บทที่ 8
การเปรียบเทียบค่าเฉลี่ย 2 กลุ่ม

8.1 การอ้างอิง $\mu_1 - \mu_2$ โดยใช้ตัวอย่างขนาดใหญ่

$\mu_1 - \mu_2$ คือค่าเฉลี่ยของประชากร 2 ประชากร ซึ่งไม่ทราบค่าแน่นอน จึงต้องสุ่มตัวอย่างขนาด n_1 และ n_2 ตามลำดับจากแต่ละประชากร โดยตัวอย่าง 2 ชุดนี้เป็นอิสระกัน

ตัวอย่างที่ 1 80% ของเกษตรกรชาวสวีเดน ใช้ยาฆ่าแมลงซึ่งมีส่วนประกอบของสารปรอท แต่ในประเทศเยอรมัน ใช้ยาที่ไม่มีส่วนผสมของสารปรอท จากการสุ่มไข่จากตลาด 2 ประเทศ เพื่อเปรียบเทียบจำนวนสารปรอทในไข่ไก่ ได้ข้อมูลดังนี้

สวีเดน : $n_1 = 10$ ฟอง, $\bar{X}_1 = .026$ ppm., $S_1 = .01$

เยอรมัน : $n_2 = 70$ ฟอง, $\bar{X}_2 = .007$ ppm., $S_2 = .004$

ดังนั้นค่าประมาณของ $(\widehat{\mu_1 - \mu_2})$ คือ $\mu_1 - \mu_2 = (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = (.026 - .007)$

$= .019$ ppm.

ทฤษฎีบทที่ 8.1 ถ้า $\bar{X}_1$ และ $\bar{X}_2$ เป็นค่าเฉลี่ยจากตัวอย่างขนาด n_1 และ n_2 ซึ่งเป็นอิสระกัน และสุ่มจากประชากรปกติที่มีค่าเฉลี่ย μ_1 และ μ_2 และความแปรปรวน σ_1^2 และ σ_2^2 ตามลำดับ ดังนั้น ตัวแปรเชิงสุ่ม $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$ จะมีการแจกแจงแบบปกติด้วยค่าเฉลี่ย $\mu_1 - \mu_2$ และความแปรปรวน $\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2$

ข้อสังเกต

1. ถ้าประชากรไม่มีการแจกแจงแบบปกติ แต่ถ้า n_1, n_2 มีขนาดใหญ่พอ $(n_1 \geq 30, n_2 \geq 30)$ สามารถใช้ Central Limit Theorem ว่า $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$ มีการแจกแจงโดยประมาณแบบปกติ
2. สำหรับตัวอย่างขนาดใหญ่ ซึ่งสุ่มจากประชากรที่ไม่ทราบค่า σ_1^2 , σ_2^2 จะทดสอบได้โดยใช้ Z-test ด้วยใช้ค่าประมาณของ σ_1^2 , σ_2^2

$$Z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2}}$$

3. สำหรับประชากรปกติ ซึ่งทราบค่า σ_1^2 , σ_2^2 (ซึ่งจะไม่พบบ่อยนัก) ไม่ต้องคำนึงถึงขนาดตัวอย่าง ตัวสถิติที่ใช้ทดสอบคือ

$$Z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}}$$

4. ช่วงเชื่อมั่น $(1 - \alpha)100\%$ ของ $(\mu_1 - \mu_2)$ คือ

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm Z_{\alpha/2} \sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}$$

5. สมมติฐานที่ต้องการทดสอบคือ

1) $H_0: \mu_1 - \mu_2 = d_0$ 2) $H_0: \mu_1 - \mu_2 = d_0$ 3) $H_0: \mu_1 - \mu_2 = d_0$

$H_a: \mu_1 - \mu_2 > d_0$ $H_a: \mu_1 - \mu_2 < d_0$ $H_a: \mu_1 - \mu_2 \neq d_0$

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> จากตัวอย่างที่ 1 ถ้าต้องการทดสอบว่าไข่สวีเดนมีสารปรอทสูงกว่าไข่เยอรมัน $\alpha = .05$

วิธีที่ 1 สร้างช่วงเชื่อมั่น 95% ของ $(\mu_1 - \mu_2)$

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm Z_{.025} \sqrt{S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2}$$

$$= .019 \pm 1.96 \sqrt{.01^2/10 + .004^2/70} = .019 \pm 1.96(.00134)$$

$$= .019 \pm .00262 = .016, .022$$

หรือ $.016 \text{ ppm.} < \mu_1 - \mu_2 < .022 \text{ ppm.}$

นั่นคือกล่าวด้วยความมั่นใจ 95% ได้ว่าสารปรอทในไข่จากสวีเดนสูงกว่าจากเยอรมัน โดยเฉลี่ยไม่น้อยกว่า .016 ppm. และไม่เกิน .022 ppm. นั่นคือไข่ 2 ประเทศมีความ แตกต่างกัน

วิธีที่ 2 ต้องการทดสอบคำกล่าวว่าไข่จากสวีเดนมีสารปรอทสูงกว่าไข่จากเยอรมันโดยเฉลี่ย .025 ppm. $\alpha = .05$

$H_0: \mu_1 - \mu_2 = .025$, $H_a: \mu_1 - \mu_2 \neq .025$ CR : $|Z| > Z_{.025} = 1.96$,

$Z = (.019 - .025)/.00134 = -4.48$, $Z_c = |-4.48| > 1.96$ จึงปฏิเสธ H_0 และสรุปว่าคำกล่าวไม่จริง (คือจริงๆ แล้วมีความแตกต่างสูงกว่าที่อ้างไว้)

ข้อสังเกต กรณีที่ใช้ระดับนัยสำคัญเท่ากัน และเป็นการทดสอบแบบ 2 ด้าน ถ้ามีช่วงเชื่อมั่นของ $(\mu_1 - \mu_2)$ แล้ว จะสามารถสรุปผลได้โดยไม่ต้องใช้วิธีทดสอบสมมติฐาน โดยตรวจดูว่า ถ้าค่า d_0 อยู่ในช่วงเชื่อมั่น จะยอมรับ H_0 ถ้า d_0 ไม่อยู่ในช่วงเชื่อมั่น จะปฏิเสธ H_0 จากตัวอย่าง $d_0 = .025$ แต่ 95% ช่วงเชื่อมั่นคือ .016, .022 ซึ่งไม่รวมค่า $d_0 = .025$ จึงปฏิเสธ H_0 และสรุปว่า $\mu_1 - \mu_2 \neq .025$ สำหรับสมมติ ฐาน $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$, $H_a: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$, $\alpha = .05$ ก็ใช้วิธีเดียวกัน คือตรวจสอบดูว่า $d_0 = 0$ อยู่ในช่วงเชื่อมั่นหรือไม่ ซึ่งครั้งนี้ 0 ไม่อยู่ในช่วงเชื่อมั่น จึงปฏิเสธ H_0 และสรุปว่า $\mu_1 \neq \mu_2$

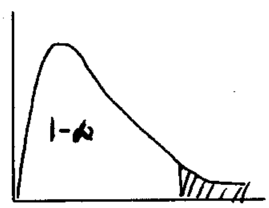
8.2 การเปรียบเทียบประชากร 2 ประชากร

เนื่องจากการเปรียบเทียบค่าเฉลี่ย 2 กลุ่ม จะต้องใช้ σ_1^2, σ_2^2 ถ้าไม่ทราบค่าที่แท้จริง จะแยกเป็น 2 กรณี คือ

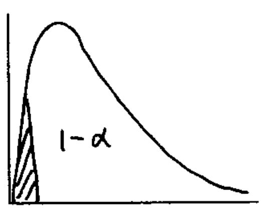
1. สามารถอนุโลมว่า $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ (การทดสอบ $H_0: \mu_1 = \mu_2$ ต้องใช้ pooled t-test)
2. ไม่สามารถอนุโลมว่า $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ (การทดสอบ $H_0: \mu_1 = \mu_2$ ต้องใช้ t-test ของ Satterthwaite)

การที่จะทราบว่าเป็นกรณีที่ 1 หรือ 2 จะต้องใช้ความรู้จาก S_1^2 และ S_2^2 โดยมีสมมติฐาน

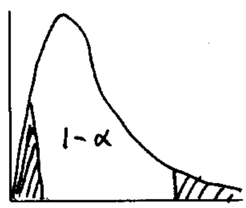
1. $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$	2. $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$	3. $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$
$H_a: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$	$H_a: \sigma_1^2 < \sigma_2^2$	$H_a: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$



การทดสอบด้านขวามือ



การทดสอบด้านซ้ายมือ



การทดสอบ 2 ด้าน

ทฤษฎีที่ 8.2 ถ้า S_1^2 และ S_2^2 เป็นความแปรปรวนจากตัวอย่างขนาด n_1 และ n_2 ที่เป็นอิสระกัน ซึ่งสุ่มจากประชากรปกติที่มีค่าเฉลี่ย μ_1 และ μ_2 และความแปรปรวน σ_1^2 และ σ_2^2 ตามลำดับ ถ้า $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ดังนั้น ตัวสถิติ S_1^2/S_2^2 จะมีการแจกแจงแบบ F ด้วย $\nu_1 = n_1 - 1$, $\nu_2 = n_2 - 1$ ตามลำดับ

หมายเหตุ สำหรับการทดสอบด้านซ้ายมือ หรือ การทดสอบ 2 ด้าน การหาค่าวิกฤตด้านซ้ายมือ จะไม่มีค่าในตาราง จึงต้องใช้ความสัมพันธ์

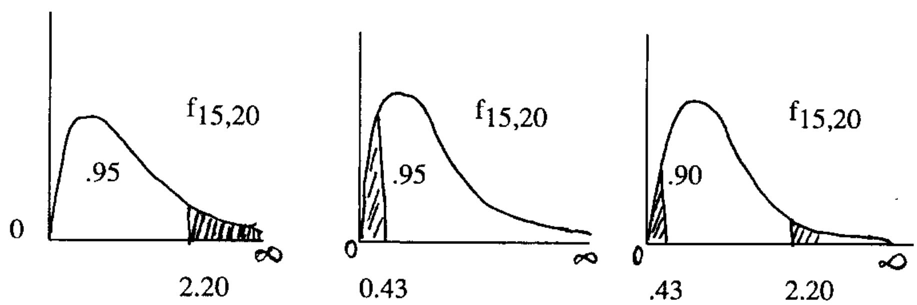
$$f_{(1-\alpha/2),\nu_1,\nu_2} = 1/f_{\alpha,\nu_2,\nu_1}$$

$$f_{(1-\alpha/2),\nu_1,\nu_2} = 1/f_{(\alpha/2),\nu_2,\nu_1}$$

เช่น $n_1 = 16, n_2 = 21$ จะได้ $\nu_1 = 15, \nu_2 = 20$

$f_{.05,15,20} = 2.20$, $f_{.05,20,15} = 2.33$

ดังนั้น $f_{.95,15,20} = 1/f_{.05,20,15} = 1/2.33 = .43$



<u>**ตัวอย่างที่ 3**</u> การศึกษาผลกระทบของยา digoxin ซึ่งเป็นยา toxic ในคนไข้ 2 กลุ่ม ได้ข้อมูลดังนี้

อายุ 64 ปีขึ้นไป : $n_1 = 41$, $\bar{X}_1 = .265$ mg./วัน, $S_1 = .102$ mg./วัน

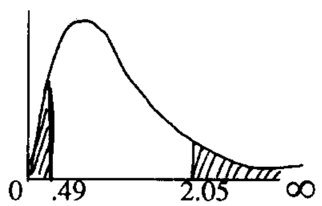
อายุน้อยกว่า 64 ปี : $n_2 = 29$, $\bar{X}_2 = .268$ mg./วัน, $S_2 = .068$ mg./วัน

ต้องการทราบว่า $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ หรือไม่ ดังนั้น สมมติฐานคือ

$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$, $H_a: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ ตัวสถิติที่ใช้ทดสอบ คือ

$F = S_1^2/S_2^2 = (.102)^2/(.068)^2 = 2.26 \sim f_{40,28}$

$f_{.025,(40,28)} = 2.05$, $f_{.975,(40,28)} = 1/f_{.025,(28,40)} = 1/2.01$



$= .49$

เนื่องจาก $F = 2.26 > 2.05$ จึง

ปฏิเสธ H_0 และสรุปว่า $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

8.3 การอ้างอิงถึง $\mu_1 - \mu_2$ โดยใช้ Pooled T

เมื่อต้องการเปรียบเทียบ μ_1 กับ μ_2 โดยใช้ตัวอย่างสุ่มที่เป็นอิสระกันจาก**ประชากรปกติ** ซึ่งไม่ทราบค่าแท้จริงของ σ_1^2 , σ_2^2 แต่ได้ทดสอบแล้วว่า $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ (แต่ไม่ทราบค่าแท้จริง) ดังนั้น

$V(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = \sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2} = \sqrt{\sigma^2(1/n_1 + 1/n_2)}$ และประมาณค่า σ^2 ด้วย S_p^2

นิยาม 8.1
$$S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{(n_1 + n_2 - 2)}$$

ทฤษฎีที่ 8.3 การหาช่วงเชื่อมั่นของ $(\mu_1 - \mu_2)$ โดยใช้ S_p^2

ถ้า $\bar{X}_1$ และ $\bar{X}_2$ เป็นค่าเฉลี่ยจากตัวอย่างที่เป็นอิสระกัน ซึ่งสุ่มมาจากประชากรปกติที่มีค่าเฉลี่ย μ_1 , μ_2 และความแปรปรวน σ^2 ดังนั้น $100(1-\alpha)$ ช่วงเชื่อมั่นของ $\mu_1 - \mu_2$ คือ

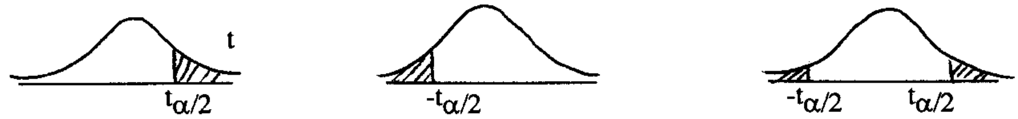
$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm t_{\alpha/2}\sqrt{S_p^2(1/n_1 + 1/n_2)}, \nu = n_1 + n_2 - 2$$

และตัวแปรเชิงสุ่ม

$$\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - d_0}{\sqrt{S_p^2(1/n_1 + 1/n_2)}} = T_{(n1 + n2 - 2)}$$ **จะเป็นตัวสถิติที่ใช้ทดสอบสมมติฐาน**

1. H_0: $\mu_1 - \mu_2 = d_0$ 2. H_0: $\mu_1 - \mu_2 = d_0$ 3. H_0: $\mu_1 - \mu_2 = d_0$

H_a: $\mu_1 - \mu_2 > d_0$ H_a: $\mu_1 - \mu_2 < d_0$ H_a: $\mu_1 - \mu_2 \neq d_0$



ตัวอย่างที่ 4 การศึกษา angina ในหนู โดยแบ่งหนูที่มีประวัติ angina 18 ตัวแบบสุ่ม เป็น 2 กลุ่มๆ ละ 9 ตัว โดยใช้เป็นกลุ่มควบคุมและกลุ่มทดลอง ใช้ยา FL 113 ให้หนูออกกำลังถีบจักร แล้วนับเวลา recovery time ได้ผลดังนี้

กลุ่มควบคุม : $n_1 = 9$, $\overline{X}_1 = 329$ วินาที, $S_1 = 45$ วินาที

FL 113 : $n_2 = 9$, $\overline{X}_2 = 283$ วินาที, $S_2 = 43$ วินาที

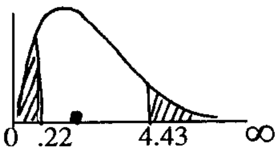
ให้ทดสอบว่ากลุ่มควบคุม ใช้ recovery time สูงกว่า กลุ่มใช้ยาหรือไม่ $\alpha = .05$

และสร้าง 95% ช่วงเชื่อมั่นของ $\mu_1 - \mu_2$

ก่อนอื่นต้องตรวจสอบก่อนว่า จะอนุโลมว่า $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ได้หรือไม่

$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$, $H_a: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, $F = S_1^2/S_2^2 = 45^2/43^2 = 1.09$

$f_{.025,8,8} = 4.43$, $f_{.975,(8,8)} = 1/f_{.025,(8,8)} = 1/4.43 = .22$



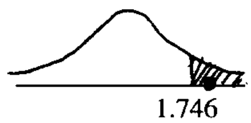
F = 1.09 ไม่อยู่ในเขตวิกฤต จึงสรุปว่า $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ จึงสามารถอ้างอิงถึง $\mu_1 - \mu_2$ โดยใช้ pooled T

$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$, $H_a: \mu_1 - \mu_2 > 0$, $\alpha = .05$

$S_p^2 = [8(45)^2 + 8(43)^2]/(9 + 9 - 2) = 30992/16 = 1937$

$T = [(329\text{-}328) - 0]/ \sqrt{1937(1/9 + 1/9)} = 46/20.747 = 2.22 \sim t_{16}$

$t_{16,(.05)} = 1.746$, แต่ T >1.746จึงปฏิเสธ H_0



และสรุปว่า กลุ่มควบคุมใช้ recovery time สูงกว่ากลุ่มใช้ยา

$.01 < \text{p-value} < .025$

95% ช่วงเชื่อมั่นของ $(\mu_1 - \mu_2)$ คือ $46 \pm 2.120(20.747)$, $t_{.025,,16} = 2.120$

$= 46 + 43.98 = 2.02, 89.98$ วินาที

ข้อสังเกต 1. ช่วงเชื่อมั่น 95% ของ $\mu_1 - \mu_2$ ไม่รวมค่า 0 นั่นคือการปฏิเสธ

$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$ และยอมรับ $H_a: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

2. ถ้า $n_1 = n_2 = n$, $S_p^2 = (S_1^2 + S_2^2)/2 = (45^2 + 43^2)/2 = 1937$

8.4 การอ้างอิง $\mu_1 - \mu_2$ กรณี $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

ต้องใช้ตัวสถิติ

$$T_v = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2}}$$ ซึ่งมีการแจกแจงแบบ t

แต่ต้องประมาณค่า v โดยวิธีของ Smith-Satterthwaite ดังนี้

$$v \approx \frac{(S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2)^2}{\sqrt{(S_1^2/n_1)^2/(n_1-1) + (S_2^2/n_2)^2/(n_2-1)}}$$, โดยให้ปัดเศษค่า v เป็นตัวเต็ม

__ตัวอย่างที่ 5__ ในการศึกษาพลังงานที่นกนางแอ่นใช้ในการเจริญเติบโตและสร้างรังโดยให้ ตัวแปรเชิงสุ่ม X คือจำนวนความต้องการใช้พลังงานเป็นกิโลแคลอรี่ของนก 1 ตัว เป็นกรัม/ชม. ได้ข้อมูลดังนี้

นกที่อยู่ระหว่างฟักไข่ : $n_1 = 57$, $\bar{X}_1 = .0167$ k-cal/g/ชม., $S_1 = .0042$

นกโตเต็มที่ก่อนผสมพันธุ์ : $n_2 = 12$, $\bar{X}_2 = .0144$ k-cal/g/ชม., $S_2 = .0024$

เนื่องจากผลการทดสอบ $F = S_1^2/S_2^2 = .0042^2/.0024^2 = 3.06$,

$f_{.025,(40,11)} = 3.06$ จึงสรุปว่า $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ จึงไม่สามารถใช้ pooled variance

$H_0: \mu_1 = \mu_2$, $H_a: \mu_1 > \mu_2$

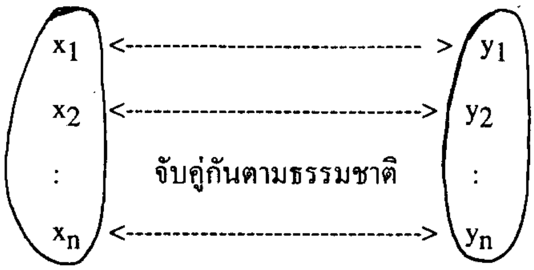
$T = (.0167 - .0144)/\sqrt{.0042^2/57 + .0024^2/12} = 2.59 \sim t_{27}$

$$\nu = \frac{(.0042^2/57 + .0024^2/12)^2}{(1/56)(.0042^2/57)^2 + (1/11)(.0024^2/12)^2} = 27.5 = 27$$

T = 2.59 อยู่ระหว่าง $t_{.01}$ และ $t_{.005}$ (ν = 27) หรือ .005 < p-value <.01 ซึ่งเล็กมาก จึงปฏิเสธ H_0 และสรุปว่า นกที่อยู่ระหว่างการฟักไข่ต้องการใช้พลังงานโดยเฉลี่ยสูงกว่า prebreeding

8.5 การอ้างอิง $\mu_1 - \mu_2$ โดยใช้ paired T

เมื่อตัวอย่าง 2 ชุด **ไม่เป็นอิสระกัน** โดยมีค่าสังเกตจากตัวอย่างที่ 1 จับคู่ หรือมีความสัมพันธ์กับค่าสังเกตในตัวอย่างที่ 2 ดังนี้



μ_x = ? $\mu_x - \mu_y$ = ? μ_y = ?

ข้อมูลจากตัวอย่าง 2 ชุดนี้ เรียกว่า ข้อมูลแบบจับคู่ ถือว่าเป็นตัวอย่างที่มีความสัมพันธ์กัน จึงใช้ pooled t ไม่ได้ และจะเปลี่ยนความสนใจจาก $\mu_x - \mu_y$ เป็น D = X - Y โดยมีค่าประมาณ คือ

$d_i = x_i - y_i,\ i = 1, 2, ..., n$, $\mu_x - \mu_y = E(X) - E(Y) = E(X - Y) = E(D) = \mu_D$

ค่าประมาณแบบจุดของ μ_D คือ $\bar{d} = \Sigma d_i/n$

และช่วงเชื่อมั่น $(1-\alpha)100\%$ ของ μ_D คือ $\bar{d} \pm t_{\alpha/2,\nu}\, S_d/\sqrt{n}$, $\nu = n - 1$

และ $S_d^2 = \Sigma(d_i - \bar{d})^2/(n-1)$ หรือ $[\Sigma d_i^2 - (\Sigma d_i)^2/n]/(n-1)$

ส่วนการทดสอบ $H_0: \mu_1 - \mu_2 = d_0$ เหมือนวิธีการปกติ โดยใช้ตัวสถิติทดสอบ

$$T = (\bar{d} - d_0)/(S_d/\sqrt{n}) \sim T_{(n-1)}$$

<u>ตัวอย่างที่ 6</u> การศึกษาผลการออกกำลังกายต่อการลดระดับ Cholesterol โดยเจาะเลือดวัดระดับ Cholesterol ของผู้ทดลองทั้ง 11 คน ก่อนและหลังเข้าโปรแกรมทดลอง คือ ให้ผู้ทดลองออกกำลังโดยการวิ่งแบบ jogging ทุกๆ วัน ดังนั้น ค่า Cholesterol 2 ครั้ง จึงมาจาก คนๆ เดียวกัน จึงมีความสัมพันธ์กัน จึงได้ข้อมูลลักษณะจับคู่ จำนวน n = 11 คู่ เมื่อข้อมูลสองชุดนี้ไม่เป็นอิสระกัน จึงต้องสร้างตัวแปรเชิงสุ่มใหม่ คือ

$D_i = X_i - Y_i, i = 1, 2, ..., 11$

คน	x ก่อนเข้าโปรแกรม MG/DL	y หลังเข้าโปรแกรม MG/DL	ผลต่าง d = x-y
1	182	198	-16
2	232	210	22
3	191	194	- 3
4	200	220	-20
5	148	138	10
6	249	220	29
7	276	219	59
8	213	161	52
9	241	210	31
10	480	313	167
11	262	226	36

$\Sigma d_i = 365$

$\Sigma d_i^2 = 38,189$

$\bar{d} = \Sigma d_i/n$

$= 365/11$

$= 33.18$

$$s_d^2 = \frac{\Sigma d_i^2 - (\Sigma d)^2/n}{n-1}$$

$$= \frac{38,189-(365)/11}{10}$$

$= 2607.76$

$S_d = \sqrt{2607.76}$

$= 51.07$

ช่วงเชื่อมั่น 90% ของ $\mu_D = \bar{d} \pm t_{.05,10}S_d/\sqrt{n}$

$= 33.18 \pm 1.812(51.07)/\sqrt{11}$

$= 33.18 \pm 21.90$

$= 5.28, 61.08$ mg./dl.

นั่นคือ กล่าวด้วยความเชื่อมั่น 90% ว่า การออกกำลังสามารถลดระดับ Cholesterol ได้โดยเฉลี่ยอย่างน้อยที่สุด 5.28 mg./dl.

__ตัวอย่างที่ 7__ การศึกษาอายุที่ฟันแท้งอก ระหว่างด้านซ้ายและด้านขวา โดยศึกษาฟันที่ เรียกว่า incisor จากชาย 17 คน โดยบันทึกอายุที่ incisor ด้านซ้ายและด้านขวางอก จับคู่กันแล้วหาผลต่าง (ซ้าย - ขวา) ได้ข้อมูลดังนี้

$n = 17, \bar{d} = 1.5$ ปี, $S_d = 4.7$

$H_0: \mu_D = 0, H_a: \mu_D \neq 0$

$T = (\bar{d} - 0)/(S_d/\sqrt{n}) = 1.5/(4.7/\sqrt{17}) = 1.31 \sim T_{16}$

จาก T_{16} จะได้ p-value > .20 ($t_{.10} = 1.337$)

ยังมีหลักฐานไม่พอที่จะสรุปว่าอายุการงอกด้านซ้ายและด้านขวาแตกต่างกัน

แบบฝึกหัดที่ 8

1. สุ่มตัวอย่าง $n = 20$ จากประชากรปกติ $\mu = 15$, $\sigma^2 = 16$ และสุ่มตัวอย่างขนาด $n = 25$ จากประชากรปกติ ที่มี $\mu = 10$, $\sigma^2 = 18$ จงหา

   $\mu(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$, $V(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$, $[(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - 5]/\sqrt{16/20 + 18/25}$

   เป็นตัวแปรแบบใด (Z, T, χ^2, F)

2. จงหา

   (1) $P(F_{24,15} \leq 2.29)$ (2) $P(F_{20,3} \leq 14.17)$

   (3) $P(F_{\alpha,20} \leq 2.03)$ (4) $f_{.05(15,20)}$ (5) $f_{.01(30,5)}$

   (6) $f_{.10(40,9)}$ (7) $f_{.90(24,15)}$ (8) $f_{.95(40,30)}$

   (9) $f_{.975(20,20)}$ (10) $f_{.99(20,30)}$

3. เปรียบเทียบความเร็วของนก 2 ชนิด

   Brown Pelican: $n_1=9$, $\bar{X}_1 = 26.05$ ไมล์/ช.ม., $S_1 = 6.34$ ไมล์/ช.ม.

   Oyster catcher: $n_2=12$, $\bar{X}_2 = 30.19$ ไมล์/ช.ม., $S_2 = 3.20$ ไมล์/ช.ม.

   จงทดสอบ $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$, $H_a: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, $\alpha = .05$

   จงทดสอบ $H_0: \mu_1 = \mu_2$, $H_a: \mu_1 < \mu_2$, หา p-value

4. เปรียบเทียบ Carbohydrate metabolism ของต้นถั่วในน้ำ และใน fructose solution (ทั้ง 2 กลุ่ม ใช้ 6^o C) ได้ข้อมูลดังนี้

   ปลูกในน้ำ : $n_1 = 16$, $\bar{X}_1 = 9.48$ mm/120 h, $S_1 = 53$

   ปลูกใน fructose : $n_2 = 25$, $\bar{X}_2 = 9.46$ mm/120 h, $S_2 = 25$

   จะสรุปว่า $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ ได้หรือไม่ จงหา p-value

5. จงหา S_p^2

   ก. $n_1 = 10$, $n_2 = 14$, $S_1^2 = 42$, $S_2^2 = 37$

   ข. $n_1 = 20$, $n_2 = 20$, $S_1^2 = 28$, $S_2^2 = 30$ (ห้ามใช้เครื่องคิดเลข)

   ค. $n_1 = 10$, $n_2 = 50$, $S_1^2 = 20$, $S_2^2 = 40$

(เหตุใด S_p^2 จึงใกล้เคียง $S_2^2 > S_1^2$)

6. เชื่อว่าชายและหญิงมีผลตอบสนองต่อการออกกำลังไม่เหมือนกัน จึงทดลองให้ทั้ง 2 กลุ่มเข้าโปรแกรมอออกกำลังในห้องที่มีอากาศร้อนมาก และให้กินน้ำบ่อยที่สุด ตัวแปรที่สนใจคือเปอร์เซนต์ของน้ำหนักที่หายไป มีดังนี้

   ชาย : 2.9 3.5 3.9 3.8 3.6 3.7 3.8 4.0 3.6 3.7

   หญิง : 3.0 2.5 3.7 3.3 3.8 4.1 3.6 4.0

   จงประมาณผลต่างของเปอร์เซนต์น้ำหนักที่หายระหว่าง 2 กลุ่ม และทดสอบ

   $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$, $H_a: \sigma_1^2 < \sigma_2^2$, $\alpha = .05$

7. จากข้อ 6. ถ้าสรุปว่า $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ จงสร้างช่วงเชื่อมั่น 95% ของ $(\mu_1 - \mu_2)$ และอธิบายว่าสอดคล้องกับ $H_0: \mu_1 = \mu_2$, $H_a: \mu_1 \neq \mu_2$ อย่างไร $\alpha = .05$

8. ทดลองยา 2 ชนิดกับหนูผ่าตัดเปลี่ยนหัวใจ 2 กลุ่ม โดย X คือ จำนวนวันที่มีอายุรอด

   $n_1 = 9$, $\bar{X}_1 = 16$ วัน, $S_1 = 10.1$ วัน

   $n_2 = 9$, $\bar{X}_2 = 15$ วัน, $S_2 = 10$ วัน

   จงทดสอบ $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$, $H_a: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, ถ้า $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ จงสร้างช่วงเชื่อมั่น 90% ของผลต่างอายุเฉลี่ย และอธิบายความหมาย และทดสอบ

   $H_0: \mu_1 = \mu_2$, $H_a: \mu_1 \neq \mu_2$ (หา p-value)

9. Strontium 90 เป็นรังสีจากการทดลองนิวเคลียร์ ปศุสัตว์จะได้รับรังสีนี้จากหญ้าในบริเวณรัศมีของรังสีดังกล่าว ได้มีการศึกษาเปรียบเทียบรังสีดังกล่าวในกระดูกของเด็กและผู้ใหญ่ ได้ข้อมูลดังนี้

   เด็ก : $n_1 = 121$, $\bar{X}_1 = 2.6$ picocuries/กรัม, $S_1 = 1.2$

   ผู้ใหญ่ : $n_2 = 61$, $\bar{X}_2 = 0.4$ picocuries/กรัม, $S_2 = .11$

   จงทดสอบ $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$, $H_a: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, จะสรุปว่าเด็กได้รับรังสีดังกล่าวสูงกว่าผู้ใหญ่ได้หรือไม่ จงหา p-value

10. เปรียบเทียบน้ำหนักไข่ของเต่า จาก 2 แห่ง

   Grand-Terre : $n_1 = 31$, $\bar{X}_1 = 64.0$ กรัม, $S_1 = 6.5$ กรัม

   เกาะ Malabar (อยู่ในมหาสมุทรอินเดีย) : $n_2 = 148$, $\bar{X}_2 = 82.7$ กรัม, $S_2 = 3.6$ กรัม

จะสรุปได้หรือไม่ว่าน้ำหนักไข่โดยเฉลี่ยจาก Malabar สูงกว่า

11. จำนวนไตรกลีเซอไรด์ ต่อ เลือด 100 ml. ก่อนและหลังการออกกำลัง ของ 11 คน

คน	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
ก่อน	68	77	94	73	37	131	77	24	99	629	116
หลัง	95	90	86	58	47	121	136	65	131	630	104

จงสร้างช่วงเชื่อมั่น 90% ของค่าเปลี่ยนแปลง ระดับไตรกลีเซอไรด์ ก่อนและหลังมีความแตกต่างกันหรือไม่ จะสรุปว่า $\mu_{\text{ก่อน}} < \mu_{\text{หลัง}}$ ได้หรือไม่ จงหา p-value

12. ให้คนไข้เบาหวานใช้เครื่องมือวัดระดับน้ำตาลในเลือด เรียกว่า home meter โดยทดลองกับคนไข้เบาหวาน 36 คน เป็นเวลา 7 สัปดาห์ พบว่าค่าเฉลี่ยของผลต่างของน้ำตาล (ก่อน - หลัง) ใช้เครื่องมือ = 2.78 mmol/ลิตร, $S_d = 6.05$ จะสรุปได้ไหมว่า เครื่องมือนี้ช่วยลดระดับน้ำตาลในเลือดสำหรับผู้เป็นเบาหวาน

เฉลยแบบฝึกหัดที่ 8

1. $\mu(\bar{X}_1-\bar{X}_2) = \mu_1 - \mu_2 = 15 - 10 = 5$, $V(\bar{X}_1-\bar{X}_2) = 16/20 + 28/25 = 1.52$, มีการแจกแจงแบบ $N(0, 1)$ คือ Z

2. (1) .95 (2) .975 (3) .99 (4) 2.20 (5) 9.38
   (6) 2.23 (7) 1/1.78 = .56 (8) 1/1.74 = .57
   (9) 1/2.46 = .41 (10) 1/2.78 = .36

3. $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$, $H_a : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, $\alpha = .05$, $F = 6.34^2/3.20^2 = 3.92$

   CR : $F < f_{.975(8,11)} = .23$ หรือ $F > f_{.05(8,11)} = 3.66$ แต่ 3.92 อยู่ในเขตวิกฤต จึงสรุปว่า $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

   $H_0 : \mu_1 = \mu_2$, $H_a : \mu_1 \neq \mu_2$

   $T = (26.05 - 30.19)/\sqrt{(6.34)^2/9 + (3.20)^2/12} = -4.14/2.307$
   $= -1.795$

   ต้องประมาณค่า ν ของ t ได้ $\nu = 28.297/2.5595 = 11.05 = 11$ df.

   $t_{11,.025} = 2.201$, $t_{11,.05} = 1.796$ ดังนั้น p-value $\approx .05$ จึงปฏิเสธ H_0 และสรุปว่า $\mu_2 < \mu_1$

4. $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$, $H_a : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$, $F = 53^2/25^2 = 4.49$

   $n_1 = 16$, $n_2 = 25$, $f_{.05(15,24)} = 2.11$, $f_{.025(15,24)} = 2.44$, $f_{.01(15,24)} = 2.89$

   p-value < .01 จึงสรุปว่า $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$

5. ก. $S_p^2 = 9(42) + 13(37)/(10 + 14 - 2) = 859/22 = 39.045$

   ข. $S_p^2 = (28 + 30)/2 = 29$ (เพราะว่า $n_1 = n_2 = n$)

   ค. $S_p^2 = 9(20) + 49(40)/(10 + 50 - 2) = 2140/58 = 36.9$ ซึ่งมีค่าใกล้เคียง S_2^2 เพราะเหตุว่า $n_1 > n_2$ ถึง 5 เท่า

6. $n_1 = 10$, $\Sigma X_1 = 36.5$, $\bar{X}_1 = 3.65$, $\Sigma X_1^2 = 134.05$, $S_1^2 = .825/9 = .09167$, $n_2 = 8$, $\Sigma X_2 = 28$, $\bar{X}_2 = 3.50$, $\Sigma X_2^2 = 100.04$, $S_2^2 = 2.04/7 = .2914$, $\widehat{\mu_1 - \mu_2} = (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = 3.65 - 3.50 = 0.15$

$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$, $H_a : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$, $f_{.95(9,7)} = 1/f_{.05(7,9)} = 1/329 = .304$,

CR : $F < f_{.95(9,7)} = .304$, $F = .09167/.2914 = .3145$ ซึ่งไม่อยู่ในเขตวิกฤต จึงสรุปว่า $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

7. 95% ช่วงเชื่อมั่นของ $(\mu_1 - \mu_2)$ $= (3.65 - 3.50) \pm (20.12)\sqrt{.1791(1/10 + 1/8)}$

$= .15 \pm (2.12)(.20074)$

$= .15 \pm .4255 = -.2755, .5755$

$S_p^2 = 9(.09107)+7(.2914)/16$
$= .2865/16 = .1791$
$t_{16,.025} = 2.12$

เครื่องหมายของขีดจำกัดบนล่าง ไม่เหมือนกันแสดงว่ารวมค่า 0 ไว้ด้วย นั่นคือยอมรับ H_0 และสรุปว่าเปอร์เซนต์น้ำหนักที่หายไปของ 2 กลุ่ม ไม่ต่างกัน

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$, $H_a : \mu_1 \neq \mu_2$, CR : $|T| > t_{.025,16} = 2.12$

$T = .15/.20074 = .747$ ไม่อยู่ในเขตวิกฤต จึงสรุปว่า $\mu_1 - \mu_2$

8. $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$, $H_a : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, $f_{.025(8.8)} = 4.43$

$F = 10.1^2/10^2 = 1.02$ ไม่อยู่ในเขตวิกฤต จึงสรุปว่า $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ จึงใช้ pooled T, $n_1 = n_2 = 9$,

$S_p^2 = (10.1^2 + 10^2)/2 = 101.005$

$t_{.05,16} = 1.746$, ช่วงเชื่อมั่น 90% ของ $(\mu_1 - \mu_2)$ คือ $(16 - 15) \pm 1.746\sqrt{101.005(1/9 + 1/9)}$

$= 1 \pm 8.27 = -7.27, 9.27$ เนื่องจากขีดจำกัดบน-ล่างมีเครื่องหมายต่างกัน แสดงว่ารวม 0 ไว้ด้วย จึงสรุปว่า $\mu_1 = \mu_2$

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$, $H_a : \mu_1 \neq \mu_2$, $T = (16 - 15)/\sqrt{101.005(1/9 + 1/9)} = 1/4.74 = 0.21$,

$t_{.40,16} = .258$, p-value = .40 สรุปว่า ยังมีหลักฐานไม่พอที่จะสรุปว่าผลการรักษาต่างกัน

9. $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$, $H_a : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, $n_1 = 121$, $n_2 = 61$

$f_{.01(120,60)} = 1.73$, $f_{.99(120,60)} = 1/f_{.01(60,120)} = 1/1.66 = .60$

$F = 1.2^2/.11^2 = 1.44/.0121 \sim 119$ ปฏิเสธ H_0 และสรุปว่า $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, p-value < .01

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$, $H_a : \mu_1 > \mu_2$ เนื่องจาก $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ จึงใช้ pooled T ไม่ได้,

$T = (2.6 - 0.4)/\sqrt{1.44/121 + .0121/61} = 2.2/.10999 \sim 20$ ประมาณค่า $\nu = 133$, $t_{133} = t_{\infty} = Z$,

p-value <<< .0005 ปฏิเสธ H_0 และสรุปว่ารังสีดังกล่าวในกระดูกของเด็กสูงกว่าผู้ใหญ่

10. $n_1 = 31$, $n_2 = 148$, $F = 6.5^2/3.6^2 = 3.26$, $f_{.01(30,147)} = 1.70$

$F = 3.26$ อยู่ในเขตวิกฤต จึงสรุปว่า $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

$H_0: \mu_1 = \mu_2$, $H_a: \mu_1 < \mu_2$

$T = (64 - 82.7)/\sqrt{6.5^2/31 + 3.6^2/148} = -18.7/1.204 = -15.53$

p-value << .0005, ≈ 33, $t_{33} \approx t_{30,.0005} = 3.646$ สรุปได้ว่า $\mu_1 < \mu_2$

11. $H_0: \mu_1 = \mu_2$, $H_a: \mu_1 < \mu_2$, $\bar{d} = -12.545$, $S_d = 24.47$, $n = 11$, $S_{\bar{d}} = 24.47/\sqrt{11} = 7.378$,

$T = -12.545/7.378 = -1.70 \approx t_{10}$, $t_{.10(10)} = 1.372$, $t_{.05(10)} = 1.812$, $.05 < \text{p-value} < .10$

(one-sided test) สรุปว่า ค่าเฉลี่ยของไตรกลีเซอไรด์ก่อนออกกำลังน้อยกว่าหลังออกกำลัง

ช่วงเชื่อมั่น 90% ของ $\mu_D = -12.545 \pm (1.812)(7.378) = -12.55 \pm 13.37 = -25.92, .82$

ขีดจำกัดบน-ล่างมีเครื่องหมายต่างกัน จึงรวมค่า 0 ไว้ จึงสรุปว่า $\mu_D = 0$

(หมายเหตุ ข้อสรุปจากการทดสอบ และช่วงเชื่อมั่นต่างกัน เพราะการทดสอบเป็น one-sided test)

12. $n = 36$, $\bar{d} = 2.78$, $S_d = 6.05$, $S_{\bar{d}} = 6.05/\sqrt{36}$ 1.0083

$H_0: \mu_D = 0$, $H_a: \mu_D > 0$, $T = 2.78/1.0083 = 2.76$

$t_{.005(30)} = 2.75$, $t_{.005(40)} = 2.704$, $t_{.005(35)} = 2.704 \pm .023 = 2.727, 2.681$ ปฏิเสธ H_0 ด้วย

p-value < .005 เครื่องมือช่วยลดระดับน้ำตาลในเลือด