บทที่ 2
ความน่าจะเป็น

2.1 Axioms

Axioms คือคำกล่าวซึ่งเป็นที่ยอมรับว่าเป็นความจริง จึงไม่ต้องการข้อพิสูจน์ ทฤษฎีความน่าจะเป็น มี Axioms 3 ข้อ ดังนี้

1. ให้ S คือ Sample space ของงานทดลองอันหนึ่ง ดังนั้น $P(S) = 1$
2. $P(A) \geq 0$ สำหรับทุกๆ เหตุการณ์ A
3. ถ้า $A_1, A_2, A_3, \ldots$ คือ อนุกรมของเหตุการณ์ที่ไม่มีผลร่วมกัน (mutually exclusive) ดังนั้น $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots$

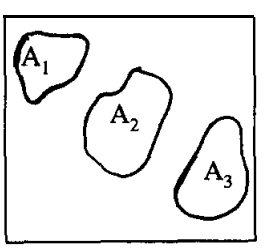
นิยาม 2.1 เหตุการณ์ที่ไม่มีผลร่วมกัน หรือ mutually exclusive events

เหตุการณ์คู่หนึ่ง เช่น A_1 และ A_2 จะเป็นเหตุการณ์ที่ไม่มีผลร่วมกัน ถ้า $A_1 \cap A_2 = \phi$ ดังนั้น เหตุการณ์ $A_1, A_2, A_3, \ldots$ จะไม่มีผลร่วมกัน เมื่อ $A_i \cap A_j = \phi$ สำหรับทุกค่าของ $i \neq j$

ข้อสังเกต นิยาม 2.1 อยู่ในรูปเชิงคณิตศาสตร์ สำหรับทฤษฎีของเซ็ท จะเรียกเหตุการณ์ดังกล่าวว่า disjoint ซึ่งหมายความว่า ไม่มี sample points ที่เกิดร่วมกัน ดังรูป 2.1 **หรือหมายถึงเหตุการณ์ทั้งหลายที่ไม่สามารถเกิดขึ้นได้พร้อมๆ กันในเวลาเดียวกัน** เช่น

A_1 : คนไข้ฟื้นไข้หลังการผ่าตัด

A_2 : คนไข้ตายบนเตียงผ่าตัด



รูป 2.1 แสดง mutually exclusive events

จะเห็นว่า A_1 และ A_2 จะเกิดขึ้นพร้อมกันไม่ได้ จะเกิดเพียงอันเดียว และการเกิดของเหตุการณ์หนึ่ง จะขจัด หรือปิดกั้น การเกิดของอีกเหตุการณ์

ทฤษฎี 2.1 $P(\phi) = 0$

ทฤษฎี 2.2 ให้ $A_1, A_2, ..., A_n$ เป็นเหตุการณ์ที่ไม่มีผลร่วมกัน ดังนั้น

$$P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n)$$

ตัวอย่าง ถ้าประชากรกลุ่มหนึ่ง มีการแจกแจงของกลุ่มเลือด ดังนี้

A = 41% B = 9% AB = 4% O = 46%

ถ้าคนไข้ได้รับอุบัติเหตุรถชน ถูกส่งเข้าห้องฉุกเฉิน จงหาความน่าจะเป็นที่เขาจะมีเลือดกลุ่ม A, B, หรือ AB

S = A, B, AB, O

กลุ่มเลือดทั้ง 4 กลุ่ม เป็น mutually exclusive เพราะบุคคลจะมีเลือดได้เพียงกลุ่มเดียวเท่านั้น ดังนั้น

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$$

$$= .41 + .09 + .04 = .54$$

นั่นคือ มีโอกาส 54% ที่คนไข้จะมีเลือดใน 3 กลุ่มดังกล่าว

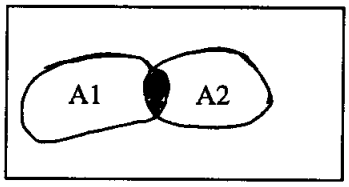
ทฤษฎี 2.3 $P(A') = 1 - P(A)$

ตัวอย่าง จากสถิติการรักษาโรคลูคีเมียในเด็ก พบว่า เด็กมีโอกาสหายจากโรคนี้ 30% ดังนั้น เด็กที่รักษาแล้วไม่หายจากโรคนี้ = 1 - .30 = .70 = 70%

2.2 กฎทั่วไปสำหรับการรวมเหตุการณ์

ถ้า A_1 และ A_2 เป็นเหตุการณ์ที่มีผลร่วมกัน ดังรูปที่ 2.2 จะต้องสร้าง กฎการรวมใหม่ ดังนี้

รูปที่ 2.2



ทฤษฎี 2.4 กฎการรวมสำหรับเหตุการณ์ทั่วๆ ไป ให้ A_1 และ A_2 แทนเหตุการณ์

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

ตัวอย่าง ในประชากรกลุ่มหนึ่ง 30% เป็นโรคอ้วน (A_1) 3% เป็นโรคเบาหวาน (A_2) 2% เป็นทั้งโรคอ้วนและเบาหวาน ($A_1 \cap A_2$) ถ้าสุ่มมา 1 คน จงหาความน่าจะเป็น ที่จะเป็นโรคอ้วนหรือเบาหวาน

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

$$= .30 + .03 - .02 = .31$$

ข้อสังเกต การรวมหรือ Union จะใช้คำว่า "หรือ" ส่วนเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นพร้อมกัน หรือ intersection ใช้คำว่า "และ" หรือ "แต่"

ตัวอย่าง ถ้า 18% ของนักศึกษาระดับมหาวิทยาลัยเคยมีความรู้สึกซึมเศร้าในช่วงเวลาหนึ่ง (A_1) 2% เคยคิดฆ่าตัวตาย (A_2) 19% เคยมีความรู้สึกซึมเศร้าหรืออยากฆ่าตัวตาย ถ้าสุ่มนักศึกษามา 1 คน (1) จงหาโอกาสที่เขาจะเคยรู้สึกซึมเศร้าและคิดฆ่าตัวตาย (2) จงหาโอกาสที่เขาจะรู้สึกซึมเศร้า แต่ไม่เคยคิดฆ่าตัวตาย

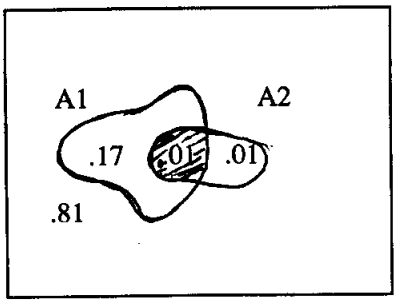
$$P(A_1) = .18,\ P(A_2) = .02,\ P(A_1 \cup A_2) = .19$$

ดังนั้น (1) $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cup A_2)$

$$= .18 + .02 - .19 = .01$$

(2) $P(A_1 \cap A_2') = P(A_1) - P(A_1 \cap A_2)$

$= .18 - .01 = .17$



รูป 2.3 แสดงการหาความน่าจะเป็นจากรูป Venn diagram

2.3 ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข

นิยาม 2.2 $P(A_2/A_1)$ หมายถึง ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขของ A_2 โดยกำหนด A_1 (A_1 ได้เกิดขึ้นแล้ว)

$$P(A_2/A_1) = P(A_1 \cap A_2)/P(A_1),\ P(A_1) \neq 0$$

นั่นคือ Conditional prob. = **P(ทั้ง 2 เหตุการณ์)/P(เหตุการณ์ที่กำหนดให้)**

ข้อสังเกต แม้ว่าสมการจะมี 2 เหตุการณ์ แต่หมายถึงความน่าจะเป็นของเหตุการณ์เพียงอันเดียว เหตุการณ์แรกเป็นเหตุการณ์ที่เรายังสงสัยว่าจะเกิดขึ้นหรือไม่

เครื่องหมาย / อ่านว่า "given that" หมายถึง **"มีเงื่อนไขว่า"** หรือ **"กำหนดให้"** โดยสมมติว่าเหตุการณ์หลังนั้นได้เกิดขึ้นเรียบร้อยแล้ว

<u>ตัวอย่าง</u> ในประชากรกลุ่มหนึ่ง 15% เป็นโรคความดันโลหิตสูง 75% ไม่รู้สึกว่าตนเอง เป็นโรคนี้ 6% ของผู้ที่เป็นโรคความดันโลหิตสูงโดยที่ตนเองไม่ทราบ ถ้าบุคคลหนึ่งอ้างว่าเขาไม่ได้เป็นโรคนี้ จงหาโอกาสที่แท้จริงแล้วเขาอาจเป็นโรคนี้ (โดยไม่รู้ตัว)

ให้ A_1 = คนไข้ไม่รู้สึกว่าตนเองเป็นโรคความดันโลหิตสูง, $P(A_1) = .75$

A_2 = คนไข้เป็นโรคความดันโลหิตสูง , $P(A_2) = .15$

$P(A_1 \cap A_2) = .06$ อยากทราบ

$P(A_2/A_1)$ = P(ทั้งคู่)/P(กำหนดให้) = $P(A_1 \cap A_2)/P(A_1)$ = .06/.75 = .08

ถ้าทราบว่าบุคคลที่สุ่มมาเป็นโรคความดันโลหิตสูง จงหาโอกาสที่บุคคลนั้นจะทราบว่าตน เองเป็นโรคดังกล่าว

$P(A_1'/A_2) = P(A_1' \cap A_2)/P(A_2) = .09/.15 = .60$

นั่นคือ ถ้าบุคคลใดแสดงความรู้สึกว่าเขาน่าจะเป็นโรคความดันโลหิตสูง จะมีโอกาส 60% ที่จะเป็นความรู้สึกที่ถูกต้อง

		ตนเอง A_1 : ไม่ทราบ	ตนเอง A_1' : ทราบ	
ความดัน	สูง : A_2	.06	.09	.15
	ปกติ : A_2'	.69	.16	.85

ตารางที่ 2.1 ตารางแสดงความน่าจะเป็นร่วมกัน จะช่วยให้สะดวกในการคำนวณ

2.4 การประมาณค่าความน่าจะเป็น

ตัวเลขสถิติที่ได้จากงานทดลอง เป็นเพียงค่าประมาณของความน่าจะเป็น ปกติจะประมาณจากความถี่สัมพัทธ์

<u>ตัวอย่าง</u> ตารางที่ 2.2 แสดงผลการตรวจหาโปรตีนแสดงการตั้งครรภ์โดยวิธี Starch gel electrophorasis และการหาเพศของทารกจากหญิง 300 คน

ตารางที่ 2.2 ผลการตรวจหาโปรตีนตั้งครรภ์

เพศของทารก	พบ (A_1)	ไม่พบ (A_1')	
ชาย (A_2)	51	96	147
หญิง (A_2')	78	75	153
	129	171	300

$P(A_2/A_1) = P(A_1 \cap A_2)/P(A_1)$

$= (51/300)/(129/300)$

$= 51/129 = .39$

$P(A_2/A_1') = P(A_1' \cap A_2)/P(A_1')$

$= (96/300)/(171/300)$

$= 96/171 = .56$

2.5 เหตุการณ์ที่เป็นอิสระกัน และกฎผลคูณ

นิยาม 2.3 ถ้า A_1 และ A_2 เป็นเหตุการณ์ที่เป็นอิสระกัน

ดังนั้น $P(A_2/A_1) = P(A_2), P(A_1) \neq 0$

นิยาม 2.4 A_1 และ A_2 เป็นเหตุการณ์ที่เป็นอิสระกัน ก็ต่อเมื่อ

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1).P(A_2)$$

หมายเหตุ นิยาม 2.3 ใช้เมื่อทราบแล้วว่า A_1 และ A_2 เป็นอิสระกัน นิยาม 2.4 ใช้ทดสอบความเป็นอิสระ และใช้หาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นพร้อมกัน ซึ่งมีลักษณะทางกายภาพที่เป็นอิสระกัน

ตัวอย่าง ถ้า 5.5% ของประชากรมีน้ำหนักสูงกว่าปกติ (A_1) 20% เป็นโรคความดันสูง (A_2) และ 60% มีน้ำหนักสูง **หรือ** ความดันสูง อยากทราบว่า การที่บุคคลหนึ่งมี น้ำหนักสูงกว่าปกติ จะเป็นเหตุการณ์ที่เป็นอิสระกับ การมีความดันโลหิตสูงหรือไม่

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cup A_2)$$

$$= .55 + .20 - .60 = .15$$

ดังนั้น $P(A_2/A_1) = P(A_1 \cap A_2)/P(A_1) = .15/.55 = 15/55 = .27$

แต่ $P(A_2/A_1) = .27 \neq .20 \neq P(A_2)$ เราจึงสรุปว่า เหตุการณ์คู่นี้ไม่เป็นอิสระกัน ซึ่งตามข้อเท็จจริงคือ บุคคลที่มีน้ำหนักสูงจะมีโอกาสที่จะมีความดันโลหิตสูง

ตัวอย่าง การศึกษาทางพันธุกรรม พบว่า 40% ของยีนทั้งหลายที่ใช้ตรวจ ค่า Rh ของเลือดจะเป็นแบบลบ ถ้าสุ่มคนมา 1 คน จงหาโอกาสที่เขาจะมีค่า Rh ของเลือดเป็นแบบลบ

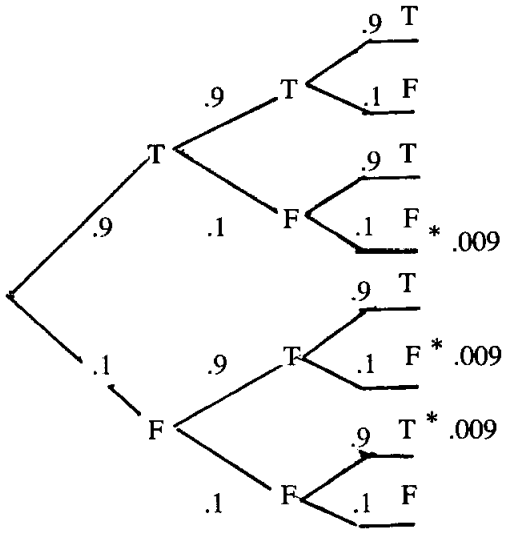
ค่า Rh ของเลือดจะเป็นลบก็ต่อเมื่อผู้นั้นมียีนเป็นลบทั้งคู่ เราสามารถอนุโลมได้ว่ายีนของพ่อและแม่เป็นอิสระกัน ดังนั้น $P(--) = (.40)(.40) = .16$

นิยาม 2.5 $A_1, A_2, ..., A_m$ จะเป็นอิสระกันเมื่อ

$$P(A_1 \cap A_2 \cap ... A_m) = P(A_1).P(A_2)... P(A_m)$$

ตัวอย่าง ถ้า 90% ของการวิเคราะห์โรค ถูกต้อง ถ้ามีคนไข้ 3 คน ที่ไม่เกี่ยวข้องกัน จงหาความน่าจะเป็นที่จะวิเคราะห์โรคผิดพลาด 2 คน

ให้ T = วิเคราะห์ถูกต้อง F = วิเคราะห์ผิดพลาด



รูป 2.4 แสดงการวิเคราะห์ คนไข้ 3 คน

P(ตรวจผิด 2 คน) = P(TFF) + P(FTF) + P(FFT)

P(TFF) = P(T).P(F).P(F) = (.9)(.1)(.1) = .009

ดังนั้น P(ตรวจผิด 2 คน) = 3(.009) = .027

นิยาม 2.6 กฎผลคูณ ใช้สำหรับเหตุการณ์ทั่วไป ซึ่ง**ไม่มี**คุณสมบัติความเป็นอิสระกัน

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1).P(A_2/A_1)$$

2.6 ทฤษฎีของเบยส์ หรือ Bayes' Theorem

เป็นทฤษฎีของท่านสาธุคุณ Thomas Bayes (1761) ซึ่งคือ การหาความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข หรือ P(A/B) โดยที่ข่าวสารที่มีอยู่ ไม่สามารถใช้นิยาม 2.2 ได้ทันที เนื่องจากไม่ทราบค่า P (A ∩ B) และ P(B) ในเบื้องต้น

ทฤษฎี 2.5 ให้ $A_1, A_2, ..., A_n$ เป็น กลุ่มเหตุการณ์ที่ไม่มีผลร่วมกันและรวมกันได้ S ส่วน B เป็นอีกเหตุการณ์หนึ่ง ใน S ดังนั้น สำหรับเหตุการณ์ A_j, j = 1, 2, ..., n

$$P(A_j/B) = \frac{P(A_j).P(B/A_j)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j).P(B/A_j)}$$

ข้อสังเกต การหา $P(A_j/B)$ จะต้องทราบ $P(A_j)$ และ $P(B/A_j)$, j = 1, 2, ..., n

ตัวอย่าง 10% ของผู้สูงอายุ มักเป็นโรคข้ออักเสบ ระบบการตรวจจะสามารถตรวจพบ 85% ของผู้เป็นโรคนี้ และมีอยู่ 4% ที่ผลการตรวจระบุว่าเป็น แต่แท้จริง ไม่ได้เป็น

ให้ D = Desease หมายถึงบุคคลเป็นโรคดังกล่าว

T = Test, T+ ผลการตรวจพบว่าเป็นโรคดังกล่าว

T- ผลการตรวจพบว่าไม่เป็นโรคดังกล่าว

$P(D) = .10$ $P(T+/D) = .85$ $P(T+/D') = .04$

$P(D') = .90$ $P(T-/D) = .15$ $P(T-/D') = .96$

อยากทราบ P(D/T+), P(D /T+), P(D/T-) และ P(D /T-)

หมายเหตุ จาก ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขที่กำหนดให้ จะมีความผิดพลาด 2 อัน คือ P(T-/D) และ $P(T+/D')$ ซึ่งในทางแพทย์จะเรียกว่า false negative rate และ false positive rate

นิยาม 2.7 false positive rate = α

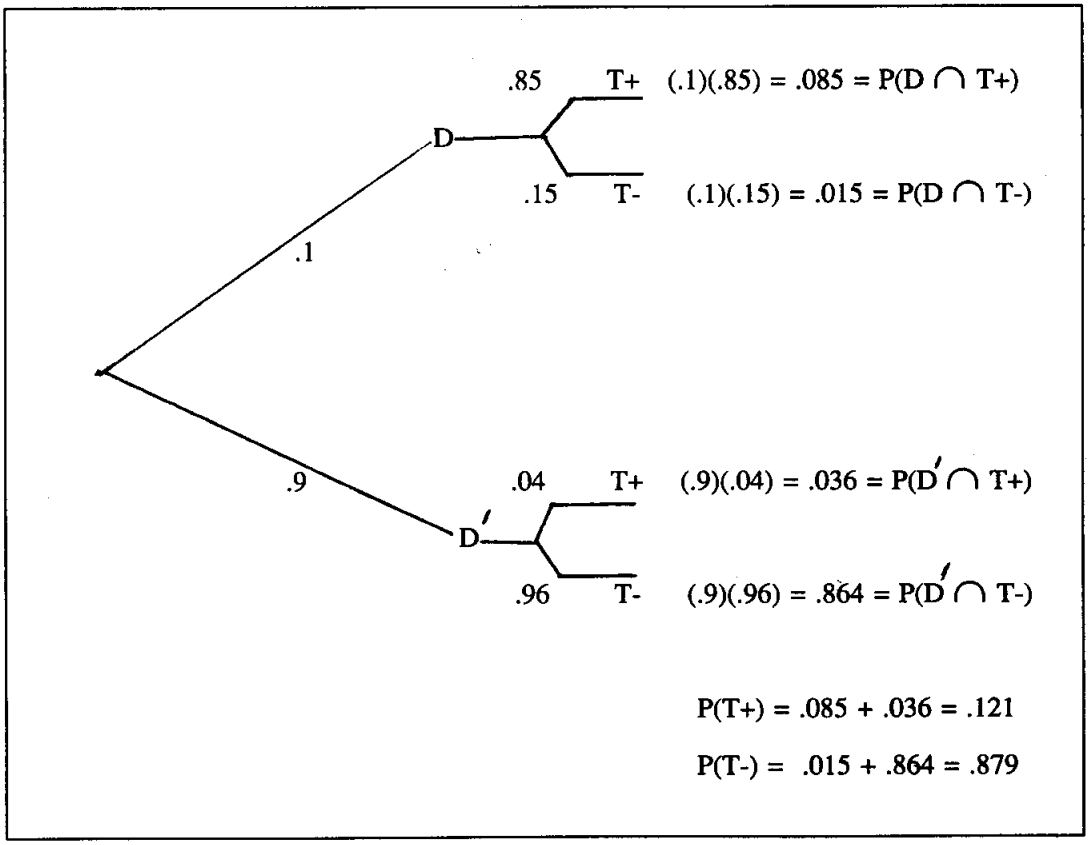
α = P(ผลการตรวจระบุว่าเป็นโรค/บุคคลนั้นไม่มีโรค)

นิยาม 2.8 false negative rate = β

β = P(ผลการตรวจสรุปว่าไม่มีโรค/บุคคลนั้นเป็นโรค)

ทั้ง α และ β เป็นความผิดพลาด จึงควรให้มีค่าต่ำสุด

จากตัวอย่าง α = P(T+/D) = .04, β = P(T-/D) = .15



ดังนั้น P(D/T+) = P(D ∩ T+)/P(T+) = .085/.121 = .70

P(D′/T+) = P(D′ ∩ T+)/P(T+) = .036/.121 = .30

P(D/T-) = P(D ∩ T-)/P(T-) = .015/.879 = .02

P(D′/T-) = P(D′ ∩ T-)/P(T-) = .864/.879 = .98

ข้อสังเกต 1) P(D/T+) + P(D′/T+) = .70 + .30 = P(S) = 1

2) P(D/T-) + P(D′/T-) = .02 + .98 = P(S) = 1

3) P(D) = .10 แต่ P(D/T+) = .70 แสดงว่าผลการตรวจค่อนข้างน่าเชื่อถือ

4) P(D) เรียกว่า prior probability, P(D/T+) เรียกว่า posterior probability

แบบฝึกหัดที่ 2

1. จงหาเหตุการณ์ที่เป็น mutually exclusive

   1.1 ก. ลูกชายเป็นโรค hemophilia

   ข. ลูกสาวเป็นพาหะของโรค hemophilia

   1.2 ก. เมล็ดถั่วที่เพาะไว้งอก 65%

   ข. เมล็ดถั่วที่เพาะไว้ไม่งอก 50%

   1.3 ก. ดำมีอาการ hypothermia (ความร้อนของร่างกายต่ำกว่าปกติ)

   ข. ดำมีไข้สูง 102° ฟ

   1.4 ก. ค่า pH ของผิวหน้าของดินตัวอย่าง = 7.0

   ข. ผิวหน้าของดินตัวอย่างมีปฏิกิริยาของด่าง

2. สตรีที่เป็นโรคเบาหวานเมื่อตั้งครรภ์ จะมีภาวะแทรกซ้อน ดังนี้

   25% เกิดภาวะโลหิตเป็นพิษ หรือ toxemia

   21% มีน้ำคร่ำมากกว่าปกติ หรือ ครรภ์มานน้ำ

   15% ตัวอ่อนถูกทำลาย เป็น fetal wastage

   6% เป็นโรคอื่นๆ

   สมมติว่า โรคต่างๆ ไม่เกิดขึ้นพร้อมกัน จงหาโอกาสที่สตรีที่เป็นโรคเบาหวานและตั้งครรภ์ จะมีภาวะการตั้งครรภ์โดยไม่มีภาวะแทรกซ้อน และโอกาสที่จะมีภาวะแทรกซ้อน

3. นักเคมีวิเคราะห์หาค่าสารตะกั่วและสารปรอทจากตัวอย่างน้ำบริเวณใกล้โรงงานอุตสาหกรรม พบว่า 38% มีสารตะกั่ว **หรือ** สารปรอทในระดับสูง 32% มีสารตะกั่วในระดับสูง 10% มีทั้ง 2 อย่างในระดับสูง จงหาความน่าจะเป็นของ (ก) พบสารปรอทในระดับสูง และ (ข) พบเฉพาะสารปรอทอย่างเดียวในระดับสูง

4. ในการจัดตั้งกองทุนสุขภาพ ได้รับการสนับสนุนจากรัฐบาล 62% นายจ้างและลูกจ้างร่วมกันสนับสนุน 70% รัฐบาล, นายจ้าง และลูกจ้างร่วมกันสนับสนุน 50% ถ้าสุ่มคนไข้มา 1 คน จงหา

   4.1 ความน่าจะเป็นที่จะได้รับการสงเคราะห์จากรัฐบาล **หรือ** กองทุนนายจ้าง-ลูกจ้างร่วมกัน

   4.2 ความน่าจะเป็นที่จะได้รับการสงเคราะห์โดยเฉพาะจากกองทุนนายจ้าง-ลูกจ้าง แต่ไม่ได้รับการสนับสนุนจากรัฐบาล

5. ผลการศึกษาโรคพิษสุรา พบว่า

40% มีบิดาติดสุรา 6% มีมารดาติดสุรา 42% มีทั้งบิดาหรือมารดาติดสุรา จงหาโอกาสที่

5.1 ทั้งบิดา-มารดาติดสุรา

5.2 มารดาติดสุราโดยทราบว่าบิดาติดสุรา

5.3 มารดาติดสุราแต่บิดาไม่ติดสุรา

5.4 มารดาติดสุราโดยทราบว่าบิดาไม่ติดสุรา

6. ผลการตรวจสารเคมีจากตัวอย่างน้ำบริเวณใกล้โรงงานอุตสาหกรรม พบว่า

5% พบสารเคมีและมลภาวะจากอุณหภูมิระดับสูง

40% พบเฉพาะสารเคมี

35% พบเฉพาะมลภาวะจากอุณหภูมิระดับสูง

ถ้าขยายผลการทดลอง สำหรับแม่น้ำอื่นๆ

1. จงหาโอกาสที่แม่น้ำที่มีอุณหภูมิระดับสูง จะมีสารเคมีด้วย
2. จงหาโอกาสที่แม่น้ำที่มีสารเคมี จะมีอุณหภูมิระดับสูง

7. กระต่ายพันธุ์ snowshoe ไม่ค่อยแข็งแรง พบว่าสาเหตุการตายมี 2 อย่าง คือ ภาวะน้ำตาลในเลือดต่ำ และภาวะลมชักเนื่องจากการหดตัวของกล้ามเนื้อ ประมาณว่ามีอยู่ 7% ที่ตายโดยมีทั้ง 2 โรคควบคู่กัน 40% ตายด้วยภาวะน้ำตาลในเลือดต่ำกว่าปกติ และ 25% ตายเนื่องจากลมชัก จงหา

7.1 เปอร์เซนต์ที่ตายด้วยโรคอื่นๆ นอกจาก 2 โรคนี้

7.2 ถ้ากระต่ายตัวหนึ่งมีภาวะน้ำตาลในเลือดต่ำ จงหาโอกาสที่จะตายโดยโรคลมชัก

8. วัคซีนทดสอบการตั้งครรภ์ ให้ผลการตรวจสอบดังนี้

		ผลตรวจ +	ผลตรวจ -	
เพศ	ชาย	51	96	147
	หญิง	78	75	153
		129	171	300

+ = ผลตรวจแสดงว่าตั้งครรภ์

8.1 จงหาโอกาสที่จะได้เพศหญิง ถ้าผลการตรวจเป็น +

8.2 จงหาโอกาสที่ผลการตรวจจะเป็น + ถ้าทารกในครรภ์เป็นเพศชาย

9. จงหาค่า α และ β จากรายงานผลการตรวจทางพยาธิวิทยา

ผลการตรวจทางพยาธิวิทยา

	เป็นมะเร็ง (positive)	เป็นเนื้องอกธรรมดา (negative)	
true positive	79	19	98
true negative	7	395	402
	86	414	

10. จงหาค่า α และ β จากผลการตรวจโรคเกี่ยวกับไตในคนไข้ความดันโลหิตสูง โดยใช้วิธีการตรวจแบบใหม่

ผลการตรวจโดยใช้ระบบใหม่	ภาวะของคนไข้ (Disease) เป็นโรคไต +	ไม่เป็น -
พบ +	44	23
ไม่พบ -	10	60

นิยาม 2.9 คุณสมบัติ **Specificity** คือ ความน่าจะเป็นที่ผลตรวจทางแพทย์สำหรับผู้ที่เป็น true negative ให้ผลตรวจเป็นลบ คุณสมบัติ **Sensitivity** หมายถึงความน่าจะเป็นที่ผลตรวจทางการแพทย์สำหรับผู้ที่เป็น true positive ให้ผลตรวจเป็นบวก ความน่าจะเป็นทั้ง 2 ชนิดนี้ ควรมีค่าสูง

specificity = $1 - \alpha$, sensitivity = $1 - \beta$

11. สาเหตุที่น้ำเสียเนื่องจากแบคทีเรียที่ย่อยสลายอินทรีย์วัตถุ ต้องใช้อ็อกซิเจนในการทำงาน ถ้ามีปริมาณอินทรีย์วัตถุมากเกินไป อาจมีปริมาณอ็อกซิเจนไม่เพียงพอ เป็นเหตุให้สิ่งมีชีวิตอื่นๆ เป็น

อันตราย ความต้องการใช้ อ็อกซิเจน เรียกว่า biological oxygen demand (BOD) พบว่า 35% ของบริเวณใกล้โรงงานอุตสาหกรรม จะมีค่า BOD สูง 10% มีความเป็นกรดในระดับสูง และ 4% มีทั้ง 2 อย่าง

11.1 เหตุการณ์คู่นี้เป็นอิสระกันหรือไม่

11.2 ถ้าดูคลองแห่งหนึ่งมีค่า BOD สูง จงหาโอกาสที่จะพบความเป็นกรดสูงด้วย

12. 50% ของประชากรในเมืองหนึ่งเป็นเพศชาย 68% ชอบดื่มสุราเป็นครั้งคราว โดยมีอยู่ 38.5% ที่เป็นเพศชาย ถ้าสุ่มมา 1 คน ได้เพศชาย จงหา

(12.1) โอกาสที่จะเป็นผู้ดื่มสุราเป็นครั้งคราว

(12.2) การดื่มสุราและเพศ เป็นอิสระกันหรือไม่

13. โอกาสของการติดโรคตับอักเสบจากการรับเลือด 1 หน่วย = .01 ถ้าคนไข้ได้ รับเลือด 2 หน่วย จงหาโอกาสที่เขาจะติดโรคตับอักเสบ

14. 70% ของผู้เป็นบาดทะยัก จะเสียชีวิต ถ้ามีผู้เป็นโรคนี้ 3 คน จงหาโอกาสที่จะมีผู้เสียชีวิตอย่างน้อย 1 คน

15. 67% ของเลือดขนาด 1 หน่วย ที่ได้รับบริจาคมาจากผู้บริจาคที่รับเงินตอบแทน

1.44% ของเลือดจากผู้บริจาคที่ได้รับเงินตอบแทนจะมีเชื้อตับอักเสบ

0.12% ของเลือดจากผู้บริจาคที่ไม่ได้รับเงินตอบแทนมีเชื้อตับอักเสบ

ถ้าคนไข้ได้รับเลือด 1 หน่วย จงหาโอกาสที่เขาจะได้รับเชื้อตับอักเสบ

16. ผลการตรวจหามะเร็งในมดลูก พบว่า อัตรา false-negative และ false-positive เท่ากัน คือ 5%

4% ของสตรีเป็นโรคมะเร็งในมดลูก

(16.1) ถ้าสุ่มสตรีมา 1 คน และผลการตรวจเป็น + จงหาโอกาสที่เธอจะเป็นมะเร็งในมดลูก

(16.2) ถ้าผลการตรวจเป็น - จงหาโอกาสที่เธอจะเป็นมะเร็งในมดลูก

17. คนไข้มะเร็งที่ได้รับการรักษาโดยยา 3 ชนิดร่วมกัน พบว่า 1 ใน 3 ของคนไข้ที่ยา 2 ชนิดไม่ออกฤทธิ์ จึงไม่มีผลในการรักษา (มี response กับยาชนิดเดียว) แต่ถ้าใช้เดี่ยวๆ ผลการรักษาของ A, B, C ในการทุเลาโรค จะเป็น 50%, 75% และ 60% ตามลำดับ ถ้าคนไข้คนหนึ่งได้รับยาทั้ง 3 ชนิดพร้อมกัน และพบว่ามีอาการดีขึ้น จงหาโอกาสที่เป็นผลการรักษาของ A, B, C ตามลำดับ

18. โรคความผิดปกติของกล้ามเนื้อชนิดหนึ่ง มักเกิดกับ เด็กชาย และไม่เป็นโรคติดต่อกับ เพศชายด้วยกัน แต่สามารถสืบทอดโดยหญิงเป็นพาหะ โดยไม่แสดงอาการของโรค ถ้าหญิงผู้หนึ่งมีมารดาซึ่งเป็นพาหะของโรคนี้ และมีบุตรชาย 3 คน โดยทุกคนไม่มีความผิดปกติ จงหาโอกาสที่หญิงผู้นี้จะเป็นพาหะด้วย

เฉลยแบบฝึกหัดที่ 2

1. 1.1 ไม่เป็น mutually exclusive เพราะ (ก) และ (ข) เกิดขึ้นพร้อมกันได้

   1.2 เป็น mutually exclusive เพราะ (ก) และ (ข) จะเกิดขึ้นเพียงอันเดียว

   1.3 เป็น, เพราะอาการ hypothermia จะมีไข้ต่ำ

   1.4 เป็น, ปฏิกิริยาของด่างจะเกิดเมื่อ pH สูงกว่า 7.0

2. S = โลหิตเป็นพิษ, ครรภ์มานน้ำ, ตัวอ่อนถูกทำลาย, อื่นๆ, ปกติ

   P(ปกติ) = 1 - P(แทรกซ้อน)

   P(แทรกซ้อน) = .25 + .21 + .15 + .06 = .67, P(ปกติ) = .33

3. A = สารตะกั่ว, B = สารปรอท, P(A U B) = .38, P(A) = .32,

   P(AB) = .10, $P(A')$ = 1 - .32 = .68,

   $P(A'B')$ = 1 - P(A U B) = 1 - .38 = .62

   $P(AB')$ = P(A) - P(AB) = .32 - .10 = .22

   $P(B')$ = $P(AB')$ + $P(A'B')$ = .22 + .62 = .84

   P(B) = 1 - $P(B')$ = 1 - .84 = .16

   $P(A'B)$ = P(B) = P(AB) = .16 - .10 = .06

   P(สารปรอทระดับสูง) = P(B) = .16,

   P(สารปรอทอย่างเดียว) = $P(A'B)$ = .06

ปรอท \ ตะกั่ว	A	A'	
B	.10	.06	.16
B'	.22	.62	.84
	.32	.68	

4. A = รัฐบาล, B = นายช้างและลูกช้างร่วมกัน

   P(A) = .62, P(B) = .70, P(AB) = .50

   4.1 P(A U B) = .62 + .70 - .50 = .82

   4.2 $P(A'B)$ = .70 - .50 = .20

	A	A'
B	.50	.20
B'	.12	.18
	.62	.38

5. A = บิดาติดสุรา, B = มารดาติดสุรา

P(A) = .40, P(B) = .06, P(A U B) = .42

$P(\acute{A}\acute{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - .42 = .58$

5.1 P(AB) = .04

5.2 P(B/A) = P(AB)/P(A) = .04/.40

= .10

5.3 $P(\acute{A}B) = .02$

5.4 $P(B/\acute{A}) = P(\acute{A}B)/P(\acute{A}) = .02/.60 = .0333$

มารดา	บิดา A	บิดา A′	
B	.04	.02	.06
B′	.36	.58	.94
	.40	.60	

6. A = สารเคมี, B = อุณหภูมิสูงเกินปกติ

P(AB) = .05, $P(A\acute{B}) = .40$, P(AB) = .35

6.1 P(A/B) = P(AB)/P(B)

= .05/.40 = .125

6.2 P(B/A) = P(AB)/P(A)

= .05/.45

= .1111

อุณหภูมิ	สารเคมี A	สารเคมี A′	
B	.05	.35	.40
B′	.40	.20	.60
	.45	.55	

7. A = น้ำตาลในเลือดต่ำ, B = โรคลมชัก

P(AB) = .07, P(A) = .40, P(B) = .25

7.1 $P(\acute{A}\acute{B}) = .42$

7.2 P(B/A) = P(AB)/P(A)

= .07/.40 = .175

	A	A′	
B	.07	.18	.25
B′	.33	.42	.75
	.40	.60	

8. 8.1 P(หญิง/+) = 78/129 = .605

8.2 P(+/ชาย) = 51/147 = .347

9. α = P(ผลตรวจ +/คนไข้ -)

= P(ผลตรวจ +, คนไข้ -)/P(คนไข้ -)

= (7/500)/(402/500)

= 7/402 = .0174

β = P(ผลตรวจ -/คนไข้ +)

= P(ผลตรวจ -, คนไข้ +)/P(คนไข้ +)

= (19/500)/(98/500) = 19/98

= .1939

		ผลตรวจ +	ผลตรวจ -	
คนไข้	+	79	19	98
	-	7	395	402
		88	414	

เนื่องจาก β ให้ความเสียหายมากกว่า α จึงควรลดลงให้เล็กกว่านี้

10. P(false-positive) = α

= P(ผลตรวจ +/คนไข้ -)

= 23/83 = 2.8

P(false-positive) = β

= P(ผลตรวจ -, คนไข้ +)

= 10/54 = .18

specificity = P(ผลตรวจ -/คนไข้ -)

= 1 - α = .72

sensitivity = P(ผลตรวจ +/คนไข้ +) = 1 - β = .82

		ผลตรวจ +	ผลตรวจ -	
คนไข้	+	44	10	54
	-	23	60	83
		67	70	137

11. A = BOD สูง, B = ความเป็นกรดสูง

P(A) = .35, P(B) = .10, P(AB) = .04

(11.1) ถ้า A และ B เป็นอิสระกัน

P(AB) = P(A).P(B), P(AB) = .04

แต่ P(A).P(B) = (.35)(.10)

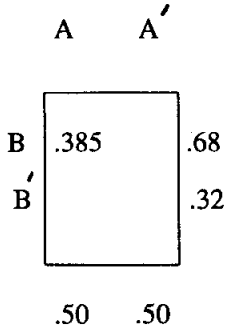
= .035 ≠ P(AB)

นั่นคือ A และ B ไม่เป็นอิสระกัน

		BOD A	BOD A′	
กรด	B	.04	.06	.10
	B′	.31	.59	.90
		.35	.65	

(11.2) P(B/A) = .04/.35 = .11

12. A = เพศชาย, B = ดื่มสุรา



$P(A) = .50, P(B) = .68, P(AB) = .385$

(12.1) $P(B/A) = .385/.50 = .77$

(12.2) $P(AB) = .385$

$P(A).P(B) = (.50)(.68) = .34$

$\neq P(AB)$

นั่นคือ A และ B ไม่เป็นอิสระกัน

หรือดูจาก $P(B/A) = .77 \neq P(B) = .68$

13. A_1 = ติดเชื้อจากเลือดหน่วยที่ 1, A_2 = ติดเชื้อจากเลือดหน่วยที่ 2

$P(A_1) = .01, P(A_1') = .99$

$P(A_2) = .01, P(A_2') = .99$

$P(\text{ติดเชื้อ}) = P(A_1A_2') + P(A_1'A_2) + P(A_1A_2)$

$= (.01)(.99) + (.99)(.01) + (.01)(.01) = .0199$

หรือ $P(\text{ติดเชื้อ}) = 1 - P(\text{ไม่ติดเชื้อ}), P(\text{ไม่ติดเชื้อ}) = (.99)(.99) = .9801$

$= 1 - .9801 = .0199$

14. D = ตาย, $P(D) = .70, P(D') = .30$

P(ตายอย่างน้อย 1 คน) = 1 - P(ตาย 0 คน)

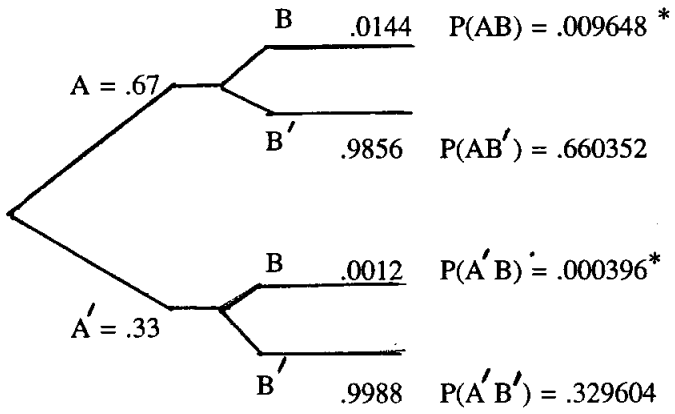
$= 1 - P(D'D'D')$

$= 1 - (.3)(.3)(.3)$

$= 1 - .027 = .973$

15. A = ได้รับเงินตอบแทน, B = เป็นโรคตับอักเสบ

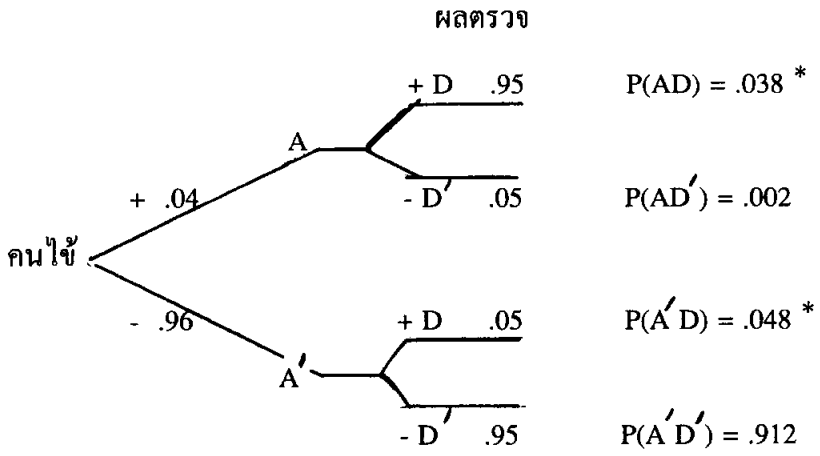
$P(A) = .67, P(B/A) = .0144, P(B/A') = .0012$



$P(B) = P(AB) + P(A'B) = .010044$

16. A = มะเร็งในมดลูก, D = ผลตรวจระบุว่าเป็นมะเร็งในมดลูก

$P(A) = .04$, $P(A') = .96$ $P(D'/A) = .05$, $P(D/A') = .05$



$P(D) = .038 + .048 = .086$, $P(D') = 1 - .086 = .914$

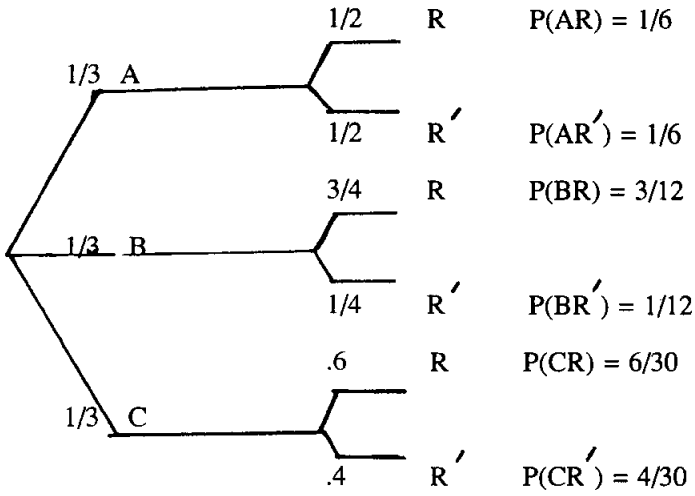
(16.1) $P(A/D) = P(AD)/P(D) = .038/.086 = .44$

จึงควรรีบไปรักษา

(16.2) $P(A/D') = P(AD')/P(D') = .002/.914 = .002188$

จึงสบายใจได้

17.



$P(R) = 1/6 + 3/12 = 4/30 = 37/60$

$P(A/R) = (1/6)/(37/60) = 10/37$

$P(B/R) = (3/12)/(37/60) = 15/37$

$P(C/R) = (6/30)/(37/60) = 12/37$

18. C = มารดาเป็นพาหะ, N = บุตรชายปกติ

$P(C) = 1/2$, $P(N/C) = 1/2$, $P(N/C') = 1$

$P(NNN) = P(CNNN) + P(C'NNN)$

$= (1/2)(1/2)^3 + (1/2)(1)^3$

$= 1/16 + 1/2$

$= 9/16$

$P(C/NNN) = (1/16)/(9/16)$

$= 1/9$