ทฤษฎีตัดสินใจทางสถิติที่อาศัยการสุ่มตัวอย่าง เมื่อค่าสังเกตจากตัวอย่างเป็นแบบต่อเนื่อง

Statistical Decision Theory with Sampling when Sample Observations are Continuous

การวิเคราะห์เพื่อปรับปรุงการแจกแจงก่อนทดลองในเมื่อค่าสังเกตจากตัวอย่างเป็นแบบต่อเนื่องนี้จะเป็นแบบเดียวกับที่กล่าวมาในกรณีที่ค่าสังเกตจากตัวอย่างเป็นแบบไม่ต่อเนื่อง

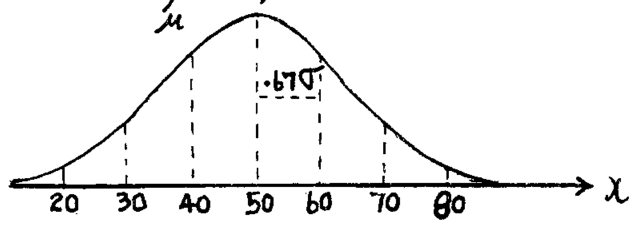
1. <u>ฟังก์ชั่นหนาแน่นน่าจะเป็นก่อนทดลองเป็นแบบปกติ</u> (Normal Prior Probability Density Function)

ลองพิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้ — บริษัทผลิตเครื่องสำอางพิจารณาที่จะเปลี่ยนแปลงกล่องบรรจุผลิตภัณฑ์ของสุภาพสตรี บริษัทเชื่อว่าการเปลี่ยนแปลงกล่องบรรจุจะทำให้เพิ่มปริมาณการขายของสินค้า สมมติว่าบริษัทได้ส่งสินค้าไปขาย 1000 แห่ง และหวังว่าจะได้กำไรหน่วยละ 20 บาท และสมมติว่าค่าใช้จ่ายในการเปลี่ยนแปลงกล่องบรรจุประมาณ 500000 บาท

ผู้จัดการไม่สามารถทำนายการเปลี่ยนแปลงการขายที่แท้จริงได้ในเมื่อเปลี่ยนกล่องบรรจุใหม่ แต่คาดว่าจะขายได้เฉลี่ยแห่งละ 50 หน่วย และเขาคิดว่าการเปลี่ยนแปลงการขายเฉลี่ยต่อร้านจะน้อยกว่า 40 หรือมากกว่า 60 หน่วย ด้วยความน่าจะเป็น .50

ให้ W เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่แทนการเปลี่ยนแปลงการขาย และสมมติว่า W มีฟังก์ชั่นหนาแน่นน่าจะเป็นก่อนทดลองแบบปกติ ดังนั้นจากข้อมูลข่าวสารที่กล่าวมาจะได้ว่า W มีการแจกแจงปกติที่มีค่าเฉลี่ยของการขายเป็น 50 และ $P(W<40) = P(W>60) = .25$ และ $P(40 \leq W \leq 60) = .50$ นั่นคือ $.67\sigma = 10$ หรือ $\sigma = 15$ โดยที่ฟังก์ชั่นหนาแน่นน่าจะเป็นนั้นเป็นแบบปกติใด ๆ จึงได้

$$\int_{\mu}^{\mu+.67\sigma} N(x;\mu,\sigma^2)\,dx = .25$$



ถ้าบริษัทสนใจที่จะพิจารณากล่องบรรจุเครื่องสำอาง และให้ a_1 เป็นทางเลือก "ไม่เปลี่ยนกล่องบรรจุ" และ a_2 เป็น "เปลี่ยนกล่องบรรจุ" ดังนั้นกลุ่มทางเลือก A ของปัญหาคือ $A = \{a_1, a_2\}$ ในทำนองเดียวกัน กลุ่มสภาวการณ์นอกบังคับ W กำหนดไว้โดย $(-\infty, \infty)$ ฟังก์ชั่นกำไรของทางเลือก a_1 และ a_2 หาได้เป็น

$$
\begin{aligned}
u(a_1, w) &= 0 \\
u(a_2, w) &= -500000 + 1000(20)w \\
&= -500000 + 20000w
\end{aligned}
$$

จากสองสมการเราจะได้จุดคุ้มทุน $w_0 = 25$ ซึ่งหมายความว่า จะได้กำไรเมื่อเปลี่ยนกล่องบรรจุใหม่ ถ้าจำนวนขายในแต่ละร้านมากกว่า 25 หน่วย ในทางตรงกันข้าม ถ้าการขายต่ำกว่า 25 หน่วย ก็จะไม่เปลี่ยนกล่องบรรจุ เพราะฉะนั้นฟังก์ชั่นเสียโอกาสของ a_1 และ a_2 จะเป็น

$$
\begin{aligned}
L(a_1, w) &= 0 && -\infty < w \leq 25 \\
&= 20(w - 25) && 25 < w < \infty \\
L(a_2, w) &= 20(25 - w) && -\infty < w \leq 25 \\
&= 0 && 25 < w < \infty
\end{aligned}
$$

มาตราวัดแบบเบยส์ของ a_1 และ a_2 ตามฟังก์ชั่นหนาแน่นน่าจะเป็นก่อนทดลองแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ย 50 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 15 จะคำนวณได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
B(a_1) &= 20\int_{25}^{\infty}(w - 25)\,N(w;\ 50,\ 15)\,dw \\
B(a_2) &= 20\int_{-\infty}^{25}(25 - w)\,N(w;\ 50,\ 15)\,dw
\end{aligned}
$$

เราสามารถแสดงได้ว่า $B(a_2) < B(a_1)$ ดังนั้นบริษัทควรจะเปลี่ยนแปลงกล่องบรรจุเครื่องสำอางใหม่ ทางเลือกที่ดีที่สุดขึ้นอยู่กับความคิดเห็นของผู้จัดการในเทอมของฟังก์ชั่นหนาแน่นน่าจะเป็นก่อนทดลอง

สมมติว่าผู้จัดการต้องการข้อมูลข่าวสารเพิ่มเติมเกี่ยวกับการเปลี่ยนแปลงจำนวนขาย (w) ก่อนที่จะทำการตัดสินใจใด ๆ เขาจึงไปปรึกษาสำนักงานที่ปรึกษา และสำนักงานที่ปรึกษาได้ทดลองส่งสินค้าที่บรรจุกล่องใหม่ไปขายตามร้านค้า 100 แห่ง ได้ข้อมูลเกี่ยวกับการ

ขายซึ่งมีการแจกแจงแบบปกติ และมีค่าเฉลี่ย $\bar{X}$ และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน s เป็น 55 และ 18 หน่วย ดังนั้นเราจะได้ความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของ $\bar{X}$ หรือ $s_{\bar{X}}$ เป็น

$$s_{\bar{X}} = s/\sqrt{n} = 18/\sqrt{100} = 1.8$$

ในการวิเคราะห์นี้เราสามารถพูดได้ว่า ตัวอย่างสุ่มจากการแจกแจงปกติที่มีค่าเฉลี่ย 55 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 1.8 จะให้การแจกแจงน่าจะเป็นที่ปรับปรุงเป็นแบบปกติด้วย โดยมีค่าเฉลี่ย μ' และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน σ'

$$\mu' = \frac{n\bar{X}/s^2 + \mu/\sigma^2}{n/s^2 + 1/\sigma^2}, \qquad \sigma' = \sqrt{n/s^2 + 1/\sigma^2}$$

เมื่อ $n = 100$, $\mu = 50$, $\sigma^2 = 15^2$, $\bar{X} = 55$, และ $s^2 = 18^2$ เราจะได้

$$\mu' = \frac{100(55)/18^2 + 50/15^2}{100/18^2 + 1/15^2} = 54.95$$

$$\sigma' = \sqrt{100/18^2 + 1/15^2} = 0.56$$

สำนักงานที่ปรึกษาใช้ฟังก์ชันหนาแน่นน่าจะเป็นแบบปกติที่ปรับปรุง ซึ่งมีค่าเฉลี่ยเป็น 54.95 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 0.56 ไปหาทางเลือกที่เหมาะสม โดยกำหนดข้อมูลข่าวสารจากตัวอย่างให้ ดังนั้น

$$B(a_1/X) = 20\int_{25}^{\infty}(w - 25)\,N(w;\ 54.95,\ .56)\,dw$$

และ

$$B(a_2/X) = 20\int_{-\infty}(25 - w)\,N(w;\ 54.95,\ .56)\,dw$$

เราจะได้อีกว่า $B(a_2/X) < B(a_1/X)$ ซึ่งหมายความว่าประจักษ์พยานจากตัวอย่างได้ชี้ให้บริษัทเปลี่ยนแปลงกล่องบรรจุเครื่องสำอางใหม่

เราจะสังเกตได้ว่าค่าเฉลี่ยของการแจกแจงที่ปรับปรุงนั้นจะใกล้ค่าเฉลี่ยของค่าสังเกตจากตัวอย่าง มากกว่าค่าเฉลี่ยของการแจกแจงก่อนทดลอง ผลที่ได้เป็นเช่นนี้ก็เนื่องจากเหตุผลที่ว่า — จากการคำนวณ μ' เราจะเห็นว่าน้ำหนักถ่วง $(100/18^2)$ ของค่าเฉลี่ยที่ปรับปรุงจะมากกว่าน้ำหนักถ่วง $(1/15^2)$ ของค่าเฉลี่ยก่อนทดลอง น้ำหนักถ่วงอันแรกกำหนดให้แก่ค่าเฉลี่ยของตัวอย่าง และอันหลังกำหนดให้แก่ค่าเฉลี่ยก่อนทดลอง เพราะฉะนั้นเราจึงหวังไว้ว่าข้อมูลข่าวสารตัวอย่างจะมีอิทธิพลต่อค่าเฉลี่ยที่ปรับปรุงมากกว่าข้อมูลข่าวสารก่อนทดลอง

2. <u>ตัวสถิติพอเพียง</u>

ให้ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่องที่มีฟังก์ชันน่าจะเป็น $f(\cdot/w)$, $w \in W$ ตัวสถิติ $T = T(X)$ จะเรียกว่าตัวสถิติพอเพียง ถ้าการแจกแจงเงื่อนไขของ X กำหนดไว้ว่า $T=t$ นั้นเป็นอิสระกับ w ในทำนองเดียวกัน ทฤษฎี 2 และทฤษฎีตัวประกอบนั้นจะเป็นจริงสำหรับตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่องด้วย ดังได้กล่าวมาแล้ว เราลองพิจารณาตัวอย่างของการหาตัวสถิติพอเพียง

พิจารณาฟังก์ชันหนาแน่นน่าจะเป็นแบบปกติของ X ที่มีพารามิเตอร์ μ และ σ^2

$$f(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}; \quad \begin{matrix} -\infty < x < \infty \\ -\infty < \mu < \infty \end{matrix} \quad \sigma > 0$$

กำหนด $\eta = 1/\sigma^2$ แล้วแทนในสมการข้างบนนี้ เราจะได้

$$f(x;\mu,\eta) = \sqrt{\frac{\eta}{2\pi}}\, e^{-\frac{\eta}{2}(x-\mu)^2}$$

จากนิยามของ η เราจะเห็นว่าถ้า σ^2 สูงขึ้น แล้ว η จะลดลง หรือในทางกลับกันคือ ถ้า σ^2 ลดลง η จะสูงขึ้น โดยที่ σ^2 แสดงถึงมาตราวัดของการกระจัดกระจายสำหรับการแจกแจงปกติ η อธิบายมาตราวัดของการเกาะกลุ่ม (concentration) ของการแจกแจงปกติรอบค่าเฉลี่ยของมัน และ η นี้จะเรียกว่าความเที่ยงตรง (precision) ของการแจกแจงปกติ คุณสมบัติทั้งหมดที่อธิบายในเทอมของ σ^2 อาจจะแสดงได้ในเทอมของ η เช่นเดียวกัน ในเรื่องนี้เราจะใช้ η แทน σ^2 ในการแสดงฟังก์ชันหนาแน่นน่าจะเป็นของตัวแปรเชิงสุ่มแบบปกติ เหตุที่ใช้ความเที่ยงตรงแทนความแปรปรวนก็เพราะการวิเคราะห์จะง่าย และสะดวกกว่า

<u>ตัวอย่าง</u> ให้ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากการแจกแจงปกติที่มีพารามิเตอร์ μ และ η สมมติว่าค่าของ η นั้นทราบว่าเป็น η_0 แล้วฟังก์ชันน่าจะเป็นของตัวอย่าง เมื่อ $\eta = \eta_0$ และเมื่อ $X_i = x_i (i=1,2,\ldots,n)$ กำหนดให้ไว้ด้วยความสัมพันธ์

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,\ldots,x_n/\mu) &= \prod_{i=1}^{n} f(x_i/\mu) \\ &= \prod_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{\eta_0}{2\pi}}\, e^{-\frac{\eta_0}{2}(x_i-\mu)^2} \\ &= \left(\frac{\eta_0}{2\pi}\right)^{n/2} e^{-\frac{\eta_0}{2}\Sigma(x_i-\mu)^2} \end{aligned}$$

กำหนด $T(X_1, X_2, .., X_n) = \Sigma X_i/n = \bar{X}$ แล้ว

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 = \Sigma(X_i-\bar{X})^2 + n(\bar{X}-\mu)^2$$

เพราะฉะนั้น
$$f(X_1, X_2, .., X_n/w) = \left(\frac{\eta_0}{2\pi}\right)^{n/2} e^{-\frac{\eta_0}{2}\Sigma(X_i-\bar{X})^2 - \frac{n\eta_0}{2}(\bar{X}-\mu)^2}$$
$$= \left(\frac{\eta_0}{2\pi}\right)^{n/2} e^{-\frac{\eta_0}{2}\Sigma(X_i-\bar{X})^2} e^{-\frac{n\eta_0}{2}(\bar{X}-\mu)^2}$$

ให้
$$h(X_1, X_2, .., X_n, \eta_0) = \left(\frac{\eta_0}{2\pi}\right)^{n/2} e^{-\frac{\eta_0}{2}\Sigma(X_i-\bar{X})^2}$$
$$g(t/\mu) = e^{-\frac{n\eta_0}{2}(\bar{X}-\mu)^2}$$

เราจะเห็นได้ว่า $h(X_1, X_2, .., X_n, \eta_0)$ ไม่เกี่ยวข้องกับ μ ซึ่งเป็นพารามิเตอร์ไม่ทราบค่า และ $g(t/\mu)$ ขึ้นอยู่กับค่าสังเกตจากตัวอย่างทางตัวสถิติ T ดังนั้น

$$f(X_1, X_2, .., X_n/\mu) = h(X_1, X_2, .., X_n, \eta_0)\, g(t/\mu)$$

นั่นคือ T เป็นตัวสถิติพอเพียงของ $f(\cdot/\mu)$

<u>ตัวอย่าง</u> ให้ $X_1, X_2, .., X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากการแจกแจงเอกซโพเนนเชียลที่มีพารามิเตอร์ α, $\alpha > 0$ แล้วฟังก์ชันน่าจะเป็นของตัวอย่าง $f(X_1, X_2, .., X_n/\alpha)$ จะเป็น

$$f(X_1, X_2, .., X_n/\alpha) = \prod_{i=1}^{n} \alpha e^{-\alpha X_i} ;\ X_i > 0, \alpha > 0$$
$$= \alpha^n e^{-\alpha \Sigma X_i}$$

กำหนด $T(X_1, X_2, .., X_n) = \Sigma X_i = t$ และกำหนด

$$h(X_1, X_2, .., X_n) = 1, \quad g(t/\alpha) = \alpha^n e^{-\alpha t}$$

แล้ว $h(X_1, X_2, .., X_n)$ ไม่เกี่ยวข้องกับ α และ $g(t/\alpha)$ แต่ขึ้นอยู่กับค่าสังเกตจากตัวอย่างทาง $T=t$ และ

$$f(X_1, X_2, .., X_n/\alpha) = h(X_1, X_2, .., X_n)\, g(t/\alpha)$$

เพราะฉะนั้น T เป็นตัวสถิติพอเพียงของ $f(\cdot/\alpha)$

ต่อไปเราจะปรับปรุงการแจกแจงน่าจะเป็นก่อนทดลองของ W เมื่อตัวอย่างสุ่มมาจากการแจกแจงแบบปกติ, เอกซโพเนนเชียล, และยูนิฟอร์ม

3. <u>การแจกแจงน่าจะเป็นที่ปรับปรุง เมื่อตัวอย่าง เลือกมาจากการแจกแจงปกติ</u>

สมมติให้ความเที่ยงตรง h ของการแจกแจงปกติทราบค่าว่าเป็น h_0 และพิจารณาตัวอย่างสุ่ม $X_1, X_2, .., X_n$ จากการแจกแจงปกติที่มีค่าเฉลี่ยที่ไม่ทราบค่า μ และความเที่ยงตรงที่ทราบค่า h_0 ฟังก์ชันน่าจะเป็น $f(x_1, x_2, .., x_n/w)$ เมื่อ $X_i = x_i (i=1,2,..,n)$ สามารถแสดงได้เป็น

$$f(x_1, x_2, .., x_n/w) \propto e^{-\frac{nh_0}{2}(w-\bar{x})^2}$$

สมมติว่าการแจกแจงน่าจะเป็นก่อนทดลอง p ของ w เป็นแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ย μ และความเที่ยงตรง η นั่นคือ

$$p(w; \mu, \eta) \propto e^{-\frac{\eta}{2}(w-\mu)^2}$$

แล้วการแจกแจงน่าจะเป็นที่ปรับปรุง $p(w/x_1, x_2, .., x_n)$ ของ w กำหนดไว้โดย

$$\begin{aligned} p(w/x_1, x_2, .., x_n) &\propto e^{-\frac{nh_0}{2}(w-\bar{x})^2} e^{-\frac{\eta}{2}(w-\mu)^2} \\ &\propto e^{-\frac{1}{2}\{nh_0(w-\bar{x})^2 + \eta(w-\mu)^2\}} \end{aligned}$$

อย่างไรก็ตาม $nh_0(w-\bar{x})^2 + \eta(w-\mu)^2 = (nh_0+\eta)(w-\mu')^2 + k(\bar{x}-\mu)^2$

ในเมื่อ $\mu' = \dfrac{nh_0\bar{x} + \eta\mu}{nh_0 + \eta}$ และ $k = \dfrac{nh_0\eta}{nh_0+\eta}$

จงสังเกตว่าเทอมที่สองของสมการข้างบนนี้ไม่เกี่ยวข้องกับ w เราจึงได้ความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$p(w/x_1, x_2, .., x_n) \propto e^{-\frac{nh_0+\eta}{2}(w-\mu')^2}$$

จากความสัมพันธ์นี้เราจะเห็นว่าการแจกแจงน่าจะเป็นที่ปรับปรุงของ w จะเป็นการแจกแจงปกติอีก โดยมีค่าเฉลี่ย μ' และความเที่ยงตรง $nh_0 + \eta$ ในเมื่อ

$$\mu' = \frac{nh_0\bar{x} + \eta\mu}{nh_0 + \eta}$$

<u>ทฤษฎี</u> 1 สมมติให้การแจกแจงน่าจะเป็นก่อนทดลอง p ของ w เป็นการแจกแจงปกติที่มีค่าเฉลี่ย μ และความเที่ยงตรง η โดยที่ $-\infty < \mu < \infty$ และ $\eta > 0$ ให้ $X_1, X_2, ..,$ X_n เป็นตัวอย่างสุ่มจากการแจกแจงปกติที่มีค่าเฉลี่ยไม่ทราบค่า w และความเที่ยงตรงที่ทราบ

ค่า h_0 แล้วการแจกแจงน่าจะเป็นที่ปรับปรุง $p(w/x_1, x_2, \ldots, x_n)$ เมื่อ $X_i = x_i (i=1,2,\ldots,n)$ มีการแจกแจงปกติที่มีค่าเฉลี่ย μ' และความเที่ยงตรง $nh_0 + \eta$ ในเมื่อ

$$\mu' = \frac{nh_0\bar{x} + \eta\mu}{nh_0 + \eta}$$

สำหรับค่า μ' อาจเขียนใหม่ได้เป็น

$$\mu' = \frac{nh_0}{nh_0+\eta}\bar{x} + \frac{\eta}{nh_0+\eta}\mu$$

ซึ่งเราจะเห็นว่าค่าเฉลี่ย μ' ของการแจกแจงที่ปรับปรุงของ w เป็นค่าเฉลี่ยถ่วงน้ำหนักของค่าเฉลี่ยของตัวอย่าง $\bar{x}$ กับค่าเฉลี่ย μ ของการแจกแจงก่อนทดลองของ w เช่นเดียวกันสำหรับ h_0 และ η ที่กำหนดไว้ เราสามารถอ้างอิงหรืออนุมานได้ว่าขณะที่ขนาดตัวอย่าง n โตขึ้น แล้วค่าเฉลี่ยของการแจกแจงที่ปรับปรุงจะเข้าใกล้ค่าเฉลี่ยจากตัวอย่าง $\bar{x}$ และนั่นก็คือน้ำหนักถ่วงที่กำหนดให้แก่ $\bar{x}$ จะมากกว่า ในทำนองเดียวกัน สำหรับตัวอย่าง n ที่กำหนดให้ ถ้าความเที่ยงตรง h_0 ของค่าสังเกตจากตัวอย่างยิ่งมาก แล้วน้ำหนักถ่วงที่กำหนดให้แก่ $\bar{x}$ ก็จะยิ่งมาก เมื่อรวมค่าสังเกตทั้งสองเข้าด้วยกัน เราก็อาจพูดได้ว่าขนาด n ยิ่งโต และความเที่ยงตรงยิ่งมาก แล้วน้ำหนักถ่วงที่กำหนดให้แก่ $\bar{x}$ ก็จะยิ่งมาก ก็เช่นเดียวกัน ความเที่ยงตรงของการแจกแจงที่ปรับปรุงของ w จะเป็นผลรวมของความเที่ยงตรงจากตัวอย่าง nh_0 และความเที่ยงตรง η ของการแจกแจงก่อนทดลองของ w เพราะฉะนั้นความเที่ยงตรงของการแจกแจงที่ปรับปรุงต้องมากกว่าความเที่ยงตรงของการแจกแจงก่อนทดลอง มันสามารถจะเพิ่มขึ้นโดยการเพิ่มความเที่ยงตรง h_0 ของแต่ละค่าสังเกตจากตัวอย่าง หรือก็โดยการเพิ่มความเที่ยงตรง η ของการแจกแจงก่อนทดลอง หรือก็โดยการเพิ่มขนาดตัวอย่าง n โดยเฉพาะความเที่ยงตรงของการแจกแจงที่ปรับปรุงสามารถจะเพิ่มขึ้นเป็นจำนวน h_0 กับแต่ละค่าสังเกตจากตัวอย่างที่เลือกมาโดยไม่คำนึงถึงค่าที่สังเกตได้ของตัวอย่าง เพราะฉะนั้นเราอาจจะพูดว่าเมื่อตัวอย่างเพิ่มขึ้น ความเที่ยงตรงของการแจกแจงที่ปรับปรุงของ w จะเพิ่มขึ้น และผลที่ตามมาก็คือการแจกแจงที่ปรับปรุงจะเกาะกลุ่มรอบค่าเฉลี่ยของมันมากขึ้น ๆ

ต่อไปเราจะพิจารณาตัวอย่างสุ่ม $x_1, x_2, .., x_n$ จากการแจกแจงปกติที่ทราบค่าของค่าเฉลี่ย μ_0 และไม่ทราบค่าของความเที่ยงตรง w ฟังก์ชันน่าจะเป็น $f(x_1, x_2, .., x_n/w)$ เมื่อ $X_i = x_i (i=1,2,..,n)$ สามารถแสดงได้เป็น

$$f(x_1, x_2, .., x_n/w) \propto w^{n/2} e^{-\frac{w}{2}\Sigma(x_i-\mu_0)^2}$$

ให้ $y = (1/2)\Sigma(x_i-\mu_0)^2$ แล้ว

$$f(x_1, x_2, .., x_n/w) \propto w^{n/2} e^{-yw}$$

$$\propto g(w/\tfrac{n}{2}+1, y)$$

ในเมื่อ $g(w/\frac{n}{2}+1, y) = \frac{y}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}(yw)^{n/2} e^{-yw}, \quad w > 0$

สมมติว่าการแจกแจงน่าจะเป็นก่อนทดลองของ p ของ w เป็นแบบแกมมะ มีพารามิเตอร์ ν และ α นั่นคือ

$$p(w; \nu, \alpha) \propto w^{\nu-1} e^{-w\alpha}$$

เพราะฉะนั้นการแจกแจงน่าจะเป็นที่ปรับปรุง $p(w/x_1, x_2, .., x_n)$ เมื่อกำหนดค่าสังเกตของตัวอย่าง $x_1, x_2, .., x_n$ ให้นั้นจะได้จากความสัมพันธ์

$$p(w/x_1, x_2, .., x_n) \propto g(w/\tfrac{n}{2}+1, y)\, p(w; \nu, \alpha)$$

$$\propto g(w/\nu', \alpha')$$

ในเมื่อ $\nu' = n/2 + \nu$, $\alpha' = y + \alpha$, และ $y = (1/2)\Sigma(x_i-\mu)^2$

ดังนั้นการแจกแจงน่าจะเป็นที่ปรับปรุงของ w ก็จะเป็นแบบแกมมะอีกโดยมีพารามิเตอร์ $n/2+\nu$ และ $y+\alpha$ รูปแบบที่สมบูรณ์กำหนดไว้ดังนี้

$$p(w/x_1, x_2, .., x_n) = \frac{y+\alpha}{\Gamma(\frac{n}{2}+\nu)}\{(y+\alpha)w\}^{\frac{n}{2}+\nu-1} e^{-(y+\alpha)w}$$

ในเมื่อ $y = (1/2)\Sigma(x_i-\mu_0)^2$ เพราะฉะนั้นเราได้พิสูจน์ทฤษฎีต่อไปนี้แล้ว

<u>ทฤษฎี</u> 2 สมมติว่าการแจกแจงน่าจะเป็นก่อนทดลอง p ของ w เป็นการแจกแจงแกมมะ มีพารามิเตอร์ ν และ α โดยที่ $\nu \geq 1$ และ $\alpha > 0$ ให้ $x_1, x_2, .., x_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากการแจกแจงปกติที่ทราบค่าเฉลี่ย μ_0 และไม่ทราบความเที่ยงตรง w แล้วการแจกแจงน่าจะเป็นที่ปรับปรุงของ w ก็ยังเป็นการแจกแจงแกมมะอีก โดยมีพารามิเตอร์ ν' และ α' ในเมื่อ $\nu' = n/2 + \nu$, $\alpha' = y + \alpha$, และ $y = (1/2)\Sigma(x_i-\mu_0)^2$

4. <u>การแจกแจงน่าจะเป็นที่ปรับปรุง เมื่อตัวอย่างเลือกมาจากการแจกแจงมาตรฐานอื่น ๆ</u>

เราจะพิจารณาตัวอย่างสุ่มจากการแจกแจงเอกซ์โพเนนเชียล และยูนิฟอร์ม และปรับปรุงการแจกแจงน่าจะเป็นก่อนทดลองที่กำหนดให้ของ w ตอนแรกเราจะพิจารณาตัวอย่างสุ่มจากการแจกแจงเอกซ์โพเนนเชียล

ให้ $x_1, x_2, .., x_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากการแจกแจงเอกซ์โพเนนเชียล ที่ไม่ทราบค่าของพารามิเตอร์ w ฟังก์ชันน่าจะเป็น $f(x_1, x_2, .., x_n/w)$ เมื่อ $X_i = x_i (i=1, 2, .., n)$ กำหนดไว้เป็น

$$f(x_1, x_2, .., x_n/w) \propto w^n e^{-w\Sigma x_i}$$

กำหนดให้ $y = \Sigma x_i$ แล้ว

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, .., x_n/w) &\propto w^n e^{-wy} \\ &\propto g(w/\, n+1, y) \end{aligned}$$

ในเมื่อ $g(w/\, n+1, y)$ แจกแจงแบบแกมมะ มีพารามิเตอร์ $n+1$ และ y

สมมติว่าการแจกแจงน่าจะเป็นก่อนทดลอง p ของ w เป็นแบบแกมมะ มีพารามิเตอร์ ν และ α โดยที่ $\nu \geq 1$ และ $\alpha > 0$ เพราะฉะนั้น

$$p(w; \nu, \alpha) \propto w^{\nu-1} e^{-\alpha w}$$

จากสมการข้างบน เราสามารถคำนวณการแจกแจงน่าจะเป็นที่ปรับปรุง $p(w/x_1, x_2, .., x_n)$ เมื่อ $X_i = x_i (i=1, 2, .., n)$ ได้เป็นดังนี้

$$\begin{aligned} p(w/x_1, x_2, .., x_n) &\propto g(w/\, n+1, y)\, p(w; \nu, \alpha) \\ &\propto g(w/\nu', \alpha') \end{aligned}$$

ในเมื่อ $\nu' = n+\nu$, $\alpha' = y+\alpha$, และ $y = \Sigma x_i$ แบบฟอร์มที่สมบูรณ์ของการแจกแจงที่ปรับปรุงกำหนดไว้ดังนี้

$$p(w/x_1, x_2, .., x_n) = \frac{\alpha'}{\Gamma(\nu')} (\alpha' w)^{\nu'-1} e^{-\alpha' w}$$

การวิเคราะห์ที่กล่าวมาสรุปได้ดังทฤษฎีต่อไปนี้

<u>ทฤษฎี</u> 3 สมมติการแจกแจงน่าจะเป็นก่อนทดลองของ w เป็นแบบแกมมะ มีพารามิเตอร์ ν และ α โดยที่ $\nu \geq 1$ และ $\alpha > 0$ ให้ $x_1, x_2, .., x_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากการ

แจกแจงเอกซ์โพเนนเชียล ที่ไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ w แล้วการแจกแจงน่าจะเป็นที่ปรับปรุงของ w ก็จะเป็นแบบแกมมะอีก โดยมีพารามิเตอร์ ν' และ α' โดยที่

$$\nu' = n + \nu \ , \quad \alpha' = y + \alpha \ , \ \text{และ} \ y = \Sigma x_i$$

ทฤษฎีต่อไปจะเกี่ยวกับการปรับปรุงของการแจกแจงน่าจะเป็นก่อนทดลอง เมื่อตัวอย่างเลือกจากการแจกแจงยูนิฟอร์มในช่วง $(0,w)$ และเมื่อการแจกแจงก่อนทดลองเป็นแบบพาเรโต (Pareto) มีพารามิเตอร์ α และ β ดังกำหนดไว้ดังนี้

$$p(w;\alpha,\beta) = \frac{\alpha\beta^{\alpha}}{w^{\alpha+1}} \ ; \quad w \geq \beta, \ \alpha > 0$$

<u>ทฤษฎี</u> 4 สมมติการแจกแจงน่าจะเป็นก่อนทดลองของ w เป็นแบบพาเรโต มีพารามิเตอร์ α และ β และให้ $X_1, X_2, .., X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากการแจกแจงยูนิฟอร์ม $(0,w)$ ในเมื่อค่าของ w ไม่ทราบ แล้วการแจกแจงน่าจะเป็นที่ปรับปรุงของ w กำหนดไว้ว่า $X_i = x_i \ (i=1,2,..,n)$ จะเป็นพาเรโตอีก โดยมีพารามิเตอร์ α' และ β' ในเมื่อ

$$\alpha' = n + \alpha \ \ \text{และ} \ \ \beta' = \max(\beta, x_1, x_2, .., x_n)$$