ทฤษฎีตัดสินใจทางสถิติภายใต้ความไม่แน่นอน เมื่อทราบความน่าจะเป็นก่อนทดลอง

Statistical Decision Theory under Uncertainty when Prior Probability Function Known

1. <u>การวิเคราะห์การตัดสินใจชนิดขั้นเดียว</u> (Single-Stage Decision Analysis)

เราได้นิยาม (A, $\mathcal{W}$, U, p) ว่าเป็นตัวแบบวิเคราะห์การตัดสินใจภายใต้ความไม่แน่นอน เมื่อทราบความน่าจะเป็นก่อนทดลอง ในเมื่อ A เป็นกลุ่มทางเลือก, $\mathcal{W}$ เป็นกลุ่มสภาวการณ์, U เป็นฟังก์ชันผลตอบแทน, และ p เป็นฟังก์ชันน่าจะเป็นก่อนทดลองของ $\mathcal{W}$ นอกจากนั้นยังได้นิยามตัวแบบวิเคราะห์การตัดสินใจชนิดขั้นเดียว ต่อไปจะอธิบายถึงเทคนิคบางอย่างสำหรับพิจารณาทางเลือกที่ดีที่สุดของปัญหาตัดสินใจ ซึ่งจะแบ่งประเภทได้ดังนี้

- ปัญหาตัดสินใจชนิดสองสภาวการณ์ และสองทางเลือก
- ปัญหาตัดสินใจชนิดหลายสภาวการณ์ และสองทางเลือก
- ปัญหาตัดสินใจชนิดหลายสภาวการณ์ และหลายทางเลือก

2. <u>ปัญหาตัดสินใจชนิดสองสภาวการณ์ และสองทางเลือก</u> (Two-Action, Two-State Problems)

จะเริ่มด้วยปัญหาตัดสินใจ และจะอธิบายถึงการพิจารณาทางเลือกที่ดีที่สุด

<u>ตัวอย่าง</u> สมมติว่าผู้จัดการบริษัทกำลังพิจารณาที่จะซื้อชิ้นส่วนของเครื่องจักรจำนวน 1000 ชิ้น ที่บรรจุอยู่ในกล่องหนึ่ง จากประสบการณ์ที่ผ่านมาพบว่าชิ้นส่วนที่ใช้การไม่ได้จะมีประมาณ 20 % หรือไม่ก็ 50 %

ถ้าชิ้นส่วนแต่ละอันราคา 4 บาท และจะได้กำไรอันละ 3 บาท จากชิ้นส่วนที่ใช้การได้ สำหรับชิ้นส่วนที่ใช้การไม่ได้จะสูญเสียอันละ 4 บาท ซึ่งเป็นราคาทุนนั่นเอง

ดังนั้นถ้ามีชิ้นส่วนที่ใช้การไม่ได้ 20 % แล้วจะได้กำไรเป็น

$$1000(.80)(3) = 2400$$

ซึ่งเป็นกำไรจากการขายชิ้นส่วนที่ใช้การได้ 80 % นั้น และเขาจะสูญเสียเป็นจำนวน

$$1000(.20)(4) = 800$$

เพราะฉะนั้นจะได้กำไรสุทธิเป็น

$$2400 - 800 = 1600$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้ามีชิ้นส่วนที่ใช้การไม่ได้ถึง 50 % กำไรจะเป็น

$$1000(.50)(3) = 1500$$

และสูญเสียเป็นเงิน

$$1000(.50)(4) = 2000$$

เพราะฉะนั้นกำไรสุทธิจะเป็น

$$1500 - 2000 = -500$$

ถ้าผู้จัดการทราบจากประสบการณ์ว่า โอกาสที่สภาวการณ์ w_1 (ชิ้นส่วนที่ใช้การไม่ได้ 20 %) และ w_2 (ชิ้นส่วนที่ใช้การไม่ได้ 50 %) จะเกิดขึ้นเป็น 0.60 และ 0.40 ถ้าเราให้ $p(w_1)$ และ $p(w_2)$ เป็นความน่าจะเป็นก่อนทดลองของ w_1 และ w_2 แล้วเราจะได้ว่า

$$p(w_1) = 0.60 \quad \text{และ} \quad p(w_2) = 0.40$$

จากข้อมูลข่าวสารที่มีอยู่นี้ ผู้จัดการก็จะพบกับปัญหาที่ว่า จะซื้อหรือไม่ซื้อชิ้นส่วนเหล่านั้น

ฉะนั้นโครงสร้างของปัญหาจะเป็นดังนี้ — ให้ A เป็นกลุ่มทางเลือก

$$A = \{a_1,\ a_2\}$$

ซึ่งมี a_1 แทนทางเลือก "ไม่ซื้อ" และ a_2 แทนทางเลือก "ซื้อ" ทำนองเดียวกัน ให้ W เป็นกลุ่มสภาวการณ์

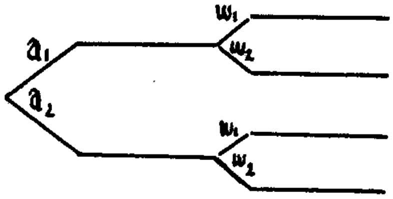
$$W = \{w_1,\ w_2\}$$

ซึ่งมี w_1 แทนสภาวการณ์ที่ชิ้นส่วนใช้การไม่ได้ 20 % และ w_2 แทนสภาวการณ์ที่ชิ้นส่วนใช้การไม่ได้ 50 % สำหรับกำไรสุทธิที่ได้รับนั้นสามารถแสดงได้ดังตารางต่อไปนี้

<u>ตาราง 1</u> กำไรสุทธิของ $(a_i,\ w_j)$

	W	w_1	w_2
A	a_1	0	0
	a_2	1600	−500

ข้อมูลข่าวสารเหล่านี้สามารถอธิบายได้ในรูปฟอร์มขยายของตัวแบบวิเคราะห์การตัดสินใจ ดังนี้



$u(a_1, w_1) = 0 \quad p(w_1) = 0.60$

$u(a_1, w_2) = 0 \quad p(w_2) = 0.40$

$u(a_2, w_1) = 1600 \quad p(w_1) = 0.60$

$u(a_2, w_2) = -500 \quad p(w_2) = 0.40$

จากภาพข้างบนนี้เราจะเห็นว่า ได้ใช้ฟังก์ชั่นผลตอบแทน u นั้นคือเรากำหนดฟังก์ชั่น u ดังนี้

$$u(a_1, w_1) = 0, \qquad u(a_1, w_2) = 0$$

$$u(a_2, w_1) = 1600, \quad u(a_2, w_2) = -500$$

เราเห็นได้ชัดว่า ฟังก์ชั่น u เป็นฟังก์ชั่นค่าจริงที่กำหนดใน $A \times W$ ความจริงเราหาฟังก์ชั่นนี้ได้ดังนี้

ให้ w เป็นเปอร์เซ็นต์ของชิ้นส่วนที่ใช้การไม่ได้จากกล่อง 1000 ชิ้นนั้น แล้ว $1 - w$ เป็นเปอร์เซ็นต์ของชิ้นส่วนที่ใช้การได้ ถ้าผู้จัดการซื้อชิ้นส่วนนั้นจะได้กำไรเป็น

$$1000(1 - w)(3) = 3000(1 - w)$$

และจะสูญเสียเป็นจำนวน

$$1000(w)(4) = 4000(w)$$

ในเมื่อกำไรต่อชิ้นเป็น 3 บาท และต้นทุนเป็น 4 บาท

เพราะฉะนั้นกำไรสุทธิจะเป็น

$$3000(1 - w) - 4000(w) = 3000 - 7000(w)$$

เราจะแทนฟังก์ชั่นนี้ด้วย $u(a_2, w)$ เมื่อ $w \in [0, 1]$ ดังนั้น

$$u(a_2, w) = 3000 - 7000(w)$$

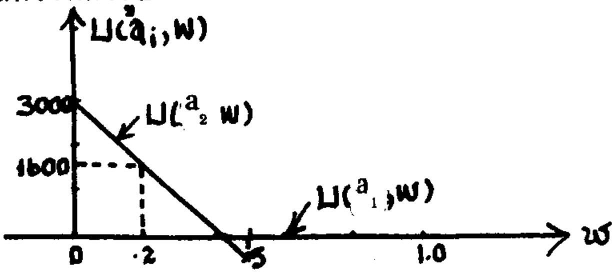
ในทางตรงกันข้าม ถ้าผู้จัดการเลือก a_1 แล้วกำไรสุทธิจะเป็น 0 ไม่ว่าสภาวการณ์ w จะมีค่าเป็นเท่าใดใน $[0, 1]$ เพราะฉะนั้น

$$u(a_1, w) = 0$$

เมื่อเรารวมฟังก์ชั่นทั้งสอง จะได้เป็น

$$\left.\begin{array}{l} u(a_1, w) = 0 \\ u(a_2, w) = 3000 - 7000(w) \end{array}\right., \ w \in [0, 1]$$

กราฟของสองฟังก์ชันนี้แสดงได้ดังรูป



จากกราฟนี้จะเห็นว่า ถ้า $w_2 = .4286$ แล้ว $U(a_1, w) = U(a_2, w) = 0$ และเราจะเห็นอีกว่า เมื่อ $w = w_1 = 0.20$ และ $w = w_2 = .50$ จะได้

$$
\begin{aligned}
U(a_2, w_1) &= 3000 - 7000(w_1) \\
&= 3000 - 7000(.20) = 1600 \\
U(a_2, w_2) &= 3000 - 7000(w_2) \\
&= 3000 - 7000(.50) = -500
\end{aligned}
$$

ค่าเหล่านี้จะเหมือนกับที่ได้มาแล้วนั่นเอง ในทำนองเดียวกัน สำหรับค่าต่าง ๆ ของ w ซึ่งอยู่ในช่วง [0, 1] เราจะได้กำไรสุทธิต่าง ๆ กันจากทางเลือก a_2 ดังนี้

ตาราง 2 กำไรสุทธิของ a_2 เมื่อ $w \in [0, 1]$

w	$U(a_2, w) = 3000 - 7000w$	w	$U(a_2, w)$
0	3000	.55	−850
.05	2650	.60	−1200
.10	2300	.65	−1550
.15	1950	.70	−1900
.20	1600	.75	−2250
.25	1250	.80	−2600
.30	900	.85	−2950
.35	550	.90	−3300
.40	200	.95	−3650
.4286	0	1.00	−4000
.45	−150		
.50	−500		

$U(a_2, w) = 3000 - 7000(w)$

จากกราฟ และตาราง 2 เราได้ตารางกำไรดังนี้

<u>ตาราง 3</u> กำไรสุทธิสำหรับ w ใน $[0, 1]$

$\mathcal{W}$		$0 \le w \le .4286$	$.4286 < w \le 1.00$
A	a_1	0	0
	a_2	$(3000 - 7000(w)) > 0$	$(3000 - 7000(w)) < 0$

สำหรับกำไรสุทธิของทางเลือก a_2 ซึ่งอยู่ในวงเล็บนั้นจะเป็นบวก (+) หรือเป็นลบ (–)

ตามตาราง 1 ซึ่งมีค่าเป็นผลตอบแทนนั้น เราสามารถแปลงเป็นตารางของค่าเสียโอกาสได้โดยการใช้นิยามของค่าเสียโอกาส ℓ_{ij} ของทางเลือก (a_i, w_j) ดังนี้

<u>ตาราง 4</u> ค่าเสียโอกาสสำหรับ (a_i, w_j)

$\mathcal{W}$		w_1	w_2
A	a_1	1600	0
	a_2	0	500

เช่นเดียวกับที่เราได้หาฟังก์ชั่นทั่วไป U เราก็สามารถหาฟังก์ชั่นค่าเสียโอกาส L ใน $A \times \mathcal{W}$ ได้ จากกราฟจะเห็นว่ากำไรจะเป็นบวก ถ้า w มีค่าเป็น $0 \le w \le .4286$ ซึ่งหมายถึงว่าเปอร์เซ็นต์ของชิ้นส่วนที่ใช้การไม่ได้ (w) นั้นอยู่ในช่วง $[0, .4286]$ ก็จะทำให้ผู้จัดการซื้อส่วนประกอบนั้น เพราะกำไรเป็นบวก และสำหรับ w ซึ่งอยู่ในช่วง $(.4286, 1.00]$ ผู้จัดการจะไม่ซื้อ เพราะกำไรเป็นลบ

เพราะฉะนั้นถ้าสภาวการณ์เป็น $w \in [0, .4286]$ และผู้จัดการพิจารณาทางเลือก a_2 เขาจะได้กำไรเป็น $3000 - 7000(w)$ กำไรที่ละเลยจะเป็น 0 ดังนั้นค่าเสียโอกาสของทางเลือก a_2 จะเป็น 0 แต่ถ้าเขาพิจารณาทางเลือก a_1 กำไรจะ 0 และกำไรที่ละเลยเป็น $3000 - 7000(w)$ นั่นคือถ้าสภาวการณ์นอกบังคับ w อยู่ในช่วง $(.4286, 1.00]$ และผู้จัดการเลือก a_1 แล้วจะได้กำไรเป็น 0 หรือค่าเสียโอกาสเป็น 0 แต่ถ้าเลือก a_2 จะได้กำไรเป็นลบ ซึ่งเท่ากับ $3000 - 7000(w)$ ดังนั้นกำไรที่ละเลย หรือค่าเสียโอกาสจะเป็น $7000(w) - 3000$ ผลเหล่านี้แสดงได้นี้

<u>ตาราง 5</u> ค่าเสียโอกาส สำหรับค่าต่าง ๆ ของ w ในช่วง $[0, 1]$

$\mathcal{W}$		w_1	w_2	
A	a_1	$3000 - 7000(w)$	0	$w_1 \in [0, .4286]$
	a_2	0	$7000(w) - 3000$	$w_2 \in (.4286, 1]$

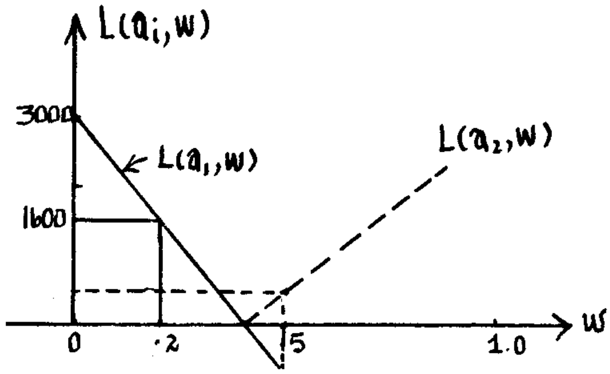
จะสังเกตเห็นได้ว่าผลในตาราง 5 นี้อาจจะได้จากตาราง 3 โดยการใช้นิยามของค่าเสียโอกาส ข้อมูลข่าวสารในตาราง 5 สามารถใช้นิยามฟังก์ชันค่าเสียโอกาส L ของ $A \times \mathcal{W}$ ได้ดังนี้

$$L(a_1, w) = 3000 - 7000(w), \qquad 0 \leq w \leq .4286$$
$$= 0, \qquad .4286 < w \leq 1.00$$
$$L(a_2, w) = 7000(w) - 3000, \qquad 0 \leq w \leq .4286$$
$$= 0, \qquad .4286 < w \leq 1.00$$

จากการกำหนดค่าต่าง ๆ ให้แก่ w เราจะได้ค่าเสียโอกาส ซึ่งแสดงได้ดังตาราง 6 และรูปกราฟต่อไปนี้

<u>ตาราง 6</u> ค่าเสียโอกาส สำหรับค่าต่าง ๆ ของ w ที่อยู่ในช่วง $[0, 1]$

$\mathcal{W}$	A a_1	a_2	$\mathcal{W}$	A a_1	a_2
.00	3000	0	.50	0	500
.05	2650	0	.55	0	850
.10	2300	0	.60	0	1200
.15	1950	0	.65	0	1550
.20	1600	0	.70	0	1900
.25	1250	0	.75	0	2250
.30	900	0	.80	0	2600
.35	550	0	.85	0	2950
.40	200	0	.90	0	3300
<u>.4286</u>	0	0	.95	0	3650
.45	0	150	1.00	0	4000



3. <u>เกณฑ์ตัดสินใจแบบเบยส์</u> **(Bayesian Decision Criterion)**

เกณฑ์ที่ใช้พิจารณาทางเลือกสำหรับปัญหาตัดสินใจชนิดที่ทราบความน่าจะเป็นก่อนทดลองนั้นก็คือ "เกณฑ์ตัดสินใจแบบเบยส์" ตามเกณฑ์นี้ผู้ตัดสินใจจะคำนวณผลตอบแทนคาดหวังของแต่ละทางเลือก แล้วเลือกเอาทางเลือกที่มีผลตอบแทนคาดหวังที่ดีที่สุด (นั่นคือถ้าผลตอบแทนเป็นกำไร ก็จะเลือกเอาทางเลือกที่มีผลตอบแทนคาดหวังสูงสุด และถ้าผลตอบแทนเป็นต้นทุน ค่าใช้จ่าย หรือค่าเสียโอกาส ก็จะเลือกเอาทางเลือกที่มีค่าคาดหวังของผลตอบแทนที่ต่ำสุด)

จากตัวอย่างที่กล่าวมานั้น ถ้าผู้จัดการเลือก a_1 แล้วกำไรสุทธิจะเป็น 0 ภายใต้สภาวการณ์ w_1 และจะเป็น 0 อีกภายใต้สภาวการณ์ w_2 แต่สภาวการณ์ w_1 และ w_2 นั้นมีโอกาสที่จะเกิดขึ้นเป็น 60 % และ 40 % ตามลำดับ เพราะฉะนั้นกำไรสุทธิคาดหวัง $B(a_1)$ กำหนดไว้ดังนี้

$$B(a_1) = E[U(a_1,w)]$$
$$= 0(.60) + 0(.40) = 0$$

ในทำนองเดียวกัน กำไรสุทธิคาดหวังของทางเลือก a_2 จะเป็น

$$B(a_2) = E[U(a_2,w)]$$
$$= 1600(.60) - 500(.40) = 760 \longleftarrow \max$$

จากกำไรสุทธิคาดหวังของทั้งสองทางเลือก ผู้จัดการก็จะเลือก a_2 เพราะว่า $B(a_2)$ มากกว่า $B(a_1)$ นั่นคือเขาก็จะซื้อชิ้นส่วนกลองนั้นนั่นเอง

ถ้าเราใช้ตารางค่าเสียโอกาสแทนตารางกำไรสุทธิ แล้วค่าเสียโอกาสคาดหวังของทางเลือก a_1 และ a_2 จะคำนวณได้ดังนี้

$$B(a_1) = E[L(a_1, w)]$$
$$= 1600(.60) + 0(.40) = 960$$
$$B(a_2) = E[L(a_2, w)]$$
$$= 0(.60) + 500(.40) = 200 \leftarrow \min$$

ดังนั้นผู้จัดการก็จะเลือก a_2 อีก เพราะทางเลือกนี้ให้ค่าเสียโอกาสคาดหวังต่ำสุด เราจะเห็นได้ว่าทางเลือกที่ดีที่สุดจะเป็นทางเลือกเดียวกันไม่ว่าจะเป็นแนวความคิดของกำไรสุทธิหรือแนวความคิดของค่าเสียโอกาส

การวิเคราะห์ข้างบนนี้สรุปในรูปฟอร์มทั่ว ๆ ไปได้ดังนี้

<u>นิยาม 1</u> มาตราวัดแบบเบยส์ (**Bayes Measure**) สำหรับทางเลือก a_i จาก A หรือ $B(a_i)$ กำหนดไว้ว่าเป็น "ผลตอบแทนคาดหวัง" สำหรับทางเลือกนั้น ๆ (ถ้าผลตอบแทนคาดหวังสามารถหาค่าได้) นั่นคือ

$$B(a_i) = E[U(a_i, w)]$$
$$= \begin{cases} \sum_j^{\ell} U(a_i, w)\, p(w_j), & \text{ไม่ต่อเนื่อง} \\ \int_{W} U(a_i, w)\, p(w)\, dw, & \text{ต่อเนื่อง} \end{cases}$$

หรือ
$$B(a_i) = E[L(a_i, w)]$$
$$= \begin{cases} \sum_j^{\ell} L(a_i, w)\, p(w_j), & \text{ไม่ต่อเนื่อง} \\ \int_{W} L(a_i, w)\, p(w)\, dw, & \text{ต่อเนื่อง} \end{cases}$$

ในเมื่อ $L(a_i, w_j)$ เป็นค่าเสียโอกาส และ $U(a_i, w_j)$ เป็นผลตอบแทนของทางเลือก a_i ตามสภาวการณ์ w_j (หรือ w) ใน W

เมื่อคำนวณมาตราวัดแบบเบยส์ของแต่ละทางเลือกแล้ว เราก็เลือกเอาทางเลือกที่มีมาตราวัดแบบเบยส์ที่สูงสุด (**Optimal Bayes Measure**) เกณฑ์นี้จะเรียกว่า "เกณฑ์ตัดสินใจแบบเบยส์" ซึ่งเราจะให้นิยามต่อไปนี้

นิยาม 2 เกณฑ์ตัดสินใจแบบเบยส์ (*Bayesian Decision Criterion*) กำหนดว่าเป็นเกณฑ์ที่ใช้พิจารณาทางเลือก a_i จาก A ซึ่งมีมาตรวัดแบบเบยส์ $B(a_i)$ เหมาะสมที่สุด

ข้อสังเกต (1) เกณฑ์ตัดสินใจแบบเบยส์อาจจะไม่มี ถ้า $B(a_i)$ ไม่เป็นเลขจำนวนจำกัด หรือหาไม่ได้ นั่นคือมาตรารวัดแบบเบยส์หาไม่ได้นั่นเอง

(2) ถ้าเราใช้ฟังก์ชั่นค่าเสียโอกาส หรือฟังก์ชั่นค่าใช้จ่าย แล้วเกณฑ์ตัดสินใจแบบเบยส์จะเลือกเอาทางเลือก a_k ที่ทำให้

$$\begin{aligned} B(a_k) &= \min_A \{B(a_i)\} \\ &= \min_A \{B(a_1),\ B(a_2), \ldots,\ B(a_n)\} \end{aligned}$$

ในทางตรงกันข้าม ถ้าเราใช้ฟังก์ชั่นกำไร แล้วเกณฑ์ตัดสินใจแบบเบยส์จะเลือกเอาทางเลือก a_k ที่ทำให้

$$B(a_k) = \max_A \{B(a_i)\}$$

ดังนั้นผู้ตัดสินใจที่ใช้เกณฑ์ตัดสินใจแบบเบยส์จะต้องดำเนินงานเป็นขั้นตอน 4 ขั้นดังนี้

- ต้องระบุ หรือรวมสภาวการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด W และทางเลือกที่เป็นไปได้ทั้งหมด A
- ต้องสามารถกำหนดความน่าจะเป็น $p(w_j)$ ให้แก่แต่ละสภาวการณ์นอกบังคับ w_j ของ W ได้ โดยให้สอดคล้องกับความรู้สึกของเขา ที่เกี่ยวกับโอกาสที่จะเกิดขึ้นของสภาวการณ์นอกบังคับ
- ต้องทราบกำไร $U(a_i, w_j)$ หรือค่าเสียโอกาส $L(a_i, w_j)$ เมื่อพิจารณาทางเลือก a_i (จาก A) ที่สอดคล้องกับสภาวการณ์ w_j (จาก W)
- แล้วก็คำนวณมาตรารวัดแบบเบยส์สำหรับแต่ละทางเลือก และก็เลือกเอาทางเลือกที่ดีที่สุด โดยอาศัยเกณฑ์ตัดสินใจแบบเบยส์

สำหรับเกณฑ์ตัดสินใจแบบเบยส์นั้นสามารถสรุปได้เป็นดังนี้

- แต่ละทางเลือก $a_i \in A$ คำนวณ $B(a_i)$

$$B(a_i) = E[U(a_i, w)]$$

หรือ $$B(a_i) = E[L(a_i, w)]$$

- ถ้า $B(a_i)$ หาได้เป็นจำนวนเลขจำกัด แล้วคำนวณ $B(a_k)$

$$B(a_k) = \max_A \{B(a_i)\}$$

หรือ $$B(a_k) = \min_A \{B(a_i)\}$$

แต่ถ้า $B(a_i)$ ของบางทางเลือกหาได้ไม่เป็นเลขจำนวนจำกัด แล้วจะตัดสินใจไม่ได้

- ทางเลือก a_k จะเป็นทางเลือกที่ดีที่สุด (ถ้า $B(a_i)$ หาได้เป็นจำนวนเลขจำกัด)

4. <u>ค่าคาดหวังก่อนทดลองของข้อมูลข่าวสารสมบูรณ์</u> **(Prior Expected Value of Perfect Information, PEVPI)**

จากตัวอย่างเรื่องชิ้นส่วนเครื่องจักรที่กล่าวมาแล้ว เราจะเห็นว่า a_2 เป็นทางเลือกที่ดีที่สุด ถ้าฟังก์ชันน่าจะเป็นก่อนทดลองที่กำหนดไว้เป็นเช่นนั้น มาตราวัดแบบเบยส์ภายใต้ฟังก์ชัน u นี้จะเป็น 760 บาท สมมติว่าเราทราบในขณะตัดสินใจว่าสภาวการณ์ w_1 จะเกิดขึ้น แล้ว (จากตาราง 1) จะเห็นได้ชัดว่าเราควรจะเลือก a_2 เป็นทางเลือกที่ดีที่สุด เพราะทางเลือกนี้จะทำให้ได้กำไรสุทธิสูงสุด ในทำนองเดียวกันถ้าเราทราบว่า w_2 จะเกิดขึ้น เราก็ควรจะเลือก a_1 เป็นทางเลือกที่ดีที่สุด อย่างไรก็ตามสภาวการณ์ w_1 และ w_2 จะเกิดขึ้นด้วยความน่าจะเป็นก่อนทดลองเท่ากับ 0.60 และ 0.40 ตามลำดับ เพราะฉะนั้นถ้าเราทราบว่าสภาวการณ์ไหนจะเกิดขึ้น แล้วกำไรสุทธิคาดหวังจะกำหนดไว้ดังนี้

$$1600(.60) + 0(.40) = 960$$

หรือกล่าวได้ว่า มาตราวัดนี้จะแสดงถึงกำไรสุทธิคาดหวัง ในแง่ของข้อมูลข่าวสารสมบูรณ์ (**Perfect Information**) ซึ่งเป็นผลตอบแทนคาดหวังของการเลือกเอาทางเลือกที่ดีกว่าเสมอ เราจะเรียกมาตราวัดนี้ว่า "ค่าคาดหวังของข้อมูลข่าวสารสมบูรณ์ (**Expected Value of Perfect Information**) และจะแทนด้วย **EVPI**

<u>นิยาม 3</u> ให้ M_j เป็นผลตอบแทนที่ดีที่สุด ถ้า w_j เป็นสภาวการณ์ที่แท้จริง ให้ $p(w_j)$ เป็นความน่าจะเป็นก่อนทดลองของ w_j แล้วค่าคาดหวังของข้อมูลข่าวสารสมบูรณ์ (**EVPI**) จะกำหนดไว้ว่า

$$\begin{aligned} EVPI &= E[M_j] \\ &= \sum M_j p(w_j) \end{aligned}$$

ข้อสังเกต ถ้าผลตอบแทนเป็นกำไร แล้ว $M_j = \max_{w}\{U(a_i, w_j)\}$ และถ้าผลตอบแทนเป็นค่าใช้จ่าย แล้ว $M_j = \min_{w}\{U(a_i, w_j)\}$

จากความไม่แน่นอนที่กำหนดให้ ซึ่งวัดด้วยฟังก์ชันน่าจะเป็นก่อนทดลองนี้เราทราบว่า a_2 เป็นทางเลือกที่ดีที่สุด จากนิยาม EVPI จะให้ผลตอบแทนคาดหวังเมื่อมีข้อมูลข่าวสารสมบูรณ์ ดังนั้นผลต่างระหว่างค่าคาดหวังของข้อมูลข่าวสารสมบูรณ์ กับมาตราวัดแบบเบยส์ของทางเลือกที่ดีที่สุด หรือ $EVPI - B(a_k)$ จะใช้วัดค่าใช้จ่ายของความไม่แน่นอน (Cost of Uncertainty) นั่นคือถ้ามันเป็นไปได้ที่จะซื้อข้อมูลข่าวสารสมบูรณ์นี้ มันก็จะมีคุณค่าที่จะจ่ายให้แก่จำนวนนี้ (ค่าใช้จ่ายของความไม่แน่นอน) จากตัวอย่างของเรา จะได้

$$EVPI = 960$$

$$B(a_2) = \text{มาตราวัดแบบเบยส์ของทางเลือกที่ดีที่สุด} = 760$$

$$\text{ค่าใช้จ่ายของความไม่แน่นอน} = 960 - 760 = 200$$

ดังนั้นควรจะเต็มใจที่จะจ่าย 200 เพื่อซื้อข้อมูลข่าวสารสมบูรณ์ แต่ถ้าราคาสำหรับข้อมูลข่าวสารสมบูรณ์เท่ากับ 200 บาทพอดี แล้วมันก็จะไม่แตกต่างกันเลย เมื่อจะซื้อหรือไม่ซื้อ ค่าใช้จ่ายของความไม่แน่นอนนี้ยังเรียกกันว่า "ค่าคาดหวังก่อนทดลองของข้อมูลข่าวสารสมบูรณ์ (PEVPI)"

นิยาม 4 ให้ (A, W, U, p) เป็นตัวแบบวิเคราะห์การตัดสินใจชนิดขั้นเดียว และให้ $a_k \in A$ เป็นทางเลือกที่ดีที่สุดภายใต้ฟังก์ชันน่าจะเป็นก่อนทดลอง p แล้วค่าคาดหวังก่อนทดลองของข้อมูลข่าวสารสมบูรณ์ PEVPI กำหนดไว้ดังนี้

$$PEVPI = EVPI - B(a_k) = \text{ค่าใช้จ่ายของความไม่แน่นอน}$$

จากนิยาม EVPI, $B(a_k)$, และสมมติว่าฟังก์ชันกำไร U เราจะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\text{PEVPI} &= \sum_{w_j \in W} M_j\, p(w_j) - \max_{a_i \in A}\{B(a_i)\} \\
&= \sum M_j\, p(w_j) - \max_{a_i \in A}\Big\{\sum_{w_j \in W} U(a_i, w_j)\, p(w_j)\Big\} \\
&= \min_{a_i \in A}\Big\{\sum M_j\, p(w_j) - \sum U(a_i, w_j)\, p(w_j)\Big\} \\
&= \min_{a_i \in A}\Big\{\sum [M_j - U(a_i, w_j)]\, p(w_j)\Big\} \\
&= \min_{a_i \in A}\Big\{\sum L(a_i, w_j)\, p(w_j)\Big\} \\
&= \min_{a_i \in A}\big\{B(a_i) = E[L(a_i, w_j)]\big\}
\end{aligned}
$$

จากสมการสุดท้ายเราจะเห็นว่า **PEVPI** ก็คือค่าเสียโอกาสคาดหวังของทางเลือกที่ดีที่สุด

<u>นิยาม 5</u> ให้ (A, W, L, p) เป็นปัญหาวิเคราะห์การตัดสินใจชนิดขั้นเดียว แล้วค่าคาดหวังก่อนทดลองของข้อมูลข่าวสารสมบูรณ์ **PEVPI** กำหนดไว้ว่าเป็นค่าเสียโอกาสคาดหวังของทางเลือกที่เหมาะสมที่สุด นั่นคือ

$$
\begin{aligned}
\text{PEVPI} &= \min_{a_i \in A}\{B(a_i)\} \\
&= \min_{a_i \in A}\Big\{\sum_{w_j \in W} L(a_i, w_j)\, p(w_j)\Big\}
\end{aligned}
$$

จากตัวอย่างของเรา จะได้ **PEVPI** เท่ากับ 200 บาท ซึ่งเป็นค่าเดียวกับที่ได้มาแล้วนั่นเอง

5. <u>ปัญหาตัดสินใจชนิดหลายสภาวการณ์ และสองทางเลือก</u> (Two-Action, Multi-state Problems)

ปัญหาตัดสินใจแบบนี้ก็ขยายจากปัญหาตัดสินใจชนิดสองสภาวการณ์และสองทางเลือกนั่นเอง การตัดสินใจก็ทำโดยการคำนวณมาตราวัดแบบเบยส์ของแต่ละทางเลือก a_i ใน A แล้วก็ใช้เกณฑ์ตัดสินใจแบบเบยส์พิจารณาทางเลือกที่เหมาะสมที่สุด อย่างไรก็ดี เรามีวิธีการอื่น สำหรับพิจารณาทางเลือกที่เหมาะสมที่สุด โดยเฉพาะกับกลุ่มสภาวการณ์ที่มีสภาวการณ์มากกว่าสอง และฟังก์ชันกำไรเป็นแบบเชิงเส้นกับพิสัยหรือช่วงของ W ในกรณีนี้เกณฑ์ตัดสินใจแบบเบยส์จะอยู่ในรูปฟอร์มแบบเดียวกันแบบที่แล้ว แต่ง่ายกว่า และลดจำนวนการคำนวณลง นั่นคือเราไม่ต้องคำนวณ $U(a_i, w_j)$ ของแต่ละ (a_i, w_j) เมื่อ

เริ่มต้นปัญหานั้นเราเพียงแต่หาฟังก์ชั่นกำไร $U(a_i, w_j)$ สำหรับทางเลือก a_i และคำนวณมาตราวัดแบบเบยส์ $B(a_i)$ โดยตรงเลย แล้วก็ใช้เกณฑ์ตัดสินใจแบบเบยส์พิจารณาทางเลือกที่เหมาะสม

ต่อไปจะอธิบายถึงการวิเคราะห์ดังที่อธิบายมาแล้ว ให้ A เป็นกลุ่มทางเลือก และ W เป็นกลุ่มสภาวการณ์ ดังนี้

$$A = \{a_1, a_2\}$$
$$W = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$$

และยังให้ฟังก์ชั่นกำไร U สำหรับปัญหาที่มีสองทางเลือก กำหนดไว้ดังนี้

$$U_1 = U(a_i, w_j)$$
$$= d_1 + b_1 w \quad \text{สำหรับ} \quad w \in W$$

และ

$$U_2 = U(a_2, w_j)$$
$$= d_2 + b_2 w \quad \text{สำหรับ} \quad w \in W$$

จากฟังก์ชั่นนี้ ถ้า $d_1 = 0$, $b_1 = 0$, $d_2 = 3000$, และ $b_2 = 7000$ เราก็จะได้ฟังก์ชั่น U ที่กล่าวมาแล้วนั่นเอง ให้ p เป็นฟังก์ชั่นน่าจะเป็นก่อนทดลองของ W แล้วเราจะคำนวณกำไรคาดหวัง หรือมาตราวัดแบบเบยส์ $B(a_i)$ สำหรับแต่ละทางเลือก $a_i \in A$ ได้ดังนี้

$$B(a_i) = E[U(a_i, w)]$$

เพราะฉะนั้นเราได้

$$B(a_1) = E[U(a_1, w)] = E[d_1 + b_1 w]$$
$$= d_1 + b_1 E(w)$$
$$B(a_2) = E[U(a_2, w)] = E[d_2 + b_2 w]$$
$$= d_2 + b_2 E(w)$$

ตามเกณฑ์ตัดสินใจแบบเบยส์นี้ เราจะเลือกเอาทางเลือกที่มีมาตราวัดแบบเบยส์สูงสุด นั่นคือทางเลือก a_1 ดีกว่าทางเลือก a_2 ก็ต่อเมื่อ

$$B(a_1) > B(a_2)$$

และทางเลือก a_2 ดีกว่า a_1 ก็ต่อเมื่อ

$$B(a_1) < B(a_2)$$

ทฤษฎี 1 ให้ $A = \{a_1, a_2\}$ และ $\mathcal{W} = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ เป็นกลุ่มทางเลือก และกลุ่มสภาวการณ์ตามลำดับ ให้ p เป็นฟังก์ชั่นน่าจะเป็นก่อนทดลองของ $\mathcal{W}$ สมมติว่า

$$U(a_1, w) = d_1 + b_1 w \quad \text{สำหรับ } w \in \mathcal{W}$$
$$U(a_2, w) = d_2 + b_2 w \quad \text{สำหรับ } w \in \mathcal{W}$$

ให้ $B(a_i)$ ซึ่งหาค่าได้ เป็นมาตราวัดแบบเบยส์ของทางเลือก a_i แล้วทางเลือก a_1 จะดีที่สุด เมื่อเปรียบเทียบกับทางเลือก a_2 ก็ต่อเมื่อ

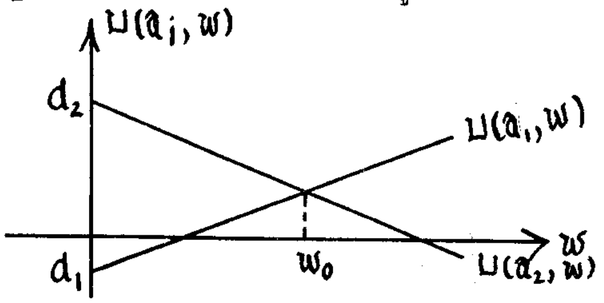
$$B(a_1) > B(a_2)$$

โดยกำหนดฟังก์ชั่นน่าจะเป็นก่อนทดลอง p ให้

ต่อไปจะอธิบายถึงเงื่อนไขที่เหมาะสมแบบอื่น สำหรับพิจารณาทางเลือกจากกลุ่มทางเลือก A ให้ a_1 และ a_2 เป็นทางเลือกที่มี

$$U(a_1, w) = d_1 + b_1 w \quad \text{และ} \quad U(a_2, w) = d_2 + b_2 w$$

โดยที่ $b_1 > b_2$ ฟังก์ชั่นทั้งสองนี้แสดงได้ดังรูปภาพต่อไปนี้



จากทฤษฎี 1 เราทราบว่าทางเลือก a_1 เหมาะสมที่สุด ถ้า

$$B(a_1) > B(a_2)$$

หรือ
$$d_1 + b_1 E(w) > d_2 + b_2 E(w)$$
$$(b_1 - b_2) E(w) > d_2 - d_1$$
$$E(w) > \frac{d_2 - d_1}{b_1 - b_2}$$

และเราทราบว่าจุดคุ้มทุน (Break-Even point) w_0 นี้สามารถหาได้จากการแก้สมการ

$$U(a_1, w_0) = U(a_2, w_0)$$

หรือ $$d_1 + b_1 w_0 = d_2 + b_2 w_0$$
$$w_0 = \frac{d_2 - d_1}{b_1 - b_2}$$

ดังนั้น $$E(w) > w_0$$

นั่นคือทางเลือก a_1 เป็นทางเลือกที่ดีที่สุด เมื่อเปรียบเทียบกับทางเลือก a_2 ก็ต่อเมื่อ
$$E(w) > w_0$$

<u>ทฤษฎี 2</u> ให้ a_1 และ a_2 เป็นสองทางเลือกจาก A และมีฟังก์ชั่นกำไรเป็น
$$U(a_1, w) = d_1 + b_1 w \quad \text{และ} \quad U(a_2, w) = d_2 + b_2 w$$
สำหรับ w ที่อยู่ใน W โดยที่ $b_1 > b_2$ ให้ p เป็นฟังก์ชั่นน่าจะเป็นก่อนทดลองของ W และให้ w_0 เป็นจุดคุ้มทุน แล้ว a_1 จะเป็นทางเลือกที่ดีที่สุด (เมื่อเทียบกับ a_2) ถ้า $E(w) > w_0$ ในเมื่อกำหนดฟังก์ชั่นน่าจะเป็นก่อนทดลอง p ให้

ในทฤษฎี 2 นี้เราสมมติว่า $b_1 > b_2$ ถ้าสมมติว่า $b_1 = b_2$ แล้วทางเลือกที่ดีที่สุดจะขึ้นอยู่กับขนาดของ d_1 และ d_2 ทางเลือก a_1 จะดีที่สุดเมื่อเทียบกับ a_2 ก็ต่อเมื่อ $d_1 > d_2$ ในทำนองเดียวกัน a_1 ไม่ต่างจาก a_2 ถ้า $d_1 = d_2$ โดยให้ $b_1 = b_2$ ในทางตรงกันข้าม ถ้า $b_1 > b_2$ แล้ว a_1 จะไม่ต่างจาก a_2 ถ้า $E(w) = w_0$ ลองพิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

<u>ตัวอย่าง</u> ผู้จัดการห้างสรรพสินค้าสนใจที่จะซื้อกล้วย 48 เข่ง ๆ ละ 100 ลูก ห้างจะได้กำไรโหลละ 4 บาท แต่ถ้าดิบหรือสุกเกินไปเขาจะสูญเสียโหลละ 2 บาท

จากประสบการณ์ที่ผ่านมาผู้จัดการประมาณว่า กล้วยนี้จะสุกหรือดิบเกินไปประมาณ 5, 10, 20, 30, หรือ 70 % ด้วยความน่าจะเป็น .40, .25, .20, .10, และ .05 ตามลำดับ

ผู้จัดการต้องการตัดสินใจว่า ควรจะซื้อกล้วยนี้หรือไม่ ? เขาจะดำเนินการแก้ปัญหานี้อย่างไร ?

ให้ $A = \{a_1, a_2\}$ ในเมื่อ a_1 และ a_2 แทนทางเลือก "ไม่ซื้อ" และ "ซื้อ" ตามลำดับ และให้ $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_5\}$ เมื่อ $w_1, w_2, \ldots, w_5$ แทนสภาวการณ์ที่กล้วยเสีย ซึ่งเป็น 5, 10, 20, 30, และ 70 % ตามลำดับ

ให้ $U: A \times W \longrightarrow R$ แล้วเราจะได้ว่า

$$U(a_1, w) = 0 \quad \text{สำหรับ } w \text{ ใด ๆ ใน } W$$

สมมติว่าผู้จัดการพิจารณาเลือก a_2 แล้ว

$$\text{กำไร} = (4)(1-w)(400) = 1600(1-w)$$

$$\text{สูญเสีย} = (2)(w)(400) = 800(w)$$

ในเมื่อ w เป็นเปอร์เซ็นต์ที่กล้วยจะเสีย

เพราะฉะนั้นกำไรสุทธิ $U(a_2, w)$ จะเป็น

$$\begin{aligned} U(a_2, w) &= 1600(1-w) - 800(w) \\ &= 1600 - 2400(w) \quad \text{สำหรับ } w \text{ ใด ๆ ใน } W \end{aligned}$$

ดังนั้นเราจะได้ $U(a_1, w) = 0, \quad w \in W$

$$U(a_2, w) = 1600 - 2400(w), \quad w \in W$$

เพราะฉะนั้น $d_1 = 0,\ d_2 = 1600,\ b_1 = 0,\ b_2 = -2400,\ d_2 - d_1 = 1600,$

$b_1 - b_2 = 2400$

$$w_0 = (d_2 - d_1)/(b_1 - b_2) = 1600/2400 = 0.6667$$

$$\begin{aligned} E(w) &= \sum w_j p(w_j) \\ &= (.05)(.40) + (.10)(.25) + \ldots + (.70)(.05) \\ &= .02 + .025 + .03 + .035 = 0.15 \end{aligned}$$

เราจึงได้ว่า $E(w) = .15 < w_0 = 0.6667$ นั่นคือทางเลือก a_2 จะเป็นทางเลือกที่ดีที่สุด (เมื่อเทียบกับ a_1) แสดงว่าผู้จัดการควรจะซื้อกล้วยนั้น

จากการใช้ทฤษฎี 1 หรือวิธีการอื่น เราจะทำได้ดังนี้ — ให้ $B(a_i)$ เป็นมาตราวัดแบบเบยส์ของทางเลือก a_i แล้ว

$$\begin{aligned} B(a_1) &= E[U(a_1, w)] = 0 \\ B(a_2) &= E[U(a_2, w)] = E[1600 - 2400(w)] \\ &= 1600 - 2400E(w) = 1600 - 2400(.15) \\ &= 1240 \end{aligned}$$

จะเห็นได้ว่า $B(a_2) > B(a_1)$ หรือ $1240 > 0$ ผู้จัดการจึงเลือก a_2 ซึ่งก็คือซื้อกล้วยนั้นเอง

6. <u>ปัญหาชนิดหลายสภาวการณ์ และหลายทางเลือก</u> (Multiaction, Multistate Problems)

(1) <u>วิธีคาดหวัง</u> (Expectations Method) เราจะพิจารณาตัวแบบวิเคราะห์การตัดสินใจที่มีกลุ่มสภาวการณ์ และกลุ่มทางเลือก มีสมาชิกมากกว่าสอง ปัญหาเช่นนี้ได้ชื่อว่าปัญหาชนิดหลายสภาวการณ์และหลายทางเลือก

ไม่ว่าเราใช้แนวความคิดทางฟังก์ชั่น หรือค่าเสียโอกาส เราก็จะได้ทางเลือกที่ดีที่สุดเช่นเดียวกัน ต่อไปจะอธิบายถึงการวิเคราะห์ของการเลือกทางเลือกที่ดีที่สุดสำหรับปัญหาชนิดหลายสภาวการณ์และหลายทางเลือกนี้ โดยใช้แนวความคิดของฟังก์ชั่นค่าเสียโอกาส จะเริ่มต้นด้วยตัวอย่างต่อไปนี้

<u>ตัวอย่าง</u> บริษัทขนมปังบางกะปิจะผลิตขนมเค็กแบบพิเศษในทุกต้นสัปดาห์ แต่ขนมเค็กที่ขายไม่ได้ในสิ้นสัปดาห์จะลดราคาเหลือ 17 บาท (ซึ่งจะขายหมด) สมมติว่าต้นทุนในการผลิต ซึ่งรวมค่าตบแต่งด้วยเป็น 37 บาท แต่จะขายในราคา 47 บาท

จากประสบการณ์บริษัทได้ประมาณความต้องการของลูกค้าต่อขนมเค็กพิเศษในระหว่างสัปดาห์ พร้อมกับกำหนดความน่าจะเป็นก่อนทดลองไว้ด้วย จะเป็นดังนี้

w	0	1	2	3	4	5
$p(w)$	.05	.05	.30	.35	.15	.10

บริษัทจะต้องผลิตขนมเค็กพิเศษในต้นสัปดาห์เท่าใดดี จึงจะพอกับความต้องการของลูกค้า

ในการแก้ปัญหา เราต้องระบุโครงสร้างของสมาชิกในตัวแบบวิเคราะห์การตัดสินใจเสียก่อน ให้ w เป็นจำนวนเค็กที่จะผลิต และ a เป็นจำนวนเค็กที่ลูกค้าต้องการในระหว่างสัปดาห์ จะเห็นได้ว่า a และ w เป็นตัวแปรที่มีค่าเป็นเลขจำนวนเต็ม และความต้องการในระหว่างสัปดาห์จะไม่มากกว่า 5 เราจึงได้ว่า $w \leq 5$ และ $a \leq 5$ เพราะฉะนั้นกลุ่มสภาวการณ์ W และกลุ่มทางเลือก A จะเป็น

$$A = \{a / a = 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$W = \{w / w = 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

สำหรับฟังก์ชันน่าจะเป็นก่อนทดลอง p ของ W นั้นก็อธิบายได้จากตารางที่ผ่านมานี้ สำหรับฟังก์ชันค่าเสียโอกาสนั้นจะได้หาต่อไป

จะเห็นได้ชัดว่า ถ้าผลิตขนมเค็กเท่ากับความต้องการ แล้วค่าเสียโอกาสจะเป็นศูนย์ (0) แต่ถ้าผลิตเป็นอย่างอื่นก็จะมีค่าเสียโอกาสเกิดขึ้น สมมติว่าผลิตมากกว่าความต้องการ นั่นคือ $a > w$ ในกรณีเช่นนี้บริษัทจะประมาณเกินความต้องการ นั่นคือจะผลิตมากกว่าความต้องการจริงนั่นเอง เนื่องจากขายในระหว่างสัปดาห์ได้เพียง w จึงเหลือ $a - w$ ซึ่งจะขายลดราคาในสัปดาห์ต่อไป ดังนั้นจะสูญเสีย 37 − 17 = 20 บาทต่อหน่วย นั่นคือบริษัทจะสูญเสียสำหรับขนมเค็กที่เหลือ $a - w$ หน่วย เป็น

$$L(a, w) = 20(a - w)$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้า $a < w$ หรือความต้องการมากกว่าผลิต ซึ่งเกิดจากการประมาณต่ำกว่าความต้องการ แล้วบริษัทจะมีค่าเสียโอกาสหน่วยละ 47 − 37 = 10 บาท ดังนั้นฟังก์ชันค่าเสียโอกาสของขนมเค็กที่ผลิตไว้ต่ำกว่าความต้องการถึง $w - a$ หน่วย เป็น

$$L(a, w) = 10(w - a)$$

สำหรับ $a = w$, $L(a, w) = 0$ ดังนั้นเราจะได้ฟังก์ชันค่าเสียโอกาส L สำหรับปัญหาตัดสินใจเป็นดังนี้

$$\begin{aligned} L(a, w) &= 20(a - w), \quad w \le a \\ &= 10(w - a), \quad w > a \end{aligned}$$

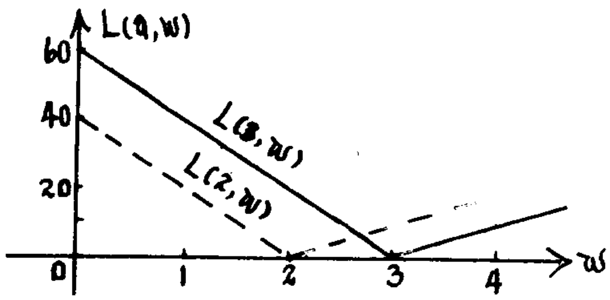
โดยเฉพาะกรณีที่ $a = 2$ และ $a = 3$ เราจะได้

$$\begin{aligned} L(2, w) &= 20(2 - w), \quad w \le 2 \\ &= 10(w - 2), \quad w > 2 \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} L(3, w) &= 20(3 - w), \quad w \le 3 \\ &= 10(w - 3), \quad w > 3 \end{aligned}$$

กราฟของฟังก์ชัน $L(2, w)$ และ $L(3, w)$ แสดงได้ดังนี้



จากรูปกราฟจะเห็นได้ว่าฟังก์ชั่นค่าเสียโอกาส $L(a, w)$ สำหรับ $w \in W$ จะแตกต่างกัน แต่เป็นฟังก์ชั่นเชิงเส้นกับ $A \times W$ ค่าของ $L(a, w)$ สำหรับทางเลือกทั้งหมดใน A เมื่อกำหนด w ใน W ให้ และความน่าจะเป็นก่อนทดลอง แสดงได้ดังตาราง 7 นี้

<u>ตาราง 7</u> ค่าเสียโอกาส $L(a, w)$

	w	0	1	2	3	4	5
	$p(w)$	.05	.05	.30	.35	.15	.10
A	0	0	10	20	30	40	50
	1	20	0	10	20	30	40
	2	40	20	0	10	20	30
	3	60	40	20	0	10	20
	4	80	60	40	20	0	10
	5	100	80	60	40	20	0

ในการพิจารณาทางเลือกที่เหมาะสมตามฟังก์ชั่นก่อนทดลองที่กำหนดให้ เราต้องคำนวณมาตราวัดแบบเบยส์สำหรับทุกทางเลือก a ใน A และเลือกเอาทางเลือกที่มีมาตราวัดแบบเบยส์ต่ำสุด นิยามของมาตราวัดแบบเบยส์กำหนดไว้ว่า

$$B(a) = E[L(a,w)]$$

สำหรับ $a = 2$,

$$\begin{aligned} B(2) &= E[L(2,w)] = \sum_{w \in W} L(2,w)p(w) \\ &= 40(.05) + 20(.05) + \ldots + 30(.10) \\ &= 12.5 \end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกัน เราสามารถคำนวณ $B(a_i)$ สำหรับทางเลือก a_i ต่าง ๆ ได้ เช่น

$$\begin{aligned} B(3) &= E[L(3, w)] \\ &= 60(.05) + 40(.05) + \ldots + 20(.10) \\ &= 14.5 \end{aligned}$$

ผลสุดท้ายเราจะได้ผลสรุปดังตารางต่อไปนี้

<u>ตาราง 8</u> มาตราวัดแบบเบยส์ของค่าเสียโอกาส

a	0	1	2	3	4	5
$B(a)$	28	19.5	12.5	14.5	27	44

ตามเกณฑ์ตัดสินใจแบบเบยส์บริษัทจะผลิตขนมเค็ก 2 หน่วย ดังนั้นทางเลือกที่เหมาะสมนี้จะให้ค่าเสียโอกาสคาดหวังเป็น 12.50 บาท นั่นคือ **PEVPI** จะเท่ากับจำนวนนี้ (12.50) ด้วย และบริษัทขนมปังจะเต็มใจที่จะจ่าย 12.50 บาท สำหรับข้อมูลข่าวสารสมบูรณ์เพื่อที่จะลดความไม่แน่นอนของความต้องการขนมเค็ก

ยังมีวิธีการแบบอื่นซึ่งจะให้ผลสรุปแบบเดียวกัน วิธีการนั้นจะเกี่ยวข้องกับรูปฟอร์มเฉพาะอย่างของฟังก์ชันค่าเสียโอกาส จะได้อธิบายวิธีการนั้นดังนี้ — สำหรับแต่ละทางเลือก $a \in A$ เราคำนวณมาตราวัดแบบเบยส์ $B(a)$ ได้เป็น

$$B(a) = E[L(a,w)] = \sum_{w \in W} L(a,w)\,p(w)$$

$$= \sum_{w \le a} L(a,w)\,p(w) + \sum_{w > a} L(a,w)\,p(w)$$

สำหรับ a 2 เราได้ $B(2) = \sum_{w \le 2} 20(2-w)\,p(w) + \sum_{w > 2} 10(w-2)\,p(w)$

$$= 40p(0) + 20p(1) + 0p(2) + 10p(3) + 20p(4) + 30p(5)$$

$$= 12.50$$

ในทำนองเดียวกัน $B(3) = \sum_{w \le 3} 20(3-w)\,p(w) + \sum_{w > 3} 10(w-3)\,p(w)$

$$= 60p(0) + 40p(1) + 20p(2) + 0p(3) + 10p(4) + 20p(5)$$

$$= 14.50$$

เราคำนวณมาตราวัดแบบเบยส์ $B(a)$ สำหรับทางเลือกที่เหลือ แล้วจะได้ผลดังตาราง 8 ที่แล้วมา และก็ใช้เกณฑ์ตัดสินใจแบบเบยส์เพื่อหาทางเลือกที่เหมาะสม

ข้อได้เปรียบของวิธีนี้ก็เพียงแต่ไม่ต้องคำนวณตารางค่าเสียโอกาส (ตาราง 7) สำหรับใช้หามาตราวัดแบบเบยส์ อย่างไรก็ตามการสร้างตารางค่าเสียโอกาสจะใช้เวลามากและเป็นที่น่าเบื่อหน่าย วิธีการแบบใหม่นี้ได้ชื่อว่า วิธีคาดหวัง (**Expectations Method**) สำหรับวิธีการที่กล่าวมาตอนแรกเรียกว่า วิธีธรรมดา (**Longhand Method**) ขั้นตอนต่อไปนี้จะแสดงถึงวิธีคาดหวัง

– พิจารณา A, W, L, p
– แต่ละ $a \in A$ คำนวณ $B(a)$

$$B(a) = \sum_{w \leq a} L(a,w)p(w) + \sum_{w > a} L(a,w)p(w)$$

- ถ้า $B(a)$ หาค่าไม่ได้ ก็ไม่มีวิธีแก้ปัญหา

  ถ้า $B(a)$ หาค่าได้ ก็คำนวณหา $B(a^{\circ})$

$$B(a^{\circ}) = \min_{a_i \in A} \{B(a)\}$$

- เลือก a°

(2) การวิเคราะห์แบบเพิ่ม (Incremental Analysis or Marginal Analysis) การวิเคราะห์ที่กล่าวมาใน (1) นั้นจะใช้เวลามาก และน่าเบื่อหน่าย ถ้าจำนวนทางเลือกในกลุ่มทางเลือกมีมาก เพื่อหลีกเลี่ยงความยุ่งยากเหล่านั้น เราก็ใช้วิธีการอื่นที่เรียกว่า การวิเคราะห์แบบเพิ่ม ซึ่งจะเกี่ยวข้องหน่วยสุดท้ายที่ควรจะเพิ่ม และไม่ต้องคำนวณจริง ๆ นอกจากนี้ยังเกี่ยวข้องกับหน่วยก่อน ๆ ในลำดับหรืออนุกรม ดังนั้นวิธีการวิเคราะห์แบบเพิ่มนี้จะเกี่ยวข้องกับหน่วยสุดท้ายที่ j ซึ่งควรจะผลิตหรือเก็บไว้ ไม่ใช่ควรจะเก็บไว้ j หน่วย และการตัดสินแบบนี้จะทำเป็นแบบลำดับ ก่อนที่จะแสดงว่าการตัดสินใจนั้นทำอย่างไร จะขออธิบายถึงหลักการเหตุผลของการวิเคราะห์แบบเพิ่ม ดังนี้

ในการตัดสินใจว่าจะผลิต (เก็บ หรือซื้อ) หน่วยแรกหรือไม่ (ซึ่งเหมือนกับตัดสินใจว่าจะผลิตขนมเค็กเพียงอันเดียวหรือไม่) นั้น เราจะมีทางเลือกที่เป็นไปได้ 2 ทางเลือก คือ "ผลิต" หรือ "ไม่ผลิต" ขนมเค็กหน่วยแรก และสภาวการณ์ก็มีเพียง 2 เท่านั้น คือ "มีความต้องการ" หรือ "ไม่มีความต้องการ" ขนมเค็กหน่วยแรก

ถ้าผลิตหน่วยแรก และมีความต้องการในหน่วยแรกระหว่างสัปดาห์นั้น แล้วค่าเสียโอกาสจะเป็น 0 แต่ถ้าไม่มีความต้องการในหน่วยแรก (แต่จะขายได้ในสัปดาห์ต่อไป) จะมีค่าเสียโอกาสเป็น 10 บาท

ในทำนองเดียวกัน ถ้าไม่ผลิตหน่วยแรก แล้วค่าเสียโอกาสเป็น 0 ในเมื่อไม่มีความต้องการ และเป็น 20 บาท ในเมื่อมีความต้องการระหว่างสัปดาห์ (มีความต้องการแต่ไม่ได้ผลิต) ผลเหล่านั้นแสดงได้ดังตาราง 9

ตาราง 9 ค่าเสียโอกาสสำหรับขนมเค็กหน่วยแรก

A \ W	มีความต้องการหน่วยแรก	ไม่มีความต้องการหน่วยแรก
ผลิตหน่วยแรก	0	20
ไม่ผลิตหน่วยแรก	10	0

เราคำนวณค่าเสียโอกาสคาดหวังสำหรับแต่ละทางเลือกได้ ในการคำนวณ เราจะต้องมีความน่าจะเป็นของ "มีความต้องการหน่วยแรก" และ "ไม่มีความต้องการหน่วยแรก" แต่ความน่าจะเป็นของความต้องการหน่วยแรกจะเป็นเช่นเดียวกับความน่าจะเป็นที่ปริมาณต้องการทั้งหมดเป็น 1 หน่วย หรือมากกว่า ในทำนองเดียวกัน ความน่าจะเป็นของไม่มีความต้องการหน่วยแรก จะเป็นเช่นเดียวกับความน่าจะเป็นที่ความต้องการทั้งหมดจะน้อยกว่าหนึ่งหน่วย นั่นคือความน่าจะเป็นของ "ความต้องการหน่วยแรก" จะเป็น $P(W \geq 1)$ และความน่าจะเป็นของ "ไม่มีความต้องการหน่วยแรก" จะเป็น $P(W < 1)$ ความน่าจะเป็นเหล่านี้แสดงได้ดังตารางต่อไปนี้

ตาราง 10 ความน่าจะเป็นในรูปฟอร์ม $(W \geq j)$ และ $(W < j)$

$W = j$	$P(W)$	$P(W < j)$	$P(W \geq j)$
0	.05	.00	1.00
1	.05	.05	.95
2	.30	.10	.90
3	.35	.40	.60
4	.15	.75	.25
5	.10	.90	.10
6	.00	1.00	.00

จากตารางนี้จะเห็นว่า $P(W < 1) = .05$ และ $P(W \geq 1) = .95$ ดังนั้นค่าเสียโอกาสคาดหวังของการผลิตหน่วยแรก E_1 และค่าเสียโอกาสคาดหวังของการไม่ผลิตหน่วยแรก E_2 จะเป็น

$$E_1 = 0(.95) + 20(.05) = 1$$

$$E_2 = 10(.95) + 0(.05) = 9.5$$

เนื่องจาก $E_1 < E_2$ จึงผลิตหน่วยแรก

ต่อไปก็ทำการตัดสินใจว่าจะผลิตหน่วยที่สองหรือไม่ เช่นเดียวกันเราต้องหาค่าเสียโอกาสของ "การผลิต" หรือ "ไม่ผลิต" หน่วยที่สอง ภายใต้สภาวการณ์ "มีความต้องการ" และ "ไม่มีความต้องการ" หน่วยที่สอง ค่าเสียโอกาสจะได้เหมือนกับตาราง 9 นั่น

เอง เพียงแต่ความน่าจะเป็นของ "มีความต้องการ" และ "ไม่มีความต้องการ" หน่วยที่สองเปลี่ยนไปเท่านั้น ความน่าจะเป็นของ "มีความต้องการหน่วยที่สอง" ก็คือความน่าจะเป็นของความต้องการทั้งหมดเป็น 2 หน่วยหรือมากกว่า นั่นคือ $P(W \geq 2) = .90$ ในทำนองเดียวกันความน่าจะเป็นของ "ไม่มีความต้องการหน่วยที่สอง" ก็จะเป็นความน่าจะเป็นของความต้องการทั้งหมดน้อยกว่า 2 นั่นคือ $P(W < 2) = .10$ เพราะฉะนั้นค่าเสียโอกาสคาดหวัง E_1 และ E_2 จะเป็น

$$E_1 = 0(.90) + 20(.10) = 2.00$$

และ $$E_2 = 10(.90) + 0(.10) = 9.00$$

ดังนั้นบริษัทควรจะผลิตขนมเค็กหน่วยที่สองด้วย ($E_1 < E_2$) นั่นคือเขาควรจะผลิตขนมเค็กอย่างน้อย 2 หน่วย

ดำเนินขบวนการนี้ต่อไปเราจะได้ตารางค่าเสียโอกาสของ "การผลิต" หรือ "ไม่ผลิต" หน่วยที่ j ดังตารางต่อไปนี้

ตาราง 11 ค่าเสียโอกาสสำหรับขนมเค็กหน่วยที่ j

A \ W	มีความต้องการหน่วยที่ j	ไม่มีความต้องการหน่วยที่ j
ผลิตหน่วยที่ j	0	20
ไม่ผลิตหน่วยที่ j	10	0

และได้ค่าเสียโอกาสคาดหวัง E_1 และ E_2 เป็น

$$E_1 = 0P(W \geq j) + 20P(W < j) = 20P(W < j)$$

$$E_2 = 10P(W \geq j) + 0P(W < j) = 10P(W \geq j)$$

แล้วทำการเปรียบเทียบค่าเสียโอกาสคาดหวังทั้งสองนี้ว่าควรจะผลิต หรือไม่ผลิต ถ้าเราทำการคำนวณสำหรับขนมเค็กทุก ๆ หน่วย เราจะได้ผลดังตารางต่อไปนี้

ตาราง 12 ค่าเสียโอกาสคาดหวังแบบเพิ่ม (Incremental Expected Opportunity Losses)

ต้องการขนมเค็ก หน่วยที่ j	$P(W \geq j)$	E_2	$P(W < j)$	E_1
1	.95	9.5	.05	1.0

j $\boxed{2}$	.90	E_2 $\boxed{9.0}$	.10	E_1 $\boxed{2.0}$
3	.60	6.0	.40	8.0
4	.25	2.5	.75	15.0
5	.10	1.0	.90	18.0
6	0	0	1.00	20.0

E_1: ค่าเสียโอกาสคาดหวังที่ผลิตหน่วยที่ j

E_2: ค่าเสียโอกาสคาดหวังที่ไม่ผลิตหน่วยที่ j

เราใช้ข้อมูลข่าวสารในตาราง 12 นี้ทำการตัดสินใจเกี่ยวกับจำนวนขนมเค็กที่จะผลิตหรือเก็บไว้ จากแถวตั้งที่ 3 และ 5 ของตารางเราจะเห็นว่า

- ค่าเสียโอกาสคาดหวังที่ไม่ผลิตแต่ละหน่วยต่อ ๆ ไป จะน้อยกว่าหน่วยแรก ๆ ที่ติดกัน
- ค่าเสียโอกาสคาดหวังที่ผลิตแต่ละหน่วยต่อ ๆ ไป จะมากกว่าหน่วยแรก ๆ ที่ติดกัน

ผลอันนี้ไม่ใช่มาจากความบังเอิญ หรือโชคช่วย ความจริงแถวตั้งที่ 3 นั้น จำนวนเลขได้จาก $10P(w \geq j)$ สำหรับ $j_1 \leq j_2$ เราจะเห็นว่า

$$P(w \geq j_1) \geq P(w \geq j_2)$$

ซึ่งหมายความว่า ค่าเสียโอกาสคาดหวังที่ไม่ผลิตหน่วยที่ j_1 จะมากกว่าหรือเท่ากับค่าเสียโอกาสคาดหวังที่ไม่ผลิตหน่วยที่ j_2 ในทำนองเดียวกัน สำหรับแถวตั้งที่ 5 เราจะได้ผลว่า ค่าเสียโอกาสคาดหวังที่ผลิตหน่วยที่ j_1 จะน้อยกว่า หรือเท่ากับผลิตหน่วยที่ j_2 ทั้งนี้ก็เพราะ $P(w < j_1) \leq P(w < j_2)$ ในเมื่อ $j_1 \leq j_2$ การลดลงของค่าเสียโอกาสคาดหวังแบบเพิ่มในแถวตั้งที่ 3 และการเพิ่มขึ้นของค่าเสียโอกาสคาดหวังแบบเพิ่มในแถวตั้งที่ 5 (ดังตาราง 12) นั้น จะแนะนำทางเลือก ณ จุดที่มีขนาดของค่าสูญเสียคาดหวังเหล่านี้ได้เปลี่ยนแปลงทางเลือกนั้นก็คือ "ผลิตขนมเค็กอันที่ 3" ซึ่งค่าเสียโอกาสคาดหวังแบบเพิ่มที่ไม่ผลิตหน่วยที่ 3 จะน้อยกว่าที่ผลิตหน่วยที่ 3 เราสังเกตได้ว่าสำหรับการตัดสินใจของหน่วย j ก่อนนั้น ค่าเสียโอกาสคาดหวังแบบเพิ่มที่ไม่ผลิตหน่วยที่ j จะมากกว่าที่ผลิตหน่วยที่ j เพราะฉะนั้นทางเลือกที่เหมาะสมก็คือ "ผลิตหน่วยที่ 2" นั่นก็คือบริษัทจะผลิตขนมเค็กเพียง 2 หน่วย

การวิเคราะห์ที่กล่าวมาแล้วจะให้ทางเลือกที่เหมาะสมด้วยการพิจารณาตัดสินใจแบบง่าย ๆ อย่างไรก็ตามวิธีนี้จะไม่ให้มาตราวัดแบบเบยส์ของทางเลือกที่เหมาะสม (ผลิต j หน่วย) แก่เรา เราจึงต้องใช้วิธีคาดหวังคำนวณมาตราวัดแบบเบยส์ของทางเลือกที่เหมาะสม มาตราวัดแบบเบยส์ของการผลิต 2 หน่วย คำนวณได้เป็น

$$
\begin{aligned}
\mathcal{B}(2) &= E[L(2,w)] \\
&= \sum_{w \le 2} 20(2-w)p(w) + \sum_{w>2} 10(w-2)p(w) \\
&= 40(.05) + 20(.05) + 0(.30) + 10(.35) + 20(.15) \\
&\qquad + 30(.10) \\
&= 12.5
\end{aligned}
$$

ยังมีวิธีการอื่นที่จะหา $\mathcal{B}(2)$ อีก วิธีการใหม่นี้จะเกี่ยวข้องกับการใช้ค่าสูญเสียโอกาสคาดหวังแบบเพิ่มจากตาราง 12 มาพิจารณา

$$
\begin{aligned}
\mathcal{B}(2) &= \sum_{w \in W} L(2,w)p(w) \\
&= \sum_{w \le 2} 20(2-w)p(w) + \sum_{w>2} 10(w-2)p(w) \\
&= 40p(0) + 20p(1) + 0p(2) + 10p(3) + 20p(4) + 30p(5) \\
&= 20p(0) + \{20p(0) + 20p(1)\} + 10p(3) + 20p(4) \\
&\qquad + 30p(5) \\
&= 20P(W<1) + 20P(W<2) + 10[P(W \ge 3) - P(W \ge 4)] \\
&\qquad + 20[P(W \ge 4) - P(W \ge 5)] + 30[P(W \ge 5) - P(W \ge 6)] \\
&= \{20P(W<1) + 20P(W<2)\} + \{10P(W \ge 3) + 10P(W \ge 4) \\
&\qquad + 10P(W \ge 5)\}; \quad P(W \ge 6) = 0 \\
&= 20\sum_{w \le 2} P(W<j) + 10\sum_{w>2} P(W \ge j)
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $\mathcal{B}(2)$ = ผลรวมของค่าเสียโอกาสคาดหวังแบบเพิ่มที่ผลิตขนมเค็กจนถึงหน่วยที่สอง + ผลรวมของค่าเสียโอกาสคาดหวังที่ไม่ผลิตหน่วยที่ 3, 4, 5

ตามวิธีการนี้เราสามารถคำนวณมาตราวัดแบบเบยส์ของทางเลือกใด ๆ ใน A ได้ดังนี้

$$B(a) = \{20P(w<1) + 20P(w<2) + \ldots + 20P(w<a)\} + \{10P(w \geq a+1) + 10P(w \geq a+2) + \ldots + 10P(w \geq a_n)\}$$

$$= 20\sum_{w \leq a} P(w < j) + 10\sum_{w > a} P(w \geq j)$$

ในเมื่อ a_n เป็นทางเลือกสุดท้ายของปัญหาตัดสินใจ (สำหรับปัญหาของการผลิตขนมเค็กนั้น $a_n = 5$)

เมื่อเราแทนความน่าจะเป็นในรูปฟอร์ม $P(w < j)$ และ $P(w \geq j)$ นั้น เราก็สามารถคำนวณ $B(2)$ ได้เป็น 12.5 ในทำนองเดียวกัน เมื่อ $a = 0, 1, 3, 4,$ และ 5 เราก็จะคำนวณมาตราวัดแบบเบยส์ได้ดังตาราง 8 เช่นเดียวกัน

ดังนั้นในการประยุกต์การวิเคราะห์แบบเพิ่มต่อปัญหาการตัดสินใจใด ๆ เราจะเริ่มด้วยการตัดสินหน่วยแรก ถ้าการผลิตหน่วยแรกภายใต้ฟังก์ชันน่าจะเป็นก่อนทดลองที่กำหนดให้นั้นไม่เหมาะสม แล้วทางเลือกที่เหมาะสมก็คือผลิต 0 หน่วย หรือไม่ผลิตนั่นเอง และการวิเคราะห์ก็จบลง แต่ถ้าการผลิตหน่วยแรกเหมาะสม เราก็พิจารณาว่าการผลิตหน่วยที่สองจะเหมาะสมหรือไม่ เราก็ทำแบบนี้เรื่อย ๆ ไป จนกระทั่งเราพบว่าการผลิตหน่วยที่ j (บางค่าของ j) นั้นไม่เหมาะสม แล้วทางเลือกที่เหมาะสมคือผลิต $(j - 1)$ หน่วย

ต่อไปเราจะพัฒนาการวิเคราะห์แบบเพิ่มในรูปฟอร์มทั่ว ๆ ไป — ให้ **Lu** เป็นค่าเสียโอกาสที่ประมาณไว้ต่ำเกินไป (**Underestimation**) นั่นคือเป็นค่าเสียโอกาสที่ไม่ได้ผลิตหน่วยที่ j ในเมื่อมีความต้องการ และ **Lo** เป็นค่าเสียโอกาสที่ประมาณไว้มากเกินไป (**Overestimation**) นั่นคือเป็นค่าเสียโอกาสที่ผลิตหน่วยที่ j แต่ไม่มีความต้องการ แล้วเราจะได้ตารางต่อไปนี้

	W	มีความต้องการหน่วยที่ j	ไม่มีความต้องการหน่วยที่ j
A	ผลิตหน่วยที่ j : a_1	0	Lo
	ไม่ผลิตหน่วยที่ j : a_2	Lu	0

จากข้อมูลข่าวสารในตารางนี้ เราสามารถคำนวณค่าเสียโอกาสคาดหวัง สำหรับทางเลือก "ผลิตหน่วยที่ j" ซึ่งให้เป็น $B(a_1)$ และทางเลือก "ไม่ผลิตหน่วยที่ j" ให้เป็น $B(a_2)$ นั่นคือ

$$B(a_1) = 0P(w \geq j) + L_oP(w < j) = L_oP(w < j)$$

และ $$B(a_2) = L_uP(w \geq j) + 0P(w < j) = L_uP(w \geq j)$$

แล้วเราจะเลือกเอาทางเลือก "ผลิตหน่วยที่ j" ก็ต่อเมื่อ

$$B(a_1) \leq B(a_2)$$

หรือ $$L_oP(w < j) \leq L_uP(w \geq j)$$

มันอาจจะเป็นไปได้ที่ j หลาย ๆ ค่าสอดคล้องกับอสมการนี้ ถ้าเป็นเช่นนั้นเราจะเลือกที่มีค่าสูงสุด ซึ่งสอดคล้องกับอสมการ อสมการนี้สามารถเขียนได้เป็น

$$L_oP(w < j) \leq L_u\{1 - P(w < j)\}$$

$$(L_o + L_u)\,P(w < j) \leq L_u$$

นั่นคือ $$P(w < j) \leq L_u/(L_u + L_o) = p^o$$

ดังนั้น "ผลิตหน่วยที่ j" จะเป็นทางเลือกที่เหมาะสม ก็ต่อเมื่อ j ที่สูงสุด สอดคล้องกับอสมการ

$$P(w < j) \leq p^o$$

ค่า p^o นี้เรียกว่า "ค่าวิกฤต (Critical Value)" เราจะเห็นได้ว่าอสมการข้างบนนี้ง่ายที่จะนำไปใช้พิจารณาทางเลือกที่ดีที่สุดในปัญหาตัดสินใจ ขั้นตอนในการนำอสมการนี้ไปใช้จะเป็น

- พิจารณา L_o, L_u
- คำนวณ $p^o = L_u/(L_u + L_o)$
- คำนวณความน่าจะเป็นในรูปฟอร์ม $P(w < j)$ จากฟังก์ชั่นน่าจะเป็นก่อนทดลองที่กำหนดให้
- เลือกค่า j ที่สูงที่สุดที่ทำให้ $P(w < j) \leq p^o$
- ทางเลือกที่ดีที่สุดก็คือ "ผลิตหรือเก็บไว้ j หน่วย"

วิธีการแบบนี้ง่าย และสะดวกต่อการพิจารณาทางเลือกที่เหมาะสม เพราะไม่ต้องไปคำนวณค่าเสียโอกาสคาดหวังแบบเพิ่ม (ดังตาราง 12) และการเลือกทางเลือกที่ดีก็โดยการเปรียบเทียบแถวตั้ง 3 กับ 5 วิธีการแบบนี้จะให้ชื่อว่า "วิธีวิเคราะห์แบบเพิ่มโดยใช้ค่าวิกฤต" สำหรับปัญหาของเราที่กล่าวมานั้นถ้าใช้วิธีการนี้ เราจะได้ว่า

$L_o = 20$ และ $L_u = 10$

$$p^{\circ} = L_u/(L_u + L_o) = 10/(10 - 20) = .3333$$

สำหรับความน่าจะเป็นในรูปฟอร์ม $P(w < j)$ จะหาได้ดังนี้

$w = j$	0	1	2	3	4	5	6
$p(w)$	.05	.05	.30	.35	.15	.10	0
$P(w<j)$	0	.05	.10	.40	.75	.90	1.00
$P(w \geq j)$	1.00	.95	.90	.60	.25	.10	0

จากตารางนี้เราจะเห็นว่าค่า j ที่สูงสุดที่สอดคล้องอสมการ $P(w < j) < .3333$ คือ 2 เพราะฉะนั้นบริษัทควรจะผลิตขนมเค็ก 2 หน่วยในตอนต้นของทุกสัปดาห์ ต่อไปเราจะหามาตราวัดแบบเบยส์ของการผลิต 2 หน่วย

โดยทั่วไปถ้าทางเลือก "ผลิต j หน่วย" เป็นทางเลือกที่เหมาะสม แล้วมาตราวัดแบบเบยส์ $B(j)$ จะกำหนดให้เป็น

$$B(j) = \sum_{w \leq j} L(j, w)p(w) + \sum_{w > j} L(j, w)p(w)$$

อย่างไรก็ตามฟังก์ชันค่าเสียโอกาส $L(j, w)$ สามารถหาได้เป็น

$$\begin{aligned} L(j, w) &= L_o(j - w), \quad w \leq j \\ &= L_u(w - j), \quad w > j \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น
$$\begin{aligned} B(j) &= \sum_{w \leq j} L_o(j-w)p(w) + \sum_{w>j} L_u(w-j)p(w) \\ &= L_o \sum_{a=1}^{j} P(w<a) + L_u \sum_{a>j}^{w_m} P(w \geq a) \end{aligned}$$

ในเมื่อ w_m เป็นสภาวการณ์สุดท้ายของปัญหาตัดสินใจ

ตามตัวอย่างของเรา $L_o = 20$, $L_u = 10$, และ $j = 2$

$$\begin{aligned} B(2) &= \sum_{w \leq 2} 20(2 - w)p(w) + \sum_{w>2}^{5} 10(w - 2)p(w) \\ &= 20\sum_{a \leq 2} P(w < a) + 10 \sum_{a>2}^{5} P(w \geq a) \\ &= 20(.00 + .05 + .10) + 10(.60 + .25 + .10) \\ &= 3 + 9.50 = 12.50 \end{aligned}$$

สมการนี้เหมือนกับที่กล่าวมาแล้วคือ

$$\mathcal{B}(2) = E[L(2, w)] = \sum_{w \le 2} 20(2 - w)p(w) + \sum_{w > 2} 10(w - 2)p(w)$$
$$= 20\sum_{a=1}^{2} P(w < a) + 10\sum_{a > 2} P(w \geq a)$$

ขั้นตอนต่อไปนี้จะแสดงถึงการวิเคราะห์แบบเพิ่มโดยใช้ค่าวิกฤต

- พิจารณา A, W, p, และฟังก์ชันค่าเสียโอกาส $L: A \times W \longrightarrow R^+$
- พิจารณา L_o จากฟังก์ชัน L
    - พิจารณา L_u จากฟังก์ชัน L
    - คำนวณ $P(w < j)$ สำหรับแต่ละ j
    - เลือก j ที่มากที่สุดซึ่งสอดคล้องกับอสมการ $P(w<j) \leq p^o$
    - คำนวณมาตราวัดแบบเบยส์ $\mathcal{B}(j)$ ของการผลิต j หน่วย
    - เลือกผลิต j หน่วย

7. <u>ปัญหาทั่วไปของการผลิตหรือเก็บสินค้า</u> **(General Inventory Problems)**

ปัญหาเรื่องการผลิตขนมเค็กที่กล่าวมาแล้วนั้นเป็นส่วนหนึ่งของปัญหาการผลิตหรือการเก็บสินค้า ในปัญหานั้นเราไม่ได้สนใจแนวความคิดที่สำคัญบางอย่างของปัญหาการผลิตหรือการเก็บสินค้า นั่นคือค่าใช้จ่ายที่เก็บไว้ (**Holding costs**) และค่าใช้จ่ายชดเชย **(Penalty (Good-will) costs)** ในตอนนี้เราจะกล่าวถึงแนวความคิดเหล่านี้ และจะอธิบายวิธีวิเคราะห์ เช่นเดียวกันเราจะพิจารณาฟังก์ชันค่าเสียโอกาส และการวิเคราะห์ตามฟังก์ชันกำไร หรือค่าใช้จ่ายจะเหมือนกัน

กำหนด a ให้เป็นจำนวนหน่วยที่จะเก็บไว้ระหว่างคาบเวลาที่วางแผนไว้, w ให้เป็นจำนวนหน่วยที่ต้องการระหว่างคาบเวลานั้น, p เป็นราคาขายต่อหน่วย, c เป็นราคาซื้อต่อหน่วย, h เป็นค่าใช้จ่ายที่เก็บไว้, s เป็นราคาที่ลดลงต่อหน่วย, และ r เป็นค่าชดเชยต่อหน่วย

ให้ A, W, และ p เป็นกลุ่มทางเลือก, กลุ่มสภาวการณ์, และฟังก์ชันน่าจะเป็นที่เกี่ยวพันกับปัญหาตัดสินใจ นั่นคือ

$$A = \{a / a = 0, 1, \ldots, m\}$$
$$W = \{w / w = 0, 1, \ldots, m\}$$
และ $p: W \longrightarrow [0, 1]$

สำหรับฟังก์ชั่นค่าเสียโอกาส L ใน $A \times W$ หาได้ดังนี้

$$L(a, w) = 0 \quad \text{สำหรับ } a = w$$

พิจารณา $a > w$ ซึ่งกรณีนี้จะมีสินค้าที่ขายไม่ได้จากคาบเวลานั้นเป็น $a - w$ หน่วย และเราสมมติว่าจะขายได้ในคาบเวลาต่อไปด้วยราคาที่ลดแล้วคือ s ต่อหน่วย ค่าเสียโอกาสของหน่วยใด ๆ ใน $a - w$ หน่วย จะเป็น $c + h - s$ เราจะสมมติว่า $c > s$ ในทำนองเดียวกันถ้า $a < w$ (นั่นคือประมาณความต้องการไว้ต่ำเกินไป) แล้วค่าเสียโอกาสของหน่วยใด ๆ ใน $w - a$ หน่วย จะเป็น $p - c + r$ เพราะฉะนั้นฟังก์ชั่นเสียโอกาสสำหรับปัญหาการผลิต หรือการเก็บสินค้าทั่วไป จะเป็น

$$\begin{aligned} L(a, w) &= (c + h - s)(a - w), \quad w \le a \\ &= (p - c + r)(w - a), \quad w > a \end{aligned}$$

ดังนั้นเมื่อ $a = j$ เราจะได้ค่าเสียโอกาสของการประมาณไว้มากเกินไปจะเป็น $L_o = c + h - s$ และประมาณไว้ต่ำเกินไปจะเป็น $L_u = p - c + r$

สำหรับมาตราวัดแบบเบยส์ $B(a)$ สำหรับทางเลือก a ใน A จะคำนวณได้เป็น

$$B(a) = \sum_{w \le a} (c + h - s)(a - w)p(w) + \sum_{w > a} (p - c + r)(w - a)p(w)$$

แล้วเราก็ใช้เกณฑ์ตัดสินใจแบบเบยส์ประยุกต์ นั่นคือใช้

$$B(a^{\circ}) = \min_{a \in A} \{B(a) = E[L(a, w)]\}$$

พิจารณาทางเลือกที่เหมาะสม a° หรือเราจะใช้วิธีวิเคราะห์แบบเพิ่มโดยใช้ค่าวิกฤตประยุกต์เพื่อหาทางเลือกที่เหมาะสมก็ได้ ต่อไปจะพิจารณาปัญหาและใช้วิธีวิเคราะห์ทั้งสองแบบนั้นประยุกต์

<u>ตัวอย่าง</u> บริษัทหนึ่งมีความชำนาญพิเศษในการขายผลไม้สด ในต้นสัปดาห์ผู้จัดการจะซื้อผลไม้ต่าง ๆ ไว้ตามความต้องการของลูกค้า และจะขายหมดในอาทิตย์นั้น ถ้ามีของเหลือก็จะขายลดราคาในสัปดาห์ต่อไป

ลองพิจารณาผลไม้ชนิดหนึ่ง สมมติว่าเป็นลำไย ซึ่งผู้จัดการจะซื้อไว้ จากประสบการณ์เขาทราบว่าความต้องการของลูกค้าจะไม่มากกว่า 10 กก. ถ้าลำไยราคา กก.ละ 10

บาท แต่จะขายได้ 35 บาท และถ้าลำไยเหลือจากการขายในอาทิตย์นั้น ก็จะขายลดราคาเหลือเป็น 7 บาทต่อ กก. สมมติว่าค่าเก็บสำหรับลำไยที่เหลือเป็น กก.ละ 2 บาท และเมื่อไม่พอขายผู้จัดการจะสูญเสีย กก.ละ 3 บาท

ผู้จัดการจะซื้อลำไยไว้เท่าใดดี ? ถ้าผู้จัดการทราบฟังก์ชันน่าจะเป็นก่อนทดลองว่าเป็นดังนี้

$w = j$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p(w)$	.01	.03	.05	.15	.20	.25	.15	.13	.02	.01	0

ให้ a เป็นจำนวนลำไยที่ต้องซื้อไว้ระหว่างสัปดาห์ และ w เป็นจำนวนลำไยที่ลูกค้าต้องการในสัปดาห์นั้น นั่นคือ

$$A = \{a / a = 0, 1, 2, \ldots, 10\}$$
$$W = \{w / w = 0, 1, 2, \ldots, 10\}$$

ฟังก์ชันน่าจะเป็นก่อนทดลอง p จะเป็นดังตารางข้างบน และจากปัญหานั้นเราได้อีกว่า

$$p = 35, \quad c = 10, \quad h = 2, \quad s = 7, \quad r = 3$$

เพราะฉะนั้นฟังก์ชันค่าเสียโอกาส L จะเป็น

$$\begin{aligned} L(a, w) &= (10 + 2 - 7)(a - w) = 5(a - w), \quad w \leq a \\ &= (35 - 10 + 3)(w - a) = 28(w - a), \quad w > a \end{aligned}$$

มาตรวัดแบบเบยส์ของทางเลือก a จะเป็น

$$\begin{aligned} B(a) &= \sum_{w \leq a} 5(a - w)p(w) + \sum_{w > a} 28(w - a)p(w) \\ &= 5\sum_{j=1}^{a} P(w < j) + 28\sum_{j=a}^{a_n} P(w > j) \end{aligned}$$

ถ้าซื้อไว้เพียง 2 กก. ก็จะได้

$$\begin{aligned} B(2) &= \{10(.01) + 5(.03) + 0(.05)\} + \{28(.15) \\ &\quad + 56(.20) + \ldots + 196(.01)\} \\ &= 76.97 \end{aligned}$$

สำหรับทางเลือกอื่น ๆ ก็จะหามาตรวัดแบบเบยส์ได้แบบเดียวกัน นั่นคือผลของการคำนวณมาตรวัดแบบเบยส์ของทางเลือกอื่น ๆ จะเป็น

W	0	1	2	3	4	5
$B(a)$	131.32	103.65	76.97	51.94	31.86	18.38

	6	7	8	9	10
	13.15	12.87	16.88	21.55	26.55

จากตารางนี้เมื่อใช้เกณฑ์ตัดสินใจแบบเบยส์ เราจะได้ทางเลือกที่เหมาะสมเป็น "ซื้อลำใย 7 กก." ซึ่งมีมาตราวัดแบบเบยส์เป็น 12.87 ดังนั้นบริษัทควรจะเต็มใจที่จะจ่าย 12.87 เพื่อที่จะได้ข้อมูลข่าวสารสมบูรณ์เกี่ยวกับความต้องการสำหรับลำใย นั่นคือค่าใช้จ่ายของความไม่แน่นอน หรือ PEVPI เป็น 12.87

ถ้าเราใช้วิธีแบบเพิ่มโดยใช้ค่าวิกฤตพิจารณาจำนวนที่เหมาะสมในการซื้อลำใย ก็จะทำได้ดังนี้ — เรามีทางเลือกเป็น "ซื้อลำใย กก.ที่ j " และ "ไม่ซื้อลำใย กก.ที่ j " กับมีสภาวการณ์เป็น "มีความต้องการ กก.ที่ j " และ "ไม่มีความต้องการ กก.ที่ j " แล้วตารางค่าเสียโอกาสจะเป็น

	W	มีความต้องการ กก.ที่ j	ไม่มีความต้องการ กก.ที่ j
A	ซื้อ กก.ที่ j	0	10 + 2 − 7 = 5
	ไม่ซื้อ กก.ที่ j	35 − 10 + 3 = 28	0

ค่าวิกฤต p^{o} คำนวณได้เป็น $p^{o} = L_u/(L_u + L_o)$

$$= 28/(28 + 5) = .8484$$

สำหรับความน่าจะเป็นในรูปฟอร์ม $P(w < j)$ และ $P(w \geq j)$ จะเป็นดังตารางต่อไปนี้

$w = j$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p(w)$	.01	.03	.05	.15	.20	.25	.15	.13	.02	.01	0
$P(w<j)$	0	.01	.04	.09	.24	.44	.69	.84	.97	.99	1.0
$P(w \geq j)$	1.0	.99	.96	.91	.76	.56	.31	.16	.03	.01	0

จากตารางนี้เราจะเห็นว่าค่าสูงสุดของ j ที่สอดคล้องกับอสมการ $P(w < j) \leq .8484$ คือ $j = 7$ เพราะฉะนั้นบริษัทควรจะซื้อลำใย 7 กก. ซึ่งเป็นคำตอบเดียวกับวิธีคาดหวัง และค่าเสียโอกาสคาดหวังของการซื้อลำใย 7 กก. จะเป็น 12.87 ซึ่งคำนวณได้ดังนี้

$$\mathcal{B}(7) = 5(0 + .01 + .04 + .09 + .24 + .44 + .69 + .84) + 28(.03 + .01)$$

$$= 5(2.35) + 28(.04) = 12.87$$

8. <u>ปัญหาวิเคราะห์การตัดสินใจชนิดชั้นเดียวที่มีฟังก์ชั่นหนาแน่นน่าจะเป็นก่อนทดลอง</u>

ที่ผ่านมาเราได้พิจารณาปัญหาตัดสินใจที่มีกลุ่มสภาวการณ์เป็นจำนวนจำกัด และกลุ่มทางเลือกเป็นเซทที่ประกอบด้วยทางเลือกเพียงสอง หรือหลายทางเลือก แล้วเราก็พิจารณาทางเลือกที่เหมาะสมตามฟังก์ชั่นมวลน่าจะเป็นก่อนทดลองที่กำหนดให้ การวิเคราะห์แบบเดียวกันนี้จะใช้กับปัญหาตัดสินใจที่มีกลุ่มสภาวการณ์ หรือกลุ่มทางเลือกมีจำนวนไม่จำกัดที่นับได้ (**Countably Infinite**) แต่ก็มีความแตกต่างในการวิเคราะห์อยู่ที่เราต้องคำนวณผลรวมไม่จำกัด (**Infinite Summation**) ในรูปฟอร์ม

$$\mathcal{B}(a) = \sum_{w \in W} L(a, w)\,p(w)$$

เพื่อที่จะหามาตราวัดแบบเบยส์ของทางเลือก a ใน A ในบางกรณี $\mathcal{B}(a)$ หาไม่ได้ ซึ่งเราจะพูดว่ามาตราวัดแบบเบยส์สำหรับทางเลือกนั้นหาไม่ได้ และปัญหาที่พิจารณานั้นจะไม่มีวิธีแก้ปัญหา แต่ถ้า $\mathcal{B}(a)$ หาได้สำหรับแต่ละทางเลือก a ใน A แล้วเราสามารถพิจารณาทางเลือกที่เหมาะสมของปัญหานั้นได้

สมมติว่า W เป็นเซทที่ต่อเนื่อง นั่นคือสภาวการณ์ W เป็นตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่อง ในกรณีนี้ฟังก์ชั่นน่าจะเป็นก่อนทดลองของ p จะเป็นฟังก์ชั่นหนาแน่นน่าจะเป็นแบบต่อเนื่อง และเราจะแทนฟังก์ชั่นหนาแน่นน่าจะเป็นก่อนทดลองของ w ด้วย $f(w)$ ในตอนแรกนี้จะพิจารณาปัญหาตัดสินใจแบบสองทางเลือก และต่อไปจะพัฒนาวิธีวิเคราะห์สำหรับปัญหาตัดสินใจแบบหลายทางเลือก ดังที่กล่าวมาแล้วว่า บางทางเลือกจะหามาตราวัดแบบเบยส์ $\mathcal{B}(a)$ ไม่ได้ และในกรณีเช่นนี้จะไม่มีวิธีแก้ปัญหา ต่อไปลองพิจารณาตัวอย่าง และวิธีวิเคราะห์ควบคู่ไปด้วย

<u>ตัวอย่าง</u> บริษัทผู้ผลิตกำลังพิจารณาที่จะเปลี่ยนกระบวนการผลิตใหม่ เพื่อที่จะลดเวลาที่กรรมกรใช้ผลิตตุ๊กตา สมมติว่าราคาเครื่องจักรพร้อมค่าติดตั้งกระบวนการผลิตใหม่เป็นเงิน 9000 บาท และสมมติว่าค่าใช้จ่ายแบบเพิ่มต่อชั่วโมงที่กรรมกรทำคิดเป็น 3 บาท

ดังนั้นจำนวนเวลาที่กรรมการใช้จะลดลงด้วยกระบวนการผลิตแบบใหม่เป็น 9000/3 = 3000 ชั่วโมงหรือมากกว่า แล้วบริษัทจะได้กำไรเมื่อติดตั้งกระบวนการผลิตแบบใหม่ แต่ถ้าไม่ได้กำไรก็ไม่ติดตั้ง

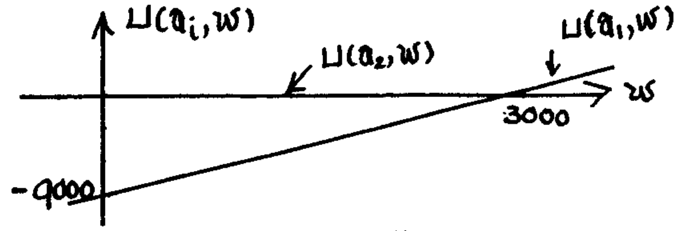
อย่างไรก็ตามบริษัทไม่อยู่ในฐานะที่จะตัดสินใจว่าจะติดตั้งหรือไม่ เพราะบริษัทไม่ทราบสภาวการณ์ของจำนวนเวลาที่ลดขณะที่ทำการตัดสินใจ แต่ผู้จัดการรู้สึกว่าจำนวนชั่วโมงที่ลดโดยกระบวนการแบบใหม่นี้จะเป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ย 3200 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 447.76

ทางเลือกที่เหมาะสมของปัญหานี้จะเป็นอย่างไร ?

ให้ a_1 และ a_2 เป็นทางเลือก "ติดตั้งกระบวนการผลิตใหม่" และ "ไม่ติดตั้งกระบวนการผลิตใหม่" และให้ w เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่แสดงถึงเวลาของกรรมกรที่ลดลงจากกระบวนการผลิตใหม่ แล้วฟังก์ชันผลตอบแทนของ a_1 และ a_2 กำหนดไว้ดังนี้

$$U(a_1, w) = -9000 + 3(w)$$
$$U(a_2, w) = 0$$

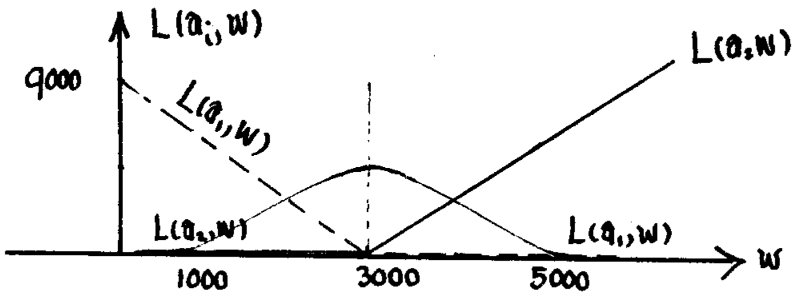
กราฟของสองฟังก์ชันแสดงได้เป็น



จากกราฟเราจะเห็นได้ว่าบริษัทจะได้กำไรจากการติดตั้งกระบวนการผลิตใหม่ ถ้าลดชั่วโมงกรรมกรมากกว่า 3000 ชั่วโมง แต่ถ้าน้อยกว่า บริษัทจะไม่ติดตั้ง เพราะฉะนั้นฟังก์ชันค่าเสียโอกาสของ a_1 และ a_2 จะเป็น

$$
\begin{aligned}
L(a_1, w) &= 3(3000 - w), & w &\leq 3000 \\
&= 0, & w &> 3000 \\
L(a_2, w) &= 0, & w &\leq 3000 \\
&= 3(w - 3000), & w &> 3000
\end{aligned}
$$

กราฟของฟังก์ชันเหล่านี้แสดงได้ดังต่อไปนี้



สำหรับมาตราวัดแบบเบยส์ เราคำนวณได้ดังนี้

$$B(a_1) = E[L(a_1, w)] = \int_{-\infty}^{\infty} L(a_1, w) f(w) dw$$

ในเมื่อ $f(w)$ เป็นฟังก์ชั่นหนาแน่นน่าจะเป็นก่อนทดลองแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ย 3200 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 447.76 เพราะฉะนั้น

$$B(a_1) = \int_{-\infty}^{\infty} L(a_1, w) N(w; 3200, 447.76) dw = \int_{-\infty}^{3000} (3000 - w) N(w; 3200, 447.76) dw$$

ในทำนองเดียวกันมาตราวัดแบบเบยส์ของทางเลือก a_2 จะเป็น

$$B(a_2) = \int_{3000}^{\infty} 3(w - 3000) N(w; 3200, 447.76) dw$$

จากการหาค่า $B(a_1)$ และ $B(a_2)$ เสร็จสิ้นลง เราจะเห็นว่า $B(a_1) < B(a_2)$ ดังนั้น a_1 เป็นทางเลือกที่ดีที่สุด นั่นคือบริษัทควรจะติดตั้งกระบวนการผลิตใหม่ สำหรับมาตราวัดแบบเบยส์ของทางเลือกที่ดีที่สุด a_1 จะหาได้ดังนี้

$$B(a_1) = \int_{-\infty}^{3000} (3000 - w) N(w; 3200, 447.76) dw = 3(447.76)\{\Psi(Z_b) - Z_b \Phi(Z_b)\}$$

ในเมื่อ $Z_b = (3000 - 3200)/447.76 = -.4467$

ดังนั้น $B(a_1) = 1343.28\{\Psi(-.4467) - .4467\Phi(-.4467)\}$

$= 1343.28\{.3605 - .4467(.3264)\}$

$= 288.40$

ในเมื่อ $B(a_1)$ เป็นความสูงของโค้งปกติ ณ จุด $Z = Z_b$, $\phi(Z_b) = P(Z < Z_b)$, Z เป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบปกติมาตรฐาน

เนื่องจากค่าเสียโอกาสคาดหวังของทางเลือกที่ดีที่สุดเป็นค่าคาดหวังก่อนทดลองของข้อมูลข่าวสารสมบูรณ์ (PEVPI) ซึ่งจะมีค่าเป็น 288.40 นั่นเอง

ต่อไปจะพัฒนาวิธีวิเคราะห์สำหรับปัญหาตัดสินใจแบบหลายสภาวการณ์ และหลายทางเลือก โดยมีฟังก์ชั่นน่าจะเป็นก่อนทดลองเป็นแบบต่อเนื่อง

ให้ $f(w)$ เป็นฟังก์ชั่นหนาแน่นน่าจะเป็นก่อนทดลอง สมมติว่าฟังก์ชั่นค่าเสียโอกาส L เป็นดังนี้

$$\begin{aligned} L(a, w) &= L_o(a - w), \quad w < a \\ &= L_u(w - a), \quad w > a \end{aligned}$$

ในเมื่อ L_o และ L_u เป็นค่าเสียโอกาสของการประมาณที่มากเกินไป และต่ำเกินไป แล้วมาตราวัดแบบเบยส์ของทางเลือก a ใน A คำนวณได้เป็น

$$\begin{aligned} B(a) &= \int_{W} L(a, w) f(w)\,dw \\ &= \int_{-\infty}^{a} L_o(a - w) f(w)\,dw + \int_{a}^{\infty} L_u(w - a) f(w)\,dw \end{aligned}$$

ทางเลือกที่ดีที่สุดก็พิจารณาจากทางเลือกที่มีมาตราวัดแบบเบยส์ต่ำที่สุด ทางเลือกที่ดีที่สุดนั้นจะให้เป็น a^o ซึ่งจะหาได้จากการหาอนุพันธ์ของ $B(a)$ ข้างบนนี้เทียบกับ a และให้อนุพันธ์นั้นเท่ากับ 0 แล้วเราจะได้ว่า

$$F(a^o) = \int_{-\infty}^{a^o} f(w)\,dw = L_u/(L_u + L_o)$$

ในการประยุกต์ $F(a^o)$ นี้เข้ากับปัญหาตัดสินใจใด ๆ นั้น ประการแรกเราต้องคำนวณค่าวิกฤต $L_u/(L_u + L_o)$ จากฟังก์ชั่นหนาแน่นน่าจะเป็นก่อนทดลองที่กำหนดให้ $f(w)$ เราก็หา $F(w)$ หรือฟังก์ชั่นแจกแจงน่าจะเป็นสะสม (Cumulative Distribution Function) แล้วเราก็หา a^o ($= w$ บางค่า) ที่ทำให้

$$F(a^o) = L_u/(L_u + L_o)$$

ค่าวิกฤตนี้เรียกว่า แฟรคไทล์ หรือควอนไทล์ (Quantile or Fractile) ที่ $L_u/(L_u+L_o)$ ของฟังก์ชั่นหนาแน่นน่าจะเป็นก่อนทดลอง

เพราะฉะนั้นเราจะเลือกทางเลือก a^{o} ถ้า a^{o} เป็นแฟรคไทล์ที่ $L_u/(L_u + L_o)$ ของฟังก์ชั่นหนาแน่นน่าจะเป็นก่อนทดลองที่กำหนดในปัญหาตัดสินใจนั้น เราจะเห็นได้ว่าการเลือกจะขึ้นอยู่กับค่าเสียโอกาสของการประมาณไว้ต่ำเกินไป (L_u) หรือมากเกินไป (L_o) จาก $F(a^{o})$ นั้น ถ้า L_u เพิ่ม แล้วมันก็จะเพิ่มการผลิตหรือการเก็บขึ้นอีก ทั้งนี้เนื่องจากการเพิ่ม L_u จะมีผลให้เพิ่มค่าชดเชย (Penalty) มากขึ้น (เพราะของไม่พอกับความต้องการของลูกค้า) ในทำนองเดียวกันจาก $F(a^{o})$ เราจะเห็นว่าการเพิ่มของ L_o จะทำให้ลดการผลิตจำนวนที่เหมาะสม เพราะ L_o จะมีผลทำให้สูญเสียเพิ่มขึ้นจากสินค้าที่เหลือ

จาก $F(a^{o})$ นั้นจะให้เกณฑ์ในการเลือกทางเลือกที่เหมาะสมที่สุด แต่เราก็ใช้หามาตราวัดแบบเบยส์ $B(a^{o})$ ไม่ได้ อย่างไรก็ตามเราสามารถหา $B(a^{o})$ ได้จากสมการ

$$B(a^{o}) = L_u E(w) - (L_o + L_u)\, E_{a^{o}}(w)$$

ในเมื่อ $E(w) = \int_{-\infty}^{\infty} w f(w)\,dw, \qquad E_{a^{o}}(w) = \int_{-\infty}^{a^{o}} w f(w)\,dw$

จากนิยาม 5 เราจะได้ว่า $B(a^{o})$ ก็เป็น PEVPI ด้วย

9. <u>การวิเคราะห์การตัดสินใจชนิดขั้นเดียวที่มีฟังก์ชั่นค่าเสียโอกาสแบบกำลังสอง</u> **(Single-Stage Decision Analysis with Quadratic Opportunity Loss Functions)**

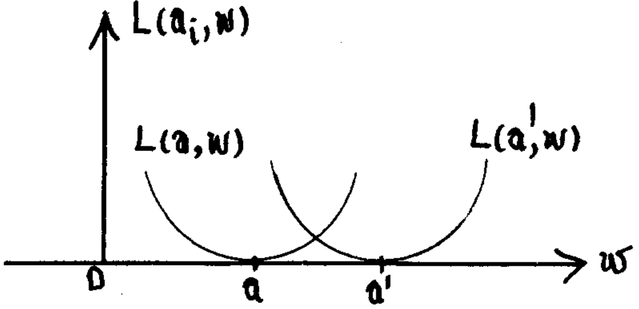
ฟังก์ชั่นค่าเสียโอกาสทั้งหมดที่กล่าวมาในปัญหาตัดสินใจนั้น เราสมมติว่าเป็นแบบเชิงเส้น ต่อไปเราจะพิจารณาแบบอื่นคือ ฟังก์ชั่นกำลังสอง และจะพิจารณาเฉพาะฟังก์ชั่นค่าเสียโอกาสแบบกำลังสอง กับพิจารณาหาทางเลือกที่เหมาะสม กลุ่มทางเลือก A และกลุ่มสภาวการณ์ W อาจจะเป็นแบบจำกัด หรือแบบไม่จำกัดที่นับได้ หรือเป็นเซทที่ไม่ต่อเนื่อง อย่างไรก็ตามเรายังสมมติว่า

โดยทั่วไปฟังก์ชั่นค่าเสียโอกาสแบบกำลังสอง กำหนดไว้ว่า

$$L(a, w) = c(a - w)^2,$$

จากฟังก์ชั่นนี้จะเห็นว่าถ้าทางเลือก a เท่ากับ w แล้วค่าเสียโอกาสจะเป็น 0 ในทางตรงกันข้าม ค่าเสียโอกาสจะเพิ่มขึ้นเมื่อทางเลือกยิ่งห่างจากสภาวการณ์มากขึ้น นั่นคือค่าเสียโอกาสจะเพิ่มมากขึ้น ถ้าความคลาดเคลื่อนระหว่างทางเลือกและสภาวการณ์เพิ่มมากขึ้น อาจจะพูดได้อีกอย่างว่า ค่าเสียโอกาสจะเป็นศูนย์ถ้าผลิตหรือเก็บไว้เท่ากับความต้องการ หรือจะเท่ากับความคลาดเคลื่อนกำลังสองของการประมาณที่ต่ำเกินไปหรือมาก

เกินไป รูปฟอร์มของฟังก์ชั่นแบบนี้จะใช้กันบ่อย ๆ การวิเคราะห์ก็จะง่ายกว่าแบบอื่น สำหรับทางเลือกต่าง ๆ เราสร้างกราฟของค่าเสียโอกาสได้เป็น



มาตราวัดแบบเบยส์ของทางเลือก a ภายใต้ฟังก์ชั่นน่าจะเป็นก่อนทดลองที่กำหนดให้ จะเป็น

$$\begin{aligned} B(a) &= E[L(a, w)] = E[c(a-w)^2] \\ &= cE[(a-w)^2] \end{aligned}$$

ตามเกณฑ์ตัดสินใจแบบเบยส์ เราก็จะเลือกทางเลือกที่ทำให้มี $B(a)$ ต่ำสุด สำหรับ $B(a)$ ข้างบนนี้เราสามารถแปลงเป็นรูปอื่นได้โดยการบวกและลบ $E(w)$ เข้าไป นั่นคือ

$$\begin{aligned} B(a) &= cE[(a-E(w)) - (w-E(w))]^2 \\ &= cE(a-E(w))^2 + cE(w-E(w))^2 \\ &\quad - 2cE(a-E(w))(w-E(w)) \\ &= cE(a-E(w))^2 + cV(w) \end{aligned}$$

โดยที่ $c > 0$ เราจะได้ว่ามาตราวัดแบบเบยส์ $B(a)$ จะไม่มีทางเป็นลบ เพราะฉะนั้นค่าต่ำสุดของ $B(a)$ จะเกิดขึ้นเมื่อ $a^o = E(w)$

ดังนั้นถ้าฟังก์ชั่นค่าเสียโอกาสในปัญหาตัดสินใจใด ๆ มีรูปฟอร์มเป็นแบบกำลังสองดังที่กล่าวมา แล้วทางเลือกที่เหมาะสมตามฟังก์ชั่นน่าจะเป็นก่อนทดลองที่กำหนดให้ (ต่อเนื่อง หรือไม่ต่อเนื่อง) นั้นจะเป็นค่าคาดหวังของ w และมาตราวัดแบบเบยส์จะเป็น $cV(w)$ ในเมื่อ $V(w)$ เป็นความแปรปรวนของตัวแปรเชิงสุ่ม w และ $cV(w)$ นี้ยังเป็นค่าคาดหวังก่อนทดลองของข้อมูลข่าวสารสมบูรณ์ หรือค่าใช้จ่ายของความไม่แน่นอน นั่นคือทางเลือกที่เหมาะสมจะเป็น a^o มาตราวัดแบบเบยส์ และ PEVPI จะกำหนดไว้ว่า

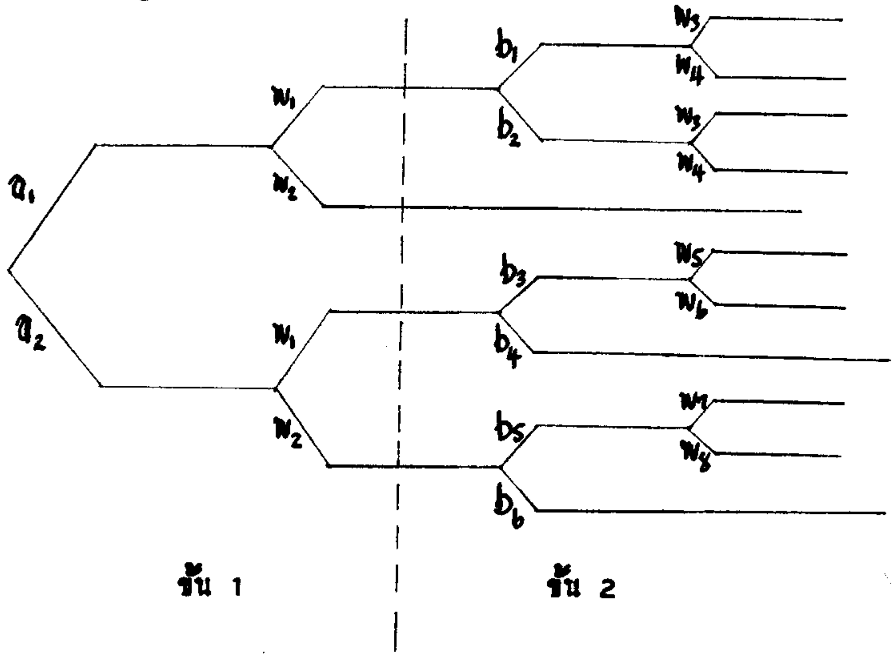
$$a^o = E(w), \quad B(a^o) = cV(w)$$

$$PEVPI = cV(w)$$

10. การวิเคราะห์การตัดสินใจชนิดหลายชั้น (Multistage Decision Analysis)

ตัวแบบวิเคราะห์การตัดสินใจทั้งหมดที่กล่าวมานั้นมีลักษณะร่วมกันอยู่อย่างหนึ่งคือ ผู้ตัดสินใจจะเลือกทางเลือกที่ประกอบด้วยทางเลือกจำนวนจำกัด และผลลัพธ์ (กำไร, สูญเสีย) ของแต่ละทางเลือกจะขึ้นอยู่กับสภาวการณ์ การเกิดขึ้นของสภาวการณ์ก็อยู่นอกเหนือการควบคุมของผู้ตัดสินใจอย่างสิ้นเชิง จากข้อมูลข่าวสารนี้ และโดยการใช้เกณฑ์ตัดสินใจแบบเบยส์ตามฟังก์ชันน่าจะเป็นก่อนทดลองที่กำหนดไว้ ผู้ตัดสินใจก็จะเลือกทางเลือกที่เหมาะสมที่สุดสำหรับปัญหานั้น ๆ เราเรียกการวิเคราะห์เช่นนี้ว่า การวิเคราะห์การตัดสินใจชนิดขั้นเดียว

ในหลาย ๆ สถานการณ์ปัญหาตัดสินใจอาจจะไม่ง่ายอย่างปัญหาการวิเคราะห์การตัดสินใจชนิดขั้นเดียว ถึงแม้ว่าจะพบกับปัญหาที่สลับซับซ้อนที่สามารถทำให้เป็นปัญหาชั้นเดียวได้ ทางเลือกใด ๆ สำหรับปัญหาที่กำหนดให้อาจจะสอดคล้องกับสภาวการณ์ต่าง ๆ ซึ่งจะทำให้เลือกทางเลือกอื่น ๆ เนื่องจากผลของทางเลือกใหม่เหล่านี้ สภาวการณ์อื่น ๆ บางสภาวการณ์อาจจะเกิดขึ้น ซึ่งจะนำไปสู่ทางเลือกต่าง ๆ กัน และผลลัพธ์ต่าง ๆ ซึ่งขึ้นอยู่กับสภาวการณ์ที่มีอยู่ในขณะนั้น แผนภาพต่อไปนี้จะแทนสภาวะเช่นนั้น



จากรูปภาพนี้จะได้ว่าผู้ตัดสินใจจะประสบปัญหาเมื่อเริ่มแรกเขาต้องเลือกไม่ a_1 ก็ a_2 มีสภาวการณ์ที่เป็นไปได้เพียงสองคือ w_1 และ w_2 ซึ่งมีผลกระทบต่อผลลัพธ์ของทางเลือกเหล่านี้ แล้วเขาก็สามารถพิจารณาผลลัพธ์ได้ ตัวอย่างเช่นผู้ตัดสินใจเลือก a_1 ถ้า w_1 เกิดขึ้น แล้วเขาก็จะประสบปัญหาตัดสินใจอื่นที่ต้องเลือกทางเลือก b_1 หรือ b_2 แต่ถ้า w_2 เกิดขึ้นก็ไม่มีความจำเป็นที่จะต้องตัดสินใจต่อไป ในทำนองเดียวกัน ถ้าเลือกทางเลือก a_1 และถ้า w_2 เกิดขึ้น แล้วเขาต้องเลือกไม่ b_3 ก็ b_4 ถ้าเขาเลือก b_3 แล้วไม่ w_3 ก็ w_4 อาจจะเกิดขึ้นอีก ผลลัพธ์ของทางเลือก b_3 จะขึ้นกับสภาวการณ์ w_3 และ w_4 ดังนั้นเราสามารถจินตนาการได้ว่าปัญหาตัดสินใจแบบสลับซับซ้อนดังอธิบายในรูปข้างบนนั้นสามารถแบ่งเป็นปัญหาย่อยได้ 2 ปัญหา ปัญหาแรกอาจจะกำหนดด้วย $(A^{(1)}, W^{(1)}, U^{(1)}, p^{(1)})$ และปัญหาขั้นที่สองอาจจะกำหนดด้วย $(A^{(2)}, W^{(2)}, U^{(2)}, p^{(2)})$ ในเมื่อ

$$A^{(1)} = \{a_1, a_2\}; \qquad A^{(2)} = \{b_1, b_2\}$$
$$W^{(1)} = \{w_1, w_2\}; \qquad W^{(2)} = \{w_3, w_4, w_5, w_6\}$$
$$U^{(1)} : A^{(1)} \times W^{(1)} \longrightarrow R; \; U^{(2)} : A^{(2)} \times W^{(2)} \longrightarrow R$$
$$p^{(1)} : W^{(1)} \longrightarrow [0, 1]; \; p^{(2)} : W^{(2)} \longrightarrow [0, 1]$$

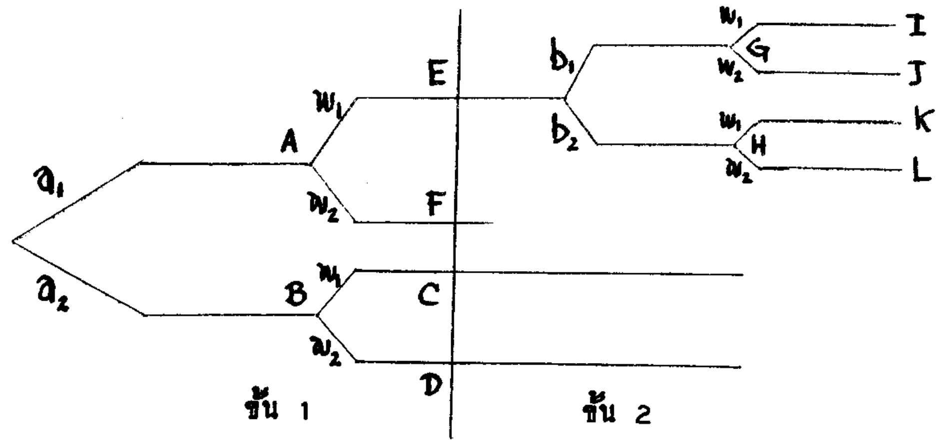
จากปัญหาย่อยทั้งสองนี้จะเห็นได้ว่าแต่ละปัญหาเป็นปัญหาวิเคราะห์การตัดสินใจชนิดขั้นเดียว เพราะฉะนั้นเราสามารถหาทางเลือกที่เหมาะสมสำหรับแต่ละปัญหาย่อยได้ ถ้าเราสามารถหาเทคนิคของการรวมวิธีแก้ปัญหาจากปัญหาย่อยเหล่านี้ได้ แล้วเราสามารถใช้วิธีแก้ปัญหาที่ได้นั้นเป็นวิธีแก้ปัญหาที่เหมาะสมสำหรับปัญหาที่สลับซับซ้อนเดิม เทคนิคเช่นนั้นได้ชื่อว่า "วิธีอนุมานถอยหลัง (**Backward Induction Method**)" วิธีการนี้จะได้อธิบายในรายละเอียดต่อไป

จากที่กล่าวมาเราสามารถพูดได้ว่า ปัญหาที่สลับซับซ้อน อาจจะแบ่งเป็นปัญหาย่อยต่าง ๆ กัน ในเมื่อแต่ละปัญหาย่อยสามารถทำเป็นปัญหาการวิเคราะห์ตัดสินใจชนิดขั้นเดียวได้ วิธีแก้ปัญหาที่เหมาะสมจะหาได้จากแต่ละปัญหาย่อย แล้ววิธีแก้ปัญหาที่เหมาะสมของปัญหาเหล่านี้เมื่อรวมกันเข้าด้วยวิธีอนุมานถอยหลัง เพื่อให้ได้วิธีแก้ปัญหาที่เหมาะสมของปัญหาเดิม แบบของการวิเคราะห์เช่นนี้ได้ชื่อว่า "การวิเคราะห์ตัดสินใจชนิดหลายขั้น"

<u>ตัวอย่าง</u> สมมติบริษัทผู้ผลิต กขค กำลังออกแบบเครื่องจักรใหม่เพื่อที่ต้องการครองตลาดเพิ่มขึ้น บริษัทจึงต้องตัดสินใจระหว่างสองทางเลือกที่เป็นไปได้คือ สร้างโรงงานขนาดเล็ก หรือโรงงานขนาดใหญ่เพื่อผลิตเครื่องจักรใหม่ การตัดสินใจจะขึ้นอยู่กับอุปสงค์ของเครื่องจักรนั้น แต่บริษัทไม่สามารถทำนายอุปสงค์ที่แท้จริงได้ แต่คาดหวังได้ว่าไม่สูง ก็ต่ำ

ถ้าบริษัทคาดหวังอุปสงค์เครื่องจักรไว้สูง ก็จะตัดสินใจสร้างโรงงานขนาดใหญ่ แต่ถ้าอุปสงค์ต่ำก็จะสร้างโรงงานขนาดเล็ก ถ้าอุปสงค์ของเครื่องจักรใหม่นี้คาดหวังว่าจะเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ และถ้าบริษัทสร้างโรงงานขนาดเล็ก แล้วบริษัทก็ไม่สามารถผลิตเครื่องจักรเพียงพอกับอุปสงค์ได้ ในสถานการณ์เช่นนั้นบริษัทก็จะพบกับอื่น นั่นคือจะเพิ่มสมรรถภาพการผลิตเพื่อให้เพียงพอกับอุปสงค์ที่เพิ่มขึ้น หรือจะไม่เพิ่มสมรรถภาพการผลิต ในกรณีหลังนี้บริษัทอาจจะสูญเสียตลาดให้แก่คู่แข่งขันได้ ในทำนองเดียวกันถ้าสร้างโรงงานขนาดใหญ่ในเริ่มแรก และอุปสงค์ก็ต่ำ แล้วบริษัทก็ประสบกับโชคไม่ดี ต่อไปนี้เราจะสร้างปัญหานี้เป็นปัญหาตัดสินใจชนิดสองขั้น

กำหนด a_1 เป็นทางเลือก "สร้างโรงงานขนาดเล็ก", a_2 "สร้างโรงงานขนาดใหญ่" และให้ w_1 เป็นสภาวการณ์ "อุปสงค์ของเครื่องจักรใหม่สูง", w_2 เป็นสภาวการณ์ "อุปสงค์เครื่องจักรใหม่ต่ำ" และ b_1 เป็นทางเลือก "ขยายสมรรถภาพการผลิต" และ b_2 "ไม่ขยายสมรรถภาพการผลิต" เพื่อความสะดวกจะสมมติสภาวการณ์เดียวกัน, w_1 และ w_2, ในขั้นที่สอง บริษัท กขค อาจจะกำหนดความน่าจะเป็นก่อนทดลองสำหรับ w_1 และ w_2 แตกต่างกันในขั้นที่สองนี้ได้ รูปภาพต่อไปนี้ก็จะแสดงถึงการวิเคราะห์ปัญหาที่มี 2 ขั้น



จากรูปภาพ เราจะเห็นว่าปัญหาเร่งด่วนที่บริษัทต้องตัดสินใจก็คือ จะสร้างโรงงานขนาดใหญ่ หรือขนาดเล็ก สองทางเลือกนี้ a_1 และ a_2 จะเป็นเซทของทางเลือกในขั้นที่ 1 ผลลัพธ์ของทางเลือกเหล่านี้ขึ้นอยู่กับการเกิดขึ้นของสภาวการณ์ w_1 หรือ w_2 ดังนั้นกลุ่มสภาวการณ์ประกอบด้วยสภาวการณ์ w_1 และ w_2 ตัวอย่างเช่น ถ้าบริษัทเลือก a_1 ก็จะมาถึงจุด A แล้วต่อไปจุด E ถ้าอุปสงค์เครื่องจักรใหม่สูง w_1 แต่ถ้าอุปสงค์ต่ำหรือ w_2 เกิดขึ้น แล้วจะไปที่จุด F ในทำนองเดียวกันถ้าบริษัทเลือกทางเลือก a_2 ก็จะมาถึงจุด D แล้วจะไปจุด C ถ้า w_1 เกิดขึ้น ฉะนั้นจะจบปัญหาในขั้นแรก

กลุ่มทางเลือก $A^{(1)}$ และกลุ่มสภาวการณ์ $W^{(1)}$ สำหรับขั้นแรกจะเป็น

$$A^{(1)} = \{a_1, a_2\} \quad W^{(1)} = \{w_1, w_2\}$$

เมื่อกำหนดข้อมูลเกี่ยวกับปัญหาให้ เราก็สามารถหาฟังก์ชันผลตอบแทน $u^{(1)}$ ใน $A^{(1)} x W^{(1)}$ ในทำนองเดียวกันจากความคิดเห็นที่แสดงโดยฝ่ายจัดการของบริษัทเกี่ยวกับการเกิดขึ้นของ w_1 และ w_2 นั้นเราก็สามารถกำหนดฟังก์ชันมวลน่าจะเป็นก่อนทดลอง $p^{(1)}$ ใน $W^{(1)}$ ได้

สมมติว่ามาอยู่จุด E แล้วจะมาถึงจุด G ถ้าขยายสมรรถภาพการผลิต (ทางเลือก b_1) หรือมาถึงจุด H ถ้าไม่ขยายสมรรถภาพการผลิต (ทางเลือก b_2) จากจุด G จะต่อไปจุด I ถ้า w_1 เกิดขึ้น หรือไปจุด J ถ้า w_2 เกิดขึ้น ในทำนองเดียวกันจากจุด H บริษัทจะไปที่จุด K ถ้า w_1 เกิดขึ้น หรือไปที่จุด L ถ้า w_2 เกิดขึ้น แล้วก็จะจบขั้นที่สอง และเราสามารถนิยามกลุ่มทางเลือก $A^{(2)}$ และกลุ่มสภาวการณ์ $W^{(2)}$ ได้เป็น

$$A^{(2)} = \{b_1, b_2\}; \quad W^{(2)} = \{w_1, w_2\}$$

เมื่อกำหนดข้อมูลที่เกี่ยวข้อง และทัศนคติหรือความเห็นเกี่ยวกับการเกิดขึ้นของ w_1 และ w_2 เราก็สามารถกำหนดฟังก์ชันผลตอบแทน $u^{(2)}$ ใน $A^{(2)} x W^{(2)}$ และฟังก์ชันมวลน่าจะเป็นก่อนทดลอง $p^{(2)}$ ใน $W^{(2)}$

ดังนั้นเราได้แยกปัญหาที่สลับซับซ้อนที่กำหนดให้เป็นปัญหาย่อย ซึ่งแต่ละปัญหาย่อยสามารถทำให้เป็นปัญหาวิเคราะห์การตัดสินใจชนิดขั้นเดียว เมื่อเราทราบฟังก์ชันผลตอบแทน และฟังก์ชันมวลน่าจะเป็นก่อนทดลอง เราก็สามารถแก้ปัญหาย่อยเหล่านี้ เพื่อจะหาทางเลือกที่เหมาะสมสำหรับแต่ละปัญหาย่อยได้

<u>ข้อมูลของปัญหาตัวอย่าง</u> เราสมมติระยะเวลา 5 ปี ในการพิจารณาสถานะการเงินของบริษัท โดยที่สิ้นปีแรกจะตัดสินใจว่าจะเพิ่มสมรรถภาพการผลิตหรือไม่ ถ้าตอนแรกได้สร้างโรงงานขนาดเล็กและถ้าอุปสงค์สูง หรืออาจจะพูดได้ว่าขั้นแรกจะเกี่ยวข้องกับปีแรก และขั้นที่สองจะตาม 4 ปีต่อไป สมมติว่าค่าใช้จ่ายในการสร้างโรงงานขนาดเล็กเป็น 10 ล้านบาท และขนาดใหญ่เป็น 20 ล้านบาท และยังสมมติอีกว่าอุปสงค์สูงนั้นคือมีอุปสงค์ 5000 เครื่อง และอุปสงค์ต่ำคือ 2000 เครื่อง ต้นทุนผันแปรของการผลิตจะเป็นเครื่องละ 20000 บาท และบริษัทจะขายได้เครื่องละ 25000 บาท และยังมีค่าใช้จ่ายประจำเป็น 8 ล้านบาทต่อปี ถ้าอุปสงค์สูง และบริษัทสร้างโรงงานขนาดเล็ก ซึ่งสามารถทำงานผลัดที่สอง เพื่อจะผลิตเครื่องจักร 3500 เครื่องเพื่อให้พอกับอุปสงค์กลาง ๆ ค่าใช้จ่ายผลัดที่สองจะประมาณ 1 ล้านบาท

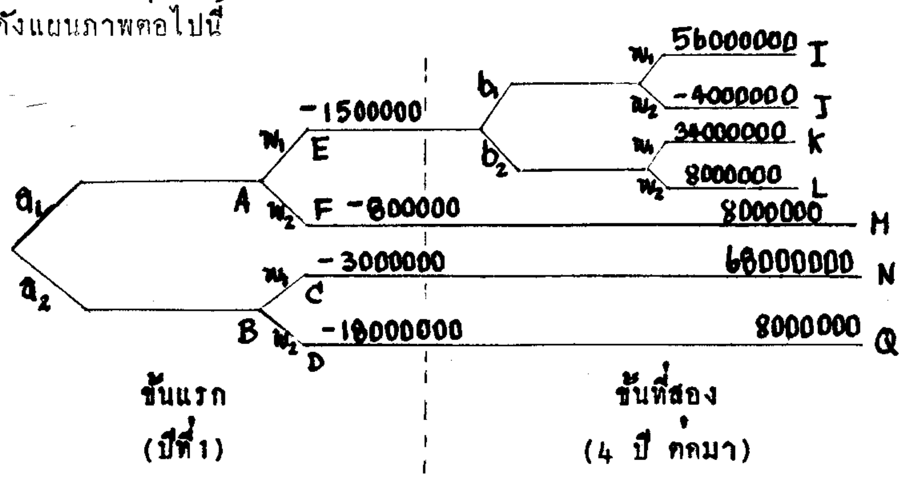
จากข้อมูลข่าวสารนี้เราสามารถคำนวณกำไรสำหรับปีแรกจากการสร้างโรงงานขนาดเล็ก หรือขนาดใหญ่ได้ เราจะแสดงการคำนวณสำหรับการสร้างโรงงานขนาดเล็ก ดังตารางต่อไปนี้

	อุปสงค์สูง	อุปสงค์ต่ำ
รายได้	3500(25000) = 87500000	200(25000) = 50000000
ต้นทุนผันแปร	3500(20000) = 70000000	2000(20000) = 40000000
ต้นทุนคงที่	18000000	18000000
ค่าใช้จ่ายผลัดที่สอง	1000000	–
กำไร	−1500000	−8000000

ในทำนองเดียวกันก็จะแสดงได้ว่า ถ้าบริษัทสร้างโรงงานขนาดใหญ่ แล้วกำไรเมื่อสิ้นปีแรกจะเป็น −3000000 บาท ถ้า w_1 เกิดขึ้น หรือได้กำไร −18000000 บาท ถ้า w_2 เกิดขึ้น

สมมติว่าบริษัทอยู่ที่จุด **E** ฉะนั้นจึงประสบกับการตัดสินใจว่าจะขยายสมรรถภาพการผลิตของโรงงานขนาดเล็กหรือไม่ ถ้าค่าใช้จ่ายในการขยายสมรรถภาพการผลิตเป็น 12 ล้านบาท ถ้าขยายแล้วก็สามารถผลิตเครื่องจักรได้พอกับอุปสงค์สูง ซึ่งในกรณีนี้บริษัทจะได้กำไร 56 ล้านบาท สำหรับ 4 ปีต่อมา แต่ถ้าอุปสงค์ต่ำจะได้กำไร −4 ล้านบาทใน 4 ปีต่อมา

ในทำนองเดียวกัน ถ้าบริษัทไม่ขยายสมรรถภาพการผลิต แล้วจะได้กำไร 34 ล้านบาท หรือ 4×8500000 ถ้าอุปสงค์สูง หรือกำไร 8 ล้านบาท (หรือ 4×2000000) ถ้าอุปสงค์ต่ำ ค่าเหล่านี้แสดงได้ดังแผนภาพต่อไปนี้



สังเกตได้ว่ากำไรที่จุด I, J, K, L, M, N, และ Q ไม่ได้รวมกำไรที่จุด E, F, C, และ D ไว้ด้วย นี่เป็นข้อตกลงหรือข้อสมมติที่สำคัญมาก และจะหมายถึงว่ากำไรนั้นเป็นผลรวมเชิงเส้น (**Linearly additive**) ตามขั้น 2 ขั้นในปัญหาตัดสินใจ ถ้าข้อตกลงนี้ไม่เป็นจริงแล้วการวิเคราะห์ที่จะกล่าวในข้อ (2) ต่อไปจะใช้ไม่ได้ เพราะฉะนั้นเราจะสมมติว่ากำไรเป็นผลรวมเชิงเส้น โดยทั่วไปสำหรับปัญหาการวิเคราะห์ตัดสินใจชนิดหลายขั้น เราจะสมมติว่าฟังก์ชันผลตอบแทน $u^{(k)}$ ที่กำหนดใน $A^{(k)} \times W^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots, h)$ นั้นเป็นผลรวมเชิงเส้น ค่าที่จุดทั้งหมดจะเป็นค่าสมบูรณ์ ถ้าเราสนใจค่าปัจจุบันของกำไร (ซึ่งเป็นกรณีปกติ) เราก็สามารถคำนวณได้ในเมื่อกำหนดตัวประกอบที่ลดค่าอันแน่นอนให้ และจะแทนกำไรสมบูรณ์ด้วยค่าปัจจุบันของมัน การวิเคราะห์ก็จะเหมือนกัน

สมมติว่าบริษัทกำหนดความน่าจะเป็นก่อนทดลองของ w_1 และ w_2 ในขั้นแรกเป็น $p^{(1)}(w_1) = .7$ ทำนองเดียวกันบริษัทเชื่อว่า $p^{(2)}(w_1) = .8$ การวิเคราะห์เกี่ยวกับข้อมูลที่เกี่ยวข้องสำหรับขั้นทั้งสองก็สมบูรณ์แล้ว ต่อไปจะดำเนินการแก้ปัญหานั้น

<u>การวิเคราะห์ปัญหา</u> เรากล่าวมาแล้วว่า เราสามารถหาวิธีแก้ปัญหาที่เหมาะสมสำหรับปัญหาตัดสินใจหลายขั้นได้โดยใช้เทคนิคอนุมานถอยหลัง ตามวิธีการนี้จะเริ่มการวิเคราะห์โดยการหาวิธีแก้ปัญหาที่เหมาะสมในขั้นสุดท้าย h วิธีแก้ปัญหาเหล่านี้เมื่อรวมกันเข้ากับผลตอบ

แทนของขั้นข้างหน้าที่ติดกัน (คือขั้น $h-1$) แล้วเราจะได้วิธีแก้ปัญหาที่เหมาะสมสำหรับขั้นที่ $h-1$ กับผลตอบแทนที่ปรับปรุง (**Revised Payoffs**) กระบวนการนี้เราดำเนินต่อไปจนถึงขั้นแรก เทคนิคนี้จะใช้ได้ก็ต่อเมื่อสอดคล้องกับหลักของความเหมาะสม (**Principle of Optimality**) หลักนี้นิยามไว้ว่า

"นโยบายที่ดีที่สุดจะมีคุณสมบัติว่า สภาวการณ์เริ่มแรก และการตัดสินใจเริ่มแรกเป็นอย่างไรก็ตาม การตัดสินใจที่เหลืออยู่ต้องเป็นนโยบายที่ดีที่สุดตามสภาวการณ์ที่เป็นผลจากการตัดสินใจครั้งแรก"

ตามหลักนี้ ถ้าปรากฏว่าไม่คำนึงถึงหนทางที่จะมาถึงจุดเฉพาะ เช่นจุด **E** การตัดสินใจที่เหลือต้องเป็นนโยบายที่ดีที่สุดสำหรับที่จะทิ้งจุดนั้น ดังนั้นการตัดสินใจที่ดีที่สุดที่จะทิ้งจุด **E** จะไม่ขึ้นกับหนทางเฉพาะที่เป็นผลในการเข้าไปในจุด **E**

สำหรับตัวอย่างของเรานั้นขั้นสุดท้ายเป็นขั้นที่สอง ซึ่งมีสองทางเลือก b_1 และ b_2 มาตราวัดแบบเบยส์ $B(b_1)$ และ $B(b_2)$ คำนวณได้เป็น

$$B(b_1) = U^{(2)}(b_1, w_1)p^{(2)}(w_1) + U^{(2)}(b_1, w_2)p^{(2)}(w_2)$$

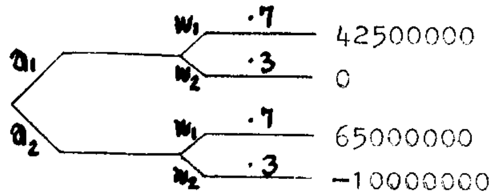
$$= 56000000(.8) + 4000000(.2) = 44000000$$

$$B(b_2) = U^{(2)}(b_2, w_1)p^{(2)}(w_1) + U^{(2)}(b_2, w_2)p^{(2)}(w_2)$$

$$= 34000000(.8) + 8000000(.2) = 28800000$$

โดยที่ $B(b_1) > B(b_2)$ บริษัทควรจะเลือกทางเลือก b_1 ซึ่งจะมาถึงจุด **E** นั่นคือควรจะขยายสมมรรถภาพการผลิต จากหลักของความเหมาะสม การขยายสมรรถภาพการผลิตนั้นจะเป็นอิสระกับการที่จะมาถึงจุด **E** โดยที่เรามีเพียง 2 ทางเลือก การวิเคราะห์ในขั้นที่สองจึงจบลง ต่อไปก็ถึงขั้นข้างหน้าที่ติด คือขั้นที่หนึ่ง

ตามวิธีอนุมานถอยหลัง เราคำนวณผลตอบแทนที่ปรับปรุงสำหรับแต่ละจุดได้ ซึ่งจะทำได้ดังนี้ — พิจารณาจุด **E** จากการมาถึงจุดนี้ บริษัทจะได้กำไร -1500000 บาท อย่างไรก็ตามถ้าเลือก b_1 ก็จะเป็นการตัดสินใจที่ดีที่สุดเพื่อละทิ้งจุด **E** จะทำให้ได้กำไรถึง 44000000 บาท เพราะฉะนั้นผลตอบแทนใหม่จะเป็น $-1500000 + 44000000 = 42500000$ บาท ตามวิธีการเดียวกันนี้ เราสามารถคำนวณผลตอบแทนที่ปรับปรุงสำหรับจุดอื่น ๆ ในขั้นแรกได้ ผลของการคำนวณจะสรุปได้ดังรูปภาพต่อไปนี้



มาตราวัดแบบเบยส์สำหรับ a_1 และ a_2 คำนวณได้เป็น

$$B(a_1) = 42500000(.7) + 0(.3) = 29750000$$

$$B(a_2) = 65000000(.7) + (-10000000)(.3) = 42500000$$

จาก $B(a_1)$ และ $B(a_2)$ จะได้ว่าบริษัทจะสร้างโรงงานขนาดใหญ่ ดังนั้นการตัดสินใจขั้นสุดท้ายก็คือบริษัทจะสร้างโรงงานขนาดใหญ่ตั้งแต่แรกเริ่ม เนื่องจากสมรรถภาพของโรงงงานขนาดใหญ่เพียงพอกับอุปสงค์สูง จึงไม่มีความจำเป็นที่จะทำการตัดสินใจต่อไปในขั้นที่สอง แต่ถ้าสมมติว่าการตัดสินใจที่เหมาะสมในขั้นแรกเป็นทางเลือก a_1 แล้วบริษัทจะสร้างโรงงานขนาดเล็กตอนเริ่มแรก และถ้าอุปสงค์สูงก็จะขยายการผลิต แต่ถ้าอุปสงค์ต่ำก็จะผลิตกับโรงงานขนาดเล็กต่อไปใน 4 ปี

ในกรณีใด ๆ วิธีแก้ปัญหาที่ดีที่สุดสำหรับปัญหาเดิมจะเกี่ยวข้องกับอนุกรมของการตัดสินใจที่ดีที่สุดของปัญหาย่อย ๆ โดยทั่วไปวิธีวิเคราะห์การตัดสินใจชนิดหลายขั้น เพื่อที่จะแก้ปัญหาสลับซับซ้อนนั้นจะเกี่ยวข้องกับการแยกปัญหาที่กำหนดให้ออกเป็นปัญหาย่อยต่าง ๆ กัน และก็ทำการรวมการตัดสินใจที่ดีที่สุดของปัญหาย่อยเหล่านั้น เพื่อให้ได้วิธีแก้ปัญหาที่ดีที่สุดของปัญหาตั้งเดิม