บทที่ 9
การเปรียบเทียบระหว่าง k ประชากร

9.1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับการวางแผนงานทดลอง

ในบทที่ 8 ได้กล่าวถึงการเปรียบเทียบระหว่างค่าเฉลี่ย 2 ประชากร โดยใช้ t-test แต่ถ้าต้องการเปรียบเทียบ 2 ประชากรขึ้นไป จะต้องทราบความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับการวางแผนงานทดลอง (experimental design) และการวิเคราะห์ความแปรปรวน (Analysis of Variance หรือ ANOVA) ซึ่งคือวิธีการเก็บรวบรวมและวิเคราะห์ข้อมูลโดยผู้ทดลองใช้ความพยายามทุกวิถีทางเพื่อ ให้ข่าวสารจากงานทดลองเป็นข่าวสารเที่ยงตรง แม่นยำ และเชื่อถือได้ ในการวิเคราะห์ข้อมูล จะใช้กระบวนการวิเคราะห์ความผันแปรรวม (total variation) โดยการแบ่งซอยความผันแปรนั้นออกเป็นหลายๆ ส่วนตามที่มาของความผันแปร

9.2 การจำแนกข้อมูลแบบทางเดียว : แผนงานทลองแบบสุ่มสมบูรณ์ หรือ Completely Randomized Design (CRD)

หลักการ มีหน่วยทดลองทั้งหมดอยู่ N หน่วยเพื่อใช้ในการศึกษาเปรียบเทียบอิทธิพล ระหว่าง k วิธีการ (treatment) โดยการแบ่งแบบสุ่มออกเป็น k กลุ่มย่อย ด้วยขนาด $n_1, n_2, ..., n_k$ ตามลำดับ แต่ละกลุ่มจะได้รับ 1 วิธีการ จาก k วิธีการ บันทึกผลตอบสนอง (response) ต่อ วิธีการของแต่ละหน่วยทดลอง และนำไปวิเคราะห์โดยเทคนิคของ ANOVA โดยเหตุนี้ กลุ่มย่อย k กลุ่ม ทำหน้าที่เสมือนตัวอย่างที่สุ่มจาก k ประชากรปกติ ซึ่งมีค่าเฉลี่ย $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_k$ และความแปรปรวน $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = ... = \sigma^2$ ตามลำดับ ทั้งนี้ ผู้ทดลองต้องการทราบว่าวิธีการ k วิธีการนั้น มีอิทธิพลหรือมีค่าเฉลี่ยที่เหมือนกัน หรือต่างกัน นั่นคือมี สมมติฐาน

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_k = \mu$ (ค่าเฉลี่ยอิทธิพลของวิธีการทั้งหลายไม่ต่างกัน)

$H_a : \mu_i \neq \mu_j$ สำหรับบางค่าของ i และ j (มีอย่างน้อย 1 วิธีการที่ต่างกับวิธีอื่นๆ)

หรือ มีประชากร k กลุ่ม ที่ต้องการศึกษาลักษณะร่วมบางอย่าง จึงสุ่มตัวอย่าง k ชุด (ที่เป็นอิสระกัน) จากแต่ละประชากรด้วยขนาดตัวอย่าง $n_1, n_2, ..., n_k$ ตามลำดับ ตัวอย่างทุกชุดได้รับ treatment อย่างเดียวกัน ดังนั้น ความแตกต่างที่พบ จะแสดงความแตกต่างของ k ประชากร ดังนั้น สมมติฐานคือ

H_0 : $\mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_k$ (ไม่มีความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของ k ประชากร)

H_a : $\mu_i \neq \mu_j$ สำหรับบางค่าของ i, j (มีอย่างน้อย 1 วิธีที่แตกต่างจากวิธีอื่น)

__**ตัวอย่างที่ 1**__ (ใช้หลักการที่ 1)

ดำเนินการทดลองเพื่อเปรียบเทียบวิธีรักษาสิว 3 ชนิด คือ

1) ล้างหน้าวันละ 2 ครั้งด้วย polyethylene กับ สบู่(ก) และกินยาปฏิชีวนะวันละ 250 mg.
2) ทาครีมกันสิว, หลีกเลี่ยงแดด, ล้างหน้าวันละ 2 ครั้งด้วย สบู่(ข) และทานยาปฏิชีวนะวันละ 250 mg.
3) ไม่ให้โดนน้ำ แต่ล้างหน้าด้วยครีมล้างหน้า, ทาครีมกันสิว และใช้ benzoyl peroxide

ใช้ทดลองกับผู้ที่เป็นสิวค่อนข้างมาก 35 คน โดยการแบ่งแบบสุ่มเป็น 3 กลุ่มย่อย จำนวน 10, 12, 13 คน เพื่อรับวิธีที่ 1, 2, 3 ตามลำดับ เมื่อครบ 16 สัปดาห์ บันทึกผลการรักษาโดยดูปริมาณสิวที่ลด(หรือเพิ่ม) คิดเป็นเปอร์เซนต์ เช่น 48.6 หมายความว่าลดลงจากเดิม 48.6% ดังนั้นการทดลองนี้จึงมุ่งเปรียบเทียบ**อิทธิพล** ของ 3 วิธีการ โดยมี $k = 3, n_1 = 10, n_2 = 12, n_3 = 13$ และ

H_0 : $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu$ (วิธีการรักษา 3 วิธี ให้ผลไม่ต่างกัน)

H_a : $\mu_i \neq \mu_j$ สำหรับบางค่าของ i, j (มีอย่างน้อย 1 วิธีที่แตกต่างจากวิธีอื่น)

__**ตัวอย่างที่ 2**__ (ใช้หลักการที่ 2)

สาเหตุหนึ่งที่ทำให้น้ำในลำคลองเน่าเสีย คือปริมาณฟอสฟอรัสจากภาคอุตสาหกรรม และภาคเกษตร ถ้ามีฟอสฟอรัสมากเกินไป จะทำลายสิ่งมีชีวิต พวกต้นไม้และ micro organism ที่เรียกว่า

bloom ดังนั้น ถ้าต้องการเปรียบเทียบแหล่งน้ำ 4 แห่ง ซึ่งอยู่ใกล้และไกลโรงงานอุตสาหกรรม โดยวิธีสุ่มตัวอย่างน้ำจากแต่ละแหล่ง เพื่อเปรียบเทียบปริมาณฟอสฟอรัส ซึ่งความแตกต่างที่ได้ย่อมเป็นผลจากโรงงานอุตสาหกรรม ดังนั้น k = 4 ตัวอย่างจากทั้ง 4 แห่ง จะต้องได้รับการปฏิบัติเหมือนกัน คือนำไปหาค่าวิเคราะห์ฟอสฟอรัสด้วยวิธีเดียวกัน ดังนั้น ผลต่างของค่าวิเคราะห์ แสดงว่าตัวอย่างน้ำ มีส่วนประกอบที่ต่างกัน

ข้อมูลจากตัวอย่าง 2 อันนี้เป็นข้อมูลแบบจำแนกทางเดียว เนื่องจากมี factor ที่สนใจเพียงอย่างเดียวคือ วิธีการ (วิธีรักษาสิว, แหล่งน้ำ) แต่ละ factor มี k ระดับ (k = 3, k = 4) และ**ไม่สนใจ** factor อื่น เช่น ในตัวอย่างที่ 1 ยังมี factor อื่นๆ ที่เป็นสาเหตุของสิว เช่น ลักษณะของผิว, อาหาร, เพศ ฯลฯ ในตัวอย่างที่ 2 มี factor เดียวคือ แหล่งน้ำ และไม่สนใจ factor อื่นๆ ที่เป็นสาเหตุของน้ำเสีย เช่น อุณหภูมิ, ฤดู, ความลึกของแหล่งน้ำ ฯลฯ

อนึ่งตัวแบบ (Model) ของงานทดลองมี 2 ตัวแบบ คือ แบบกำหนด และแบบสุ่ม (fixed effect model, random effect model) แบบกำหนดคือผู้ทดลองสนใจ เฉพาะ k ระดับของวิธีการ เช่นในตัวอย่างที่ 1 ผู้ทดลองสนใจเฉพาะวิธีการรักษาสิว 3 วิธีนั้น โดยไม่ได้สุ่ม 3 วิธีนั้น จากประชากร (ของวิธีรักษาสิวทั้งหลาย) ส่วนแบบสุ่ม หมายถึงผู้ทดลองสุ่ม k ระดับนั้น จากประชากรของวิธีการ เช่นจากตัวอย่างที่ 2 ถ้าแหล่งน้ำ 4 แห่งนั้น ได้มาแบบสุ่มจากแหล่งน้ำต่างๆ โดยมุ่งหมายให้เป็นตัวแทนของแหล่งน้ำต่างๆ ในท้องที่นั้น จะเป็นตัวแบบแบบสุ่ม

ข้อมูลจากตัวอย่างทั้ง 2 นี้ เป็นข้อมูลแบบจำแนกทางเดียว ดังนี้

ตารางที่ 9.1 แสดงข้อมูลแบบจำแนกทางเดียว

ระดับของแฟคเตอร์			
1	2	3	k
x_{11}	x_{21}	....	x_{k1}
x_{12}	x_{22}	x_{ij}	x_{k2}
:	:	:	:
x_{1n}	x_{2n}	:	x_{kn}

n_i = ขนาดตัวอย่างของกลุ่ม i , $\sum n_i = N$

X_{ij} = ตัวแปรเชิงสุ่มซึ่งวัดผลตอบสนองจากหน่วยทดลองที่ j^{th} ซึ่งรับวิธีการระดับที่ i^{th}

$T_i = \sum_{j=1}^{n} X_{ij}$ = ผลรวมของระดับ i, i = 1, 2, ..., k

$\bar{X}_{i.} = T_i/n_i$ = ค่าเฉลี่ยของกลุ่ม i^{th}, i = 1, 2, ..., k

$\bar{X}_{..} = T_{..}/N$ = ค่าเฉลี่ยรวมยอด หรือ grand mean

$\sum_i \sum_j X_{ij}^2$ = Sum of square ของ ผลตอบสนองแต่ละอัน

เครื่องหมายจุด แทนที่ subscript ใด หมายถึงยอดรวมของ subscript นั้น

ตัวอย่างที่ 3 จากตัวอย่างที่ 2 ภายหลังการทดลอง 16 สัปดาห์ ได้เปอร์เซนต์การทดลองของจำนวนสิว ของผู้ทดลอง 35 คน ดังนี้

Factor (Treatment Received) Level

	I		II		III	
	48.6	50.8	68.0	71.9	67.5	61.4
	49.4	47.1	67.0	71.5	62.5	67.4
	50.1	52.5	70.1	69.9	64.2	65.4
	49.8	49.0	64.5	68.9	62.5	63.2
	50.6	46.7	68.0	67.8	63.9	61.2
			68.3	68.9	64.8	60.5
					62.3	
$T_{i.}$	494.6		824.8		826.8	
$\bar{X}_{i.}$	49.46		68.73		63.6	

N = 35

$G = T_{..} = 2146.2$

$\bar{X}_{..} = T_{..}/N$

$= 2146.2/35$

$= 61.32$

ตัวแบบ : $X_{ij} = \mu + (\mu_i - \mu) + (X_{ij} - \mu_i)$ $\quad i = 1, 2, ..., k$

$j = 1, 2, ..., n_i$

μ_i = ค่าเฉลี่ยของประชากร i

μ = ค่าเฉลี่ยร่วมของทั้ง k ประชากร

$\mu_i - \mu$ = อิทธิพลของ ระดับ i

$X_{ij} - \mu_i$ = random error (อิทธิพลอื่นๆ ที่ไม่สามารถจำแนกเฉพาะรายการ)

ภายใต้ข้อสมมติ (assumption) :

1. ตัวอย่าง k ชุด เป็นตัวอย่างสุ่มที่เป็นอิสระกันจาก k ประชากรซึ่งมีค่าเฉลี่ย $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_k$ ตามลำดับ
2. เป็นประชากรที่มีการแจกแจงแบบปกติ
3. ทุกประชากรมีความแปรปรวนเหมือนกันคือ σ^2

ข้อสังเกต เหมือนข้อสมมติของการใช้ pooled T-test เปรียบเทียบ 2 ประชากร ตัวสถิติที่เป็นค่าประมาณของตัวแบบ คือ :

$$\boxed{X_{ij} = \overline{X}_{..} + (\overline{X}_{i.} - \overline{X}_{..}) + (X_{ij} - \overline{X}_{i.})^*}$$

ส่วน ANOVA คือวิธีการแบ่งความผันแปรทั้งหมดเป็นส่วนๆ ตามแหล่งที่มาโดยดูจากตัวแบบที่แทนค่าสถิติแล้ว จะเห็นว่าค่าสังเกตทุกตัวสามารถแบ่งเป็นหลายส่วน กรณี CRD จะแบ่งปืน 3 ส่วน เช่น $X_{11} = 48.6$ จะแยกส่วนจากสมการ* ได้ดังนี้

$$48.6 = 61.32 + (49.46 - 61.32) + (48.6 - 49.46)$$
$$= 61.32 + (-11.86) + (-0.86)$$

เนื่องจาก $X_{..}$ เป็นค่าคงที่ จึงย้ายไปไว้ด้านซ้ายมือของสมการ* ดังนี้

$(X_{ij} - \overline{X}_{..}) = (\overline{X}_{i.} - \overline{X}_{..}) + (X_{ij} - \overline{X}_{i.})^{**}$ ซึ่งหมายความว่า อิทธิพล 2 ส่วนด้านขวามือ เป็นสาเหตุหลักที่ทำให้ค่าสังเกตทั้งหลาย แตกต่างกัน ดังนั้น $X_{11} = 48.6$ จะแยกได้ 2 ส่วน คือ

$$(48.6 - 61.32) = -11.86 -0.86$$

$-12.72 = -12.72$

ค่าติดลบหมายถึงอิทธิพลต่ำกว่าค่าเฉลี่ย นั่นคือ คนที่ 1 ซึ่งรับวิธีการที่ 1 ให้ผลการรักษาต่ำกว่าค่าเฉลี่ยรวบยอด 12.72% โดยอธิบายได้จากอิทธิพล 2 ส่วน คือ เนื่องจากวิธีการรักษาแบบที่ 1 ให้ผลการรักษาต่ำกว่าค่าเฉลี่ยรวบยอด 11.86% และอีกส่วนหนึ่งเนื่องจากอิทธิพลของผู้ทดลองเอง ซึ่งให้ผลการรักษาต่ำกว่าผู้ใช้วิธีเดียวกันนี้ 0.86%

เนื่องจากการจำแนกแบบนี้มีเครื่องหมาย +, - เข้ามาเกี่ยวข้อง เมื่อนำทุกตัวมารวมกัน เช่น

$$\sum_{i}^{k}\sum_{j}^{n}(\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{..}) = n\sum_{i}^{k}(\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{..}) = 0$$ จึงแก้ปัญหา

โดยการยกกำลังสองทุกเทอม และเรียกว่า ค่ากำลังสองของอิทธิพลต่างๆ ดังนั้น จาก ** จะได้ค่ากำลังสอง ดังนี้

$$\underbrace{\sum_{i}\sum_{j}(X_{ij} - \bar{X}_{..})^2}_{(1)} = \underbrace{\sum_{i} n_i(\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{..})^2}_{(2)} + \underbrace{\sum_{i}\sum_{j}(X_{ij} - \bar{X}_{i.})^2}_{(3)} \quad ***$$

(1) = total sum of squares = SS(total) = SST คือความผันแปรรวม

(2) = treatment sum of squares = SS(tr) วัดความผันแปรระหว่างค่าเฉลี่ยของวิธีการกับค่าเฉลี่ยรวบยอด = อิทธิพลของวิธีการ

(3) = residual หรือ error sum of squares (SSE) วัดความผันแปรของหน่วยทดลองภายในวิธีการเดียวกัน (ระดับเดียวกัน)

ดังนั้น SST = SS(tr) + SSE

ส่วนตัวสถิติที่ใช้ทดสอบ $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_k$ จะใช้ อัตราส่วน MS(tr)/MSE

โดยที่ MS(tr) = SS(tr)/(k-1) = treatment mean square

MSE = SSE/(N-k) = residual หรือ error mean square

โดยมี $E(MS(tr)) = \sigma^2 + \Sigma n_i(\mu_i - \mu)^2/(k-1)$

$E(MSE) = \sigma^2$

ดังนั้น ถ้า $H_0: \mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_k$ เป็นจริง, $\Sigma n_i(\mu_i - \mu)^2/(k-1) = 0$

ถ้า H_0 เป็นเท็จ, $\Sigma n_i(\mu_i - \mu)^2/(k-1) > 0$ นั่นคือ ถ้า **H_0 เป็นจริง** ทั้ง E(MS(tr)) และ E(MSE) ทำหน้าที่ประมาณค่าพารามิเตอร์ตัวเดียวกันคือ σ^2 แต่ถ้า **H_0 เป็นเท็จ** ย่อมหมายความได้ว่า MS(tr) > MSE ดังนั้น อัตราส่วน MS(tr)/MSE จึงสมควรเป็นตัวสถิติที่ใช้ทดสอบ ภายใต้หลักการว่า ถ้า H_0 เป็นจริง อัตราส่วนนี้จะมีค่าใกล้เคียง 1.0 และถ้า H_0 เป็นเท็จ อัตราส่วนนี้จะมากกว่า 1 อัตราส่วนนี้เรียกว่า ตัวสถิติ F ซึ่งมีการแจกแจงแบบ F ด้วย ν_1 = k-1 และ ν_2 = N-k โดยเขตวิกฤตอยู่ด้านซ้ายมือของโค้ง นั่นคือ จะปฏิเสธ H_0 เมื่ออัตราส่วน F มีค่า**ใหญ่เกินไป** (คือใหญ่กว่าค่าตาราง $f_{\nu,\nu}$)

อนึ่งการหาค่า SST, SS(tr) และ SSE จากสูตรนิยาม จะไม่เหมาะสำหรับเครื่องคิดเลข ควรกระจายสูตรใหม่ จะได้

$SST = \Sigma X_{ij}^2 - T_{..}^2/N$

$SSTr = \Sigma T_{i.}^2/n_i - T_{..}^2/N$

$SSE = SST - SSTr$

จากตัวอย่างที่ 3

(1) $\Sigma\Sigma X_{ij}^2 = 48.6^2 + 49.^2 + ... + 60.5^2 = 133,868.94$

(2) $T_{..}^2/N = 2146.2^2/35 = 131,604.98$

(3) $\Sigma T_i^2/n_i = 494.6^2/10 + 824.8^2/12 + 826.8^2/13 = 133,738.64$

SST = (1) - (2) = 2263.96

SSTr = (3) - (2) = 2133.66

SSE = SST - SSTr = 2263.96 - 2133.66 = 130.30

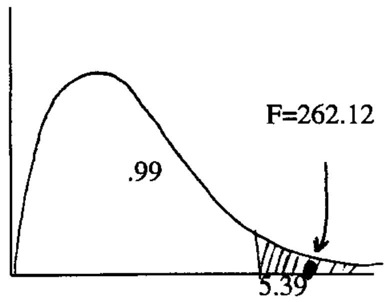
MSTr = SSTr/(t-1) = 2133.66/2 = 1066.83

MSE = SSE/(N-t) = 130.30/32 = 4.07

ค่าสถิติทดสอบ $F_{(k-1),(N-k)}$ = MSTr/MSE = 1066.83/4.07 = 262.12 เมื่อเทียบกับค่า F จากตารางที่ $\nu_1 = 2$, $\nu_2 = 32$, $\alpha = .01$ จะได้ 5.39 แต่ค่าคำนวณ 262.12 ใหญ่กว่ามาก จึงปฏิเสธ H_0 ด้วย p-value <<< .01 แสดงว่ามีหลักฐานทางสถิติเพียงพอที่จะสรุปว่าวิธีรักษาสิว 3 วิธี ให้ผลแตกต่างกัน

ANOVA

Source	DF	SS	MS	F
treatments	2	2133.66	1066.83	262.13
Error	32	130.30	4.07	
Total	34	2263.96		



หมายเหตุ ก่อนทำ ANOVA ควรตรวจสอบข้อสมมติหรือเงื่อนไขต่างๆ ดังนี้

1. เงื่อนไขว่าเป็นประชากรแบบปกติ จะตรวจสอบโดยใช้ χ^2 - goodness of fit test (บทที่ 12)
2. เงื่อนไขความแปรปรวนไม่ต่างกัน(เป็นเอกภาพกัน) จะตรวจสอบได้โดยแบบทดสอบของ Cochran และแบบทดสอบของ Bartlett
3. การจำแนกแบบทางเดียว จะใช้ขนาดตัวอย่างของแต่ละวิธีการให้เท่ากันหรือไม่เท่ากันก็ได้
4. ถ้าปฏิเสธ H_0 แสดงว่า ค่าเฉลี่ยของ k ประชากร ไม่เท่ากันทั้งหมด หรือไม่เป็นเอกภาพกัน จะต้องมีการทดสอบที่ต่อเนื่องต่อไป เรียกว่า การเปรียบเทียบแบบเชิงซ้อน ซึ่งแบบทดสอบเหล่านั้นนิยมใช้ขนาดตัวอย่างเท่ากัน

9.3 การเปรียบเทียบแบบเชิงซ้อน (Multiple Comparisons)

จากผลทดสอบ F จาก ANOVA จะมี 2 กรณี คือ

1. **F เป็นค่าเล็ก ไม่อยู่ในเขตวิกฤต** จะสรุปว่าหลักฐานจากข้อมูลที่เก็บมาไม่สามารถตรวจจับความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ย k ประชากร จึงสรุปว่า k ประชากรไม่ต่างกัน ถือว่าเป็นการสรุปผลที่สมบูรณ์แล้ว

2. **F เป็นค่าโตอนตกในเขตวิกฤต** เรียกว่ามีนัยสำคัญ ต้องปฏิเสธ H_0 แสดงว่ามีหลักฐานจากตัวอย่างเพียงพอ หรือสามารถตรวจจับความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของ k ประชากร ข้อสรุปนี้ถือเป็นเพียงการเริ่มต้นวิเคราะห์ข้อมูล แต่ยังไม่สมบูรณ์ จะต้องทำการตรวจสอบต่อไป เพื่อชี้ชัดอีกทีหนึ่งว่าความแตกต่างปรากฏอยู่ในบริเวณใดบ้าง

การตรวจสอบความแตกต่างระหว่าง k ค่าเฉลี่ย มีหลายวิธี จะเลือกมาเพียง 3 วิธีคือ

1. Least significant Difference test หรือ lsd(α)
2. Duncan's New Multiple Range หรือ DNMR
3. Scheffe' Test

ทั้ง 3 วิธี จะใช้กรณีขนาดตัวอย่างเท่ากัน คือ n

1. **Least Significant Difference test** (lsd α) คือ t-test นั่นเอง แต่ปรับปรุง ไม่คำนวณค่าสถิติ T ใช้แต่ $(\bar{X}_i - \bar{X}_j)$ ซึ่งเป็นตัวตั้งของ T เขตวิกฤต คือ $|\bar{X}_i - \bar{X}_j| > \text{lsd}(\alpha)$ ในเมื่อ $\text{lsd}(\alpha) = t_{\alpha/2,} \sqrt{2MSE/n}$

2. **DMRT** มีวิธีการดังนี้
   1. เรียงลำดับค่าเฉลี่ยจากน้อยไปหามาก
   2. คำนวณค่าสถิติ $SSR_p = r_p\sqrt{MSE/n}$, r_p คือค่าจากตาราง least significant studentized range ที่ ν = df ของ MSE
   3. สำหรับค่าเฉลี่ยของกลุ่มย่อยต่างๆ p กลุ่ม $(2 \le p \le k)$ จะให้ผลต่างที่มีนัยสำคัญ ถ้าพิสัยระหว่างค่าเฉลี่ยของกลุ่มย่อยดังกล่าว สูงกว่าค่าสถิติทดสอบ ซึ่งเรียกว่า "พิสัยที่มีนัยสำคัญสั้นที่สุด" (shortest significant studentized range) โดยใช้ ν = df(error)

3. **Scheffe' Test**

คำนวณค่าสถิติ $S = \sqrt{(k-1)f_{\nu,\nu} .2MSE/r}$ และจะปฏิเสธ $H_0 : \mu_i - \mu_j = 0$ ไปรับ $H_a : \mu_i - \mu_j \neq 0$ เมื่อ $|\bar{X}_i - \bar{X}_j| > S$

<u>ตัวอย่างที่ 4</u>

เก็บตัวอย่างแหล่งน้ำ 4 แห่ง ได้ค่าวิเคราะห์ระดับฟอสฟอรัส ต่อล้านหน่วย (ppm) จากตัวอย่างสุ่มแห่งละ 20 ตัวอย่าง ดังนี้

แหล่งน้ำ	1	2	3	4
$T_{i.}$	.40	.20	.02	1.00
$\bar{X}_{i.}$	.02	.01	.001	.05

$T_{..} = 1.62, \Sigma\Sigma X_{.j}^2 = .2880$

$t_{.025,76} = 1.96$

$f_{3,76,.025} = 2.76$

$f_{3,76,.05} = 3.34$

ANOVA

Source	df	SS	MS	F
Treatment	3	.0272	.0091	3.003
Error	76	.2280	.0030	
Total	79	.2552		

ปฏิเสธ $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu$ ด้วย p-value < .05 นั่นคือค่าเฉลี่ยของระดับฟอสฟอรัสในแหล่งน้ำ 4 แห่งนั้น ไม่เท่ากันทั้งหมด จึงควรตรวจสอบต่อไปว่าคู่ใดมีความแตกต่างบ้าง

1. วิธี lsd(.05) $= t_{.025}\sqrt{2MSE/n} = 1.96\sqrt{2(.003)/20} = .0343$
2. วิธี DNMR หาค่า r_p ที่ $\alpha = .05, \nu = 60$ ($\nu = 76$ ไม่มี) เมื่อ p = 2

p	2	3	4
r_p	2.829	2.976	3.073
SSR_p	.035	.036	.038

$SSR_p = 2.829\sqrt{.003/20}$

$= .035$

3. Scheffe test : $S = \sqrt{(3)(3.34)\ \ 2(.003)/20} = .055$

เพื่อสะดวกในการสรุปผล ควรสร้างตาราง $|\bar{X}_i - \bar{X}_j|$ ค่าที่ได้ถือเป็น**ค่าสถิติ** สำหรับทดสอบ $H_0 : \mu_i = \mu_j$, $H_a : \mu_i \neq \mu_j$ และจะปฏิเสธ H_0 ถ้าค่าสถิติในตารางสูงกว่าค่าวิกฤต ตามเกณฑ์ต่างๆ ดังนี้

1. วิธี lsd(.05) เปรียบเทียบค่าสถิติทุกตัวกับ lsd(.05) = .0343 พบว่ามี 2 ค่าที่ใหญ่กว่า คือ .049 และ .04 จึงสรุปว่า $\mu_3 \neq \mu_4$ และ $\mu_2 \neq \mu_4$ แต่คู่อื่นๆ ไม่แตกต่างกัน

ตารางที่ 9.2 แสดงผลต่างแบบจับคู่ระหว่างค่าเฉลี่ยของวิธีการซึ่งเรียงลำดับจากน้อยไปหามาก

	$\bar{x}_3$ .001	$\bar{x}_2$ .01	$\bar{x}_1$ .02	$\bar{x}_4$ .05
$\bar{x}_3 = .001$	-	.009	.019	.049
$\bar{x}_2 = .01$	-	-	.01	.04
$\bar{x}_1 = .02$	-	-	-	.03

2. DNMR เป็นการทดสอบแบบช่วง (พิสัย) คือใช้ค่าวิกฤตหลายค่า สำหรับ p=2 ซึ่งมี $SSR_p = .038$ ใช้เปรียบเทียบระหว่างค่าเฉลี่ยกลุ่มย่อยที่เรียงลำดับแล้ว มีพิสัย = 2 ได้แก่ $|\bar{X}_3 - \bar{X}_2| = .009$, $|\bar{X}_2 - \bar{X}_1| = .01$ และ $|\bar{X}_1 - \bar{X}_4| = .03$ จะเห็นว่าทุกค่าน้อยกว่า .038 จึงปฏิเสธไม่ได้ทั้ง 3 คู่เปรียบเทียบ สำหรับ p=3 ซึ่งมี $SSR_p = .036$ ใช้เปรียบเทียบระหว่างค่าเฉลี่ยกลุ่มย่อยที่เรียงลำดับแล้ว มีพิสัย = 3 ได้แก่ $|\bar{X}_3 - \bar{X}_1| = .019$, $|\bar{X}_2 - \bar{X}_4| = .04$ จะปฏิเสธได้ 1 คู่ คือ $\mu_2 \neq \mu_4$ เพราะ $.04 > .036$ ส่วนค่าสุดท้าย คือ p=4, $SSR_p = .038$ ใช้เปรียบเทียบระหว่างค่าเฉลี่ยที่เรียงลำดับแล้ว 4 กลุ่มคือ $|\bar{X}_3 - \bar{X}_4| = .049$ และสรุปว่า $\mu_3 \neq \mu_4$ เพราะ $.049 > .038$

3. Scheffé test มีวิธีการเหมือน lsd คือ นำค่าสถิติในตารางเปรียบเทียบกับ S = .055 จะเห็นว่าไม่มีค่าใดสูงกว่า .055 จึงปฏิเสธไม่ได้เลย ทั้ง 6 คู่เปรียบเทียบ

ข้อสังเกต การคำนวณค่า lsd ง่ายที่สุด ค่าวิกฤตจะเล็กกว่าเกณฑ์อื่นๆ จึงปฏิเสธได้บ่อยครั้ง จึงมีโอกาสเกิด type I error มากที่สุด DNMR จะพิจารณาพิสัยระหว่างค่าเฉลี่ยแต่ละคู่ จึงใช้ค่าวิกฤตหลายค่า จึงยุ่งยากกว่า lsd ส่วน Scheffe จะให้ค่าวิกฤตที่สูงกว่าวิธีอื่นๆ จึงมีโอกาสปฏิเสธ H_0 ได้น้อยกว่า นั่นคือ มีโอกาสเกิด type II error มากกว่าวิธีอื่นๆ เมื่อใช้ **ขนาดตัวอย่างที่ต่างกัน** สำหรับ $lsd(\alpha) = t_{\alpha/2}\sqrt{MSE(1/n_i + 1/n_j)}$ ส่วน DNMR จะมีวิธีดังนี้

1. หา $SSR_p = MSE \cdot r_p$
2. เปรียบเทียบ $\mu_i - \mu_j$ โดยใช้ตัวสถิติ $|\overline{X}_i - \overline{X}_j|/\sqrt{2n_in_j/(n_i + n_j)}$ ถ้าตัวสถิติมากกว่า SSR_p จะสรุปว่า $\mu_i \neq \mu_j$

<u>ตัวอย่างที่ 5</u> จากตัวอย่างที่ 3 $n_1 = 10, \overline{x}_1 = 49.46, n_2 = 12, \overline{x}_2 = 68.73, n_3 = 13, \overline{x}_3 = 63.60$, $MSE = 4.07, \sqrt{MSE} \approx 2.02, \alpha = .01$ หาค่า r_p จากตาราง df error = 30 (เป็นค่าประมาณ $\nu = 32$)

p	2	3
r_p	3.889	4.509
SSR_p	7.85	9.10

1. $H_0: \mu_1 = \mu_3, H_a: \mu_1 \neq \mu_3$

   $(63.60 - 49.46)/\sqrt{2(13)(10)/(13+10)} = 47.54, p = 2$

   $47.54 > SSR(p=2) = 7.85$ สรุปว่า $\mu_1 \neq \mu_3$

2. $H_0: \mu_1 = \mu_2, H_a: \mu_1 \neq \mu_2$

   $(68.73 - 49.46)/\sqrt{2(10)(12)/(10+12)} = 63.65, p = 3$

   $63.65 > SSR(p=3) = 9.10$ สรุปว่า $\mu_1 \neq \mu_2$

3. $H_0: \mu_2 = \mu_3$, $H_a: \mu_2 \neq \mu_3$

$(68.73 - 63.60)\sqrt{2(12)(13)/(12+13)} = 18.12, p = 2$

$18.12 > SSR(p{=}2) = 7.85$ สรุปว่า $\mu_2 \neq \mu_3$

การขีดเส้นใต้วิธีการเพื่อแสดงการสรุปผล

ใช้หลักการ 1) เรียงลำดับค่าเฉลี่ย 2) ขีดเส้นใต้ค่าเฉลี่ยที่ไม่ต่างกันอย่างมีนัยสำคัญให้อยู่บนเส้นเดียวกัน เช่น ผลการทดสอบ lsd(.05) พบว่ามีความแตกต่าง 2 คู่คือ $\mu_3 \neq \mu_4$ และ $\mu_2 \neq \mu_4$ จะแสดงโดยการขีดเส้นใต้ค่าเฉลี่ยได้ดังนี้

$$\bar{x}_3 \quad \bar{x}_2 \quad \bar{x}_1 \quad \bar{x}_4$$

ตัวแบบเชิงสุ่ม หรือ Random Effects Model

สำหรับตัวแบบแรกที่กล่าวมาแล้ว เรียกว่า fixed-effects model ซึ่งหมายถึงผู้ทดลองกำหนดระดับต่างๆ ของ factor หรือ treatment ที่เขาสนใจ ทั้ง k กลุ่มนั้น โดยมีจุดประสงค์ให้ผลที่ได้จากการทดลองใช้เฉพาะ k วิธีการที่อยู่ในการทดลองนั้นเท่านั้น แต่ไม่สามารถอนุมานกับประชากรอื่นๆ เพราะเขาไม่สนใจประชากรที่อยู่นอกเหนือการทดลอง หากต้องการขยายผลไปสู่ประชากรที่มากกว่า k กลุ่ม จะต้องใช้ตัวแบบเชิงสุ่ม คือ ระดับของแฟคเตอร์ หรือ วิธีการ k กลุ่มนั้น ต้องได้มาโดยการสุ่มจากประชากรของแฟคเตอร์ หรือวิธีการนั้น

__ตัวอย่างที่ 6__ ตัวยาที่ใช้กำจัดแบคทีเรียในโรงพยาบาลมีหลายยี่ห้อ ถ้าต้องการตรวจสอบคุณภาพว่า ผู้ผลิตทั้งหลายผลิตสินค้าที่มีคุณภาพใกล้เคียงกันหรือไม่ จะต้องเตรียมรายชื่อผู้ผลิตทั้งหมด แล้วสุ่มมาทดลองจำนวนหนึ่ง เช่น 3 ชนิด แล้วนำผลจากการทดลองที่ได้ขยายไปสู่ประชากรของน้ำยากำจัดแบคทีเรียทั้งประชากร จะเห็นว่าการทดลองนี้ ไม่ได้มีจุดประสงค์เพื่อเปรียบเทียบเฉพาะตัวยา 3 ชนิดที่อยู่ในการทดลอง ดังนั้นการได้มาของตัวยา 3 ชนิดนั้น ต้องใช้**วิธีสุ่ม**จากประชากรทั้งหมด

ตัวแบบของ Random model :

$$X_{ij} = \mu + T_i + E_{ij} \text{ , } i = 1, 2, ..., k; j = 1, 2, ..., n_i$$

μ = ค่าเฉลี่ยรวบยอด, $T_i = \mu_i - \mu$ = อิทธิพลของวิธีการ i, $E_{ij} = X_{ij} - \mu_i$ = random error

Assumptions : 1) k ตัวอย่างเป็นตัวแทนของ k ประชากรที่เลือกมาแบบสุ่มจากประชากรที่มีขนาดใหญ่กว่า 2) แต่ละประชากรในกลุ่มใหญ่นั้นมีการแจกแจงแบบปกติ 3) ทุกประชากรมีความแปรปรวนเท่ากัน คือ σ^2 4) ตัวแปรเชิงสุ่ม $T_1, T_2, \ldots, T_k$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระกันมีการแจกแจงแบบปกติด้วยค่าเฉลี่ย 0 และความแปรปรวน σ^2

สมมติฐาน : $H_0 : \sigma^2_\tau = 0$ (ไม่มีความผันแปรระหว่างอิทธิพลของวิธีการ),

$H_a : \sigma^2_\tau \neq 0$

โดยมี $E(MSTr) = \sigma^2 + n_0\sigma^2_\tau$, $E(MSE) = \sigma^2$, $n_0 = (N - \Sigma n_i^2/N)/(k-1)$

ตัวสถิติทดสอบคือ $F = MSTr/MSE \sim f_{(k-1),(N-k)}$

ข้อสังเกต Model 1 และ 2 มีความแตกต่างกัน ดังนี้

1) การได้มาของ k วิธีการที่อยู่ในการทดลอง 2) Assumption ข้อที่ (4) 3) สมมติฐาน 4) E(MSTr) 5) ผลสรุปของ Model II จะสามารถขยายไปสู่ประชากรของวิธีการทั้งหมด ส่วน Model I จะใช้ได้เฉพาะ k วิธีการที่อยู่ในการทดลองเท่านั้น

<u>**ตัวอย่างที่ 7**</u> (Model II)

ถ้าผลการทดลองจากตัวอย่างที่ 6 โดยทุกกลุ่ม มี n = 10 ได้ข้อมูลสรุป คือ จำนวนสิ่งมีชีวิต (แบคทีเรีย) ที่เหลือตกค้างในจานทดลอง ดังนี้

$$T_{1.} = 527,\ T_{2.} = 502,\ T_{3.} = 480,\ T_{..} = 1509,\ \sum_{i}^{3}\sum_{j}^{10} X_{ij}^2 = 76{,}511$$

(1) $\Sigma\Sigma X_{ij}^2 = 76511$ (2) $T_{..}^2/N = 1509^2/30 = 75{,}902.7$

(3) $\Sigma T_{i.}^2/n_i = (1/10)(527^2 + 502^2 + 480^2) = 76{,}013.3$

SS Total = (1) - (2) = 608.3, SStr = (3) - (2) = 110.6

SSE = SS Total - SSTr = 497.7

ANOVA

Source	df	SS	MS	F
Treatment	2	110.6	55.3	3
Error	27	497.7	18.43	
Total	29	608.3		

$f_{2,27,.10} = 2.51$

$f_{2,27,.05} = 3.35$

$.05 < \text{p-value} < .10$

ถ้าใช้ $\alpha = .10$ สรุปได้ว่า น้ำยากำจัดแบคทีเรียจากผู้ผลิตที่ต่างกันจะมีประสิทธิภาพต่างกัน แต่ถ้าใช้ $\alpha = .05$ จะสรุปว่า ความแตกต่างไม่มีนัยสำคัญ

ข้อสังเกต ถ้าค่าสถิติทดสอบมีนัยสำคัญ ไม่จำเป็นต้องทำการทดสอบแบบเชิงซ้อนเพื่อตรวจหาความแตกต่างว่าอยู่ที่ใดบ้าง เหมือนกับ Model I เราต้องการข้อสรุปกว้างๆ เกี่ยวกับประชากรที่เราสุ่มได้มา k ตัวอย่างเท่านั้น

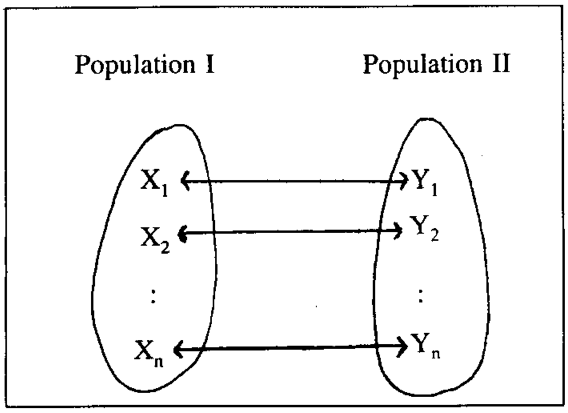
แผนงานทดลองแบบบล็อคสมบูรณ์ (Randomized Complete Block Design หรือ RCB)

แผนงานนี้คือการขยาย T-test ของข้อมูลแบบจับคู่ ซึ่งตรวจสอบได้เฉพาะ 2 วิธีการ โดยผู้ทดลองลดความผันแปรของหน่วยทดลองให้ต่ำสุดโดยการจับคู่หน่วยทดลองที่มีคุณลักษณะเหมือนกัน เช่น อายุ, น้ำหนัก, ฝาแฝด ฯลฯ แล้วจัดวิธีการให้หน่วยทดลองแบบสุ่ม ดังนั้น สมาชิกในคู่เดียวกันจะได้รับวิธีการที่ต่างกัน แล้วนำผลต่างของแต่ละคู่ (d_j, d) มาวิเคราะห์ต่อไป โดยเชื่อว่า ผลต่างส่วนใหญ่เป็นผลจากการได้รับวิธีการที่ต่างกัน เพราะได้ลดความแตกต่างของหน่วยทดลองให้น้อยที่สุดโดยการจับคู่แล้ว เมื่อต้องการเปรียบเทียบ ก็ขยายแนวความคิดนี้ไปใช้ คือการจับกลุ่มหน่วยทดลองที่เหมือนกันให้อยู่กลุ่มเดียวกัน เรียกว่า **จัดบล็อค โดยภายในบล็อคประกอบด้วย k หน่วยทดลอง** (เท่ากับจำนวนวิธีการ) **ที่มีลักษณะใกล้เคียงกันมากที่สุด** แล้วจึงจัดวิธีการให้แบบสุ่ม กับ k หน่วย **ทดลองนี้** (จนครบ k วิธีการ) และทำเช่นนี้จนครบทุกบล็อค เรียกว่างานทดลองแบบ บล็อคสมบูรณ์

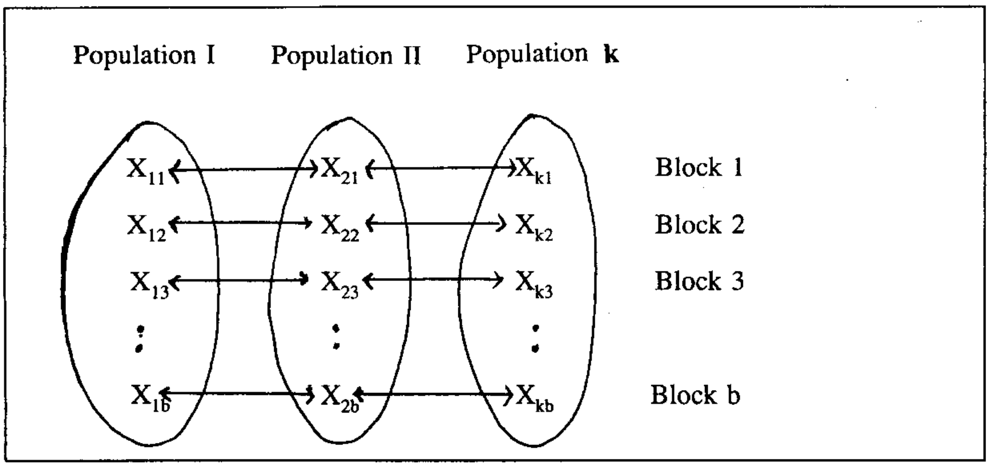
เพราะ (1) มีการจำแนกหน่วยทดลองเป็น**บล็อค** จำนวน **b** บล็อค (2) ในแต่ละบล็อคมี **k** หน่วยทดลอง เพื่อ ใส่วิธีการทั้งหมด **k** วิธีการ จึงเรียกว่า บล็อคสมบูรณ์ (ถ้าใส่ไม่ครบ k วิธีการ เรียกว่า บล็อคไม่สมบูรณ์) (3) การใส่วิธีการให้หน่วยทดลองต้องเป็นแบบ**สุ่ม** (และมีการสุ่มใหม่ทุกบล็อค) สำหรับตัวแบบมีทั้งแบบ fixed และ random

รูปที่ 9.1 เปรียบเทียบข้อมูลจากการทดลองที่ใช้ paired t-test (2 blocks)

$H_0: \mu_1 = \mu_2$?



รูปที่ 9.2 แสดงข้อมูลแบบจับคู่ใน 6 blocks ($H_0: \mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_k$?



<u>ตัวอย่างที่ 8</u> การทดลองเพื่อเปรียบเทียบความต้องการใช้พลังงานระหว่าง กิจกรรม 3 แบบ คือ การวิ่ง, การเดิน และการขี่จักรยาน X คือ จำนวนพลังงานกิโลแคลอรี่ที่ใช้ต่อการเดินทาง 1 กิโลเมตร แต่เนื่องจากบุคคลแต่ละคนมีระดับการเผาผลาญพลังงาน (metabolic) ที่ต่างกัน ซึ่งจะมีผลต่อค่า X จึงควบคุมโดยให้บุคคลเดียวกันทำกิจกรรมครบทั้ง 3 อย่าง (แบบสุ่ม) โดยทิ้งช่วงว่างระหว่างกิจกรรมไม่ให้มีผลกระทบต่อกัน ดังนั้น บุคคล 1 คน จึงทำหน้าที่เป็น 1 block และ treatment คือ กิจกรรม 3 อย่าง ถ้าใช้คน 8 คน จะมีแผนผังแสดงการจัดวิธีการแบบสุ่ม (layout) ดังรูปที่ 9.3 และลักษณตารางแสดงข้อมูลที่ได้จากการทดลอง

คนที่ 1	วิ่ง	เดิน	ขี่จักรยาน
คนที่ 2	ขี่จักรยาน	วิ่ง	เดิน
:		:	
:		:	
คนที่ 8	เดิน	ขี่จักรยาน	วิ่ง

รูปที่ 9.3 แสดงแผนผังจัดวิธีการให้หน่วยทดลองแบบสุ่ม สำหรับแผนงานทดลองแบบบล็อคสมบูรณ์

ตารางที่ 9.3 แสดงข้อมูลจากงานทดลองแบบบล็อคสมบูรณ์ ซึ่งเป็นข้อมูลแบบจำแนก 2 ทาง

block (บุคคล)	กิจกรรม (treatment) วิ่ง	เดิน	ขี่จักรยาน
1	X_{11}	X_{21}	X_{31}
2	X_{12}	X_{22}	X_{32}
:	:	:	:
8	X_{18}	X_{28}	X_{38}

สมมติฐาน : H_0 : $\mu_{1.} = \mu_{2.} = \mu_{3.}$ (กิจกรรม 3 อย่างใช้พลังงานไม่ต่างกัน)

และ H_a' : $\mu_{.1} = \mu_{.2} = ... = \mu_{.8}$ (บุคคล 8 คนใช้พลังงานไม่ต่างกัน)

ตัวแบบ : $X_{ij} = \mu + T_i + B_j + E_{ij}$, $i = 1,2,..., k; j = 1,2,..., b$

แสดงว่าค่าสังเกตทุกค่าสามารถแบ่งซอย เป็น 4 ส่วน โดยมี

μ = ค่าเฉลี่ยรวบยอด, $\mu_{i.}$ = ค่าเฉลี่ยวิธีการ i, i = 1, 2, ..., k

$\mu_{.j}$ = ค่าเฉลี่ยของบล็อค j, j = 1, 2, ..., b

μ_{ij} = ค่าเฉลี่ยของวิธีการ i และ block j

$T_i = \mu_{i.} - \mu$ = อิทธิพลของวิธีการ i

$B_j = \mu_{.j} - \mu$ = อิทธิพลของบล็อค j

$E_{ij} = X_{ij} - \mu_{ij}$ = residual or random error

assumptions : (1) ค่าสังเกต k.b จำนวน แทนตัวอย่างสุ่มขนาด n = 1 จาก k x b ประชากร ว่ามีค่าเฉลี่ย μ_{ij}, i = 1, 2, ..., t; j = 1, 2, ..., b (2) แต่ละประชากรทั้ง k.b ประชากร มีการแจกแจงแบบปกติ (3) แต่ละประชากรมีความแปรปรวนเท่ากันคือ σ^2 (4) อิทธิพลของบล็อคและวิธีการเป็นแบบ

เชิงบวก คือ สามารถนำมารวมกันได้โดยไม่มีอิทธิพลของ Interaction (ผลร่วม) ระหว่าง บล็อคและวิธีการ

ข้อสังเกต ข้อ 1-3 เหมือน CRD นอกจากจำนวนประชากรเพิ่มขึ้นจาก k ประชากร เป็น k.b ประชากร ข้อที่ (4) หมายถึงอิทธิพลของวิธีการเป็นแบบเดียวกันเมื่อเปลี่ยนจากบล็อคหนึ่งไปสู่อีกบล็อคหนึ่ง เรียกว่า คงเส้นคงวา (consistency) และทำนองเดียวกัน อิทธิพลของบล็อคจะเป็นแบบเดียวกันเมื่อเปลี่ยนจากวิธีการหนึ่งไปสู่อีกวิธีการหนึ่ง ซึ่งถ้าไม่คงเส้นคงวา จะเรียกว่ามี interaction หรือมีอิทธิพลร่วมกันระหว่าง block กับ treatment ซึ่งการจะเข้าใจเรื่องนี้ ต้องศึกษาจากตัวอย่างที่ 9 และ 10

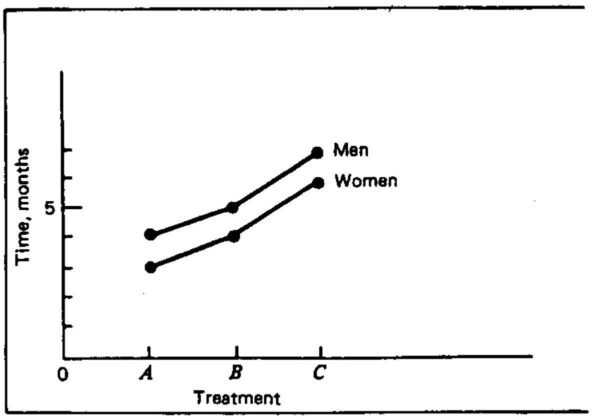
<u>ตัวอย่างที่ 9</u> วิธีบำบัดคนไข้หลัง heart attack ครั้งแรก เพื่อให้มีสภาพจิตใจและร่างกายเข้าสู่สภาพเดิม มีอยู่ 3 วิธี ตัวแปรที่ใช้วัดคือเวลาเป็นเดือน จนร่างกายเข้าสู่สภาพปกติ แต่เนื่องจากชายและหญิงมีการฟื้นตัวแตกต่างกัน จึงให้เพศเป็น block หรือ b = 2 รวมแล้วเท่ากับมีประชากรที่สนใจศึกษา k.b = 3.2 = 6 ประชากร แต่ละประชากรมีการแจกแจงแบบปกติ ด้วยค่าเฉลี่ย μ_{ij} และความแปรปรวน σ^2 สมมติ μ_{ij} ของ 6 ประชากร มีดังนี้

		วิธีรักษา A	B	C
Block	ชาย	$\mu_{11} = 4$	$\mu_{21} = 5$	$\mu_{31} = 7$
	หญิง	$\mu_{12} = 3$	$\mu_{22} = 4$	$\mu_{23} = 6$

จะเห็นว่าความแตกต่างของระยะเวลาฟื้นตัวเป็นเดือน ของวิธี A และ B = 1 เดือน (ทั้งชายและหญิง) A และ C ต่างกัน 3 เดือน (ทั้งชายและหญิง) และ B และ C ต่างกัน 2 เดือน (ทั้งชายและหญิง) แสดงว่าอิทธิพลของวิธีการ **คงเส้นคงวา** และอิทธิพลของบล็อคก็ **คงเส้นคงวา** คือ 1 เดือน ไม่ว่าจะใช้วิธีรักษาแบบใด ชายจะใช้เวลามากกว่าหญิง 1 เดือน จึงสรุปว่า อิทธิพลของวิธีการและบล็อค **ไม่มี**

อิทธิพลร่วมกัน (no interaction) จึงสามารถนำมารวมกันได้ และสามารถสรุปโดยภาพรวมได้ว่า วิธีการ A เป็นวิธีรักษาที่ดีที่สุด (สำหรับทั้ง 2 เพศ)

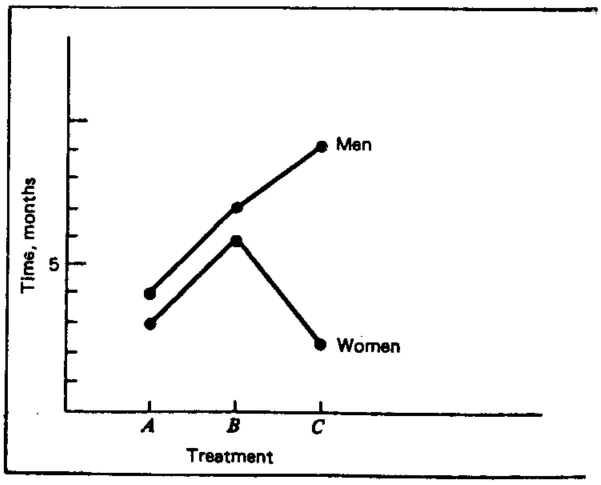
รูปที่ 9.4
แสดง no interaction
ระหว่างวิธีการและบล็อค
เส้นจะขนานกัน



<u>**ตัวอย่างที่ 10**</u> สมมติ μ_{ij} มีค่าดังนี้

block	A	B	C
	วิธีการ		
ชาย	$\mu_{11} = 4$	$\mu_{21} = 7$	$\mu_{31} = 9$
หญิง	$\mu_{12} = 3$	$\mu_{22} = 6$	$\mu_{32} = 2$

รูปที่ 5 แสดง Interaction ระหว่าง วิธีการ และ block



ผลการรักษา A และ B ต่างกัน 3 เดือน (ทั้งชายและหญิง) แต่ C ใช้เวลา**มาก**กว่า A 5 เดือน สำหรับเพศชาย แต่ใช้เวลา**น้อย**กว่า A 1 เดือน สำหรับเพศหญิง แสดงว่า อิทธิพลของวิธีการ**ไม่คงเส้นคงวา**ในบล็อคที่ต่างกัน เรียกว่า วิธีการ และ block มี **อิทธิพลร่วมกัน** หรือ interact กัน กรณีนี้ ไม่สามารถสรุปผลโดยวิธีการรวมๆ ว่า A ดีที่สุด เหมือนกรณี no interaction เพราะคำกล่าวนี้ไม่ถูกต้องสำหรับเพศหญิง กรณีมี interaction กราฟจะแสดงเส้นที่ไม่ขนานกัน

การหาค่า SS เพื่อทำ ANOVA

การหาค่า SS จะได้จากการประมาณค่าอิทธิพล ใน ตัวแบบ ดังนี้

$X_{ij} = \mu + T_i + B_j + E_{ij}$, $i = 1, 2, \ldots, t$; $j = 1, 2, \ldots, 6$

$X_{ij} = \mu + (\mu_{i.} - \mu) + (\mu_{.j} - \mu) + \{X_{ij} - [\mu + (\mu_{i.} - \mu) + (\mu_{.j} - \mu)]\}$

ย้าย μ ไว้ซ้ายมือ

$X_{ij} - \mu = (\mu_{i.} - \mu) + (\mu_{.j} - \mu) + (X_{ij} - \mu_{i.} - \mu_{.j} + \mu)$

ประมาณค่า $\mu, \mu_{i.}, \mu_{.j}$ ด้วย $\bar{X}_{..}, \bar{X}_{i.}$ และ $\bar{X}_{.j}$ ตามลำดับ

$X_{ij} - \bar{X}_{..} = (\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{..}) + (\bar{X}_{.j} - \bar{X}_{..}) + (X_{ij} - \bar{X}_{i.} - \bar{X}_{.j} + \bar{X}_{..})$

ยกกำลังสองทั้ง 2 ข้าง และรวม k treatment, b block

$$\Sigma\Sigma(X_{ij}-\bar{X}_{..})^2 = \Sigma\Sigma[(\bar{X}_{i.}-\bar{X}_{..}) + (\bar{X}_{.j}-\bar{X}_{..}) + (X_{ij}-\bar{X}_{i.}-\bar{X}_{.j}+\bar{X}_{..})]^2$$

$$\Sigma\Sigma(X_{ij}-\bar{X}_{..})^2 = \Sigma\Sigma(\bar{X}_{i.}-\bar{X}_{..})^2 + \Sigma\Sigma(\bar{X}_{.j}-\bar{X}_{..})^2 + \Sigma\Sigma(X_{ij}-\bar{X}_{i.}-\bar{X}_{.j}-\bar{X}_{..})^2$$

$$= b\Sigma(\bar{X}_{i.}-\bar{X}_{..})^2 + k\Sigma(\bar{X}_{.j}-\bar{X}_{..})^2 + \Sigma\Sigma(X_{ij}-\bar{X}_{i.}-\bar{X}_{.j}-\bar{X}_{..})^2$$

SS_{total} มี df = (N-1) = SS_{tr} มี df = (t-1) + SS_{bl} มี df = (b-1) + SS_E มี df = (k-1)(b-1)

df ของ error มาจากความจริงที่ว่า error = total - วิธีการ - bl

$= (N-1) - (t-1) - (b-1) = bt - 1 - t + 1 - b + 1 \quad (N = bt)$

$= bt - t - b + 1 = (bt-t) - (b-1) = t(b-1) - (b-1) = (b-1)(t-1)$

ตารางที่ 9.4 ANALYSIS OF VARIANCE RANDOMIZED COMPLETE BLOCK DESIGN WITH FIXED EFFECTS

SOURCE OF VARIATION	DEGREES OF FREEDOM	SUM OF SQUARES	MEAN SQUARE	EXPECTED MEAN SQUARE	F RATIO
Treatment	$k-1$	$\sum_{i=1}^{k} \frac{T_{i.}^2}{b} - \frac{T_{..}^2}{N}$	$\frac{SS_{Tr}}{k-1}$	$\sigma^2 + \frac{b}{k-1}\sum_{i=1}^{k}(\mu_{i.}-\mu)^2$	$\frac{MS_{Tr}}{MS_E}$
Block	$b-1$	$\sum_{j=1}^{b} \frac{T_{.j}^2}{k} - \frac{T_{..}^2}{N}$	$\frac{SS_{Blocks}}{b-1}$	$\sigma^2 + \frac{k}{b-1}\sum_{j=1}^{b}(\mu_{.j}-\mu)^2$	$\frac{MS_{Blocks}}{MS_E}$
Error	$(k-1)(b-1)$	$SS_{Total} - SS_{Tr} - SS_{Blocks}$	$\frac{SS_E}{(k-1)(b-1)}$	σ^2	
Total	$kb-1$	$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{b} X_{ij}^2 - \frac{T_{..}^2}{N}$			

จากสมมติฐาน $H_0 : \mu_{1.} = \mu_{2.} = ... = \mu_{k.}$ และ $H_0 : \mu_{.1} = \mu_{.2} = ... = \mu_{.b}$ จะหาค่าสถิติทดสอบได้โดยพิจารณาจาก Expected Mean Square ว่า ถ้า H_0 เป็นจริง $\Sigma(\mu_{i.} - \mu)^2 = 0$ และ $\Sigma(\mu_{.j} - \mu)^2 = 0$ ตามลำดับ ทำให้ตัวสถิติที่ใช้ทดสอบ H_0 คือ MStr/MSE และ MSbl/MSE ตามลำดับ โดยเทียบกับค่าวิกฤตที่ $f_{(t-1), v}$ และ $f_{(b-1), v}$ = dfError = (b-1)(t-1)

ตัวอย่างที่ 11 จากตัวอย่างที่ 8 สมมติได้ข้อมูลดังนี้

		Treatment 1 (RUNNING)	2 (WALKING)	3 (BICYCLING)	BLOCK TOTAL	BLOCK MEAN
Block	1	1.4	1.1	.7	3.2 ($T_{.1}$)	1.07 ($\bar{X}_{.1}$)
	2	1.5	1.2	.8	3.5 ($T_{.2}$)	1.17 ($\bar{X}_{.2}$)
	3	1.8	1.3	.7	3.8 ($T_{.3}$)	1.27 ($\bar{X}_{.3}$)
	4	1.7	1.3	.8	3.8 ($T_{.4}$)	1.27 ($\bar{X}_{.4}$)
	5	1.6	.7	.1	2.4 ($T_{.5}$)	.8 ($\bar{X}_{.5}$)
	6	1.5	1.2	.7	3.4 ($T_{.6}$)	1.13 ($\bar{X}_{.6}$)
	7	1.7	1.1	.4	3.2 ($T_{.7}$)	1.07 ($\bar{X}_{.7}$)
	8	2.0	1.3	.6	3.9 ($T_{.8}$)	1.30 ($\bar{X}_{.8}$)
	Treatment Total	13.2 ($T_{1.}$)	9.2 ($T_{2.}$)	4.8 ($T_{3.}$)	27.2 ($T_{..}$)	
	Treatment Mean	1.65 ($\bar{X}_{1.}$)	1.15 ($\bar{X}_{2.}$)	.6 ($\bar{X}_{3.}$)	1.13 ($\bar{X}_{..}$)	

ตารางที่ 9.5 แสดงจำนวนพลังงานเป็นแคลอรี่ที่ใช้ในการเดินทาง 1 กิโลเมตร โดยวิธีเดินทาง 3 วิธี

(1) $\Sigma\Sigma X_{ij}^2 = 1.4^2 + 1.5^2 + ... + 0.6^2 = 36.18$

(2) $T_{..}^2/N = 27.2^2/24 = 30.83$

(3) $\Sigma T_{i.}^2/b = (1/8)(13.2^2 + 9.2^2 + 4.8^2) = 35.24$

(4) $\Sigma T_{.j}^2/t = (1/3)(3.2^2 + 3.5^2 + ... + 3.9^2) = 31.38$

SStotal = (1) - (2) = 5.35, SStr = (3) - (2) = 4.41

SSbl = (4) - (2) = .55, SSE = 5.35 - (4.41 + .55) = .39

Source	DF	SS	MS	F
Treatment	2	4.41	2.205	78.75
Block	7	.55	.079	2.82
Error	14	.39	.028	
Total	23	5.39		

ตารางที่ 9.6 ANOVA ของข้อมูลในตารางที่ 9.5 ซึ่งใช้แผนงานทดลองแบบบล็อคสมบูรณ์

$f_{2,14,.01} = 6.51$

$f_{7,14,.05} = 2.76$

1) $H_0 : \mu_{1.} = \mu_{2.} = \mu_{3.}$ (กิจกรรมทั้ง 3 อย่าง ใช้พลังงานไม่ต่างกัน)

2) $H_0 : \mu_{.1} = \mu_{.2} = ... = \mu_{.8}$ (ความต้องการใช้พลังงานของคนทั้ง 8 คนไม่ต่างกัน)

เนื่องจากค่า F ทั้ง 2 ค่ามีนัยสำคัญ จึงสรุปว่า กิจกรรม 3 อย่างมีความต้องการใช้พลังงานที่แตกต่างกัน (p-value < .01) และบุคคล 8 คนนั้นมีความต้องการใช้พลังงานที่แตกต่างกัน (p-value < .05)

ข้อสังเกต (1) จากข้อตกลงว่า ไม่มีอิทธิพลร่วมกันระหว่างวิธีการและบล็อค แต่ถ้าข้อมูลส่อว่ามี**อิทธิพลร่วมกัน หรืออิทธิพลของฤดูกาลมีลักษณะไม่คงเส้นคงวา เมื่อเปลี่ยนบล็อค ฯลฯ จะต้องตรวจสอบข้อตกลงนี้ ซึ่งจะต้องใช้วิธีการที่ซับซ้อนขึ้นไป มิฉะนั้นข้อสรุปอาจไม่ถูกต้อง** (2) ถ้า F(วิธีการ) **มีนัยสำคัญ จะต้องตรวจหาความแตกต่างที่ชี้ชัดลงไปโดยวิธีทดสอบแบบเชิงซ้อน เช่นวิธีของ** Duncan **โดยหา** $SSR_p = r_p$ MSE/6 (3) **ตัวแบบ ที่ใช้มี 3 อย่างคือ** Model I **เมื่อ** k **วิธีการ และ** b block **ได้**

มาแบบกำหนด Model II คือทั้ง k วิธีการได้จากการสุ่มจากประชากรของวิธีการ และ b block ได้จากการสุ่มจากประชากรของ block และ Model III (Mixed model) หรือตัวแบบเชิงผสม คือมีตัวหนึ่งเป็น fixed และตัวหนึ่งเป็น random (4) สมมติฐาน ของ block กรณีเป็นแบบสุ่มคือ $H_0 : \sigma^2_{bl} = 0$

งานทดลองแบบแฟคทอเรียล (Factorial Experiments)

เป็นงานทดลองที่ผู้ทดลองสนใจวิเคราะห์ตัวแปร 2 ตัว ขึ้นไป ซึ่งสามารถใช้แผนงานทดลองทั้งแบบ CRD และ RCB ถ้าสนใจ 2 ตัวแปร เรียกว่า factor A และ factor B โดยแต่ละ factor ต้องมี 2 ระดับขึ้นไป

__ตัวอย่างที่ 12__ การศึกษาอิทธิพลของสิ่งแวดล้อมต่อการเติบโตของปลาชนิดหนึ่ง ซึ่งคล้ายปลาซาร์ดีน ให้ factor A คือ จำนวนแสงสว่าง มี 2 ระดับ (a = 2) คือวันละ 14 และ 9 ชั่วโมง factor B คือ อุณหภูมิ 2 ระดับ (b = 2) คือ -16^{o} และ 27^{o} C นั่นคือผู้ทดลองต้องการจำลองสภาพอากาศแบบฤดูร้อนและฤดูหนาว โดยมี a.b = 2.2 = 4 วิธีการ โดยแต่ละวิธีการมี n ค่าสังเกต จะได้ข้อมูลทั้งหมด N = a.b.n โดยข้อมูลจะแทนด้วย

X_{ijk}, i = 1, 2, ..., a; j = 1, 2, ..., b; k = 1, 2, ..., n

Model : $X_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + E_{ijk}$

μ = ค่าเฉลี่ยรวบยอด, α = อิทธิพลระดับ i ของ factor A โดยมี $\alpha_i = \mu_{i..} - \mu$

β_j = อิทธิพลระดับ j ของ factor B โดยมี = $\mu_{.j} - \mu$

$(\alpha\beta)_{ij}$ = อิทธิพลร่วมกันระหว่าง ระดับ i ของ factor A และระดับ j ของ factor B

$E_{ijk} = X_{ijk} - \mu_{ij}$ = residual or random error

ตารางที่ 9.7 แสดง ANOVA ของงานทดลองแบบแฟคทอเรียล

SOURCE OF VARIATION	DEGREES OF FREEDOM	SUM OF SQUARES	MEAN SQUARE	EXPECTED MEAN SQUARE	F RATIO
Treatment	$ab-1$	$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\frac{T_{ij.}^2}{n}-\frac{T_{...}^2}{abn}$	$\frac{SS_{Tr}}{ab-1}$	$\sigma^2+n\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\frac{(\mu_{ij.}-\mu_{...})^2}{ab-1}$	$\frac{MS_{Tr}}{MS_E}$
A	$a-1$	$\sum_{i=1}^{a}\frac{T_{i..}^2}{bn}-\frac{T_{...}^2}{abn}$	$\frac{SS_A}{a-1}$	$\sigma^2+nb\sum_{i=1}^{a}\frac{(\mu_{i..}-\mu_{...})^2}{a-1}$	$\frac{MS_A}{MS_E}$
B	$b-1$	$\sum_{j=1}^{b}\frac{T_{.j.}^2}{an}-\frac{T_{...}^2}{abn}$	$\frac{SS_B}{b-1}$	$\sigma^2+na\sum_{j=1}^{b}\frac{(\mu_{.j.}-\mu_{...})^2}{b-1}$	$\frac{MS_B}{MS_E}$
AB	$(a-1)(b-1)$	$SS_{Tr}-SS_A-SS_B$	$\frac{SS_{AB}}{(a-1)(b-1)}$	$\sigma^2+n\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\frac{(\alpha\beta)_{ij}^2}{(a-1)(b-1)}$	$\frac{MS_{AB}}{MS_E}$
Error	$ab(n-1)$	$SS_{Total}-SS_{Tr}$	$\frac{SS_E}{ab(n-1)}$	σ^2	
Total	$abn-1$	$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}X_{ijk}^2-\frac{T_{...}^2}{abn}$			

__ตัวอย่างที่ 13__ จากตัวอย่างที่ 12 ถ้าเลี้ยงปลาเพศเมีย 20 ตัว แบ่งแบบสุ่มเป็นกลุ่มๆ 4 กลุ่มๆ ละ 5 ตัว แล้วสุ่มวิธีการให้ กลุ่มละ 1 วิธีการ เมื่อครบกำหนด 3 เดือน วัดการเติบโตของรังไข่ โดยใช้ดัชนี GSI ได้ข้อมูลดังนี้

ตารางที่ 9.8 แสดงค่าดัชนี GSI แสดงการเติบโตของรังไข่ปลา เมื่ออยู่ในสิ่งแวดล้อมที่ต่างกัน

		Factor A (photoperiod) 9 HOURS	14 HOURS	TOTAL (FACTOR B)
Factor B (temperature)	27°C	(unnatural) .90 1.06 .98 1.29 1.12 $T_{11\cdot} = 5.35$ $\bar{X}_{11\cdot} = 1.07$	(simulated summer) .83 .67 .57 .47 .66 $T_{21\cdot} = 3.2$ $\bar{X}_{21\cdot} = .64$	$T_{\cdot1\cdot} = T_{11\cdot} + T_{21\cdot}$ $= 8.55$ $\bar{X}_{\cdot1\cdot} = .855$
	16°C	(simulated winter) 1.30 2.88 2.42 2.66 2.94 $T_{12\cdot} = 12.20$ $\bar{X}_{12\cdot} = 2.44$	(unnatural) 1.01 1.52 1.02 1.32 1.63 $T_{22\cdot} = 6.5$ $\bar{X}_{22\cdot} = 1.3$	$T_{\cdot2\cdot} = T_{12\cdot} + T_{22\cdot}$ $= 18.7$ $\bar{X}_{\cdot2\cdot} = 1.87$
	Total (Factor A)	$T_{1\cdot\cdot} = T_{11\cdot} + T_{12\cdot}$ $= 17.55$ $\bar{X}_{1\cdot\cdot} = 1.755$	$T_{2\cdot\cdot} = T_{21\cdot} + T_{22\cdot}$ $= 9.7$ $\bar{X}_{2\cdot\cdot} = .97$	$T_{\cdot\cdot\cdot} = 27.25$ (grand total) $\bar{X}_{\cdot\cdot\cdot} = 1.36$

For these data, $a = 2$, $b = 2$, $n = 5$, and $N = a \cdot b \cdot n = 20$. Also

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{5} X_{ijk}^2 = 48.26$$

(1) $\sum\sum\sum X_{ijk}^2 = 48.26$

(2) $G^2/N = 27.5^2/20 = 37.13$

(3) $\sum T_{i..}^2/bn = (1/10)(17.55^2 + 9.7^2) = 40.21$

(4) $\sum T_{.j.}^2/an = (1/10)(8.55^2 + 18.7^2) = 42.28$

(5) $\sum\sum T_{ij.}^2/n = (1/5)(5.35^2 + 3.2^2 + 12.2^2 + 6.5^2) = 45.99$

ดังนั้น SS(total) = (1) - (2) = 11.13, SSTr = (5) - (2) = 8.86

SS(A) = (3) - (2) = 3.08, SS(B) = (4) - (2) = 5.15

SS(AB) = SSTr - SSA - SSB = 8.86 - 3.08 - 5.15 = .63

SSE = SSTotal - SSTr = 11.13 - 8.86 = 2.27

ANOVA

Source	DF	SS	MS	F
Treatment	(3)	8.86	2.95	21.07
A	1	3.08	3.08	22
B	1	5.15	5.15	36.79
AB	1	.63	.63	4.5
Error	16	2.27	.14	
Total	19	11.13		

$f_{1,16,.05} = 4.49$

$f_{3,16,.05} = 3.24$

$f_{3,16,.01} = 5.29$

ตารางที่ 9.9 แสดง ANOVA ของข้อมูลในตารางที่ 9.8 ซึ่งเป็นแบบแฟคทอเรียล

การสรุปผลงานทดลองแบบแฟคทอเรียลต้อง**ตรวจดูอิทธิพลของ Interaction ก่อน main effect**

$H_0 : (\alpha\beta)_{ij} = 0$ (No interaction), $H_a : (\alpha\beta)_{ij} \neq 0$

$F = 4.5^* > 4.49$ จึงปฏิเสธ H_0 และสรุปว่ามีอิทธิพลร่วมกันระหว่างเวลาและระดับอุณหภูมิ กรณีที่ Interaction มีนัยสำคัญ จะสรุปผลรวมของ factor A และ factor B ไม่ได้ ต้องใช้เปรียบเทียบทั้ง 4 วิธี ซึ่งมี F = 21.07 แสดงว่าสิ่งแวดล้อมที่ต่างกัน จะให้การเติบโตที่ต่างกัน (p-value < .01) และควรทดสอบแบบเชิงซ้อนด้วย DNMR โดยมี $SSR_p = r_p\sqrt{MSE/n}$, $\sqrt{MSE/n} = \sqrt{.14/5} = .1673$

p	2	3	4
r_p	2.998	3.114	3.235
SSR_p	.5016	.5060	.5412

$\bar{x}_{21.}$	$\bar{x}_{11.}$	$\bar{x}_{22.}$	$\bar{x}_{12.}$
.64	1.07	1.3	2.44

สรุปได้ว่า รังไข่เติบโตสูงสุดเมื่อมีอากาศหนาว

หมายเหตุ ถ้าการทดสอบ interaction ไม่มีนัยสำคัญ จะเน้นความสนใจไปที่ main effect ของ A และ B นั่นคือ การเปรียบเทียบระหว่าง **a** ระดับ ของ A และ การเปรียบเทียบระหว่าง **b** ระดับ ของ B ค่าทดสอบ DNMR มีดังนี้

$SSR_p = r_p\sqrt{MSE/bn}$ สำหรับเปรียบเทียบ k ระดับของ factor A

$SSR_p = r_p\sqrt{MSE/an}$ สำหรับเปรียบเทียบ b ระดับของ factor B

แบบฝึกหัดที่ 9

1. คาร์บอนไดออกไซด์มีผลต่อการเจริญเติบโตของจุลชีวะ ถ้ามีปริมาณน้อยจะช่วยกระตุ้นการเจริญเติบโตของสิ่งมีชีวิตหลายชนิด แต่ถ้ามีปริมาณสูงจะยับยั้งการเจริญเติบโตของสิ่งมีชีวิตบางชนิด จึงใช้ประโยชน์ในการยืดอายุอาหาร ได้มีการศึกษาอิทธิพลของ CO_2 ระดับต่างๆ 5 ระดับ ต่อการเจริญเติบโตของ **Pseudomonas** ซึ่งทำให้อาหารบูดเสีย ข้อมูลที่ได้คือเปอร์เซนต์การเปลี่ยนแปลงของมวลของเซลล์ภายหลังปล่อยให้เจริญเติบโตในบรรยากาศที่มี CO_2 ปริมาณต่างๆ 5 ระดับ โดยแต่ละระดับมี 5 จานเพาะเลี้ยง

ปริมาณ CO_2

.00	.083	.29	.50	.86
62.6	50.9	45.5	29.5	24.9
64.5	47.5	29.8	19.2	7.8
58.6	48.5	40.2	29.2	17.8
50.9	35.2	30.2	22.6	22.6
52.3	42.6	40.0	24.4	15.9

ผู้ทดลองใช้ Model I หรือ II, จงตั้งสมมติฐาน หาค่าทดสอบ และสรุปผล

2. จากการศึกษาอิทธิพลของ โรงงาน chloralkali ต่อ ปลา ในลำน้ำที่ไหลผ่านโรงงานดังกล่าว โดยวัดระดับปรอทเป็นไมโครกรัม ต่อ น้ำหนักปลา 1 กรัม ได้สุ่มตัวอย่างปลาจากบริเวณ 4 บริเวณ คือ (1) เหนือโรงงาน 5.5 ก.ม. (2) ใต้โรงงาน 3.7 ก.ม. (3) ใต้โรงงาน 21 ก.ม. (4) ใต้โรงงาน 133 ก.ม. จงตั้งสมมติฐาน ทดสอบ และสรุปผล

บริเวณ	ระดับปรอท					
1	.45	.35	.32	.68	.53	.34
2		1.64	1.67	1.85	1.57	1.59
3		1.56	1.55	1.69	1.67	1.60
4		.65	.59	.69	.62	.70

3. การศึกษาพฤติกรรม ของ นกตัวผู้ great titmouse ว่า ระดับความสูงโดยเฉลี่ยขณะที่ทำกิจกรรมต่างๆ เป็นแบบเดียวกัน โดยบันทึกความสูงเป็นเมตรขณะทำกิจกรรมไว้ทั้งหมด 10 กิจกรรมแล้วสุ่มมา 4 กิจกรรม คือ (1) ขณะร้องเพลง (2) ขณะกินอาหาร (3) ขณะไซร้ตกแต่งขน (4) ขณะพักผ่อน แต่ละกลุ่มมีข้อมูล 20 ตัว ได้ข้อมูลสรุป ดังนี้ $T_{1.} = 186$, $T_{2.} = 44$, $T_{3.} = 120$, $T_{4.} = 70$, $\Sigma\Sigma X_{ij}^2 = 7915.8$ จงตั้งสมมติฐาน ทดสอบ และสรุปผล ผู้ทดลอง ใช้ model แบบใด จงอธิบาย

4. ให้ตรวจสอบว่ามี interaction ระหว่าง block และ treatment หรือไม่

4.1

Block	treatment A	B	C	D
1	1	3	4	0
2	4	6	7	3
3	2	4	5	1

4.2

	treatment			
Block	A	B	C	D
1	1	3	0	0
2	4	6	5	3
3	2	4	5	1

4.3

	treatment			
Block	A	B	C	D
1	1	3	4	0
2	4	5	7	3
3	2	4	5	1

5. การศึกษาอิทธิพลของแสงสว่างต่อการเติบโตของต้นเฟิร์น โดยแบ่งต้นไม้เป็น 2 กลุ่ม คืออายุ 4 วัน ในที่มืด และอายุ 12 วันในที่มืด มีกลุ่มละ 4 ต้น สุ่มมารับแสง 1 dose แล้วนำกลับไปไว้ในที่มืด ข้อมูลคือพื้นที่ภาพตัดขวางของปลายใบเป็นตารางไมโครเมตร 24 ชั่วโมงหลังจากได้รับ treatment ได้ข้อมูลดังนี้

	ความยาวคลื่นแสง			
block	420 nm	460 nm	600 nm	720 nm
ต้นอ่อน	1017.6	929.0	938.9	1018.5
ต้นแก่	854.7	689.9	841.5	797.4

จงทดสอบความแตกต่างของ block เพื่อศึกษาว่า มีคุณสมบัติที่เหมาะสมของบล็อค และทดสอบเปรียบเทียบ ระหว่างค่าเฉลี่ยของวิธีการ ถ้า F-test มีนัยสำคัญ ให้ทดสอบเชิงซ้อน โดยวิธีของ Duncan

6. การศึกษาการเติบโตของต้นถั่วเมื่อให้น้ำ ในปริมาณต่างกัน 3 ระดับ โดยเตรียมต้นถั่วไป 2 ชนิด คือ ต้นที่ยังไม่มีใบ 18 ต้น และที่มีใบแล้ว 18 ต้น สุ่มชนิดละ 6 ต้นเพื่อให้น้ำแต่ละระดับ วัดความสูงของลำต้นเป็นเซนติเมตร ได้ข้อมูลสรุปแต่ละกลุ่ม ดังนี้

	แฟคเตอร์ A (ระดับน้ำ)			
แฟคเตอร์ B	น้อย	ปานกลาง	มาก	
ยังไม่มีใบ	438	612	738	1788
มีใบ	426	516	636	1578
	864	1128	1374	1366

$\sum\sum\sum X_{ijk}^2 = 237{,}431.42$

จงสร้าง ANOVA ทดสอบสมมติฐานที่เหมาะสม และทำการทดสอบแบบเชิงซ้อน ของ Duncan

7. การศึกษาอิทธิพลของ photoperiod และ genotype ต่อข้าวบาร์เลย์ AB 3 ได้เตรียมใบข้าวชนิดละ 50 ใบ แล้วแบ่งเป็น 6 กลุ่มๆ ละ 10 ใบ ทุกกลุ่มถูก infected ก่อนนำไปรับแสงสว่างระดับต่างๆ ข้อมูลคือจำนวนวันจนสามารถเห็นการเปลี่ยนแปลง ข้อมูลคือผลรวมของ 10 ใบ

Factor B (genotype)	Factor A : photoperiod : จำนวนชั่วโมงที่ไม่มีแสงสว่างต่อ 1 วัน 0	2	4	8	16	รวม
1	630	610	560	570	590	2960
2	640	630	600	620	620	3110
3	640	630	650	620	580	3120
4	660	660	620	610	630	3180
รวม	2570	2530	2430	2420	2420	12,370

กำหนดให้ $\Sigma\Sigma\Sigma x_{ijk}^2 = 773{,}377.2$ จงสร้าง ANOVA ทดสอบสมมติฐานที่สมควร และทำ DNMR ตามความเหมาะสม

8. การศึกษาการย่อยของแคปซูล 2 ชนิด เมื่อถูกน้ำย่อยในกระเพาะอาหาร (gastric) และน้ำย่อยในลำไส้เล็ก (duodenal) โดยเตรียมแคปซูลเปล่าชนิดละ 10 อัน สุ่มแบ่งเป็น 2 กลุ่มๆ ละ 5 อัน แล้วให้ละลายในตัวอย่างน้ำย่อยแต่ละชนิด ข้อมูลที่ได้คือเวลาเป็นนาทีที่สังเกตพบฟองอากาศที่เกิดขึ้น ได้ข้อมูลสรุปจาก 5 แคปซูล ดังนี้

Factor B ชนิดของแคปซูล	Factor A (ชนิดน้ำย่อย) Gastric	Duodenal	
C	249	181.5	430.5
V	208	220.5	428.5
	457	402	859

กำหนดให้ $\Sigma\Sigma\Sigma X_{ijk}^2 = 37,847.26$ จงสร้าง ANOVA และทดสอบสมมติฐาน

เฉลยแบบฝึกหัดที่ 9

1.

SOV	df	SS	MS	F	
treatments	4	5034.39	1258.60	33.76**	p-value << .005
Error	20	745.60	37.285		
	24	5780.09			

ปฏิเสธ H_0 สรุปว่า ปริมาณ CO_2 ที่ต่างกัน มีผลต่อการเปลี่ยนแปลงของมวลเซลล์

2.

SOV	df	SS	MS	F	
treatments	3	6.4684	2.156	216.6**	p-value << .005
Error	17	.1724	.01014		
	20	6.6408			

ปฏิเสธ H_0 และสรุปว่า จำนวนปรอทในบริเวณที่ห่างจากโรงงาน 4 บริเวณมีความแตกต่างกัน

3.

SOV	df	SS	MS	F	
treatments	3	586.6	195.53	216.6**	$.025 < p < .05$
Error	76	5124.2	64.42		
	79	5710.8			

ปฏิเสธ H_0 และสรุปว่า นกทำกิจกรรมต่างๆ ในความสูงที่แตกต่างกัน ใช้ Model II เนื่องจากสุ่มกิจกรรม 4 อย่างจากประชากรของกิจกรรมทั้งหลาย

4. (4.1) ไม่มี interaction

(4.2) มี interaction เพราะ B และ C มีความแตกต่างไม่คงที่เมื่อเปลี่ยนบล็อค

(4.3) มี interaction เพราะ A และ B มีความแตกต่างไม่คงที่เมื่อเปลี่ยนบล็อค

5.

SOV	df	SS	MS	F
treatment	3	22,004.46	7,334.82	2.17
Block	1	76,910.42	76,910.42	22.78**
Error	3	10,130.04	3,376.68	
Total	7	109,044.92		

สรุปว่า block ต่างกัน คือต้นอ่อนและต้นแก่ จะมี response แตกต่างกัน อายุของต้นทำหน้าที่เป็นบล็อคที่ดี ส่วน treatment คือความยาวของคลื่นแสง ไม่มีนัยสำคัญ จึงไม่ต้องทำ DNMR

6.

SOV	df	SS	MS	F	
treatment	(5)	(12,489)	2,497.83	338.42**	p << .001
A = ระดับน้ำ	2	10,842	5,421	734.48	
B = อายุ	1	1,225	1,225	165.97	
AB	2	422	211	28.59**	p < .01
Error	30	221.42	7.3807		
	35	12,710.42			

เนื่องจาก interaction มีนัยสำคัญ จึงไม่ควรทดสอบอิทธิพลของ A และ B และให้ทดสอบอิทธิพลรวมของวิธีการ ซึ่งพบว่ามีนัยสำคัญ สรุปว่า การเติบโตของ 6 วิธีการไม่เหมือนกัน จึงทำ DNMR, $MSE/n = 1.1091$, $\alpha = .01$, $V = 30$

p	2	3	4	5	6
r_p	3.899	4.506	4.168	4.250	4.314
$(SSR)_p$	4.31	4.99	4.62	4.71	4.78

$\bar{x}_{12.}$ $\bar{x}_{11.}$ $\bar{x}_{22.}$ $\bar{x}_{21.}$ $\bar{x}_{32.}$ $\bar{x}_{31.}$

$\underline{71 \quad 73}$ $\underline{86}$ $\underline{102 \quad 106}$ $\underline{123}$

7.

SOV	df	SS	MS	F	
treatment	(19)	(1,445.59)	76.08	2.0	
A:photoperiod	4	503	125.75	3.31*	.01 < p-value < .05
B:genotype	3	525.5	175.17	4.60*	.01 < p-value < .05
AB	12	417	34.75	0.91ns	
Error	180	6,847.2	38.04		
	199	8,292.7			

เนื่องจาก Interaction ไม่มีนัยสำคัญ จึงทดสอบ main effect A และ B ได้พบว่า ทั้ง A และ B มีนัยสำคัญ จึงต้องทำ DNMR ต่อ

สำหรับ **Photoperiod,** $\sqrt{MSE/bn} = .97519,\ \alpha = .05,\ V = \infty$

p	2	3	4	5
r_p	2.772	2.918	3.017	3.089
SSR_p	2.70	2.85	2.94	3.01

photoperiod

16	8	4	2	0
60.5	60.8	60.75	63.25	64.25

สำหรับ **genotype,** $\sqrt{MSE/an} = .8722,\ \alpha = .05,\ V = \infty$

p	2	3	4
r_p	2.772	2.918	3.017
SSR_p	2.42	2.55	2.63

genotype

1	2	3	4
59.2	62.2	62.4	63.6

8.

SOV	df	SS	MS	F	
treatment	(3)	(471.45)	157.15	5.22	$.01 < p < .025$
A : น้ำย่อย	1	151.25	151.25	5.02	
B : แคปซูล	1	.20	.20	.007	
AB	1	320	320	10.62*	$p < .01$
Error	16	481.76	30.11		
	19	951.21			

เนื่องจาก interaction มีนัยสำคัญ จึงต้องตรวจสอบวิธีการทั้งหมด ซึ่งพบว่ามีนัยสำคัญ จึงต้องทำ DNMR, $\alpha = .05$, $\nu = 16$, $\sqrt{MSE/5} = 2.454$

p	2	3	4
r_p	2.998	3.144	3.235
SSR_p	7.36	7.72	7.94

$\bar{X}_{21}$	$\bar{X}_{12}$	$\bar{X}_{22}$	$\bar{X}_{11}$
36.3	41.6	44.1	49.8