}{2}} = \frac{5}{6}$$

2. ร้านขายนมสดมีนมสดวางขาย 150 ถุง เป็นนมใหม่ 100 ถุง นอกนั้นเป็นนมเก่า มีแม่บ้านมาซื้อนม 2 ถุง

2.1 จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้นมใหม่ทั้งสองถุง

2.2 จงหาความน่าจะเป็นเงื่อนไขที่จะได้นมใหม่ 2 ถุง กำหนดว่าอย่างน้อยที่สุด 1 ถุง เป็นนมใหม่

2.1 ความน่าจะเป็นที่จะได้นมใหม่ทั้ง 2 ถุง

$$= \frac{100^{(2)}}{150^{(2)}} = \frac{198}{447}$$

2.2 ความน่าจะเป็นที่จะได้นมใหม่อย่างน้อย 1 ถุง

$$= 2\times\frac{100\times 50}{150\times 149}+\frac{198}{447} = \frac{398}{447}$$

ความน่าจะเป็นเงื่อนไขที่จะได้นมใหม่ 2 ถุง กำหนดว่าได้นมถุงใหม่อย่างน้อย 1 ถุง จะเท่ากับ

$$\frac{\frac{198}{447}}{\frac{398}{447}} = \frac{99}{199}$$

3. กล่อง B_1 บรรจุลูกหินสีแดง 2 ลูก ลูกหินสีขาว 5 ลูก กล่อง B_2 บรรจุลูกหินสีแดง 4 ลูก และลูกหินสีขาว 3 ลูก โยนลูกเต๋า ถ้าได้หมายเลขที่เป็นผลคูณของ 3 เลือกลูกหินหนึ่งลูกอย่างสุ่มจากกล่อง B_2 นอกนั้นเลือกจากกล่อง B_1

3.1 จงคำนวณความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกหินสีแดง

3.2 กำหนดว่าลูกหินที่เลือกได้เป็นสีแดง จงหาความน่าจะเป็นเงื่อนไขที่มันจะถูกสุ่มมาจากกล่อง B_1

กำหนด B_i = เหตุการณ์ที่หยิบลูกหินจากกล่อง B_i, i = I, 2,

R = เหตุการณ์ที่หยิบได้ลูกหินสีแดง

จะได้ $P(B_2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

และ $P(R|B_3) = \frac{4}{7}$

$P(B_1) = \frac{2}{3}$

และ $P(R|B_1) = \frac{2}{7}$

3.1 ความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกหินสีแดง

$$= P(B_1)\ P(R|B_1) + P(B_2)\ P(R|B_2)$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{2}{7} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{7} = \frac{8}{21}$$

3.2 $$P(B_1|R) = \frac{P(B_1)\ P(R|B_1)}{P(R)}$$

$$= \frac{\frac{2}{3} \times \frac{2}{7}}{\frac{8}{21}} = \frac{1}{2}$$

4. ในจำนวนนักศึกษาสถิติ 10 คนที่จบในเทอมนี้ 4 คนเรียนวิชาโทคอมพิวเตอร์ 5 คน เรียนวิชาโทเศรษฐศาสตร์ และอีก 1 คนเรียนวิชาโทบริหารธุรกิจ ถ้าสำนักงานแห่งหนึ่งต้องการบัณฑิตที่จบสถิติ 3 คน จงหาความน่าจะเป็นเงื่อนไขที่จะได้บัณฑิตที่เรียนวิชาโทสาขาละหนึ่งคน กำหนดว่าในสามคนนี้มีที่เรียนวิชาโทคอมพิวเตอร์เพียง 1 คน

กำหนด C = เหตุการณ์ที่เรียนวิชาโทคอมพิวเตอร์

E = เหตุการณ์ที่เรียนวิชาโทเศรษฐศาสตร์

B = เหตุการณ์ที่เรียนวิชาโทบริหารธุรกิจ

$$P(CEB) = \frac{4 \times 5 \times 1}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{6}$$

$$P(CEE) = \frac{4 \times \binom{5}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{3}$$

ความน่าจะเป็นเงื่อนไขที่จะได้คนที่เรียนสาขาละ 1 คน กำหนดว่ามีเรียนวิชาโทคอมพิวเตอร์เพียง 1 คน จะเท่ากับ

$$= \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

5. กล่องใบหนึ่งมีบอลสีแดง 3 ลูก สีน้ำเงิน 7 ลูก กล่องใบที่สองมีบอลสีแดง 6 ลูก สีน้ำเงิน 4 ลูก เลือกกล่องอย่างสุ่ม 1 กล่อง แล้วเลือกบอล 1 ลูกจากกล่องนั้น จงคำนวณความน่าจะเป็นที่

5.1 จะได้บอลสีแดง

5.2 บอลถูกสุ่มจากกล่องที่สองภายใต้เงื่อนไขว่าเป็นบอลสีแดง

กำหนด B_i = เหตุการณ์ที่เลือกได้กล่อง i, $i = 1, 2, \ldots$

R = เหตุการณ์ที่สุ่มได้บอลสีแดง

จะได้ $P(B_1) = P(B_2) = \frac{1}{2}$

$P(R|B_1) = \frac{3}{10}$ และ $P(R|B_2) = \frac{6}{10}$

5.1 ความน่าจะเป็นที่จะได้บอลสีแดง

$$= P(R)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{3}{10} + \frac{1}{2} \times \frac{6}{10} = \frac{9}{20}$$

5.2 ความน่าจะเป็นที่บอลถูกสุ่มจากกล่องที่ 2 ภายใต้เงื่อนไขว่าเป็นบอลสีแดง จะเท่ากับ $P(B_2|R)$

$$P(B_2|R) = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{6}{10}}{\frac{9}{20}} = \frac{2}{3}$$

6. สถาบันวิจัยแห่งหนึ่งเปิดรับสมัครนักวิจัย 5 คน มีคนมาสมัคร 10 คน เป็นนักสถิติ 6 คน นักเศรษฐศาสตร์ 4 คน ในจำนวน 5 คนที่สอบได้จะได้รับการคัดเลือกให้ศึกษาต่อ 1 คน (ถือว่าทุกคนมีความสามารถเท่าเทียมกันหมด) จงคำนวณความน่าจะเป็นที่ 5 คนซึ่งสอบได้เป็นนักสถิติ 2 คน และนักเศรษฐศาสตร์ 3 คน ภายใต้เงื่อนไขว่านักเศรษฐศาสตร์ได้ไปศึกษาต่อ

กำหนด A_i = เหตุการณ์ที่ได้นักสถิติ i คน นักเศรษฐศาสตร์ $5-i$ คน,

$i = 1, 2, 3, 4, 5$

B = เหตุการณ์ที่นักเศรษฐศาสตร์ได้ไปศึกษาต่อ

จะได้ $$P(A_i) = \frac{\binom{6}{i}\binom{4}{5-i}}{\binom{10}{5}} \quad , \quad i = 1, 2, 3, 4, 5$$

$$P(B|A_i) = \frac{5-i}{5} \quad , \quad i = 1, 2, 3, 4, 5$$

ความน่าจะเป็นที่คนสอบได้เป็นนักสถิติ 2 คน นักเศรษฐศาสตร์ 3 คน กำหนดว่านักเศรษฐศาสตร์ได้ไปเรียนต่อ จะ

$$= P(A_2|B)$$

$$= \frac{P(A_2)\, P(B|A_2)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)\, P(B|A_i)}$$

$$= \frac{\frac{\binom{6}{2}\binom{4}{3}}{\binom{10}{5}} \times \frac{3}{5}}{\sum_{i=1}^{5} \frac{\binom{6}{i}\binom{4}{5-i}}{\binom{10}{5}} \times \frac{5-i}{5}} = \frac{5}{14}$$

7. มีฉลาก 5 ใบ หมายเลข 1, 2, 3, 4, 5 หยิบฉลาก 1 ใบอย่างสุ่ม บันทึกผลที่ได้แล้วใส่กลับคืนที่เดิม ต่อจากนั้นหยิบฉลากใบที่ 2 บันทึกค่าที่ได้ กำหนดให้

A เป็นเหตุการณ์ที่หยิบครั้งแรกได้เลขคี่

B เป็นเหตุการณ์ที่หยิบครั้งที่สองได้ตัวเลขมีค่าไม่เกิน 3

A และ B เป็นอิสระต่อกันหรือไม่

$$P(A) = \frac{3}{5} \ , \quad P(B) = \frac{5 \times 3}{5^2} = \frac{3}{5}$$

$P(A \cap B)$ = P(เลขตัวแรกเป็นเลขคี่ ตามด้วยตัวเลขที่มีค่าไม่เกิน 3)

$$= \frac{3 \times 3}{5^2}$$

จะเห็นได้ว่า

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B) \quad \text{และ} \quad P(A), P(B) \neq 0$$

เราจึงสรุปได้ว่า A กับ B เป็นอิสระต่อกัน

8. ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ที่เป็นอิสระต่อกัน จงพิสูจน์ว่าเหตุการณ์แต่ละคู่ต่อไปนี้เป็นอิสระต่อกันด้วย

8.1 A และ B'

8.2 A' และ B

8.3 A' และ B'

A และ B เป็นเหตุการณ์ที่เป็นอิสระต่อกัน ดังนั้น

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$$

8.1
$$\begin{aligned} P(A \cap B') &= P(A) - P(A \cap B) \\ &= P(A) - P(A)\,P(B) \\ &= P(A)\{1 - P(B)\} = P(A)\,P(B') \end{aligned}$$

แสดงว่า A และ B′ เป็นอิสระต่อกัน

8.2
$$\begin{aligned} P(A' \cap B) &= P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(B) \quad P(A)\,P(B) \\ &= [1 - P(A)]\;P(B) = P(A')\,P(B) \end{aligned}$$

แสดงว่า A ’ กับ B เป็นอิสระกัน

8.3
$$\begin{aligned} P(A' \cap B') &= P((A U B)') \\ &= 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A)\,P(B) \\ &= \{1 - P(A)\} - P(B)\{1 - P(A)\} \\ &= \{1 - P(A)\}\{1 - P(B)\} \\ &= P(A')\,P(B') \end{aligned}$$

แสดงว่า A ’ และ B ’ เป็นอิสระกัน

9. A และ B เป็นเหตุการณ์ที่เป็นอิสระกัน ถ้า $P(A) = 0.7$ และ $P(B) = 0.5$ จงคำนวณค่าของ

9.1 $P(A \cup B)$

9.2 $P(A' \cup B)$

9.3 $P(A' \cup B')$

9.1 $P(A \cup B) = 0.7 + 0.5 - 0.7 \times 0.5 = 0.85$

9.2 $P(A' \cup B) = (1-0.7) + 0.5 - (1-0.7)(0.5) = 0.65$

9.3 $P(A' \cup B') = (1-0.7)+(1-0.5)-(1-0.7)(1-0.5) = 0.65$

10. จงพิสูจน์ว่า ข้อความเหล่านี้เป็นจริง (หรือไม่จริง) เหตุการณ์ A, B, C ต่างเป็นสับเซตของกลุ่มผลทดลอง S

10.1 ถ้า $P(A|B) > P(A)$ แล้ว $P(B|A) > P(B)$

10.2 ถ้า $P(A) > P(B)$ แล้ว $P(A|C) > P(B|C)$

10.3 ถ้า A และ B เป็นอิสระต่อกัน แล้ว $P(A \cap B|C) = P(A|C)P(B|C)$

10.4 $P(A|B) \geqslant \frac{P(A) + P(B) - 1}{P(B)}$

10.5 กำหนด $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B|A) = \frac{1}{2}$ และ $P(A|B) = \frac{1}{3}$

10.5.1 A และ B เป็นอิสระกัน

10.5.2 A และ B เป็นเหตุการณ์ที่ขจัดกัน

10.5.3 $A \subseteq B$

10.5.4 $P(A'|B') = \frac{2}{3}$

10.1 $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} > P(A)$

จะได้ $P(A \cap B) > P(A)P(B)$

หรือ $\frac{P(A \cap B)}{P(A)} > P(B)$

แสดงว่า $P(B|A) > P(B)$ เป็นจริง

10.2 $$P(A|C) = \frac{P(A\cap C)}{P(C)}$$

$$P(B|C) = \frac{P(B\cap C)}{P(C)}$$

การที่ $P(A) > P(B)$ ไม่ได้หมายความว่า $P(A\cap C) > P(B\cap C)$

ดังนั้น ข้อความที่ว่า

ถ้า $P(A) > P(B)$ แล้ว $P(A|C) > P(B|C)$ ไม่เป็นจริง

10.3 $$P(A\cap B|C) = \frac{P(A\cap B\cap C)}{P(C)}$$

$$P(A|C)\,P(B|C) = \frac{P(A\cap C)}{P(C)}\,\frac{P(B\cap C)}{P(C)}$$

การที่ A และ B เป็นอิสระกัน ไม่ได้หมายความว่า A และ C หรือ B และ C จะเป็นอิสระกันด้วย

ดังนั้น ที่ว่า

ถ้า A และ B เป็นอิสระต่อกันแล้ว $P(A\cap B|C) = P(A|C)\,P(B|C)$ ไม่เป็นจริง

10.4 A, B ต่างเป็นสับเซตของ S

ดังนั้น $A\cup B \subseteq S$ ด้วย จะได้ $P(A\cup B) \leqslant P(S)$

$$\Longrightarrow \quad P(A) + P(B) - P(A\cap B) \leqslant 1$$

$$P(A) + P(B) - 1 \leqslant P(A\cap B)$$

$$\frac{P(A) + P(B) - 1}{P(B)} \leqslant \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = P(A|B)$$

ดังนั้น ข้อความ

$$P(A|B) \geqslant \frac{P(A) + P(B) - 1}{P(B)}$$ เป็นจริง

10.5 $P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{1}{2}$ ดังนั้น $P(A\cap B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{1}{3}$ ดังนั้น $P(B) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$

จะเห็นว่า $P(A)\,P(B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = P(A\cap B)$

10.5.1 A และ B เป็นอิสระกัน จริง

10.5.2 A และ B เป็นเหตุการณ์ขจัดกัน ไม่จริง

เนื่องจาก $P(A \cap B) \neq 0$

10.5.3 $A \subseteq B$ ไม่จริง เพราะว่า $P(A) \neq P(A \cap B)$

10.5.4 $P(A'|B') = \frac{P(A' \cap B')}{P(B')}$

$= \frac{P(A')\,P(B')}{P(B')}$ A blat B เป็นอิสระกัน

$\Rightarrow$ A ' และ B ' เป็นอิสระกันด้วย

$= 1 - P(A)$

$\Longrightarrow P(A'|B') = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ เป็นจริง