ทฤษฎีตัดสินใจทางสถิติภายใต้ความไม่แน่นอน เมื่อไม่ทราบฟังก์ชั่นน่าจะเป็นก่อนทดลอง

Statistical Decision Theory under Uncertainty when Prior Probability Function not Known

ตัวแบบวิเคราะห์การตัดสินใจภายใต้ความไม่แน่นอน เมื่อไม่ทราบฟังก์ชั่นน่าจะเป็นก่อนทดลอง สามารถแทนด้วย (A, W, U) หรือ (A, W, L) ในเมื่อ A, W, U, และ L เป็นกลุ่มทางเลือก, กลุ่มสภาวการณ์, ฟังก์ชั่นผลตอบแทน, และฟังก์ชั่นค่าเสียโอกาส ตามลำดับ เมื่อไรก็ตามที่ผู้ตัดสินใจประสบกับตัวแบบเช่นนั้น เขาก็สามารถจะใช้เกณฑ์ตัดสินใจ (Decision Criteria) เกณฑ์ใดเกณฑ์หนึ่ง ดังต่อไปนี้

1. เกณฑ์เพิ่มค่าที่น้อยสุด (Maximin Criterion)
2. เกณฑ์ลดค่าสูญเสียที่มากสุด (Minimax Regret Criterion)
3. เกณฑ์ดัชนีมองโลกในแง่ดีและร้าย (Pessimism-Optimism Index Criterion)
4. เกณฑ์เพิ่มค่าที่มากสุด (Maximax Criterion)
5. หลักของเหตุผลที่ไม่เพียงพอ (Principle of Insufficient Reason or Laplace Criterion)

ในทางปฏิบัติจริง ไม่มีกฎตัดสินใจใดที่ใช้กันมาก แต่เราจะอธิบายเกณฑ์ต่าง ๆ เพื่อที่จะทราบวิธีการแก้ปัญหาต่าง ๆ ของปัญหาตัดสินใจภายใต้ความไม่แน่นอนที่กำหนดให้ เกณฑ์ตัดสินใจทั้งหมดจะแสดงถึงชนิดของความยุ่งยากที่แฝงอยู่ของปัญหา และแสดงถึงวิธีการที่จะเลือกทางเลือกที่เหมาะสม

เราจะเริ่มต้นด้วยตัวอย่าง และจะอธิบายวิธีการเลือกทางเลือกที่เหมาะสมโดยเกณฑ์ต่าง ๆ เหล่านี้

<u>ตัวอย่าง</u> บริษัทผลิตสินค้าสนใจที่จะขยายสมรรถภาพการผลิตของโรงงาน โดยการซื้อเครื่องจักรที่มีสมรรถภาพสูง หรือไม่ก็สมรรถภาพปานกลาง เพื่อจะให้พอกับการเพิ่มขึ้น

ของอุปสงค์ในอนาคต เครื่องจักรที่มีอยู่ในปัจจุบันจะผลิตสินค้าได้เพียงพอกับอุปสงค์ในปัจจุบัน

ถ้าผู้จัดการคาดหวังว่า การเพิ่มขึ้นของอุปสงค์ระดับปานกลางเป็น 10000 หน่วย หรือการเพิ่มขึ้นของอุปสงค์ระดับสูงเป็น 20000 หน่วย ถ้าอุปสงค์ในอนาคตเพิ่มมาก – เขาจะซื้อเครื่องจักรที่มีสมรรถภาพสูง หรือไม่ก็ซื้อเครื่องจักรที่มีสมรรถภาพปานกลางและใช้การทำงานล่วงเวลา แต่ถ้าอุปสงค์ในอนาคตเพิ่มปานกลางก็จะซื้อเครื่องจักรที่มีสมรรถภาพปานกลาง แต่ถ้าอุปสงค์ไม่เพิ่มขึ้น เครื่องจักรที่มีอยู่ก็เพียงพอกับการผลิต

สมมติว่าแต่ละหน่วยที่บริษัทขายได้จะได้กำไร 100 บาท ค่าใช้จ่ายล่วงเวลาประมาณ 1 ล้านบาท เครื่องจักรที่มีสมรรถภาพปานกลางและสูงราคา 200000 และ 300000 บาท ตามลำดับ

จากข้อมูลข่าวสารนี้ เราสามารถอธิบายกลุ่มทางเลือก A และกลุ่มสภาวการณ์ W ได้เป็น

$$A = \{a_1, a_2, a_3\}; \quad W = \{w_1, w_2, w_3\}$$

ในเมื่อ a_1 แทนทางเลือก "ไม่ซื้อเครื่องจักรใด ๆ", a_2 แทน "ซื้อเครื่องจักรสมรรถภาพปานกลาง", และ a_3 แทน "ซื้อเครื่องจักรสมรรถภาพสูง" กับ w_1 แทนสภาวการณ์ "อุปสงค์ไม่เพิ่ม", w_2 แทน "อุปสงค์เพิ่มปานกลาง", และ w_3 แทน "อุปสงค์เพิ่มมาก" ตามลำดับ

ผู้จัดการอาจจะเลือกทางเลือกใด a_i จาก A และสภาวการณ์อาจจะเป็นสภาวการณ์ใด w_j จาก W ผู้จัดการจะไม่ทราบว่าสภาวการณ์ไหนจะเกิดขึ้นขณะที่ตัดสินใจ แต่เขาสามารถคำนวณผลตอบแทนของแต่ละทางเลือก a_i ที่เขาเลือก และเมื่อสภาวการณ์เป็น w_j ใด ๆ ผลตอบแทนนั้นขึ้นอยู่กับค่าใช้จ่ายและรายได้ หรือขึ้นอยู่กับ (a_i, w_j) และอธิบายได้ดังตารางต่อไปนี้

<u>ตาราง 1</u> การเพิ่มขึ้นของกำไรสำหรับแต่ละ (a_i, w_j) ใน $A \times W$

	W	w_1	w_2	w_3
A	a_1	0	0	0
	a_2	−200000	800000	800000
	a_3	−300000	700000	1700000

จำนวนเลขในตารางนั้น เราคำนวณมาได้ดังนี้ — ถ้าผู้จัดการเลือกทางเลือก a_1 คือไม่ซื้อเครื่องจักร เขาก็ไม่สามารถผลิตเพิ่มเพื่อจะให้พอกับอุปสงค์ที่เพิ่ม แล้วกำไรเพิ่มจะเป็นศูนย์สำหรับทุก $w_j \in W$ แต่ถ้าเลือกทางอื่น ๆ คือถ้าเลือก a_2 และไม่มีอุปสงค์เพิ่ม (w_1 เกิดขึ้น) แล้วจะไม่มีกำไรเพิ่ม แต่ต้องจ่ายเป็นค่าเครื่องจักรที่มีสมรรถภาพปานกลางอีก 200000 บาท ดังนั้นกำไรสุทธิสำหรับ (a_2, w_1) เป็น −200000 บาท แต่ถ้าสภาวการณ์เป็น w_2 รายได้จะเพิ่มอีก 10000(100) = 1000000 บาท ซึ่งในขณะเดียวกันก็จะเสียค่าเครื่องจักร 200000 บาท ดังนั้นกำไรเพิ่มสุทธิจะเป็น 800000 บาท และถ้าสภาวการณ์เป็น w_3 แล้วต้องทำงานล่วงเวลาเพื่อให้พอกับอุปสงค์ซึ่งจะเสียค่าใช้จ่าย 1000000 บาท ยังมีค่าเครื่องจักรอีก 200000 บาท รายได้ทั้งหมดที่ผลิตให้พอกับอุปสงค์เพิ่มจะเป็น 20000(100) = 2000000 บาท ดังนั้นกำไรสุทธิเพิ่มขึ้นเป็น 2000000 − 1000000 − 200000 = 800000 บาท สำหรับทางเลือก a_3 เราก็ทำการคำนวณผลตอบแทนได้เช่นเดียวกัน

เราได้ชี้ให้เห็นแล้วว่า ผลตอบแทนนั้นสามารถแทนได้ด้วยฟังก์ชั่น U ที่กำหนดใน $A \times W$ และแสดงให้เห็นได้ดังนี้

เนื่องจากการเพิ่มในกำไรสำหรับ (a_1, w_1) เป็น 0 เราจึงเขียนได้เป็น

$$U(a_1, w_1) = 0$$

นั่นคือการเพิ่มในกำไรเป็นศูนย์ ถ้าผู้จัดการเลือกทางเลือก a_1 และถ้าสภาวการณ์เป็น w_1 จะเห็นได้ว่า U เป็นฟังก์ชั่นค่าจริง (Real-valued Function) และกำหนดใน $A \times W$ ในทำนองเดียวกันเราได้

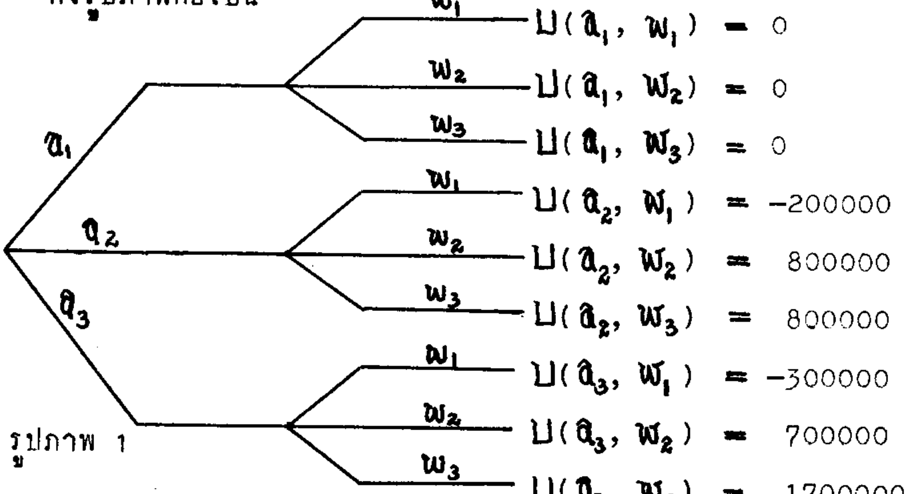
$$U(a_2, w_3) = 800000$$

ดังนั้นเราจะได้ผลต่าง ๆ เป็น

$$U(a_1, w_1) = 0 \qquad U(a_2, w_1) = -200000$$
$$U(a_1, w_2) = 0 \qquad U(a_2, w_2) = 800000$$
$$U(a_1, w_3) = 0 \qquad U(a_2, w_3) = 800000$$
$$U(a_3, w_1) = -300000$$
$$U(a_3, w_2) = 700000$$
$$U(a_3, w_3) = 1700000$$

ข้อมูลข่าวสารจากตาราง 1 เราสามารถอธิบายได้ด้วยแผนภาพแขนง

ดังรูปภาพต่อไปนี้



รูปภาพ 1

ต่อไปจะอธิบายวิธีวิเคราะห์สำหรับเกณฑ์ตัดสินใจต่าง ๆ

1. <u>เกณฑ์ตัดสินใจ</u> (Decision Criteria)

1.1 <u>เกณฑ์เพิ่มค่าที่ต่ำสุด</u> (Maximin Criterion) ตามเกณฑ์นี้ผู้ตัดสินใจจะพยายามเพิ่ม (maximize) กำไรสุทธิที่ต่ำสุด นั่นคือพยายามสังเกตกำไรสุทธิที่ต่ำสุดที่เขาได้รับจากการเลือกทางเลือกใน A เมื่อสภาวการณ์เป็น w ใน W จากตาราง 1 จะเห็นได้ว่า

(1) ถ้าผู้จัดการเลือกทางเลือก a_1 กำไรสุทธิจะเป็น 0 ถ้าสภาวการณ์เป็น w_1, w_2, หรือ w_3 ซึ่งหมายความว่า ไม่ว่าสภาวการณ์จะเป็นอะไร ผู้จัดการจะได้กำไรสุทธิต่ำสุดเป็นศูนย์ ถ้าเขาเลือกทางเลือก a_1

(2) ในทำนองเดียวกัน กำไรสุทธิต่ำสุดที่ผู้จัดการจะได้รับจากการเลือกทางเลือก a_2 คือ −200000 บาท

(3) กำไรสุทธิต่ำสุดที่เขาจะได้จากการเลือกทางเลือก a_3 เป็น −300000

จากข้อมูลข่าวสารที่กำหนดให้นี้ ผู้จัดการซึ่งเป็นผู้ตัดสินใจที่มีเหตุผลจะเลือกทางเลือกจาก A ที่ทำให้กำไรสุทธิต่ำสุดมีค่ามากที่สุด สำหรับปัญหาของเรานั้น a_1 เป็นทางเลือกที่ทำให้กำไรสุทธิต่ำสุดนั้นมีค่ามากที่สุด วิธีการนี้เรียกว่า "เกณฑ์เพิ่มค่าที่ต่ำสุด" ซึ่ง Von Neumann ได้พัฒนาขึ้น ในเทอมทั่ว ๆ ไปเกณฑ์เพิ่มค่าที่ต่ำสุด นิยามไว้ดังนี้

<u>นิยาม 1</u> ให้ A เป็นกลุ่มทางเลือก, W เป็นกลุ่มสภาวการณ์, และ U เป็นฟังก์ชันผลตอบแทนที่มีค่าจริงซึ่งกำหนดใน $A \times W$ สำหรับปัญหาวิเคราะห์การตัดสินใจภายใต้ความไม่แน่นอน แล้วเกณฑ์เพิ่มค่าที่ต่ำสุด กำหนดไว้ว่า

$$\max_A \min_W \{ U(a_i, w_j) = u_{ij} \}$$
$$= \max_A \{ \min_w (u_{1j}), \ \min_w (u_{2j}), \ldots, \min_w (u_{nj}) \}$$

ทางเลือกที่มีค่าสอดคล้องกับเงื่อนไขนี้ จะเป็นทางเลือกที่ดีที่สุดของปัญหาการตัดสินใจ

เราจะเตรียมตารางต่อไปนี้เพื่อจะใช้เกณฑ์เพิ่มค่าที่ต่ำสุด

<u>ตาราง 2</u>

	W	w_1	w_2	w_3	$\min_w \{U(a_i, w_j)\}$
A	a_1	0	0	0	0 ← $\max_w$
	a_2	−200000	800000	800000	−200000
	a_3	−300000	700000	1700000	−300000

จากแถวตั้งสุดท้ายของตารางนี้ เราจะพบค่าที่สูงสุด (นั่นคือกำไรสูงสุด) และทางเลือกที่สมนัยกัน ดังนั้นผู้จัดการควรจะเลือกทางเลือก a_1 คือไม่ซื้อเครื่องจักรใด ๆ และเขาจะได้รับกำไรเป็นศูนย์ซึ่งมากที่สุด

กระบวนการเดียวกันนี้สามารถอธิบายได้ด้วยขั้นตอนต่อไปนี้

- กำหนดกลุ่มทางเลือก A
- กำหนดกลุ่มสภาวการณ์ W
- กำหนดฟังก์ชั่นผลตอบแทน $U: A \times W \rightarrow R$
- แต่ละทางเลือก a_i คำนวณ $\min_W \{U(a_i, w_j) = u_{ij}\}$
- คำนวณ $U(a_k) = \max_A \{U(a_i)\}$
- เลือก a_k ที่เป็นทางเลือกที่ดีที่สุด

ถึงแม้ว่าเกณฑ์นี้ง่ายที่จะเข้าใจ และง่ายต่อการคำนวณ แต่ก็มีข้อขัดแย้งบางประการ เช่นลองพิจารณาตารางสัมพันธ์ของผลตอบแทนในตารางต่อไปนี้

	W	w_1	w_2
A	a_1	0	100
	a_2	1	1

ตามเกณฑ์เพิ่มค่าที่ต่ำสุด $\max_A \min_W \{U(a_i, w_j) = u_{ij}\}$
นั้นเราควรจะเลือกทางเลือก a_2 ทางเลือก a_2 นี้จะเป็นทางเลือกที่ดีที่สุด จะเห็นได้ว่าไม่มีเหตุผล และตามเกณฑ์นี้ก็ยังคงเลือก a_2 ถึงแม้ 1 จะลดลงมาเป็น 0.00001 และ 100 จะเพิ่มเป็น 10^6

ข้อโต้แย้งกรณีอื่นของเกณฑ์นี้ก็คือ มองโลกในแง่ร้าย(Pessimistic) หรืออนุรักษ์สุดเหวี่ยง (Ultraconservative) เพราะแต่ละทางเลือกจะสนใจแต่สภาวการณ์ที่มีผลลัพธ์ที่เลวสุด(Worst) และมองโลกในมุมมืดเท่านั้น ทำไมไม่มองสภาวการณ์ที่ดีที่สุด หรือมองทั้งดีที่สุด หรือเลวที่สุดในแบบถ่วงน้ำหนัก (Weighted combination) ถ้าใช้เกณฑ์เพิ่มค่าที่ต่ำสุดเป็นประจำ หรือระยะเวลายาวนอน ก็ย่อมหมายความว่า คงจะไม่มีการริเริ่มดำเนินกิจการใหม่ ๆ เป็นแน่ เพราะเป็นการยากที่กิจการใหม่ ๆ จะไม่มีการขาดทุนในระยะแรก

1.2 <u>เกณฑ์ลดค่าสูญเสียที่มากสุด</u> (Minimax Regret Criterion) เกณฑ์นี้ Savage แนะนำไว้ในปี 1951 ซึ่งเป็นการปรับปรุงเกณฑ์เพิ่มค่าที่ต่ำสุด เมื่อจะใช้เกณฑ์นี้ ต้องเปลี่ยนผลตอบแทนเป็นสูญเสีย ทั้งนี้เพราะผู้ตัดสินใจพยายามประเมินทางเลือกของการกระทำที่มีอยู่ในแง่ที่ว่า ในสภาวการณ์หนึ่งที่เกิดขึ้น ผลตอบแทนของทางเลือกหนึ่งจะเป็นที่พึงพอใจ แต่ทางเลือกอื่นจะพึงพอใจน้อยกว่า ซึ่งจะทำให้เกิดการเสียดายหรือการสูญเสียขึ้น

Savage เชื่อว่าผู้ตัดสินใจควรจะคำนวณผลต่างระหว่างผลตอบแทนที่ได้จริง ถ้าสภาวการณ์ต่าง ๆ เกิดขึ้น กับผลตอบแทนที่มากสุดที่เป็นไปได้ และเขาควรจะทำให้ผลต่างนี้น้อยที่สุด ผลต่างนี้เขาเรียกว่า "การสูญเสีย (Regret)" เนื่องจากการสูญเสียจากการเลือกทางเลือก a_i เมื่อสภาวการณ์เป็น w_j นั้นที่จริงจะเท่ากับค่าเสียโอกาสของการเลือกทางเลือก a_i นั่นเอง เราใช้ ℓ_{ij} แทนความเสียดายหรือค่าเสียโอกาสสำหรับ (a_i, w_j) จากนิยาม ℓ_{ij} จะคำนวณได้เป็น

$$\ell_{ij} = M_j - u_{ij} \; ; \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ j = 1, 2, \ldots, m \end{matrix}$$

$$M_j = \max_A \{ u(a_i, w_j) = u_{ij} \}$$

แต่ละแถวตั้ง (สภาวการณ์) ในตารางสัมพันธ์ของผลตอบแทน เราจะหาค่าที่โตสุดของ u_{ij} และแทนด้วย M_j เช่นเราเลือกได้ในแถวตั้ง 1 เราก็ได้ M_1 แล้วเราก็นำทุกสมาชิกในแถวตั้ง 1 ไปลบจาก M_1 ผลต่าง $M_1 - u_{i1}$ เหล่านี้ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ จะเป็นค่าเสียโอกาส เราดำเนินการเช่นนี้กับทุกแถวตั้ง การวิเคราะห์และผล จะสรุปได้ดังตารางต่อไปนี้

<u>ตาราง 4</u> ตารางสัมพันธ์ของการสูญเสียหรือค่าเสียโอกาส

	W	w_1	w_2	w_3
A	a_1	0	800000	1700000
	a_2	200000	0	900000
	a_3	300000	100000	0
	M_j	0	800000	1700000

เราสามารถแปลความหมายจำนวนเลขในตาราง 4 ได้ดังนี้ —สมมติว่าสภาวการณ์ w_1 เกิดขึ้น กำไรสุทธิที่มากสุดที่จะเกิดขึ้นตามสภาวการณ์นี้จะเป็น 0 บาท ดังนั้นทางเลือกที่ผู้ตัดสินใจควรจะเลือกในกรณีก็คือ a_1 การสูญเสียหรือกำไรสุทธิที่ละเลยไปในกรณีนี้เป็น 0 บาท ในทางตรงกันข้าม ถ้าผู้ตัดสินใจเลือก a_2 กำไรสุทธิจะได้เป็น −200000 บาท เพราะฉะนั้นการสูญเสียจะเป็น 200000 บาท เพราะ a_2 ไม่ได้เป็นทางเลือกที่ดีที่สุดที่เขาควรจะเลือก จำนวนเลขในเซลล์อื่น ๆ ก็อธิบายได้ทำนองเดียวกัน

Savage เสนอว่าข้อมูลข่าวสารที่ได้รับจากตารางสัมพันธ์ของการสูญเสียควรจะใช้คำนวณสำหรับเกณฑ์ลดค่าสูญเสียที่มากสุด แต่ละทางเลือก a_i ผู้ตัดสินใจคำนวณการสูญเสียที่มากสุดที่เขาได้รับตามสภาวการณ์ต่าง ๆ ทั้งหมดที่อาจจะเกิดขึ้น แล้วเขาควรจะเลือกทางเลือกที่มีการสูญเสียน้อยที่สุดในพวกที่มากสุดเหล่านั้น วิธีการนี้เรียกว่า เกณฑ์ลดค่าสูญเสียที่มากสุด (Minimax Regret Criterion) และนิยามไว้ดังนี้

<u>นิยาม 2</u> ให้ A เป็นกลุ่มทางเลือก, W เป็นกลุ่มสภาวการณ์, และ U เป็นฟังก์ชันผลตอบแทนที่เป็นค่าจริงซึ่งกำหนดใน $A \times W$ ของปัญหาการตัดสินใจภายใต้ความไม่แน่นอน ให้ l_{ij} เป็นการสูญเสียหรือค่าเสียโอกาสของ (a_i, w_j) แล้วเกณฑ์ลดค่าสูญเสียที่มากสุด กำหนดไว้ว่า

$$\min_A \max_W \{L(a_i, w_j) = l_{ij}\}$$
$$= \min_A \{\max_W (l_{1j}), \max(l_{2j}), \ldots, \max(l_{nj})\}$$

ทางเลือกที่สอดคล้องกับข้อกำหนดนี้จะเป็นทางเลือกที่ดีที่สุดสำหรับปัญหาตัดสินใจนั้น

ผลจากการใช้เกณฑ์นี้เราสรุปได้ดังตารางต่อไปนี้

		$\max_W \{L(a_i, w_j)\}$
A	a_1	1700000
	a_2	900000
	a_3	300000

เราจะเห็นได้ว่า a_3 เป็นทางเลือกที่ดีที่สุดสำหรับบริษัท นั่นคือควรจะซื้อเครื่องจักรที่มีสมรรถภาพสูง

การวิเคราะห์ดังกล่าวนั้นอธิบายได้ตามขั้นตอนต่อไปนี้

- กำหนด A, W
- กำหนด $U : A \times W \longrightarrow R$
- คำนวณ ℓ_{ij} สำหรับแต่ละ (a_i, w_j)
- แต่ละทางเลือก a_i ใน A คำนวณ $U(a_i) = \max_W(\ell_{ij})$
- คำนวณ $U(a_k) = \min_A \{U(a_i)\}$
- เลือก a_k ที่เป็นทางเลือกที่ดีที่สุด

วิธีการนี้มีข้อโต้แย้งบางประการด้วยคือ ประการแรกเป็นเกณฑ์ที่มองโลกในแง่ร้ายเช่นเดียวกับเกณฑ์เพิ่มค่าที่น้อยสุด ประการที่สองมันไม่ได้แสดงให้ชัดแจ้งว่าผลต่างในผลตอบแทนนั้น ความจริงจะวัดในสิ่งที่เรียกว่าการสูญเสีย นั่นคือมันไม่ชัดแจ้งว่าการสูญเสียจากผลตอบแทน 500000 บาท ไปสู่ผลตอบแทน 450000 บาท จะเท่ากับการสูญเสียจาก 600000 บาท ไปสู่ 550000 บาท อย่างไรก็ตามถ้าค่าเงินตรา (Monetary values) ในปัญหาไม่สุดเหวี่ยงมาก และถ้าการพิจารณาที่ต่างจากค่าเงินตรานั้นมีค่าน้อย แล้วข้อโต้แย้งดังกล่าวนี้ก็ไม่ร้ายแรง เพราะภายใต้ข้อตกลงหรือข้อสมมติทั้งสองนี้ ผู้ตัดสินใจจะปฏิบัติประหนึ่งว่าเขาไม่เป็นคนหลีกหนีการเสี่ยง (Risk-averse) และผลตอบแทนหรืออรรถประโยชน์ (Utilities) ของเขาจะเป็นเชิงเส้น (Linear) ในค่าเงินตรานั้น

อย่างไรก็ตามมีข้อแย้งที่ร้ายแรงอีกประการหนึ่งสำหรับวิธีการนี้ ข้อโต้แย้งนั้นจะอธิบายโดยตัวอย่างต่อไปนี้

พิจารณาตารางสัมพันธ์ของผลตอบแทน และตารางสัมพันธ์ของการสูญเสียของมันในตารางต่อไปนี้

W		w_1	w_2	w_3
A	a_1	8	4	1
	a_2	1	7	3
	a_3	5	1	8

W		w_1	w_2	w_3
A	a_1	0	3	7
	a_2	7	0	5
	a_3	3	6	0

ตามเกณฑ์ลดค่าสูญเสียที่มากสุด เราจะเลือก a_3 เป็นทางเลือกที่ดีสุด สมมติว่าเราพบโดยฉับพลันว่าทางเลือก a_1 ไม่สัมพันธ์กับปัญหานี้ ซึ่งจะตัดออกไปจาก A โดยที่ a_1 ไม่ได้สัมพันธ์ เราจึงหวังว่า a_3 ควรจะเป็นหนทางที่ดีที่สุด อันนี้ไม่เป็นจริงสำหรับตัวอย่างนี้ เพราะว่าเกณฑ์ลดค่าสูญเสียที่มากสุดจะเกี่ยวข้องแต่เพียง a_2 และ a_3 จึงเลือก a_2 เป็นทางเลือกที่ดีที่สุด อันนี้จะเห็นได้จากตารางสัมพันธ์ของการสูญเสียใหม่ที่เกี่ยวข้องกับ a_2 และ a_3 ดังตารางต่อไปนี้

W		w_1	w_2	w_3
A	a_2	4	0	5
	a_3	0	6	0

ซึ่งเป็นไปตามที่ Chernoff โต้แย้งว่า ทางเลือกที่ไม่สัมพันธ์ควรจะไม่มีอิทธิพลต่อการเลือกของทางเลือกที่ดีที่สุด ถ้าเกณฑ์นั้นมีเหตุผลหรือใช้ได้ การเลือกของทางเลือกที่ดีสุดภายใต้เกณฑ์ที่มีเหตุผลควรจะเป็นอิสระกับทางเลือกที่ไม่เกี่ยวข้องกัน

1.3 <u>เกณฑ์ดัชนีมองโลกในแง่ดีและร้าย</u> (Pessimism - Optimism Index Criterion) ทั้งเกณฑ์เพิ่มค่าที่น้อยสุด และเกณฑ์ลดค่าสูญเสียที่มากสุดนี้เป็นแบบอนุรักษ์ชนิดสุดเหวี่ยง หรือแบบมองโลกในแง่ร้ายในแง่ที่ว่า จะเตรียมพร้อมสำหรับสิ่งที่เลวสุดมากกว่าสิ่งที่ดีสุด Leonid Hurwicz ได้เสนอเกณฑ์สำหรับตัดสินใจที่อยู่ระหว่างสุดเหวี่ยงของสิ่งที่ดีสุดกับเลวสุด ผู้ตัดสินใจจะมีความผันแปรในการมองโลกในแง่ดีของเขา คือไม่เพียงแต่ในบุคคลิกภาพ ยังเป็นทัศนคติของการตัดสินใจบางอย่างอีกด้วย ตัวอย่างเช่น ผู้ตัดสินใจที่มองโลกในแง่ดีจะรู้สึกในแง่ดีต่อการเกิดขึ้นของสภาวการณ์บางอย่าง เขาควรจะสามารถรวมความเชื่อที่มีเหตุผลนี้ไปใช้ในการวิเคราะห์ของการกระทำการตัดสินใจ ด้วยจุดประสงค์นี้ Hurwicz ได้เสนอความคิดเกี่ยวกับสัมประสิทธิ์ของการมองโลกในแง่ดี ซึ่งแทนด้วย α

แนวความคิดนี้จะวัดการมองโลกในแง่ดีของผู้ตัดสินใจในเทอมของ α ซึ่งมีเสกลจาก 0 ถึง 1 ผู้ตัดสินใจที่มองโลกในแง่ดีจะมีตำแหน่งของ α ใกล้ 1 ในเมื่อ α ของผู้มองโลกในแง่ร้ายมีค่าใกล้ 0 ดังนั้น Hurwicz จึงเสนอผลรวมแบบถ่วงน้ำหนักของทัศนการมองโลกในแง่ดีและร้าย (น้ำหนักเป็น α และ $1-\alpha$) แล้วก็เลือกทางเลือกที่มีผล

รวมแบบถ่วงน้ำหนักที่มากสุด นั่นคือสำหรับแต่ละทางเลือก a_i ให้ m_i เป็นกำไรสุทธิที่ต่ำสุด และ M_i เป็นกำไรสุทธิที่สูงสุด แล้วเราคำนวณผลตอบแทนแบบเฮอร์วิคซ์

$$H(a_i) = \alpha M_i + (1-\alpha) m_i$$

และทางเลือกที่มี $H(a_i)$ สูงสุด จะเป็นทางเลือกที่ดีที่สุด

จากตัวอย่างที่กล่าวมาเราจะได้ข้อมูลข่าวสารที่จำเป็นดังตารางต่อไปนี้

A	$M_i = \max\limits_W \{U(a_i,w_j)\}$	$m_i = \min\limits_W \{U(a_i,w_j)\}$	$H(a_i)$; $\alpha = .6$
a_1	0	0	$.6(0)+.4(0) = 0$
a_2	800000	-200000	$.(800000)+.4(-200000) = 400000$
a_3	1700000	-300000	$.6(1700000)+.4(-300000) = 900000$

ตามเกณฑ์ตัดสินการมองโลกในแง่ดีและร้าย ผู้ตัดสินควรจะเลือก a_3 เพราะว่ามันทำให้ผลตอบแทนแบบเฮอร์วิคซ์สูงสุด จงสังเกตว่า α นั้นเหมือนเทอมความน่าจะเป็น ถ้า α แปลความหมายได้ว่าเป็นค่าประมาณแบบจิตวิสัยของความน่าจะเป็น แล้วเกณฑ์นี้จะเท่ากับการทำให้ผลตอบแทนคาดหวัง (Expected Payoff) สูงสุด

คำอธิบายที่กล่าวมานี้สามารถอธิบายได้ในเชิงรูปแบบ ดังนี้

<u>นิยาม 3</u> ให้ A เป็นกลุ่มทางเลือก, W เป็นกลุ่มสภาวการณ์, และ U เป็นฟังก์ชันผลตอบแทนแบบค่าจริงสำหรับปัญหาการวิเคราะห์ตัดสินใจภายใต้ความไม่แน่นอน แล้วเกณฑ์ตัดสินการมองโลกในแง่ดีและร้าย กำหนดไว้ว่า

$$\max_A \{H(a_i)\} = \max_A \left\{\alpha \max_W (u_{ij}) + (1-\alpha) \min_W (u_{ij})\right\}; \quad 0 \le \alpha \le 1$$

ทางเลือกที่มีค่าสอดคล้องกับข้อกำหนดนี้จะเรียกว่า ทางเลือกที่ดีสุดสำหรับปัญหาตัดสินใจนั้น

<u>ข้อสังเกต</u> (1) สำหรับ $\alpha = 0$ เกณฑ์ตัดสินมองโลกแง่ดีและร้ายจะกลายเป็น

$$\max_A \min_W \{U(a_i,w_j)\}$$

ซึ่งเรียกว่า เกณฑ์เพิ่มค่าที่น้อยสุด (Maximin Criterion)

(2) สำหรับ $\alpha = 1$ เกณฑ์ตัดสินมองโลกในแง่ดีและร้ายจะกลายเป็น

$$\max_A \max_W \{U(a_i,w_j)\}$$

ซึ่งเรียกว่า เกณฑ์เพิ่มค่าที่มากสุด (Maximax Criterion) เกณฑ์นี้จะตรงข้ามกับเกณฑ์

เพิ่มค่าที่ต่ำสุด และเกณฑ์เพิ่มค่าที่มากสุดนี้จะแนะนำผู้ตัดสินใจให้เลือกทางเลือกที่ให้ผลตอบแทนสูงสุดในระหว่างผลตอบแทนที่สูงสุด

ขบวนการคำนวณสำหรับเกณฑ์ดัชนีมองโลกในแง่ดีและร้ายแสดงได้ดังขั้นตอน ต่อไปนี้

- กำหนด A, W
- กำหนด $U: A \times W \longrightarrow R$
- สำหรับแต่ละทางเลือก a_i หา $m_i = \min\limits_{W}\{U(a_i,w_j)\}$ และ $M_i = \max\limits_{W}\{U(a_i,w_j)\}$
- สำหรับ α ที่กำหนดให้ คำนวณ $H(a_i) = \alpha M_i + (1-\alpha)m_i$
- คำนวณ $H(a_k) = \max\limits_{A}\{H(a_i)\}$
- เลือก a_k ที่เป็นทางเลือกที่ดีที่สุด

ตารางต่อไปนี้แสดงถึงข้อโต้แย้งของเกณฑ์ดัชนีมองโลกในแง่ดีและร้าย พิจารณาผลตอบแทนในตารางต่อไปนี้ สมมติว่า $\alpha = 1/4$ แล้วผลตอบแทนแบบเฮอร์วิคซ์ของทางเลือก a_1 และ a_2 จะเท่ากัน นั่นคือ $H(a_1) = H(a_2) = 25$ เพราะฉะนั้นทั้งสอง

	W	w_1	w_2		w_{100}
A	a_1	0	100	....	100
	a_2	100	0	....	0

ทางเลือกจึงเหมาะสมที่สุด นั่นคือทางเลือก a_1 และ a_2 จะไม่แตกต่างกัน อย่างไรก็ตามถ้าผู้ตัดสินใจไม่มีความรู้เลยเกี่ยวกับสภาวการณ์ที่แท้จริง แล้วเขาจะมีความโน้มเอียงที่จะพิจารณา a_1 มากกว่า a_2 เพราะว่าผลตอบแทนสูงสุดมีโอกาสมากที่จะได้รับตามทางเลือกนี้ แต่เกณฑ์นี้แนะนำว่าจะไม่แตกต่างกันระหว่างทางเลือก a_1 และ a_2 นี้

1.4 <u>เกณฑ์เพิ่มค่าที่มากสุด</u> (Maximax Criterion) จากข้อสังเกต 2 เราจะเห็นได้ว่าเกณฑ์เพิ่มค่าที่มากสุดนี้จะเกี่ยวข้องกับทางเลือก a_k ที่ทำให้สอดคล้องกับ

$$H(a_k) = \max_{A}\max_{W}\{U(a_i,w_j) = u_{ij}\}$$

ต่อไปนี้เราจะนิยามเกณฑ์เพิ่มค่าที่มากสุดในเชิงรูปแบบ

<u>นิยาม 4</u> ให้ $\mathcal{A}$ เป็นกลุ่มทางเลือก, $\mathcal{W}$ เป็นกลุ่มสภาวการณ์, และ $\sqcup$ เป็นฟังก์ชันผลตอบแทนที่มีค่าจริงซึ่งกำหนดใน $\mathcal{A}\times\mathcal{W}$ แล้วเกณฑ์เพิ่มค่าที่มากสุดจะกำหนดไว้ว่า

$$\max_{\mathcal{A}} \max_{\mathcal{W}} \{\sqcup(a_i, w_j) = u_{ij}\}$$

ทางเลือกที่มีค่าสอดคล้องกับข้อกำหนดนี้จะเป็นทางเลือกที่เหมาะสมของปัญหาตัดสินใจ

ในการประยุกต์เกณฑ์นี้กับปัญหาตัดสินใจ เราต้องคำนวณ $\max_{\mathcal{W}}\{\sqcup(a_i, w_j)\}$ ของแต่ละทางเลือก แล้วพิจารณาค่าที่สูงสุดของค่าที่มากสุดเหล่านั้น ทางเลือก a_k ที่มีค่าสูงสุดจะเป็นทางเลือกที่เหมาะสม กระบวนการนี้อธิบายได้ดังตารางต่อไปนี้

$\mathcal{A}$ \ $\mathcal{W}$	w_1	w_2	w_3	$\max_{\mathcal{W}}\{\sqcup(a_i,w_j)\}$	
a_1	0	0	0	0	
a_2	−200000	800000	800000	800000	
a_3	−300000	700000	1700000	1700000	$\leftarrow \max_{\mathcal{A}}$

จากตารางนี้เราจะเห็นว่า $\max_{\mathcal{A}} \max_{\mathcal{W}} \{\sqcup(a_i,w_j) = u_{ij}\} = 1700000$ และทางเลือกที่สอดคล้องคือ a_3 ดังนั้นตามเกณฑ์เพิ่มค่าที่มากสุด ผู้ตัดสินใจควรจะเลือก a_3 นั่นคือเขาควรจะซื้อเครื่องจักรที่มีประสิทธิภาพสูง เกณฑ์นี้จะมองโลกในแง่สุกใส

ขั้นตอนต่อไปนี้จะแสดงถึงขบวนการของเกณฑ์เพิ่มค่าที่มากสุด

- กำหนด $\mathcal{A}, \mathcal{W}$
- กำหนด $\sqcup : \mathcal{A}\times\mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{R}$
- สำหรับแต่ละทางเลือก a_i ใน $\mathcal{A}$ คำนวณ $\sqcup(a_i)$
$$\sqcup(a_i) = \max_{\mathcal{W}}\{\sqcup(a_i, w_j)\}$$
- คำนวณ $\sqcup(a_k) = \max_{\mathcal{A}}\{\sqcup(a_i)\}$
- เลือกทางเลือก a_k

1.5 <u>เกณฑ์ของลาปลาส</u> (Laplace Criterion) เกณฑ์นี้มักเรียกว่า หลักของเหตุผลไม่พอเพียง (*Principle of Insufficient Reason*) เกณฑ์นี้กล่าวว่าถ้าผู้ตัดสินใจไม่มีข้อมูลข่าวสารอะไรเลยเกี่ยวกับการเกิดขึ้นของสภาวการณ์นอกบังคับ $w_1, w_2, \ldots, w_m$ แล้วเขาควรจะทำประหนึ่งว่ามันมีโอกาสเกิดขึ้นเท่า ๆ กัน นั่นคือเขาควรจะทำปัญหานี้อย่างปัญหาวิเคราะห์ตัดสินใจภายใต้ความไม่แน่นอนที่มีฟังก์ชันน่าจะเป็นก่อนทดลองของ

เป็นแบบยูนิฟอร์ม (Uniform Prior Probability Function) ตามแนวความคิดนี้ เราต้องคำนวณผลตอบแทนคาดหวัง $\overline{U}(a_i)$ ดังนี้

$$\overline{U}(a_i) = u_{i1}(1/m) + u_{i2}(1/m) + \cdots + u_{im}(1/m)$$
$$= (1/m)(u_{i1} + u_{i2} + \cdots + u_{im})$$

และเลือกทางเลือกที่มีผลตอบแทนคาดหวังสูงสุด การคำนวณนี้จะเหมือนกับนิยามต่อไปนี้

<u>นิยาม 5</u> ให้ A เป็นกลุ่มทางเลือก, W เป็นกลุ่มสภาวการณ์, และ U เป็นฟังก์ชันผลตอบแทนที่มีค่าจริงของตัวแบบการวิเคราะห์ตัดสินใจภายใต้ความไม่แน่นอน แล้วเกณฑ์ของลาปลาสจะกำหนดไว้ว่า

$$\max_A \{\overline{U}(a_i)\}$$

ในเมื่อ $U(a_i) = (1/m)(u_{i1} + u_{i2} + \cdots + u_{im})$ ทางเลือก a_k ที่สอดคล้องกับข้อกำหนดนี้จะเป็นทางเลือกที่ดีที่สุดของปัญหาตัดสินใจ

การวิเคราะห์สำหรับปัญหาของเราตามเกณฑ์นี้อธิบายได้ดังตารางต่อไปนี้

	W	w_1 1/3	w_2 1/3	w_3 1/3	
A	a_1	0	0	0	(1/3)(0 + 0 + 0) = 0
	a_2	−200000	800000	800000	(1/3)(−200000+800000+800000) = 466666.67
	a_3	−300000	700000	1700000	(1/3)(−300000+700000+1700000) = 700000 ← max

ตามเกณฑ์นี้เราจะได้ว่า a_3 เป็นทางเลือกที่ดีที่สุด นั่นคือผู้จัดการควรซื้อเครื่องจักรที่มีประสิทธิภาพสูง

กระบวนการวิเคราะห์ตามเกณฑ์ลาปลาสแสดงได้ดังขั้นตอนต่อไปนี้

- กำหนด A, W
- กำหนด $U: A \times W \longrightarrow R$
- แต่ละทางเลือก คำนวณ $U(a_i) = (1/m)\sum_j^m u_{ij}$
- คำนวณ $\overline{U}(a_k) = \max_A \{\overline{U}(a_i)\}$
- เลือก a_k

2. <u>เกมผลรวมเป็นศูนย์ชนิดสองฝ่าย</u> (Two-Person, Zero-Sum Games)

ตัวแบบวิเคราะห์การตัดสินใจ (A, W, U) อาจจะพิจารณาให้เป็นเกมระหว่างผู้เล่นเกม 2 ฝ่าย ในเมื่อผู้ตัดสินใจมีบทบาทในฐานะผู้เล่นเกมฝ่ายหนึ่ง และสภาวการณ์มีบทบาทในฐานะผู้เล่นเกมอีกฝ่ายหนึ่ง (จะให้ชื่อว่าผู้เล่นเกม 1 และผู้เล่นเกม 2 ตามลำดับ) สมมติว่าผู้เล่นเกม 1 เป็นผู้มีเหตุผล โดยที่เขาเล่นเกมเพื่อที่จะให้ได้กำไรสูงสุด หรือไม่ก็สูญเสียน้อยที่สุด แต่สภาวการณ์นอกบังคับไม่ได้เป็นผู้เกมที่มีเหตุผล เพราะฉะนั้นสภาวการณ์นอกบังคับจะไม่มีเกณฑ์ใด ๆ ที่จะเล่นเกม แต่ถ้าสมมติว่าผู้เล่นเกม 2 ก็มีเหตุผลเหมือนกับผู้เล่นเกม 1 ด้วย และเล่นเกมด้วยสติปัญญาและทักษะเท่า ๆ กัน แล้วเราจะเกี่ยวข้องกับสภาวะที่ผู้เล่นเกมที่มีเหตุผลทั้งสองฝ่ายเกิดขัดแย้งผลประโยชน์กัน ทฤษฎีเกม (Game Theory) จะเกี่ยวข้องกับการหากโลบาย (Strategy) ที่ดีที่สุดในสภาวะแบบนี้ ต่อไปจะอธิบายลักษณะที่สำคัญของเกมผลรวมเป็นศูนย์ชนิดสองฝ่าย

ผู้เล่นเกมสำหรับเกมชนิดนี้จะเป็นคนเดียว, เป็นทีม, หรือบริษัท ห้างร้าน สำหรับเกมสามฝ่ายหรือเกมที่โตกว่า ถ้าเป็นไปได้ก็จะลดลงให้เป็นเกมสองฝ่าย แต่ละฝ่ายจะปฏิบัติอย่างมีเหตุผลเพื่อที่จะเพิ่มค่าผลได้ที่น้อยสุด หรือลดค่าเสียหายที่มากสุด และยังสมมติอีกว่าแต่ละฝ่ายทราบกโลบายที่เป็นไปได้ทั้งหมด นั่นคือเราหมายถึงการแจงนับอย่างสมบูรณ์ของทางเลือกทั้งหมดทุกกรณีที่อาจจะเกิดขึ้นในเกม มันเป็นแผนงานที่สมบูรณ์ซึ่งไม่สามารถทำลายด้วยทางเลือกที่คู่ต่อสู้เลือก ผู้เล่นเกมต้องรวมกโลบายที่เป็นไปได้ทั้งหมด ถึงแม้ว่าบางกโลบายดูเหมือนว่าจะไม่เป็นกโลบายที่ดี เราจะสมมติว่ามีกโลบายจำนวนจำกัดที่ผู้เล่นเกมแต่ละฝ่ายพึงมีได้ ดังนั้นถ้า X แทนเซทของกโลบายที่เป็นไปได้ทั้งหมดสำหรับผู้เล่นเกม 1 และ Y สำหรับผู้เล่นเกม 2 แล้วเราจะได้

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}; \quad Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$$

สมมติว่าผู้เล่นทั้งสองฝ่ายทราบผลลัพธ์ของกโลบายที่เลือกกระทำ ผลลัพธ์เหล่านี้ได้ชื่อว่าผลตอบแทน และแปลความหมายว่าผลได้ (Gains) ที่ผู้เล่นเกม 1 ได้จากผู้เล่นเกม 2 ถ้าผู้เล่นเกม 1 เลือกกโลบายจาก X และผู้เล่นเกม 2 เลือกกโลบายจาก Y เราสามารถคิดได้ว่าผลตอบแทนเหล่านั้นเป็นค่าของฟังก์ชันค่าจริง U ที่กำหนดใน $X \times Y$ ดังใน

กรณีของตัวแบบวิเคราะห์การตัดสินใจภายใต้ความไม่แน่นอน เราสามารถแทนข้อมูลของเกมชนิดสองฝ่าย คือกลุ่มสภาวการณ์ X, Y และค่าของฟังก์ชันผลตอบแทน U ด้วยแถวแบบสี่เหลี่ยมผืนผ้า (Rectangular Array) หรือด้วยแผนภาพตัดสินใจ (Decision Tree) ดังนั้น (X, Y, U) จะแสดงคุณลักษณะอย่างสมบูรณ์ของเกมชนิดสองฝ่าย

<u>นิยาม 6</u> ให้ X และ Y เป็นกลุ่มกโลบายของผู้เล่นเกม 1 และผู้เล่นเกม 2 ตามลำดับ และยังให้ U เป็นฟังก์ชันผลตอบแทนค่าจริงที่กำหนดใน $X \times Y$ แล้ว (X, Y, U) จะกำหนดเกมชนิดสองฝ่าย

ดังได้กล่าวมาแล้วว่าการสูญเสียของผู้เล่นเกม 2 จะเท่ากับผลได้ของผู้เล่นเกม 1 นี่เป็นเหตุผลที่เราเรียกเกมชนิดสองฝ่ายว่า "เกมผลรวมเป็นศูนย์ชนิดสองฝ่าย" สมมติว่าผู้เล่นเกมแต่ละฝ่ายดำเนินการอย่างมีเหตุผล นั่นคือเล่นเกมเพื่อให้ได้ผลได้มากที่สุดเท่าที่สามารถจะทำได้จากเกมในขณะที่ประจัญหน้ากับคู่ต่อสู้ที่เต็มไปด้วยทักษะ ซึ่งดำเนินตามจุดมุ่งหมายที่ตรงกันข้าม อาจกล่าวได้อีกอย่างว่า ถ้าผู้เล่นเกม 1 พยายามเพิ่มผลได้ที่น้อยสุด แล้วผู้เล่นเกม 2 ก็จะพยายามลดการสูญเสียที่มากสุด ต่อไปเราพัฒนาการวิเคราะห์วิธีหากโลบายที่ดีที่สุดสำหรับผู้เล่นทั้งสองฝ่ายในเกมผลรวมเป็นศูนย์ชนิดสองฝ่าย

พิจารณาเกมง่าย ๆ ที่มีสองกโลบายสำหรับผู้เล่นแต่ละฝ่าย ซึ่งจะอธิบายได้ดังตารางต่อไปนี้

	ผู้เล่นเกม 2	y_1	y_2
ผู้เล่นเกม 1	x_1	3	5
	x_2	2	8

เราพึงระลึกไว้เสมอว่าผลตอบแทนในตารางนั้นเป็นผลได้ของผู้เล่นเกม 1 จากผู้เล่นเกม 2 สมมติว่าผู้เล่นเกม 1 เลือกกโลบาย x_1 เขาจะได้ผลได้เป็น 3 หรือ 5 ถ้าผู้เล่นเกม 2 เลือก y_1 หรือ y_2 ตามลำดับ เพราะฉะนั้นผู้เล่นเกม 1 จะได้ผลได้ที่น้อยที่สุดคือ 3 จากการเลือกกโลบาย x_1 ในทำนองเดียวกันก็จะได้น้อยที่สุดคือ 2 จากการเลือกกโลบาย x_2 ดังนั้นเขาก็ควรจะเลือกกโลบายที่จะได้ผลได้มากเท่าที่เป็นไปได้ นั่นคือเลือกกโลบาย x_1

ในทางตรงกันข้ามผู้เล่นเกม 2 ก็จะเลือกกโลบายที่ลดการสูญเสียแก่ผู้เล่นเกม 1 เพราะฉะนั้นเขาควรจะเลือก y_1 เพราะกโลบายนี้สามารถป้องกันผู้เล่นเกม 1 ไม่ให้ได้เกินกว่า 3 การวิเคราะห์เหล่านี้สามารถเห็นได้จากตารางต่อไปนี้

	ผู้เล่นเกม 2	y_1	y_2	minimum
ผู้เล่นเกม 1	x_1	3	5	3^*
	x_2	2	8	2
	maximum	3^*	8	

สำหรับตัวเลขที่มีเครื่องหมาย * กำกับ จะแสดงถึงกโลบายของผู้เล่นเกม 1 และผู้เล่นเกม 2

โดยทั่วไป ถ้าผู้เล่นเกม 1 เลือก $x^\circ \in X$ แล้วผู้เล่นเกม 2 จะเลือก $y^\circ \in Y$ ที่ทำให้

$$U(x^\circ, y^\circ) = \min_{y_j \in Y} \{U(x^\circ, y_j)\}$$

ภายใต้เหตุการณ์เหล่านี้ผู้เล่นเกม 1 จะแสวงหากโลบาย x° ที่ทำให้

$$U(x^\circ, y^\circ) = \max_{x_i \in X} \min_{y_j \in Y} \{U(x_i, y_j)\} = \underline{u} \qquad \text{——— (1)}$$

อาจกล่าวได้ว่า ถ้าผู้เล่นเกม 1 เลือกกโลบาย x° ที่สอดคล้องกับ (1) นี้ แล้วก็จะประกันได้ว่าเขาจะได้ $\underline{u}$ แม้ว่าคู่ต่อสู้จะเลือกกโลบายด้วยทักษะ ด้วยเหตุผลเดียวกันผู้เล่นเกม 2 จะเลือกกโลบาย y° ที่ทำให้

$$U(x^\circ, y^\circ) = \min_{y_j \in Y} \max_{x_i \in X} \{U(x_i, y_j)\} = \overline{u} \qquad \text{——— (2)}$$

จากกโลบายที่สอดคล้องกับ (2) ผู้เล่นเกม 2 สามารถป้องกันผู้เล่นเกม 1 ไม่ให้มากกว่า $\overline{u}$ ถ้า $\underline{u} = \overline{u}$ แล้วเกมนี้เรียกว่า "มีจุดคาบเส้น หรือมีจุดบนอานม้า (Saddle Point)" และค่า $u = \underline{u} = \overline{u}$ นี้เรียกว่า "ค่าของเกม (Value of Game)" ผู้เล่นเกม 1 ได้จำนวน u ในเมื่อผู้เล่นเกม 2 เสีย u ตัวอย่างของเรานั้นค่าของเกมเป็น 3 นั่นคือผู้เล่นเกม 1 ได้ 3 และผู้เล่นเกม 2 เสีย 3 นั่นเอง

<u>นิยาม 7</u> ให้ (X, Y, U) เป็นเกม และให้ u เป็นค่าของเกม แล้วกโลบาย $x^\circ \in X$ และ $y^\circ \in Y$ จะเรียกว่าดีที่สุด (Optimal) ถ้า

$$U(x^\circ, y) \geq u \qquad \text{ทุก } y \in Y$$
$$U(x, y^\circ) \leq u \qquad \text{ทุก } x \in X$$

จงสังเกตว่าค่าของเกม u นั้นสอดคล้องกับ

$$u = \max_{x\in X} \min_{y\in Y} \{U(x,y)\} = \min_{y\in Y} \max_{x\in X} \{U(x,y)\} = U(x^\circ, y^\circ)$$

สำหรับบางเกม ค่าของเกม u อาจจะหาไม่ได้ ทฤษฎีต่อไปนี้จะตั้งเงื่อนไขที่เกมผลรวมเป็นศูนย์ชนิดสองฝ่ายมีค่าได้

<u>ทฤษฎี 1</u> ให้ (X, Y, U) เป็นเกม แล้ว

$$\max_{x\in X} \min_{y\in Y} \{U(x,y)\} \le \min_{y\in Y} \max_{x\in X} \{U(x,y)\}$$

ในเทอมของค่า $\underline{u}$ และ $\overline{u}$ ผลจากทฤษฎีนี้จะกล่าวว่า ถ้า $\underline{u} \le \overline{u}$ เราต้องการจะสร้างเงื่อนไขสำหรับเกมที่จะมีค่า u ที่ทำให้ $u = \overline{u} = \underline{u}$ ก่อนอื่นเรามาพิจารณาเกมผลรวมเป็นศูนย์ชนิดสองฝ่ายต่อไปนี้ เพื่อจะให้เข้าใจผลในทฤษฎี 1 นี้

	ผู้เล่นเกม 2	y_1	y_2	y_3	y_4	minimum
ผู้เล่นเกม 1	x_1	1	3	4	2	1
	x_2	3	5	7	6	3 max
	x_3	4	4	3	2	2
	maximum	$4_{\min}$	5	7	6	

จากตารางนี้เราจะเห็นได้ว่า

$$\max_{x\in X} \min_{y\in Y} \{U(x,y)\} = 3 \quad \text{และ} \quad \min_{y\in Y} \max_{x\in X} \{U(x,y)\} = 4$$

เพราะฉะนั้น $$\max_{x\in X} \min_{y\in Y} \{U(x,y)\} = 3 < 4 = \min_{y\in Y} \max_{x\in X} \{U(x,y)\}$$

ถ้าผลตอบแทนในเซลล์ (3, 1) หรือ (x_3, y_1) ของตารางข้างบนนี้เปลี่ยนเป็น 2 เราก็สามารถแสดงได้ว่า

$$\max_{x\in X} \min_{y\in Y} \{U(x,y)\} = 3 = \min_{y\in Y} \max_{x\in X} \{U(x,y)\}$$

ซึ่งจะได้เกมมีค่าเป็น 3 นั่นคือผู้เล่นเกม 1 ได้ 3 และผู้เล่นเกม 2 จะเสีย 3 ต่อไป เราจะกล่าวถึงเงื่อนไขสำหรับค่าของเกมที่จะมีได้

<u>ทฤษฎี 2</u> ให้ (X, Y, U) เป็นเกมผลรวมเป็นศูนย์ชนิดสองฝ่าย แล้วเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอ (necessary and sufficient) ที่

$$\bar{u} = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} \{U(x,y)\} = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} \{U(x,y)\} = \underline{u} = u$$

นั้นจะต้องมีกโลบาย $x^0 \in X$ และ $y^0 \in Y$ ที่ทำให้

$$U(x^0, y) \geq U(x^0, y^0) \qquad \text{สำหรับทุก } y \in Y$$

และ

$$U(x, y^0) \leq U(x^0, y^0) \qquad \text{สำหรับทุก } x \in X$$

ตามทฤษฎีนี้ผู้เล่นเกม 1 ควรจะเลือกกโลบายที่สามารถประกันฝ่ายเขาได้ว่าค่า $\bar{u} = u$ และผู้เล่นเกม 2 ควรจะเลือกกโลบายที่สามารถทำให้ผู้เล่นเกม 1 ได้ไม่มากกว่า $\bar{u} = u$ ในทางตรงกันข้าม ถ้าผู้เล่นเกม 1 เลือกทางอื่น ผลได้อาจจะน้อยกว่า u ในทำนองเดียวกันถ้าผู้เล่นเกม 2 ไม่มีเหตุผล โดยไปเลือกทางเลือกอื่น เขาอาจจะสูญเสียมากกว่าค่าของเกม u เราจะพิจารณาตัวอย่างของเกมผลรวมเป็นศูนย์ชนิดสองฝ่ายดังตารางต่อไปนี้

ผู้เล่นเกม 1 \ ผู้เล่นเกม 2	y_1	y_2	y_3	y_4	minimum
x_1	1	3	4	2	1
x_2	3	5	7	6	3 max
x_3	2	4	3	2	2
maximum	3 min	5	7	6	

จากตารางนี้เราจะเห็นว่า

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} \{U(x,y)\} = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} \{U(x,y)\} = 3$$

เพราะฉะนั้นเงื่อนไขที่จำเป็นของทฤษฎี 2 ก็สอดคล้องและเกมก็มีค่า คือ 3 การที่จะได้จำนวนนี้ ผู้เล่นเกม 1 จะเลือก x_2 ในทำนองเดียวกันผู้เล่นเกม 2 จะเลือก y_1 เพื่อป้องกันตัวเขาเองไม่ให้เสียมากกว่า 3

2.1 กโลบายผสม (**Mixed Strategies**) จากทฤษฎี 2 เราสามารถอ้างอิงได้ว่า เราอาจจะหาเกมที่ไม่มีค่า $u = U(x^{\circ}, y^{\circ})$ ได้ ตัวอย่างเช่น พิจารณาเกมดังต่อไปนี้

ผู้เล่นเกม 2		y_1	y_2	min.
ผู้เล่นเกม	x_1	1	−1	−1
	x_2	−1	1	−1
	max.	1	1	

เราจะเห็นได้ว่า
$$\underline{u} = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} \{U(x,y)\} = -1$$
และ
$$\overline{u} = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} \{U(x,y)\} = 1$$

ซึ่งหมายความว่า $\overline{u} > \underline{u}$ ดังนั้นเกมจึงไม่มีค่า และผู้เล่นเกม 1 และ ผู้เล่นเกม 2 ก็ไม่มีกโลบายที่เหมาะสมดังที่อธิบายในทฤษฎี 2 ยิ่งกว่านั้นถ้าผู้เล่นเกม 2 ทราบทางเลือกที่ผู้เล่นเกม 1 เลือก แล้วเขาก็สามารถเลือกกโลบายที่ทำให้ผู้เล่นเกม 1 จำต้องจ่ายให้เขา 1 หน่วย เพราะฉะนั้นจึงจำเป็นที่ผู้เล่นเกม 1 จะไม่เผยกโลบายที่เขาเลือกให้แก่ผู้เล่นเกม 2 ได้ วิธีหนึ่งที่จะทำได้ก็คือผู้เล่นเกมจะเลือกกโลบายโดยอาศัยเครื่องมือสุ่มบางอย่าง สมมติว่าผู้เล่นเกม 1 เลือก x_1 ถ้าโยนเหรียญสมดุลย์แล้วขึ้นหัว และเลือก x_2 ถ้าขึ้นก้อย ถ้าผู้เล่นเกม 2 เลือก y_1 แล้วผลตอบแทนคาดหวังสำหรับผู้เล่นเกม 1 กำหนดไว้ดังนี้

$$1(1/2) + (-1)(1/2) = 0$$

แต่ถ้าผู้เล่นเกม 2 เลือก y_2 แล้วผลตอบแทนคาดหวังสำหรับผู้เล่นเกม 1 จะเป็น

$$(-1)(1/2) + 1(1/2) = 0$$

ดังนั้นผู้เล่นเกม 1 จะได้ผลตอบแทนคาดหวังเป็น 0 โดยไม่คำนึงว่า ผู้เล่นเกม 2 จะเลือกกโลบายไหน โดยทั่วไปถ้าผู้เล่นเกม 1 เลือก x_1 ด้วยความน่าจะเป็น p และ x_2 ด้วยความน่าจะเป็น $1 - p$ แล้วผลตอบแทนคาดหวังจะเป็น

$$(1)p + (-1)(1-p) = 2p - 1$$ ถ้าผู้เล่นเกม 2 เลือก y_1

$$(-1)p + (1)(1-p) = 1 - 2p$$ ถ้าผู้เล่นเกม 2 เลือก y_2

ดังนั้นจะได้ว่า ถ้า $p<1/2$ แล้วผู้เล่นเกม 2 จะเลือก y_1 โดยที่ผลตอบแทนคาดหวังสำหรับผู้เล่นเกม 1 เป็นลบ แต่ถ้า $p>1/2$ แล้วผู้เล่นเกม 2 จะเลือก y_2 โดยที่ผลตอบแทนคาดหวังสำหรับผู้เล่นเกม 1 จะเป็นลบ เพราะฉะนั้นวิธีที่เหมาะสมสำหรับผู้เล่นเกม 1 ก็คือเล่นเกมโดยการเลือกกโลบาย x_1 ด้วยความน่าจะเป็น 1/2 และ x_2 ด้วยความน่าจะเป็น 1/2 ด้วยเหตุผลเหมือน ๆ กันจะเป็นจริงสำหรับผู้เล่นเกม 2 เพราะฉะนั้นผู้เล่นเกม 2 ควรจะเลือก y_1 ด้วยความน่าจะเป็น 1/2 และ y_2 ด้วยความน่าจะเป็น 1/2 ดังนั้นค่าของเกมจะเป็น 0

เพราะฉะนั้นเมื่อเกมไม่มีกโลบายเดี่ยวที่เหมาะสมดังระบุไว้ในทฤษฎี 2 แล้วผู้เล่นเกมสามารถใช้เครื่องมือสุ่มที่เหมาะสมบางอย่าง และเล่นเกมดังที่อธิบายข้างบนนี้ เมื่อไรก็ตามที่กโลบายได้รับการเลือกด้วยเครื่องมือที่เหมาะสมบางอย่าง แล้วกโลบายนั้นจะเรียกว่า กโลบายผสม **(mixed strateqies)** ในทางตรงกันข้าม กโลบายที่ปราศจากเครื่องมือสุ่มจะเรียกว่า กโลบายเดี่ยว **(Pure strateqies)** กโลบายผสมที่เหมาะสมจะมีเสมอ นั่นคือค่าของเกมจะมีด้วย ซึ่งจะเป็นไปตามทฤษฎีที่ได้ชื่อว่า **Min-Max Theorem** ก่อนที่จะกล่าวทฤษฎีนี้ จะได้กล่าวแนวคิดเบื้องต้นบางอย่างก่อน

<u>นิยาม 8</u> ให้ (X, Y, u) เป็นเกมที่มี $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ และ $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_l\}$ แล้วกโลบายผสมสำหรับผู้เล่นเกม 1 กำหนดไว้เป็น m-tuple $(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ โดยที่ p_i เป็นความน่าจะเป็นที่ผู้เล่นเกม 1 เลือก x_i, $p_i \geq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ และ $\sum_i^m p_i = 1$ ในทำนองเดียวกันกโลบายผสมสำหรับผู้เล่นเกม 2 ก็กำหนดไว้เป็น l-tuple $(q_1, q_2, \ldots, q_l)$ โดยที่ q_i เป็นความน่าจะเป็นที่ผู้เล่นเกม 2 เลือก y_j, $q_j \geq 0$ $(j = 1, 2, \ldots, l)$ และ $\sum_j^l q_i = 1$

จงสังเกตว่ากโลบายผสมนั้นอ้างถึงด้วยความน่าจะเป็นที่ผู้เล่นเกมเลือกทางเลือกต่าง ๆ ทั้งนี้ก็เพราะว่าความน่าจะเป็นเท่านั้นที่ผู้ตัดสินใจหรือผู้เล่นเกมใช้พิจารณาเลือกกโลบาย x_i หรือ y_j ต่าง ๆ

ให้ S_1 เป็นเซทของกโลบายผสมทั้งหมดสำหรับผู้เล่นเกม 1 นั่นคือ S_1 ประกอบด้วย m-tuples ในรูปฟอร์ม $(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ ในเมื่อ $p_i \geq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ และ $\sum_i^m p_i = 1$ ในทำนองเดียวกัน ให้ S_2 เป็นเซทของกโลบายผสมทั้งหมดสำหรับผู้เล่นเกม 2 ดังนั้น S_2 จะประกอบด้วย ℓ-tuples $(q_1, q_2, \ldots, q_\ell)$ ที่มี $q_j \geq 0$ $(j = 1, 2, \ldots, \ell)$ และ $\sum q_j = 1$ ต่อไปเราจะนิยามค่าคาดหวังของผู้เล่นเกม 1

นิยาม 9 ให้ S_1 และ S_2 เป็นเซทของกโลบายผสมทั้งหมดสำหรับผู้เล่นเกม 1 และผู้เล่นเกม 2 ตามลำดับ ให้ U เป็นฟังก์ชั่นผลตอบแทนที่กำหนดจาก $X \times Y$ แล้วค่าคาดหวังของผู้เล่นเกม 1, $E(a, b)$, เมื่อเขาเลือก $a = (p_1, p_2, \ldots, p_m) \in S_1$ และผู้เล่นเกม 2 เลือก $b = (q_1, q_2, \ldots, q_\ell) \in S_2$ จะกำหนดไว้ดังนี้

$$E(a,b) = \sum_i^m \sum_j^\ell U(x_i, y_j)\, p_i q_j$$

เราจะเห็นได้ว่าค่าคาดหวังของผู้เล่นเกม 1 และกลุ่มกโลบายผสม S_1 และ S_2 นั้นจะกำหนดเกมผลรวมเป็นศูนย์ชนิดสองฝ่าย เพราะฉะนั้นเราจึงสามารถอธิบายเกมผลรวมเป็นศูนย์ชนิดสองฝ่ายได้ด้วย triplet (S_1, S_2, E) ในเมื่อ E แทนค่าคาดหวังของผู้เล่นเกม 1

นิยาม 10 ให้ (S_1, S_2, E) เป็นเกม $a^\circ \in S_1$ และ $b^\circ \in S_2$ เป็นกโลบายผสมที่เหมาะสมสำหรับผู้เล่นเกม 1 และผู้เล่นเกม 2 ตามลำดับ และถ้า $a \in S_1$ และ $b \in S_2$ แล้วเราจะได้ว่า

$$E(a, b) \leq E(a^\circ, b^\circ) \leq E(a^\circ, b)$$

ปริมาณ $E(a^\circ, b^\circ)$ ในนิยามข้างบนนี้เรียกว่าค่าของเกม เมื่อเล่นเกมกันนั้นผู้เล่นเกม 1 จะได้ $E(a^\circ, b^\circ)$ แต่ผู้เล่นเกม 2 จะเสีย $E(a^\circ, b^\circ)$ ต่อไปนี้เราจะกล่าวถึง Min-Max Theorem

ทฤษฎี 3 (Min-Max Theorem) ให้ (S_1, S_2, E) เป็นเกม แล้วปริมาณ

$$\min_{a \in S_1} \max_{b \in S_2} \{E(a,b)\} \quad \text{และ} \quad \max_{b \in S_2} \min_{a \in S_1} \{E(a,b)\}$$

จะหาได้และเท่ากัน

ดังนั้นจากทฤษฎีข้างบนจะได้ว่า ทุก ๆ เกมมีค่า โดยที่ผู้เล่นเกม 1 และผู้เล่นเกม 2 จะมีกโลบายผสมที่เหมาะสมเสมอ ค่าของเกมกำหนดไว้เป็น

$$\begin{aligned} \min_{a\in S_1}\max_{b\in S_2}\{E(a,b)\} &= \max_{b\in S_2}\min_{a\in S_1}\{E(a,b)\} \\ &= E(a^\circ, b^\circ) = v \end{aligned}$$

วิธีหากโลบายที่เหมาะสมจะได้กล่าวต่อไปนี้ — จากนิยามของผลตอบแทนคาดหวังสำหรับผู้เล่นเกม 1 เราจะได้ว่า

$$E(x_i, b) = \sum_{j}^{l} U(x_i, y_j) q_j$$

เมื่อผู้เล่นเกม 1 เลือกกโลบายเดี่ยว $x_i \in X$ และผู้เล่นเกม 2 เลือกกโลบายผสม $b = (q_1, q_2, \ldots, q_l) \in S_2$ ในทำนองเดียวกัน ถ้าผู้เล่นเกม 1 และผู้เล่นเกม 2 เลือก $a = (p_1, p_2, \ldots, p_m) \in S_1$ และ $y_j \in Y$ ตามลำดับ แล้ว

$$E(a, y_j) = \sum_{i}^{m} U(x_i, y_j) p_i$$

จากนิยามเหล่านี้ เราจะเห็นว่า

$$\begin{aligned} \sum_{i}^{m} E(x_i, b) p_i &= \sum_{j}^{l} E(a, y_j) q_j \\ &= \sum_{i}\sum_{j} U(x_i, y_j) p_i q_j \\ &= E(a, b) \end{aligned}$$

ต่อไปเราจะกล่าวถึงทฤษฎีที่ทำให้ปัญหาของวิธีที่จะหากโลบายผสมที่เหมาะสมลดไปเป็นปัญหาพีชคณิตเบื้องต้น

<u>ทฤษฎี 4</u> ให้ (S_1, S_2, E) เป็นเกม และให้ v เป็นค่าของเกม แล้วเงื่อนไขที่เพียงพอและจำเป็นที่กโลบายผสม

$$a^\circ = (p_1^\circ, p_2^\circ, \ldots, p_m^\circ) \in S_1$$

$$\text{และ } b^\circ = (q_1^\circ, q_2^\circ, \ldots, q_l^\circ) \in S_2$$

จะเหมาะสมสำหรับผู้เล่นเกม 1 และผู้เล่นเกม 2 ตามลำดับ ก็เมื่อ

$$E(x_i, b^\circ) \le v \quad \text{และ} \quad E(a^\circ, y_j) \ge v$$

สำหรับ $x_i \in X$ และ $y_j \in Y$

ต่อไปเราจะพิจารณาเกมง่าย ๆ ดังตารางต่อไปนี้

	ผู้เล่นเกม 2	y_1	y_2
ผู้เล่นเกม 1	x_1	1	6
	x_2	5	2

และจะใช้ทฤษฎี 4 หากโลบายผสมที่เหมาะสม และค่าของเกม เราจะเห็นได้ว่าเกมนี้ไม่มีกโลบายเดี่ยวที่เหมาะสม เพราะฉะนั้นเราจึงใช้ทฤษฎี 4 ประยุกต์ ให้ v เป็นค่าของเกม เมื่อพิจารณากโลบายเดี่ยว x_1 แล้วจากเงื่อนไขที่ระบุในทฤษฎี เราจะได้

$$E(x_1, b^\circ) = \sum_{j}^{2} U(x_1, y_j) q_j^\circ \leq v$$

ในเมื่อ $b^\circ = (q_1^\circ, q_2^\circ)$ ขยายผลรวมและแทนผลตอบแทนในอสมการข้างบนนี้ เราจะได้

$$(1)q_1^\circ + (6)q_2^\circ \leq v$$

ในทำนองเดียวกัน สำหรับกโลบายเดี่ยว x_2 เราได้

$$E(x_2, b^\circ) \leq v \implies (5)q_1^\circ + (2)q_2^\circ \leq v$$

จากสองอสมการนี้ เราจึงได้

$$q_1^\circ + 6q_2^\circ \leq v, \qquad 5q_1^\circ + 2q_2^\circ \leq v \qquad (1)$$

และ $$q_1^\circ + q_2^\circ = 1, \quad 0 \leq q_1^\circ, q_2^\circ \leq 1 \qquad (2)$$

ในทำนองเดียวกัน เราจะได้

$$p_1^\circ + 5p_2^\circ \geq v, \qquad 6p_1^\circ + 2p_2^\circ \geq v \qquad (3)$$

และ $$p_1^\circ + p_2^\circ = 1, \quad 0 \leq p_1^\circ, p_2^\circ \leq 1 \qquad (4)$$

จากระบบสมการเชิงเส้น (1) ถึง (4) เราหาค่า p_1°, p_2°, q_1°, q_2°, และ v ได้ สมมติว่าเราแทนอสมการใน (1) และ (3) ด้วยสมการ แล้วเราจะได้

$$q_1^\circ + 6q_2^\circ = v, \qquad p_1^\circ + 5p_2^\circ = v$$
$$5q_1^\circ + 2q_2^\circ = v, \qquad 6p_1^\circ + 2p_2^\circ = v$$

และ $$q_1^\circ + q_2^\circ = 1, \qquad p_1^\circ + p_2^\circ = 1$$

จากสมการเหล่านี้เราจะได้

$$p_1^\circ = 3/8, \quad p_2^\circ = 5/8, \quad q_1^\circ = 1/2, \quad q_2^\circ = 1/2, \quad v = 7/2$$

เราจะเห็นได้ว่าค่าต่าง ๆ เหล่านี้สอดคล้องกับเงื่อนไขใน (1) ถึง (4) เพราะฉะนั้นค่าของเกมเป็น 7/2, เวคเตอร์ (3/8, 5/8) เป็นกโลบายผสมที่เหมาะสมสำหรับผู้เล่นเกม 1 และเวคเตอร์ (1/2, 1/2) เป็นกโลบายผสมที่เหมาะสมสำหรับผู้เล่นเกม 2

บางครั้งไม่สามารถแก้ปัญหาระบบสมการ หรืออสมการได้ ในสภาวะเช่นนั้นจะต้องอาศัยทฤษฎีต่อไปนี้ช่วยหากโลบายที่เหมาะสม และค่าของเกมได้

<u>ทฤษฎี 5</u> ให้ (S_1, S_2, E) เป็นเกมซึ่งมีค่าเป็น v และให้ $a^0 = (p_1^0, p_2^0, \ldots, p_m^0)$ และ $b^0 = (q_1^0, q_2^0, \ldots, q_\ell^0)$ เป็นกโลบายที่เหมาะสมใด ๆ สำหรับผู้เล่นเกม 1 และผู้เล่นเกม 2 ตามลำดับ แล้วสำหรับกโลบายเดี่ยวใด ๆ $x_i \in X$ ที่มี

$$E(x_i, b^0) < v$$

เราจะได้ $p_i^0 = 0$ และสำหรับกโลบายเดี่ยว $y_j \in Y$ ใด ๆ ที่มี

$$E(a^0, y_j) > v$$

เราจะได้ $q_j^0 = 0$

สำหรับเกมบางเกม เราอาจจะพิจารณาค่าของเกมโดยการตรวจสอบโดยตรงหรือโดยเหตุผล ตัวอย่างเช่น เราอาจจะหากโลบายเดี่ยวบางกโลบายที่ด้อยกว่ากโลบายอื่น ซึ่งเราสามารถละทิ้งไปได้จากกลุ่มกโลบาย แล้วการวิเคราะห์เพื่อที่จะหากโลบายเดี่ยวหรือผสมที่เหมาะสม และค่าของเกมนั้นก็สามารถดำเนินการได้กับกโลบายที่เหลือ ต่อไปเราจะแนะนำเทคนิคที่จะหากโลบายที่เหมาะสมในสภาวการณ์เหล่านั้น

2.1 <u>กโลบายเด่น</u> (Dominance)

ลองพิจารณาเกมต่อไปนี้

	ผู้เล่นเกม 2	y_1	y_2	y_3
ผู้เล่นเกม 1	x_1	1	6	3
	x_2	5	2	6
	x_3	4	1	5

จากการตรวจสอบโดยตรงของผลประโยชน์ในกโลบายต่าง ๆ เราจะเห็นว่า ผู้เล่นเกม 1 ควรจะขจัด x_3 เพราะว่าไม่ว่าผู้เล่นเกม 2 จะเลือกกโลบายอะไร ผู้เล่นเกม 1 ก็จะเล่นได้ดีกว่า โดยการเลือก x_1 หรือ x_2 เพราะฉะนั้นจึงมีเพียงสองกโลบายเท่านั้นสำหรับผู้เล่นเกม 1 คือ x_1 และ x_2 กโลบายเหล่านี้จึงเรียกว่ากโลบายเด่น (**Dominant Strategies**) กโลบายที่ไม่เด่นก็ควรจะขจัดออกจากตารางสัมพันธ์ผลตอบแทน ตารางสัมพันธ์ที่มีกโลบายเด่นของผู้เล่นเกม 1 แสดงได้ดังตารางต่อไปนี้

	ผู้เล่นเกม 2			
ผู้เล่นเกม 1	x_1	1	6	3
	x_2	5	2	6

ด้วยเหตุผลเดียวกัน เราสามารถแสดงได้ว่า y_1 และ y_2 เท่านั้นที่เป็นกโลบายเด่นสำหรับผู้เล่นเกม 2 ตารางสัมพันธ์ผลตอบแทนที่มีกโลบายเหล่านี้จะเป็น

	ผู้เล่นเกม 2	y_1	y_2
ผู้เล่นเกม 1	x_1	1	6
	x_2	5	2

เราจะเห็นได้ว่าค่าของเกมเป็น 7/2 และกโลบายที่เหมาะสมสำหรับผู้เล่นเกม 1 และผู้เล่นเกม 2 จะเป็น $a^\circ = (3/8,\ 5/8)$ และ $b^\circ = (1/2,\ 1/2)$ กโลบายด้อยก็ถูกขจัดไปด้วย และค่าของเกมดั้งเดิมก็เป็น 7/2 ด้วย กโลบายผสมที่เหมาะสมสำหรับผู้เล่นเกม 1 กำหนดไว้เป็น (3/8, 5/8, 0) เพราะว่าผู้เล่นเกม 1 ได้ขจัดกโลบาย x_3 ในทำนองเดียวกันกโลบายที่เหมาะสมสำหรับผู้เล่นเกม 2 กำหนดไว้เป็น (1/2, 1/2, 0) ความจริงเราสามารถแสดงได้ในทางคณิตศาสตร์ว่าเกมทั้งสองในตารางเดิมกับตารางใหม่ที่ขจัดบางกโลบายแล้วจะเหมือนกันในแง่ที่ว่าค่าของเกมจะมีค่าเป็นเช่นเดียวกัน

สำหรับเกมที่มี 2 กโลบายสำหรับผู้เล่นเกม 1 และมีอย่างน้อย 2 กโลบายสำหรับผู้เล่นเกม 2 เราสามารถใช้วิธีกราฟหาค่าของเกมได้ ลองพิจารณาเกมที่มี 2 กโลบายสำหรับผู้เล่นเกม 1 และ 3 กโลบายสำหรับผู้เล่นเกม 2 ผลตอบแทนของเกม

เป็นดังนี้

ผู้เล่นเกม 2		y_1	y_2	y_3
ผู้เล่นเกม 1	x_1	3	6	10
	x_2	6	5	2

สมมติว่าผู้เล่นเกม 1 ใช้กโลบายผสม $a = (p, 1-p)$ ถ้าผู้เล่นเกม 2 เลือก y_1 แล้วผลตอบแทนคาดหวังของผู้เล่นเกม 1 จะเป็น

$$3p + 6(1-p) = 6 - 3p$$

ในทำนองเดียวกันผลตอบแทนคาดหวังของผู้เล่นเกม 1 ถ้าผู้เล่นเกม 2 เลือก y_2 และ y_3 ตามลำดับ จะกำหนดไว้เป็น

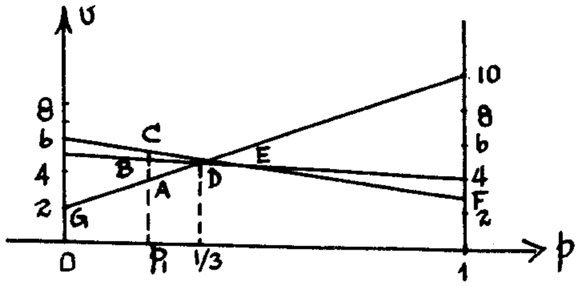
$$4p + 5(1-p) = 5 - p$$

$$10p + 2(1-p) = 2 + 8p$$

ต่อไปเราจะเขียนกราฟของเส้นทั้งสาม คือ

$$v = 6 - 3p, \quad v = 5 - p, \quad v = 2 + 8p$$

สำหรับ p ในช่วง [0, 1] กราฟนั้นจะเป็นดังนี้



สำหรับกโลบายใด ๆ ที่ผู้เล่นเกม 2 เลือก ผู้เล่นเกม 1 สามารถได้รับอย่างน้อยเท่ากับค่าต่ำสุดของออร์ดิเนทของ 3 เส้นที่จุด p ในเมื่อเลือก p ที่เหมาะ เช่น ถ้าผู้เล่นเกม 1 กำหนดค่า p_1, สำหรับ p, แล้วเราจะเห็นจากกราฟได้ว่าเขาสามารถจะได้รับอย่างน้อยเป็นปริมาณเท่ากับ Ap_1 ตามเส้นนี้เราจะเห็นว่าเส้นหนักที่ต่อจุด GDEF ดังรูป จะแทนผลตอบแทนต่ำสุดที่ผู้เล่นเกม 1 จะได้รับจากการเล่นเกม โดยธรรมชาติ

ผู้เล่นเกม 1 เลือกกโลบายผสม $a^\circ = (p^\circ, 1 - p^\circ)$ ที่จะทำให้ค่าต่ำสุดของผลตอบแทนเหล่านี้ให้โตเท่าที่จะเป็นไปได้ กโลบายเช่นนี้เกิดขึ้น ณ จุด D ซึ่งได้จากการแก้สมการ

$$v = 5 - p^\circ, \quad v = 2 + 8p^\circ$$

ซึ่งจะได้ค่าเป็น $v = 14/3$, $p^\circ = 1/3$ เพราะฉะนั้นค่าของเกมเป็น 14/3 กโลบายสำหรับผู้เล่นเกม 1 เป็น (1/3, 2/3) ในทำนองเดียวกันจะเห็นได้ว่ากโลบายที่เหมาะสมสำหรับผู้เล่นเกม 2 คือ (0, 8/9, 1/9)

2.3 <u>เกมผลรวมเป็นศูนย์ชนิดสองฝ่าย และโปรแกรมเชิงเส้น</u> (Linear Programming) เกมผลรวมเป็นศูนย์ชนิดสองฝ่าย นอกจากจะมีความสัมพันธ์ใกล้ชิดกับทฤษฎีตัดสินใจภายใต้ความไม่แน่นอน แล้วยังมีความสัมพันธ์กับทฤษฎีโปรแกรมเชิงเส้น (Linear Programming) นั่นคือในการหากโลบายที่เหมาะสมสำหรับผู้เล่น 1 และ 2 กับหาค่าของเกมนั้นจะได้โดยการสร้างและแก้ปัญหาตัวแบบโปรแกรมเชิงเส้น ต่อไปนี้เราจะแสดงวิธีทำเกมชนิดสองฝ่ายให้เป็นตัวแบบโปรแกรมเชิงเส้น

ให้ $x_i \in X$ เป็นกโลบายที่ผู้เล่นเกม 1 เลือก แล้วเงื่อนไขที่เพียงพอและจำเป็นที่กโลบาย $b = (q_1, q_2, \ldots, q_\ell)$ จะเหมาะสมสำหรับผู้เล่นเกม 2 กำหนดไว้เป็น

$$E(x_i, b) \le v$$

ในเมื่อ v เป็นค่าของเกม อย่างไรก็ตามมันจะเท่ากับ

$$\sum_j^{\ell} u_{ij} q_j \le v; \quad i = 1, 2, \ldots, m \qquad (1)$$

ในเมื่อ $U(x_i, y_j) = u_{ij}$ $(j = 1, 2, \ldots, \ell)$ และเรายังมี

$$\sum_j^{\ell} q_j = 1, \quad q_j \ge 0, \quad j = 1, 2, \ldots, \ell \qquad (2)$$

ให้เราสมมติว่า $v > 0$ และหาร (1) และ (2) ด้วย v ซึ่งจะได้

$$\sum_j^{\ell} u_{ij} \frac{q_j}{v} \le 1, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$\sum_j^{\ell} q_j/v = 1/v, \quad q_j/v \ge 0; \quad j = 1, 2, \ldots, \ell \qquad (3)$$

กำหนดตัวแปรใหม่ w_j และ z เป็น

$$w_j = q_j/\upsilon, \quad j = 1, 2, \ldots, \ell$$
$$z = 1/\upsilon$$

แล้ว (3) จะกลายเป็น

$$\begin{aligned} \sum_j^{\ell} u_{ij} w_j &\leq 1, \quad i = 1, 2, \ldots, m \\ \sum_j^{\ell} w_j &= z \\ w_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, \ell \end{aligned} \tag{4}$$

จากข้อตกลงเบื้องต้น ผู้เล่นเกม 2 เลือกกโลบายผสม $b = (q_1, q_2, \ldots, q_\ell)$ ที่ทำให้ค่าของเกม υ ต่ำสุด ซึ่งเหมือนกับการกล่าวว่า ผู้เล่นเกม 2 เลือกกโลบายผสม $(w_1, w_2, \ldots, w_\ell)$ ที่ทำให้ค่า $z = 1/\upsilon = \sum_j^{\ell} w_j$ มีค่าต่ำสุด เพราะฉะนั้น จุดประสงค์ของผู้เล่นเกม 2 ก็คือพิจารณา w_j $(j = 1, 2, \ldots, \ell)$ ที่ทำให้ $\{z = \sum_j^{\ell} w_j\}$ มากที่สุด อย่างไรก็ตาม จะมีข้อจำกัดบางอย่างที่จะทำให้ได้รับค่ามากที่สุด ซึ่งกำหนดไว้โดย

$$\begin{aligned} \sum_j^{\ell} u_{ij} w_j &\leq 1, \quad i = 1, 2, \ldots, m \\ w_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, \ell \end{aligned}$$

ดังนั้นเราจะได้ตัวแบบโปรแกรมเชิงเส้นเป็น

$$\max\left\{z = \sum_j^{\ell} w_j\right\}$$

โดยมีเงื่อนไขว่า

$$\begin{aligned} \sum_j^{\ell} u_{ij} w_j &\leq 1, \quad i = 1, 2, \ldots, m \\ w_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, \ell \end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกันเราสามารถหาตัวแบบโปรแกรมเชิงเส้นสำหรับผู้เล่นเกม 1 ดังนี้

$$\min\left\{t = \sum_i^{m} r_i\right\}$$

โดยมีเงื่อนไขว่า

$$\begin{aligned} \sum u_{ij} r_i &\geq 1, \quad j = 1, 2, \ldots, \ell \\ r_i &\geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m \end{aligned}$$

ในเมื่อผู้เล่นเกม 1 เลือกกโลบายผสม $a = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$ และผู้เล่นเกม 2 เลือกกโลบายเดี่ยว $y_j \in Y$ โดยที่ $t = 1/\upsilon$ และ $r_i = p_i/\upsilon$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$