ทฤษฎีตัดสินใจทางสถิติ กับปัญหาการทดสอบสมมุติฐาน

Statistical Decision Theory approach to Testing Hypothesis Problems

ปัญหาการทดสอบสมมติฐานเป็นแบบหนึ่งของปัญหาการตัดสินใจประเภทสองทางเลือก สภาวการณ์ในปัญหาเหล่านี้อาจจะเป็นแบบจำกัดหรือนับไม่ได้ (Finite or Uncountable) โดยการทราบกลุ่มสภาวการณ์ที่เกี่ยวข้องกับปัญหาตัดสินใจนั้น ทางเลือกหนึ่งจะเหมาะสมกับสภาวการณ์หนึ่ง และทางเลือกอื่นก็เหมาะกับสภาวการณ์อื่น เพราะฉะนั้นสมมติฐานจะเป็นคำกล่าวเกี่ยวกับสภาวการณ์นอกบังคับ และสมมติฐานเหล่านี้จะได้รับการทดสอบโดยการสังเกตตัวอย่างสุ่มในแง่ที่ว่า จะได้รับการปฏิเสธหรือยอมรับ ลองพิจารณาปัญหาต่อไปนี้

สมมติว่าเจ้าของโรงงาน และผู้ซื้อพิจารณาถึงการขายส่วนประกอบอย่างหนึ่งที่อยู่ในกล่องขนาด 1000 หน่วย ส่วนประกอบใด ๆ ในกล่องอาจจะเป็นของเสีย หรือไม่เสีย และถ้าทั้งโรงงานและผู้ซื้อมีความรู้ในข้อเท็จจริงเหล่านี้ ผู้ซื้อไม่ต้องการที่จะซื้อกล่องที่มีจำนวนของเสียที่ยอมรับไม่ได้ (คือเสียมากไป) เพราะเขาจะเสียค่าใช้จ่ายมากเกินไป และในขณะเดียวกันโรงงานก็ไม่ต้องการที่จะขายของนั้น เพราะเขาจะเสียลูกค้าที่ดีไป

ให้ผู้ซื้อเต็มใจที่จะยอมรับของเสียจำนวนหนึ่ง นั่นคือจะซื้อถ้ามีของเสียไม่เกิน 5% อย่างไรก็ตามผู้ซื้ออาจจะหาข้อมูลข่าวสารเพิ่มเติมเกี่ยวกับการเกิดขึ้นของส่วนประกอบที่เสียก่อนที่จะทำการตัดสินใจ โรงงานเห็นด้วยกับเกณฑ์นี้ และเชื่อว่าจะมีของเสียไม่เกิน 5 % สมมติว่าโรงงานยอมให้ทดสอบกล่องบรรจุนั้น 1 กล่อง

สมมติผู้ซื้อเลือกสุ่มตัวอย่างขนาด n และจะทำการตัดสินใจโดยอาศัยประจักษ์พยานจากตัวอย่างนั้น ผู้ซื้อจึงมีทางเลือกอยู่ 2 ทาง คือ ยอมรับคำกล่าวของโรงงาน และซื้อของนั้น หรือปฏิเสธคำกล่าว และไม่ซื้อของนั้น ผลของทางเลือกเหล่านี้จะขึ้นอยู่กับสภาวการณ์นอกบังคับจริง ๆ ซึ่งในปัญหานี้สามารถจะนิยามคำกล่าวของโรงงานว่าจะเป็นจริงหรือไม่เป็นจริง ดังที่ได้กล่าวข้างบน การซื้อของจะเหมาะสมถ้าคำกล่าวของโรงงานเป็นจริง

และการไม่ซื้อของจะเหมาะสมถ้าคำกล่าวของโรงงานไม่เป็นจริง สำหรับสถานการณ์อื่นจะทำให้ผู้ซื้อเสียหายเพิ่มขึ้น ตามจริงเขาต้องการหลีกเลี่ยงการสูญเสียเหล่านี้โดยทำการตัดสินใจที่เหมาะสม อย่างไรก็ตามเขาไม่ทราบว่าสภาวการณ์ไหนจะเกิดขึ้น ฉะนั้นเขาจึงต้องการได้ประจักษ์พยานจากตัวอย่างเพื่อที่จะทดสอบคำกล่าวของโรงงาน ปัญหาการตัดสินใจแบบนี้เรียกว่า ปัญหาการทดสอบสมมติฐาน

1. <u>การกำหนดในเชิงวิเคราะห์ตัดสินใจของปัญหาทดสอบสมมติฐาน</u> (Decision Analysis Formulation of Hypothesis Testing Problems)

จากปัญหาตัดสินใจที่กล่าวมานั้น ให้ $A = \{a_1, a_2\}$ เป็นกลุ่มทางเลือก โดยที่ a_1 เป็นทางเลือก "ยอมรับคำกล่าวของโรงงาน และซื้อของนั้น" และ a_2 เป็นทางเลือก "ไม่ยอมรับคำกล่าว และไม่ซื้อของนั้น" สมมติว่ากลุ่มสภาวการณ์ W สามารถแบ่งออกได้เป็น 2 กลุ่มย่อย คือ W_1 และ W_2 เพื่อให้ทางเลือก a_1 เหมาะสมกับ w ใด ๆ ใน W_1 และทางเลือก a_2 เหมาะสมกับ w ใด ๆ ใน W_2 จากตัวอย่าง เราได้ว่า

$$W_1 = \{w | w \leq .05\} \quad \text{และ} \quad W_2 = \{w | w > .05\}$$

คำกล่าวของโรงงานที่ว่าสัดส่วนของเสียน้อยกว่าหรือเท่ากับ .05 จะให้เป็นสภาวการณ์แท้จริง w ซึ่งอยู่ใน W_1 โดยที่ $W_2 = \overline{W}_1$ เป็นทางเลือกของคำกล่าวนั้น ซึ่งจะกล่าวได้ว่า w เป็นของ W_2 คำกล่าวตอนแรกเรียกว่า สมมติฐานว่างเปล่า (H_0, Null Hypothesis) คำกล่าวตอนหลังเรียกว่า สมมติฐานรอง (H_a, Alternative Hypothesis) คำกล่าวใด ๆ เกี่ยวกับ w และ w อยู่ใน W_1 กับ w อยู่ใน W_2 เรียกว่า ปัญหาการทดสอบสมมติฐาน (Testing Hypothesis) เมื่อใช้สัญญลักษณ์เราเขียนได้เป็น

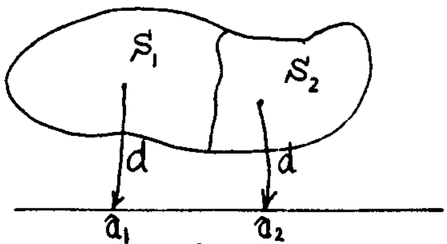
$$H_0 : \quad w \in W_1$$
$$H_a : \quad w \in W_2$$

สมมติว่าเราพิจารณาตัวอย่างสุ่มขนาด n จากผลการทดลองของตัวอย่าง เราจึงตัดสินใจว่าจะเลือกทางเลือก a_1 หรือ a_2 จงสังเกตว่าทางเลือก a_1 และ a_2 จะหมายถึงว่าเรายอมรับ H_0 และยอมรับ H_a ตามลำดับ โดยที่ a_1 และ a_2 เป็นทางเลือก

2 ทาง เท่านั้นในปัญหาการทดสอบสมมติฐาน และการยอมรับ H_0 จะหมายถึงการปฏิเสธ H_0 นั่นเอง เพราะฉะนั้นในปัญหาการทดสอบสมมติฐาน เราจะสังเกตผลทดลองของตัวอย่าง และแล้วตัดสินใจว่าจะยอมรับ H_0 หรือไม่ การทำเช่นนี้เราจำเป็นต้องหา กฎตัดสินใจ ที่จะแปลงผลทดลองของตัวอย่างไปสู่กลุ่มทางเลือก A กฎตัดสินใจ (Decision Rule) เช่นนั้นเรียกว่า การทดสอบ (Test) ของปัญหาการทดสอบสมมติฐาน ตัวอย่างเช่น เราจะเลือกตัวอย่างสุ่มของส่วนประกอบ 20 หน่วยจากกล่อง และสังเกตดู ปรากฏว่ามีของเสีย 2 หน่วย แล้วเรามีความโน้มเอียงที่จะยอมรับ H_0 นั่นคือเราเลือกทางเลือก a_1 ในทางตรงกันข้าม ถ้าพบของเสียถึง 15 หน่วย แล้วเราควรจะโน้มเอียงที่จะปฏิเสธ H_0 นั่นคือเลือกทางเลือก a_2 หรืออาจจะกล่าวได้ว่า ผลทดลองบางอย่างของตัวอย่างสุ่มจะทำให้เราเชื่อว่าเราควรจะยอมรับ H_0 และผลทดลองบางอย่างจะทำให้เราเชื่อว่าเราควรจะปฏิเสธ เพราะฉะนั้นเราสามารถสมมติได้ว่ามีฟังก์ชันตัดสินใจ (Decision function) หรือกฎตัดสินใจที่ว่า $d(x) = a_1$ สำหรับ x บางตัวที่อยู่ใน S และ $d(x) = a_2$ สำหรับ x อื่น ๆ ที่อยู่ใน S ในเมื่อ S เป็นเซทของผลทดลองทั้งหมดของตัวอย่างสุ่ม นั่นก็หมายความว่าฟังก์ชันตัดสินใจ d แบ่ง S เป็น 2 เซท S_1 และ S_2 คือ

$$
\begin{aligned}
d(x) &= a_1 \quad \text{สำหรับ} \quad x \in S_1 \\
&= a_2 \quad \text{สำหรับ} \quad x \in S_2 = \overline{S}_1
\end{aligned}
$$

การวิเคราะห์นี้แสดงได้ดังรูปต่อไปนี้



เซท S_1 เรียกว่า เขตยอมรับ (Acceptance Region) และ S_2 เรียกว่า เขตปฏิเสธ (Rejection Region) เราจะพิจารณาผลของทางเลือกต่อไป

ให้ L เป็นฟังก์ชันเสียโอกาสที่กำหนดใน $A \times W$ โดยที่ a_1 เป็นทางเลือกที่เหมาะสมสำหรับ $w \in W_1$ และ a_2 เหมาะสมสำหรับ $w \in W_2$ เราจะได้ว่า

$$L(a_1, w) = 0 \quad \text{สำหรับ} \quad w \in W_1$$
$$L(a_2, w) = 0 \quad \text{สำหรับ} \quad w \in W_2$$

สำหรับสถานการณ์อื่น ๆ จะมีค่าเสียโอกาสที่เป็นบวก อาจจะเป็นไปได้ที่จะปฏิเสธสมมติฐาน $H_0: w \in W_1$ เมื่อมันเป็นจริง นั่นคือเลือก a_2 เมื่อ $w \in W_1$ นี่ก็หมายความว่าผู้ซื้อจะไม่ซื้อของนั้น ถึงแม้ว่าสัดส่วนของเสียจะน้อยกว่าหรือเท่ากับ .05 ซึ่งเป็นระดับที่เขาเต็มใจจะซื้อได้ นี่ก็เป็นสถานการณ์ที่เขาควรจะหลีกเลี่ยง และเรียกกันว่าการทำความคลาดเคลื่อนประเภท 1 (Type I Error) ค่าเสียโอกาสโดยการกระทำความคลาดเคลื่อนประเภท 1 จะเป็นบวก ซึ่งกำหนดไว้ว่า

$$L(a_2, w) = \ell_2 > 0 \quad \text{สำหรับ} \quad w \in W_1$$

ความน่าจะเป็นที่กระทำทางเลือกเช่นนั้น กำหนดด้วย $p(a_2/w)$ เมื่อ $w \in W_1$ โดยที่เราเลือกทางเลือก a_2 ตาม d หลังจากเราสังเกต $X = x$ เราจะแทนความน่าจะเป็นด้วย $\alpha(d, w)$

ในทำนองเดียวกัน เราควรจะหลีกเลี่ยงสถานการณ์อื่น ๆ นั่นคือยอมรับ H_0 เมื่อมันเป็นเท็จ หรือเราเลือก a_1 เมื่อ $w \in W_2$ นี่ก็หมายความว่าผู้ซื้อจะซื้อของนั้นถึงแม้ว่าสัดส่วนของเสียจะมากกว่าขีดจำกัดที่เขาจะยอมได้ เมื่อสถานการณ์เช่นนั้นเกิดขึ้น เราจะเรียกว่า การทำความคลาดเคลื่อนประเภท 2 (Type II Error) ค่าเสียโอกาสในกรณีนี้กำหนดไว้ด้วย

$$L(a_1, w) = \ell_1 > 0 \quad \text{สำหรับ} \quad w \in W_2$$

ความน่าจะเป็นที่จะทำความคลาดเคลื่อนประเภท 2 แทนด้วย $\beta(d, w)$ และกำหนดให้เป็น $p(a_1/w)$ เมื่อ $w \in W_2$ ความน่าจะเป็น $p(a_2/w)$, $w \in W_1$ และ $p(a_1/w)$, $w \in W_2$ เรียกว่า ความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อน (Error Probabilities) ความน่าจะเป็นเหล่านี้นิยามให้เป็นแบบฟอร์มได้ดังนี้

$$p(a_2/w) = P_w(\{x/d(x) = a_2\}) = P_w(S_2) \quad \text{สำหรับ} \quad w \in W_1$$
$$p(a_1/w) = P_w(\{x/d(x) = a_1\}) = P_w(S_1) \quad \text{สำหรับ} \quad w \in W_2$$

ความน่าจะเป็นทางด้านขวามือของสมการนั้นจะไว้ใจได้ เพราะว่าได้นิยามใน S ความจริงคำนวณได้จากการใช้ฟังก์ชันน่าจะเป็นที่นิยามใน S

ดังนั้นโดยสรุปปัญหาการทดสอบสมมติฐาน สามารถนิยามได้เป็น

$$H_0 : w \in W_1$$
$$H_a : w \in W_2$$

ตัวอย่างสุ่มที่เลือกมาขนาด n นั้น กับกฎตัดสินใจที่เหมาะ (หรือแบบทดสอบ) ซึ่งนิยามไว้เพื่อจะรับหรือปฏิเสธสมมติฐานว่างเปล่า Ho ลักษณะของการตัดสินใจ กับค่าเสียโอกาส แสดงได้ดังตารางต่อไปนี้

<u>ตาราง</u> 1 ปัญหาการทดสอบสมมติฐาน

	W	$w \in W_1$	$w \in W_2$
A	a_1	ตัดสินใจถูกต้อง $L(a_1, w) = 0$	ตัดสินใจไม่ถูกต้อง $L(a_1, w) = \ell_1 > 0$
	a_2	ตัดสินใจไม่ถูกต้อง $L(a_2, w) = \ell_2 > 0$	ตัดสินใจถูกต้อง $L(a_2, w) = 0$

จากการกำหนดกรอบของปัญหาการทดสอบสมมติฐาน เราจึงสามารถนิยามแบบต่าง ๆ ของปัญหาการทดสอบสมมติฐานได้ การแบ่งประเภทก็ขึ้นอยู่กับจำนวนของสมาชิกใน W_1 และ W_2 นั้น ถ้า W_1 และ W_2 ต่างก็ประกอบด้วยสมาชิกเพียงหนึ่ง แล้วปัญหาการทดสอบสมมติฐาน จะเรียกว่า สมมติฐานว่างเปล่าเชิงเดี่ยว (Simple Null Hypothesis) กับสมมติฐานรองเชิงเดี่ยว ในทางตรงกันข้าม ถ้าทั้ง W_1 และ W_2 ประกอบด้วยจุดมากกว่าหนึ่ง แล้วจะเรียกว่า สมมติฐานว่างเปล่าแบบผสม (Composite Null Hypothesis) กับสมมติฐานรองแบบผสม ในทำนองเดียวกัน ถ้า W_1 ประกอบด้วยสมาชิกเพียงหนึ่ง แต่ W_2 ประกอบด้วยสมาชิกมากกว่าหนึ่ง แล้วจะเรียกว่าปัญหาการทดสอบสมมติฐานที่มีสมมติฐานว่างเปล่าเชิงเดี่ยว กับสมมติฐานรองแบบผสม และแบบสุดท้าย ถ้า Ho ประกอบด้วยจุดมากกว่าหนึ่ง แต่ Ha ประกอบด้วยจุดเดียว แล้วปัญหาการทดสอบสมมติฐานจะเป็นปัญหาที่มีสมมติฐานว่างเปล่าแบบผสม กับสมมติฐานรองเชิงเดี่ยว ต่อไปนี้เราจะพิจารณาสมมติฐานว่างเปล่า และสมมติฐานรองเป็นแบบเชิงเดี่ยวทั้งคู่ ตอนต่อ ๆ ไปจึงค่อยขยายการวิเคราะห์ไปถึงปัญหาอื่น ๆ

2. <u>ปัญหาการทดสอบสมมติฐานที่มีสมมติฐานว่างเปล่า และสมมติฐานรองเป็นแบบเชิงเดี่ยว</u>

สำหรับปัญหาที่มีสมมติฐานว่างเปล่าเชิงเดี่ยว และสมมติฐานรองเชิงเดี่ยวนั้น เรากำหนดได้ดังนี้

$$H_0: \quad w = w_1$$
$$H_a: \quad w = w_2$$

เมื่อ $W_1 = \{w_1\}$ และ $W_2 = \{w_2\}$ โดยที่ $W_1 \cap W_2 = \phi$ และ $W = W_1 \cup W_2$ กลุ่มทางเลือก A กำหนดไว้เป็น $A = \{a_1, a_2\}$

เมื่อ a_1 เป็นทางเลือก "ยอมรับ H_0" และ a_2 เป็นทางเลือก "ปฏิเสธ H_0" ค่าเสียโอกาสของทางเลือกเหล่านี้แสดงได้ดังตารางต่อไปนี้

<u>ตาราง</u> 2 ปัญหาการทดสอบสมมติฐานเชิงเดี่ยว

	W	$w = w_1$	$w = w_2$
A	a_1	0	$\ell_1 > 0$
	a_2	$\ell_2 > 0$	0

ให้ S เป็นเซทของผลทดลองที่เป็นไปได้ทั้งหมดของตัวอย่างสุ่ม นั่นคือ S เป็นกลุ่มผลทดลอง และให้ d เป็นกฎตัดสินใจที่มีคุณสมบัติว่า

$$\begin{aligned} d(x) &= a_1 \quad \text{สำหรับ} \quad x \in S_1 \\ &= a_2 \quad \text{สำหรับ} \quad x \in S_2 \end{aligned}$$

เมื่อ $\{S_1, S_2\}$ เป็นส่วนแบ่ง (Partition) ของ S แล้วความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนของ d กำหนดด้วยสมการ

$$\alpha(d, w_1) = p(a_2/w_1) = P_{w_1}(\{x/d(x) = a_2\})$$
$$\beta(d, w_2) = p(a_1/w_2) = P_{w_2}(\{x/d(x) = a_1\})$$

เราจะพิจารณาตัวอย่างที่มีโครงสร้างที่กล่าวมาแล้วนี้ สมมติว่าผู้จัดการของบริษัทขายชิ้นส่วนไฟฟ้าขนาดเล็กกำลังเจรจาการซื้อขายชิ้นส่วน 1000 ชิ้น กับโรงงานผู้ผลิตชิ้นส่วนนั้น โรงงานกล่าวว่าสัดส่วนของเสีย w ในกล่องนี้เท่ากับ 0.20 ผู้จัดการต้องการตรวจสอบคำกล่าวนั้น เพราะฉะนั้นเขาจึงกำหนดสมมติฐานรองเป็น $w = .50$ และกำหนดปัญหา

ได้เป็น

$$Ho : w = w_1 = .20$$

$$Ha : w = w_2 = .50$$

จงสังเกตว่าคำกล่าวข้างบนนี้หมายถึง $W_1 = \{w_1\}$ และ $W_2 = \{w_2\}$ โดยที่มี 2 สภาวการณ์เท่านั้น เราจึงมี $W = W_1 \cup W_2$ สมมติว่าผู้จัดการได้กำไร 2 บาท ต่อทุก ๆ ชิ้นที่ไม่เสีย และจะสูญเสียไป 3 บาท ทุก ๆ ชิ้นที่เสีย จากข้อมูลข่าวสารนี้เราจะได้ค่าเสียโอกาสของ a_1 และ a_2 ใน w_1 และ w_2 ดังนี้

<u>ตาราง</u> 3 ค่าเสียโอกาส

	W	w_1	w_2
A	a_1	0	500
	a_2	1000	0

สมมติว่าผู้จัดการเลือกตัวอย่างสุ่มของ 2 ชิ้นส่วน x_1, x_2 ให้ S เป็นกลุ่มผลทดลองของตัวอย่าง ซึ่งกำหนดไว้เป็น $S = \{x_1, x_2, x_3\}$ เมื่อ $x_1, x_2,$ และ x_3 แทน 0, 1, และ 2 ชิ้นที่เสีย ตามลำดับ ฟังก์ชันน่าจะเป็นของผลทดลองนั้นจะเป็นแบบทวินาม มี $n = 2$ และ w โดยที่ w เป็นความน่าจะเป็นที่จะได้ชิ้นส่วนที่เสีย นั่นคือ

$$p(x_i/w) = b(x_i; 2, w) , w \in W$$

สมมติผู้จัดการกำหนดความน่าจะเป็นก่อนทดลองให้แก่ w_1 และ w_2 เป็น .6 และ .4 ตามลำดับ ฟังก์ชันน่าจะเป็นที่สอดคล้องแสดงได้ดังนี้

<u>ตาราง</u> 4 ฟังก์ชันน่าจะเป็น $p(s_i, w)$

	S	x_1	x_2	x_3
W	w_1	.64	.32	.04
	w_2	.25	.50	.25

เราใช้ฟังก์ชันน่าจะเป็นในตารางนี้คำนวณความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อน $\alpha(d, w_1)$ และ $\beta(d, w_2)$ โดยที่ความน่าจะเป็นเหล่านี้แทนผลลัพธ์ที่กฎตัดสินใจ d จะนำไปสู่การตัดสินใจที่ผิด เมื่อ $w = w_1$ และ $w = w_2$ ผู้จัดการควรจะโน้มเอียงที่จะหลีกเลี่ยงมันไป ต่อมาเขาคำนวณการเสี่ยงของการตัดสินใจที่ผิดเช่นนั้น และจะพยายามทำให้การ

เสี่ยงต่ำที่สุด ให้ $B(d)$ เป็นการเสี่ยงของการกระทำการตัดสินใจ d ถ้า $p(w_1)$ และ $p(w_2)$ เป็นความน่าจะเป็นก่อนทดลองของ w_1 และ w_2 แล้ว $B(d)$ สามารถคำนวณได้ด้วยสมการ

$$B(d) = L(a_2, w_1)\alpha(d, w_1)p(w_1) + L(a_1, w_2)\beta(d, w_2)p(w_2)$$

อย่างไรก็ตาม จากตาราง 3 เรามี $L(a_2, w_1) = 1000$ และ $L(a_1, w_2) = 500$ ดังนั้น

$$B(d) = \{1000\, p(w_1)\}\alpha(d, w_1) + \{500\, p(w_2)\}\beta(d, w_2)$$

ผู้จัดการจะเลือกกฎตัดสินใจ d^* ที่ทำให้ $B(d)$ น้อยที่สุด กฎตัดสินใจ d^* นี้เป็นแบบทดสอบ (Test) ของปัญหาการทดสอบสมมติฐาน จงสังเกตว่าการวิเคราะห์ที่กล่าวมานี้จะขนานกับการวิเคราะห์แบบปกติ (Normal Form) ของปัญหาตัดสินใจสองสภาวการณ์ สองทางเลือก อย่างไรก็ตามในบทนี้เราใช้เทอมต่าง ๆ ที่เกี่ยวพันกับปัญหาการทดสอบสมมติฐาน

เราสามารถแสดงการเสี่ยงของ d ในรูปแบบอื่น ๆ ด้วยการใช้ความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนในรูปอื่น ดังนี้

$$\begin{aligned} B(d) &= \{1000\, p(w_1)\} P_{w_1}(\{x / d(x) = a_2\}) + \{500\, p(w_2)\} P_{w_2}(\{x / d(x) = a_1\}) \\ &= \{1000\, p(w_1)\} P_{w_1}(S_2) + \{500\, p(w_2)\} P_{w_2}(S_1) \end{aligned}$$

ถ้า d^* เป็นกฎตัดสินใจที่ทำให้ $B(d)$ นี้ต่ำที่สุด แล้วจะได้ว่า $B(d^*) \le B(d)$ สำหรับการตัดสินใจ d อื่นใด ๆ เราจะพิจารณาเงื่อนไขภายใต้คุณสมบัติข้างบนนี้ ลองพิจารณา

$$B(d) = 1000\, p(w_1) P_{w_1}(S_2) + 500\, p(w_1) P_{w_2}(S_1)$$

ให้ $p_{w_1}(x)$ และ $p_{w_2}(x)$ เป็นฟังก์ชันน่าจะเป็นของ w_1 และ w_2 ตามลำดับ แล้วสมการข้างบนนี้สามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} B(d) &= 1000\, p(w_1) \sum_{x \in S_2} p_{w_1}(x) + 5000\, p(w_2) \sum_{x \in S_1} p_{w_2}(x) \\ &= 1000\, p(w_1) \Big\{ \sum_{x \in S_2} p_{w_1}(x) + \sum_{x \in S_1} p_{w_1}(x) \Big\} \\ &\quad + 500\, p(w_2) \sum_{x \in S_1} p_{w_2}(x) - 1000\, p(w_1) \sum_{x \in S_1} p_{w_1}(x) \end{aligned}$$

อย่างไรก็ตาม $\sum_{x \in S_2} p_{w_1}(x) + \sum_{x \in S_1} p_{w_2}(x) = \sum_{x \in S} p_{w_1}(x) = 1$

เพราะฉะนั้น $B(d) = 1000p(w_1) + \sum_{x \in S_1}\{500p(w_2)\,p_{w_2}(x) - 1000p(w_1)\,p_{w_1}(x)\}$

เทอมแรกในสมการข้างบนนี้เป็นบวก เพราะฉะนั้นฟังก์ชั่น $B(d)$ นี้จะน้อยที่สุดก็คือเมื่อเราหาเซท S_1 ที่ทำให้ $\{5000p(w_2)\,p_{w_2}(x) - 1000p(w_1)\,p_{w_1}(x)\} < 0$ นั่นคือเราสามารถหากฎตัดสินใจ d^* ก็คือเมื่อ $\{500p(w_2)\,p_{w_2}(x) - 1000p(w_1)\,p_{w_1}(x)\} < 0$ โดยที่ $B(d^*) \leq B(d)$ สำหรับกฎตัดสินใจ d อื่น ๆ อย่างไรก็ตาม

$$500\,p(w_2)\,p_{w_2}(x) - 1000\,p(w_1)\,p_{w_1}(x) < 0$$

$$\Longleftrightarrow\ 500\,p(w_2)\,p_{w_2}(x) < 1000\,p(w_1)\,p_{w_1}(x)$$

$$\Longleftrightarrow\ p_{w_1}(x)/\,p_{w_2}(x) > 500\,p(w_2)/1000\,p(w_1)$$

จากตัวอย่างเรามี $p(w_1) = .6$ และ $p(w_2) = .4$ ดังนั้น

$$500\,p(w_2)/1000\,p(w_1) = 500(.4)/1000(.6) = .33$$

และกฎตัดสินใจ (หรือแบบทดสอบ) d^* สำหรับปัญหาการทดสอบสมมติฐานจะอธิบายได้ดังนี้

$$\begin{aligned} d^*(x) &= a_1 \quad \text{ถ้า} \quad p_{w_1}(x)/\,p_{w_2}(x) > .33 \\ &= a_2 \quad \text{ถ้า} \quad p_{w_1}(x)/\,p_{w_2}(x) < .33 \end{aligned}$$

เมื่อ $x = \sum x_i$ เป็นผลทดลองของตัวอย่าง ทางเลือก a_1 และ a_2 จะไม่แตกต่างกัน ถ้า $p_{w_1}(x)/\,p_{w_2}(x) = .33$ ดังนั้นถ้าผู้จัดการสังเกตของเสีย 1 ชิ้น (x_2) แล้วใช้ตาราง 4 คำนวณอัตราส่วน

$$p_{w_1}(x_2)/\,p_{w_2}(x_2) = .32/.50 = .64$$

โดยที่ $.64 > .33$ เขาจึงควรยอมรับ H_0 นั่นคือคำกล่าวของโรงงานที่ว่าสัดส่วนของเสียเท่ากับ .20 ควรจะได้รับการยอมรับจากผู้จัดการ

ดังนั้นโดยทั่วไปสำหรับปัญหาการทดสอบสมมติฐานที่มีสมมติฐานว่างเปล่าเชิงเดี่ยวกับสมมติฐานรองเชิงเดี่ยวดังที่ระบุไว้เป็น

$$H_0 : w = w_1 \quad \text{กับ} \quad H_a : w = w_2$$

แบบทดสอบ หรือกฎตัดสินใจ d^* กำหนดด้วย

$$\begin{aligned} d^*(x) &= a_1 \quad \text{ถ้า} \quad p_{w_1}(x)/\,p_{w_2}(x) > k \\ &= a_2 \quad \text{ถ้า} \quad p_{w_1}(x)/\,p_{w_2}(x) < k \end{aligned}$$

หลังจากสังเกต $X = x$ เมื่อ a_1 เป็นทางเลือก "ยอมรับ H_0" a_2 เป็นทางเลือก "ปฏิเสธ H_0" $p_{w_1}(x)$ และ $p_{w_2}(x)$ เป็นฟังก์ชันน่าจะเป็นของ w_1 และ w_2 และ $k = L(a_1, w_2)p(w_2)/L(a_2, w_1)p(w_1)$ ความน่าจะเป็น $p(w_1)$ และ $p(w_2)$ เป็นความน่าจะเป็นก่อนทดลองของ w_1 และ w_2 ตามลำดับ ถ้า $p_{w_1}(x)/p_{w_2}(x) = k$ แล้ว ทางเลือก a_1 กับ a_2 ไม่แตกต่างกัน การวิเคราะห์นี้อาจจะกล่าวได้ดังทฤษฎีต่อไปนี้

<u>ทฤษฎี</u> 1 ให้ $H_0: w = w_1$ กับ $H_a: w = w_2$ เป็นปัญหาการทดสอบสมมติฐาน เมื่อ $W_1 = \{w_1\}$ และ $W_2 = \{w_2\}$ โดยที่กลุ่มสภาวการณ์เป็น $W = W_1 \cup W_2$ ให้ $p(w_1)$ และ $p(w_2)$ เป็นความน่าจะเป็นก่อนทดลองของ w_1 และ w_2 และให้ $X = x$ เป็นผลทดลองของตัวอย่างที่มี $p_{w_1}(x)$ และ $p_{w_2}(x)$ เป็นฟังก์ชันน่าจะเป็นของ w_1 และ w_2 แล้วกฎตัดสินใจ d^*

$$
\begin{aligned}
d^*(x) &= a_1 \quad \text{ถ้า } p_{w_1}(x)/p_{w_2}(x) > k \\
&= a_2 \quad \text{ถ้า } p_{w_1}(x)/p_{w_2}(x) < k
\end{aligned}
$$

นี้จะกำหนดแบบทดสอบ (Test)

3. <u>แบบทดสอบอัตราส่วนน่าจะเป็น</u> (Likelihood Ratio Test)

ตามทฤษฎี 1 จะได้ว่าแบบทดสอบของปัญหาการทดสอบสมมติฐานที่มีสมมติฐานว่างเปล่าเชิงเดี่ยว กับสมมติฐานรองเชิงเดี่ยวนี้จะขึ้นอยู่กับอัตราส่วนของฟังก์ชันน่าจะเป็น $p_{w_1}(x)$ และ $p_{w_2}(x)$ หลังจากสังเกต $X = x$ แทนอัตราส่วนนี้ด้วย $\lambda(x)$ ดังนั้น เราจะยอมรับ หรือปฏิเสธ H_0 หรือไม่ จึงขึ้นอยู่กับว่าอัตราส่วน

$$\lambda(x) = p_{w_1}(x)/p_{w_2}(x)$$

นี้มีค่ามากกว่าหรือน้อยกว่าจำนวน k ซึ่งพิจารณาได้จากอัตราส่วนของ $L(a_1, w_2)p(w_2)$ และ $L(a_2, w_1)p(w_1)$ อัตราส่วน $\lambda(x)$ นี้เรียกว่า อัตราส่วนน่าจะเป็น (Likelihood Ratio) เพราะฉะนั้นแบบทดสอบที่กำหนดในทฤษฎี 1 จึงเหมือนกับแบบทดสอบที่นำไปสู่การยอมรับ H_0 ถ้า $\lambda(x) > k$ ปฏิเสธ H_0 ถ้า $\lambda(x) < k$ และไม่แตกต่างกันระหว่าง a_1 และ a_2 ถ้า $\lambda(x) = k$ แบบทดสอบประการหลังนี้เรียกว่า แบบทดสอบอัตราส่วนน่าจะเป็น (Likelihood Ratio Test) ซึ่งนิยามเป็นรูปฟอร์มได้ดังนี้

<u>นิยาม</u> 1 ให้ $H_0: w = w_1$ กับ $H_a: w = w_2$ เป็นสมมติฐานว่างเปล่าเชิงเดี่ยว กับสมมติฐานรองเชิงเดี่ยว สมมติว่าสังเกต $X = x$ ได้ ให้ $p_{w_i}(x)$ เป็นฟังก์ชันน่าจะเป็นของ $w_i \, (i=1,2)$ แล้วอัตราส่วน

$$\lambda(x) = p_{w_1}(x) / p_{w_2}(x)$$

เรียกว่า อัตราส่วนน่าจะเป็น และแบบทดสอบ d^* เรียกว่า แบบทดสอบอัตราส่วนน่าจะเป็น ถ้ามีเลขจำนวนจริงที่เป็นบวก k โดยที่

$$\begin{aligned} d^*(x) &= a_1 \quad \text{ถ้า} \ \lambda(x) > k \\ &= a_2 \quad \text{ถ้า} \ \lambda(x) < k \end{aligned}$$

และไม่แตกต่างกันระหว่าง a_1 และ a_2 ถ้า $\lambda(x) = k$

ค่าของ k พิจารณาจากอัตราส่วน $L(a_1, w_2)p(w_2)/L(a_2, w_1)p(w_1)$ ทำนองเดียวกัน เราสามารถพูดว่าแบบทดสอบอัตราส่วนน่าจะเป็นนั้นเป็นแบบทดสอบที่ยอมรับ H_0 ถ้า $\lambda(x)$ โตกว่าค่าคงที่บางค่าซึ่งเป็นบวก จะปฏิเสธ H_0 ถ้า $\lambda(x)$ น้อยกว่าค่าคงที่ และจะไม่แตกต่างกันระหว่าง 2 ทางเลือก ถ้า $\lambda(x)$ เท่ากับค่าคงที่นั้น

จากตัวอย่างนั้น ถ้า $\sum x_i = x_2$ ผู้จัดการยอมรับ H_0 นั่นคือเขาควรจะซื้อของนั้น สมมติ $\sum x_i = x_1$ ผู้จัดการจะตัดสินใจแบบไหน อัตราส่วนน่าจะเป็น $\lambda(x_1)$ กำหนดไว้ว่า

$$\lambda(x_1) = p_{w_1}(x_1) / p_{w_2}(x_1) = .64/.25 = 2.56$$

โดยที่ x_1 แทนผลทดลองที่ไม่มีของเสียในตัวอย่าง เราทราบว่า $k = .33$ เพราะฉะนั้นตามแบบทดสอบอัตราส่วนน่าจะเป็นที่กล่าวมาแล้วก็จะได้ว่า ผู้จัดการควรยอมรับ H_0 เพราะ $\lambda(x) = 2.56 > .33$ นั่นคือเขาควรซื้อของนั้น ในทำนองเดียวกันเราสามารถแสดงได้ว่าผู้จัดการควรจะปฏิเสธ H_0 และไม่ซื้อของนั้น ถ้า $\sum x_i = x_3$ เมื่อ x_3 แทนของเสีย 2 ชิ้น ตามแบบทดสอบอัตราส่วนน่าจะเป็นนั้นกโลบายก็จะเป็นว่า ผู้จัดการควรซื้อของ เมื่อเขาไม่พบของเสีย หรือพบของเสีย 1 ชิ้น และไม่ควรซื้อ ถ้าพบของเสีย 2 ชิ้น ในตัวอย่างสุ่มขนาด 2

สำหรับตัวอย่างนี้ ถ้าเราทำการวิเคราะห์แบบปกติ หรือแบบขยาย เราก็จะสรุปกฎตัดสินใจแบบเดียวกัน คือกฎตัดสินใจแบบเบยส์ จะเป็นจริงกับปัญหาการทดสอบสมมติฐานที่มีสมมติฐานว่างเปล่าเชิงเดี่ยว และสมมติฐานรองเชิงเดี่ยว เพราะฉะนั้นเราสามารถจะสรุปได้ว่า แบบทดสอบอัตราส่วนน่าจะเป็นจะเหมือนกับกฎตัดสินใจแบบเบยส์ คำกล่าวนี้จะอธิบายในรูปฟอร์มได้ดังทฤษฎีต่อไปนี้

<u>ทฤษฎี</u> 2 ในการทดสอบสมมติฐานว่างเปล่าเชิงเดี่ยว กับสมมติฐานรองเชิงเดี่ยว ทุกกฎตัดสินใจแบบเบยส์จะเป็นแบบทดสอบอัตราส่วนน่าจะเป็น

โดยที่เราทราบว่าทุกกฎตัดสินใจที่เหมาะสม (admissible decision) จะเป็นกฎตัดสินใจแบบเบยส์ที่มีการแจกแจงน่าจะเป็นก่อนทดลองใน W ผลในทฤษฎี 2 นั้นอาจจะกล่าวได้ว่า ทุกแบบทดสอบที่เหมาะสมเป็นแบบทดสอบอัตราส่วนน่าจะเป็น นี่เป็นผลที่สำคัญเพื่อที่จะใช้หาแบบทดสอบสำหรับปัญหาการทดสอบสมมติฐานแบบผสม

4. <u>การทดสอบสมมติฐานว่างเปล่า และสมมติฐานรองแบบเชิงเดี่ยว ที่เกี่ยวข้องกับการแจกแจงปกติ</u>

พิจารณาปัญหาการทดสอบสมมติฐาน

$$H_0: w = w_1 \quad \text{กับ} \quad H_a: w = w_2$$

ให้ $p(w_1)$ และ $p(w_2)$ เป็นความน่าจะเป็นก่อนทดลองของ w_1 และ w_2 ตามลำดับ ในทำนองเดียวกัน ให้ $L(a_i, w)$ เป็นค่าเสียโอกาสของการตัดสินใจที่มีความคลาดเคลื่อน สมมติเราพิจารณาตัวอย่างสุ่ม $x_1, x_2, .., x_n$ จากการแจกแจงปกติ ที่ทราบความเที่ยงตรง h_0 เพื่อที่จะหาแบบทดสอบของปัญหาการทดสอบข้างบน ฟังก์ชันน่าจะเป็น $p_{w_j}(x_1, x_2, .., x_n)$ กำหนดไว้ด้วย

$$p_{w_j}(x_1, x_2, .., x_n) = \left(\frac{h_0}{2\pi}\right)^{n/2} e^{-\frac{h_0}{2}\sum(x_i - w_j)^2}$$

เพราะฉะนั้น
$$\begin{aligned} \lambda(x_1, x_2, .., x_n) &= p_{w_1}(x_1, x_2, .., x_n) / p_{w_2}(x_1, x_2, .., x_n) \\ &= e^{-\frac{h_0}{2}\{\sum(x_i - w_1)^2 - \sum(x_i - w_2)^2} \\ &= e^{-\frac{nh_0}{2}\{(w_1^2 - w_2^2) - 2\bar{x}(w_1 - w_2)\}} \end{aligned}$$

ตามแบบทดสอบอัตราส่วนน่าจะเป็น เราจะยอมรับ Ho ถ้า

$$\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) > k$$

หรือ $$\frac{nh_0}{2}\{(w_1^2 - w_2^2) - 2\bar{x}(w_1 - w_2)\} > \ln k$$

$$\Longrightarrow \bar{x}(w_1 - w_2) > \left(\frac{\ln k}{nh_0} + \frac{w_1^2 - w_2^2}{2}\right)$$

ถ้าเราสมมติต่อไปว่า $w_1 > w_2$ แล้วเราจะยอมรับ Ho ถ้า

$$\bar{x} > \frac{1}{w_1 - w_2}\left[\frac{\ln k}{nh_0} + \frac{w_1^2 - w_2^2}{2}\right] = c$$

จะปฏิเสธ Ho ถ้า $\bar{x} < c$ และจะตัดสินใจไม่ได้ ถ้า $\bar{x} = c$

ในทางตรงกันข้าม ถ้า $w_1 < w_2$ แล้วเราจะยอมรับ Ho ถ้า

$$\bar{x} < \frac{1}{w_1 - w_2}\left[\frac{\ln k}{nh_0} + \frac{w_1^2 - w_2^2}{2}\right] = v$$

ปฏิเสธ Ho ถ้า $\bar{x} > v$ และตัดสินใจไม่ได้ระหว่าง Ho และ Ha ถ้า $\bar{x} = v$ จงสังเกตว่าค่าของ k ในแบบทดสอบข้างบนกำหนดไว้ด้วย

$$k = L(a_1, w_2)\,p(w_2)/L(a_2, w_1)\,p(w_1)$$

ที่กล่าวมาเราพิจารณาแต่ปัญหาทดสอบสมมติฐานเชิงเดี่ยว แต่ในทางปฏิบัติเราพบกับปัญหาทั่วไป เช่นผู้จัดการในตัวอย่างที่แล้วมานั้น อาจจะสนใจในการทดสอบว่าเปอร์เซนต์ของเสีย w น้อยกว่าหรือเท่ากับ .05 และ w มากกว่า .05 หรือไม่ สมมติฐานแบบนี้เรียกว่าสมมติฐานแบบผสม ต่อไปเราจะพัฒนาแบบทดสอบบางอย่างสำหรับทดสอบปัญหาเหล่านี้

5. <u>การทดสอบสมมติฐานแบบผสม</u> (Testing Composite Hypotheses)

ปัญหาการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับสมมติฐานแบบผสมอาจจะกำหนดไว้ดังนี้

$$H_0: w \in W_1 \quad \text{กับ} \quad H_a: w \in W_2$$

ในเมื่อ W_1 และ W_2 เป็น 2 เซท แต่ละเซทประกอบด้วยจุดมากกว่าหนึ่งจุดถ้าเป็นแบบไม่ต่อเนื่อง หรือประกอบด้วยช่วงถ้าเป็นแบบต่อเนื่อง และ $W_1 \cap W_2 = \phi$ และ $W = W_1 \cup W_2$ โดยเฉพาะ ถ้า $W_1 = [w_0, \infty)$ และ $W_2 = (-\infty, w_0)$ สมมติฐานที่จะทดสอบอาจจะกล่าวไว้เป็น

$$H_0: w \geq w_0 \quad \text{กับ} \quad H_a: w < w_0$$

ให้ $A = \{a_1, a_2\}$ เป็นกลุ่มทางเลือก เมื่อ a_1 เป็นทางเลือก "ยอมรับ H_0" และ a_2 เป็นทางเลือก "ปฏิเสธ H_0" หรือยอมรับ H_a นั่นเอง สมมติว่าเราพิจารณาตัวอย่างสุ่ม $X_1, X_2, \ldots, X_n$ จากการแจกแจงปกติที่ทราบความเที่ยงตรง h_0 แล้วเราจะแสดงว่า แบบทดสอบอัตราส่วนน่าจะเป็นที่หาได้มาแล้วนั้นเหมาะกับสมมติฐานที่กล่าวไว้ข้างบนนี้ ให้ $\mathcal{T}$ เป็นกลุ่มของแบบทดสอบ d ทั้งหมดที่นิยามไว้เป็น

$$
\begin{aligned}
d(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= a_1 \quad \text{ถ้า } \bar{x} > c \\
&= a_2 \quad \text{ถ้า } \bar{x} < c,
\end{aligned}
$$

และจะไม่แตกต่างกันระหว่าง a_1 และ a_2 ถ้า $\bar{x} = c$ เราจะแสดงว่า $\mathcal{T}$ เป็นกลุ่มของกฏการตัดสินใจที่เหมาะทั้งหมดสำหรับสมมติฐานข้างบนนั้น จากความจริงที่ว่ากฏการตัดสินใจที่เหมาะทุกกฏจะเป็นกฏตัดสินใจแบบเบยส์ที่มีการแจกแจงน่าจะเป็นก่อนทดลอง และจากผลในทฤษฎี 2 จะได้ว่ากลุ่ม $\mathcal{T}$ จะให้แบบทดสอบอัตราส่วนน่าจะเป็นทั้งหมด เราสามารถเลือกแบบทดสอบที่เหมาะสมจากกลุ่มนี้

<u>ทฤษฎี</u> 3 ให้ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากการแจกแจงปกติที่ทราบความเที่ยงตรง h_0 แล้วกลุ่ม $\mathcal{T}$ ของแบบทดสอบทั้งหมดที่นิยามไว้ต่อไปนี้จะเหมาะสม

$$
\begin{aligned}
d(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= a_1 \quad \text{ถ้า } \bar{x} > c \\
&= a_2 \quad \text{ถ้า } \bar{x} < c
\end{aligned}
$$

ทฤษฎีนี้กล่าวให้ชัดได้ว่า "ทุกแบบทดสอบใน $\mathcal{T}$ จะเหมาะสม และทุกแบบทดสอบที่เหมาะสมก็จะอยู่ใน $\mathcal{T}$" ทฤษฎีนี้ใช้ได้กับการสุ่มแบบทวินาม (Binomial Sampling) ด้วย สำหรับสมมติฐาน $H_0: w \geq w_0$ กับ $H_a: w < w_0$ นั้นยาก (ในเชิงคณิตศาสตร์) ที่จะได้กลุ่ม $\mathcal{T}$ เช่นนั้น ถ้าตัวอย่างไม่ได้สุ่มจากการแจกแจงปกติ หรือทวินาม เหตุผลที่จะได้เมื่อตัวอย่างเลือกจากการแจกแจงปกติ และทวินามนั้นก็คือ แบบทดสอบอัตราส่วนน่าจะเป็นจะไม่มีผลกระทบจากค่าบางค่าของ w_1 และ w_2 เมื่อยากที่จะได้กลุ่มเหมาะสมของแบบทดสอบ แล้วจำเป็นที่จะต้องหาแบบทดสอบที่มีเหตุผลซึ่งปกติจะไม่เหมาะสม เรามีวิธีการ 2 วิธี ที่จะหาตัวแบบทดสอบที่มีเหตุผล วิธีหนึ่งก็คือแบบทดสอบทั่วไปของแบบทดสอบอัตราส่วนน่าจะเป็น ซึ่งนิยามไว้ดังนี้

<u>นิยาม</u> 2 ให้ $H_0 : w \in W_1$ กับ $H_a : w \in W_2$ เป็นปัญหาการทดสอบที่มีสมมติฐานแบบผสม สมมติว่าเราพิจารณาตัวอย่างสุ่ม $x_1, x_2, .., x_n$ ให้ $p_w(x_1, x_2, .., x_n)$ เป็นฟังก์ชั่นน่าจะเป็นของ $w \in W_i$ $(i=1,2)$ แล้วอัตราส่วน

$$\lambda(x_1, x_2, .., x_n; W_1, W_2) = \frac{\max_{w \in W_1} p_w(x_1, x_2, .., x_n)}{\max_{w \in W_2} p_w(x_1, x_2, .., x_n)}$$

เรียกว่า อัตราส่วนน่าจะเป็นทั่วไป (Generalized Likelihood Ratio) แบบทดสอบ $d^*(x_1, x_2, .., x_n)$ สำหรับที่จะยอมรับ H_0 (เลือกทางเลือก a_1) นั้นเรียกว่า แบบทดสอบอัตราส่วนน่าจะเป็นทั่วไป ถ้านิยามไว้ว่า

$$\begin{aligned} d^*(x_1, x_2, .., x_n) &= a_1 \quad \text{ถ้า} \quad \lambda(x_1, x_2, .., x_n; W_1, W_2) > k \\ &= a_2 \quad \text{ถ้า} \quad \lambda(x_1, x_2, .., x_n; W_1, W_2) < k \end{aligned}$$

และจะไม่แตกต่างกันระหว่าง a_1 และ a_2 ถ้า $\lambda(x_1, x_2, .., x_n) = k$ สำหรับบางค่าของ k

การพิจารณาค่าของ k อาจจะยาก วิธีหนึ่งที่ใช้พิจารณาคือ สมมติว่าตัวอย่างเลือกจากประชากรแบบไม่ต่อเนื่อง และค่าสูงสุดของ $p_w(x_1, x_2, .., x_n)$ สำหรับ $w \in W_1$ และ $w \in W_2$ จะมีได้เมื่อ $w = w^* \in W_1$ และ $w = \bar{w} \in W_2$ ตามลำดับ จากฟังก์ชั่นเสียโอกาส L เราพิจารณา $L(a_1, \bar{w})$ และ $L(a_2, w^*)$ ให้ $p(w^*)$ และ $p(\bar{w})$ เป็นการแจกแจงก่อนทดลองของ w^* และ $\bar{w}$ ตามลำดับ แล้วอัตราส่วน

$$k = L(a_1, \bar{w})\, p(\bar{w}) / L(a_2, w^*)\, p(w^*)$$

ก็จะหาได้ พิจารณาตัวอย่างของผู้จัดการร้านซื้อกล้วย ในตัวอย่างนี้กลุ่มสภาวการณ์ W จะเป็น

$$W = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$$

เมื่อ w_1, w_2, w_3, w_4 และ w_5 แทนเปอร์เซนต์ของเสีย 5, 10, 20, 30, และ 70 ตามลำดับ และความน่าจะเป็นก่อนทดลองแสดงไว้ดังนี้

<u>ตาราง</u> 5 ความน่าจะเป็นก่อนทดลอง

W	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5
p	.4	.25	.2	.1	.05

สมมติผู้จัดการสนใจทดสอบสมมติฐาน

$$H_0: \ w \in W_1 = \{w_1, \ w_2\}$$
$$H_a: \ w \in W_2 = \{w_3, \ w_4, \ w_5\}$$

ถ้าเขาสุ่มตัวอย่างสุ่มขนาด 3 หรือ X_1, X_2, X_3 จากการแจกแจงทวินาม และสังเกตจำนวนของเสีย ฟังก์ชันน่าจะเป็นของผลทดลอง แสดงได้ต่อไปนี้

<u>ตาราง</u> 6 ฟังก์ชันน่าจะเป็นของผลทดลองจากตัวอย่างสุ่ม

W \ s	0	1	2	3
w_1	.8574	.1354	.0072	.0001
w_2	.7290	.2430	.0270	.0010
w_3	.5120	.3840	.0960	.0080
w_4	.3430	.4410	.1890	.0270
w_5	.0270	.1890	.4410	.3430

ถ้าผู้จัดการสังเกตว่าตัวอย่างมีของเสียเป็น 2 หน่วย แล้วเราจะได้จากตาราง 6 ว่า

$$\max_{w \in W_1} p_w(2) / \max_{w \in W_2} p_w(2) = .0270/.4410 \quad \text{เมื่อ} \sum X_i = 2$$

เพราะฉะนั้น $\lambda(x_1, x_2, .., x_n; W_1, W_2) = .0270/.4410 = .06$

โดยที่ค่าสูงสุดของความน่าจะเป็นเกิดขึ้นเมื่อ w $w_2 \in W_1$ และ w $w_5 \in W_2$ ค่าเสียโอกาสที่จะยอมรับ H_0 (เลือกทางเลือก a_1) และปฏิเสธ H_0 (เลือก a_2) ภายใต้สภาวการณ์ W_1 และ W_2 ตามลำดับ นั้นกำหนดไว้ด้วย

$$L(a_1, w_5) = 80 \quad \text{และ} \quad L(a_2, w_2) = 1360$$

เพราะฉะนั้น $L(a_1, w_5)\, p(w_5) / L(a_1, w_2)\, p(w_2) = 80(.05)/1360(.25)$ $= .01$ ดังนั้น $\lambda(x_1, x_2, .., x_n; W_1, W_2) > k = .01$ นั่นคือผู้จัดการยอมรับ H_0

วิธีการที่สองที่จะหาตัวแบบทดสอบที่มีเหตุผลนั้นได้ชื่อว่า วิธีของเขตที่ไม่แตกต่างกัน (Indifferewee zone approach) ตามวิธีการนี้เราเลือกช่วง (w_2, w_1) เกี่ยวกับ w_0 ที่มีความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนของการตัดสินใจผิดให้น้อยที่สุด เพื่อที่จะเกี่ยวข้องกับ

ความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนสำหรับ w ซึ่งอยู่นอกช่วงนั้น ช่วงนี้เรียกว่าเซตที่ไม่แตกต่างกัน หรือกล่าวได้ว่า เรานิยามปัญหาการทดสอบ

$$H_0^*: w = w_1 \quad \text{กับ} \quad H_a^*: w = w_2 \ (w_1 > w_2)$$

และจะได้แบบทดสอบอัตราส่วนน่าจะเป็น d^* ซึ่งขึ้นอยู่กับประจักษ์พยานของตัวอย่าง เราใช้ d^* เพื่อทดสอบปัญหาเดิมของเรา นั่นคือ

$$H_0: w \geq w_0 \quad \text{กับ} \quad H_a: w < w_0$$

ถ้า d^* ให้ความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนน้อยสำหรับ $H_0: w = w_1$ และ $H_a: w = w_2$ แล้วเราสามารถหวังได้ว่ามันจะให้ความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนภายนอกเซตไม่แตกต่างกันนี้น้อย

ทั้งสองวิธีการนี้จะให้แบบทดสอบที่มีเหตุผล แต่จากการวิเคราะห์ทางคณิตศาสตร์ แบบทดสอบอัตราส่วนน่าจะเป็นทั่วไปจะหาได้ยากกว่าวิธีของเซตที่ไม่แตกต่างกัน อย่างไรก็ตามโดยทั่วไปอัตราส่วนน่าจะเป็นทั่วไปนั้นจะให้แบบทดสอบที่ดีกว่าเมื่อตัวอย่างขนาดโต ในทำนองเดียวกันจะมีความไม่แจ้งชัดในการเลือกช่วงเฉพาะสำหรับเซตที่ไม่แตกต่างกัน ถึงแม้ว่าวิธีนี้ง่ายที่จะนำมาใช้ จุดใหญ่ในการเลือกช่วงก็คือความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนนอกช่วงต้องน้อย เพราะฉะนั้นถ้าเราพบช่วงที่ให้ความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนน้อยกว่าวิธีอื่น แล้วเราใช้ช่วงนี้เป็นเซตที่ไม่แตกต่าง

6. <u>แบบทดสอบอื่น ๆ</u> (Some Other Tests)

ที่กล่าวมาเราสมมติว่ามีฟังก์ชันค่าเสียโอกาสใน $A \times W$ แต่บางปัญหาเราอาจจะไม่ทราบแบบฟอร์มของฟังก์ชันค่าเสียโอกาส ในสถานการณ์แบบนี้เราไม่สามารถประยุกต์แบบทดสอบใด ๆ ที่กล่าวมาแล้ว อย่างไรก็ตามเรามีทฤษฎีทดสอบสมมติฐานแบบคลาสสิคที่จะเอื้ออำนวยแบบทดสอบให้แก่แต่ละปัญหาการทดสอบ แบบทดสอบทั้งหมดตามทฤษฎีคลาสสิคนั้นพัฒนาควบคู่กับความสำคัญของการกระทำความคลาดเคลื่อนประเภท 1 และ 2 ในทางตรงกันข้ามจะมีแบบทดสอบบางอย่างที่พัฒนามาจากพื้นฐานของการแจกแจงน่าจะเป็นที่ปรับปรุงแล้ว เราจะอธิบายการสร้างแบบทดสอบนี้

ลองพิจารณาปัญหาการทดสอบที่มีสมมติฐานว่างเปล่า และสมมติฐานรองเป็นแบบเชิงเดี่ยว นั่นคือ

$$H_0: w = w_1, \quad H_a: w = w_2$$

ให้ $x_1, x_2, .., x_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มขนาด n และให้ $p_{w_j}(x_1, x_2, .., x_n)$ เป็นฟังก์ชั่นน่าจะเป็นของ w_j $(j=1,2)$ เมื่อ $X_i = x_i$ $(i=1,2,..,n)$ สมมติให้ความน่าจะเป็นก่อนทดลองของ w_1 และ w_2 เป็น $p(w_1)$ และ $p(w_2)$ แล้วเราคำนวณความน่าจะเป็นที่ปรับปรุงได้เป็น $p(w_1/x_1, x_2, .., x_n)$ และ $p(w_2/x_1, x_2, .., x_n)$ กำหนดอัตราส่วน

$$K_{12} = p(w_1/x_1, x_1, .., x_n)/p(w_2/x_1, x_2, .., x_n)$$

สำหรับ $j = 1, 2$

$$p(w_j/x_1, x_2, .., x_n) \propto p_{w_j}(x_1, x_2, .., x_n)\, p(w_j)$$

เราจะได้ว่า

$$K_{12} = p_{w_1}(x_1, x_2, .., x_n)\, p(w_1)/p_{w_2}(x_1, x_2, .., x_n)\, p(w_2)$$

อัตราส่วนนี้เรียกว่า โอกาสหลังทดลอง (Posterior odds) ที่จะชอบ H_0 เราจะเห็นได้ว่าโอกาสหลังทดลองเป็นผลคูณของโอกาสก่อนทดลอง (Prior odds) $p(w_1)/p(w_2)$ กับอัตราส่วนน่าจะเป็น $p_{w_1}(x_1, x_2, .., x_n)/p_{w_2}(x_1, x_2, .., x_n)$

จากตัวอย่างที่เรามี

$$H_0: w = w_1 = .20 \quad \text{กับ} \quad H_a: w = w_2 = .50$$

ฟังก์ชั่นน่าจะเป็นนั้นกำหนดไว้ในตาราง 4 สมมติว่าผู้จัดการไม่พบของเสียเลย แล้วโอกาสหลังทดลองที่จะชอบ H_0 กำหนดไว้ว่า

$$K_{12} = (.64)(.6)/(.25)(.4) = 3.84$$

ดังนั้นประจักษ์พยานจากตัวอย่างจะเปลี่ยนแปลงโอกาสก่อนทดลองจาก $(.6)/(.4)$ ไปเป็น 3.84 เพื่อที่จะเห็นด้วยกับสมมติฐานว่างเปล่า H_0 นั่นคือกล่องนั้นควรมีของเสียประมาณ 20 เปอร์เซนต์