บทที่ 11
แบบทดสอบ Chi-square (χ^2)

11.1 การทดสอบการแจกแจงของข้อมูล (χ^2-Goodness of fit test)

แบบทดสอบนี้ ใช้กับข้อมูลแบบนามบัญญัติ โดยนักสถิติ ชื่อ Karl Pearson (1900) เป็นผู้ริเริ่มใช้ตัวสถิตินี้ เรียกว่า ตัวสถิติไคสแควร์ (χ^2) หรือ chi-square statistic (χ เป็นอักษรกรีก อ่านว่า ไค) สำหรับข้อมูลที่มีสเกลการวัดละเอียดขึ้น เช่น แบบเรียงอันดับ นิยมใช้แบบทดสอบ Kolmogorov-Smirnov goodness of fit test

เมื่อต้องการทราบว่าข้อมูลจากตัวอย่างมาจากประชากร หรือ สอดคล้องกับ ประชากรทางทฤษฎี (หรือประชากรเป้าหมาย) เช่น นักพันธุศาสตร์ ผสมข้ามพันธุ์พืช 2 ตระกูล ซึ่งมีดอกสีเหลืองและเขียว ซึ่งตามทฤษฎีพันธุกรรม จะต้องได้ลูกผสมในอัตรา 3:1 ถ้ามีลูกผสม 100 ต้น ได้สีเหลือง 84 ต้น สีเขียว 16 ต้น (ซึ่งไม่ใช่อัตรา 75:25) จะสามารถอนุมานได้หรือไม่ว่า เป็นไปตามทฤษฎี 3:1 จะต้องใช้แบบทดสอบ χ^2 ซึ่ง ใช้ตัวสถิติทดสอบ

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k}(f_i - F_i)^2/F_i \sim \chi^2_{(k-1)}$$

f_i = ความถี่ของประเภท i ที่พบจากตัวอย่างขนาด n

F_i = ความถี่คาดหมายของประเภท i, $F_i = n\pi_i$ ได้จาก H_0

k = จำนวนประเภทที่จำแนกได้จากตัวอย่างขนาด n

ตัวอย่างที่ 1

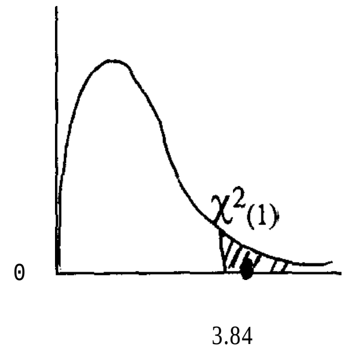
1. H_0 : ตัวอย่างที่ได้มาจากประชากร เหลือง:เขียว = 3:1 (เป็นไปตามหลักพันธุศาสตร์)
2. H_a : ตัวอย่างที่ได้มาจากประชากร เหลือง:เขียว $\neq$ 3:1

3. a = .05

4. จะปฏิเสธ H_0 เมื่อ $\chi^2 > \chi^2_{(k-1),} = \chi^2_{(2-1),.05} = 3.84$

5.

	สีเหลือง	สีเขียว	
f_i	84	16	n= 100
F_i	(75)	(25)	



$F_i = n\pi_i$; F1 = 100(3/4) = 75, F_2 = 100(1/4) = 25

$\chi^2 = (84-75)^2/75 + (16-25)^2/25 = 4.32$

6) ปฏิเสธ H_0 เพราะ 4.32 > 3.84 สรุปว่า ผลการทดลองแสดงว่าอัตราส่วนเหลือง:เขียว ไม่ใช่ 3:1 ด้วยความเชื่อมั่น 95%

ข้อสังเกต (1) $\chi^2_{.025,1} = 5.024$ ดังนั้น .025 < p-value < .05 (2) การที่ปฏิเสธ H_0 อาจทำความผิดพลาดประเภทที่ 1 (3) การแสดงผลค่าสถิติที่มีนัยสำคัญ อาจใช้วิธี ใส่เครื่องหมาย * เช่น 4.32* หมายความว่า ปฏิเสธ H_0 ที่ $\alpha = .05$ สมมติคำนวณได้ 8.2** เครื่องหมาย ** แสดงว่าสามารถปฏิเสธ H_0 ที่ $\alpha = .01$

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> ในการผสม ถั่วสีเขียว : เหลือง และลักษณะผิวเรียบ : ขรุขระ ตามกฎของเมนเดล จะต้องได้ลูกผสมในอัตราส่วน 9:3:3:1 ถ้าผลการทดลอง 250 ต้น มีลักษณะ เหลือง-ผิวเรียบ, เหลือง-ผิวขรุขระ, เขียว-ผิวเรียบ และ เขียว-ผิวขรุขระ จำนวน 152, 39, 53 และ 6 ต้น ตามลำดับ อยากทราบว่าผลการทดลองนี้สอดคล้องกับทฤษฎีของเมนเดลหรือไม่ ?

H_0 : อัตราส่วน 4 ประเภทคือ 9:3:3:1, H_a : อัตราส่วน 4 ประเภท $\neq$ 9:3:3:1

ประเภท	1	2	3	4	รวม
f_i	152	39	53	6	250
F_i	140.625	46.875	46.875	15.625	250
$\lvert f_i - F_i \rvert$	11.375	7.875	6.125	9.625	

χ^2 = 1 $1.375^2/140.625 + 7.875^2/46.875 + 6.125^2/46.875 + 9.625^2/15.625 = 8.972^*$

$\chi^2_{.025,3} = 9.348$, $\chi^2_{.05,3} = 7.815$

จึงปฏิเสธ H_0 ด้วย $.025 < \text{p-value} < .05$

11.2 การปรับค่าความต่อเนื่อง (Chi-square Correction for Continuity)

ตัวอย่างที่ 8 ลองพิจารณาตัวอย่างที่ (1) ซึ่งมี $f_1:f_2 = 84:16$ และ $F_1:F_2 = 75:25$ และได้ $\chi^2 = 4.32$

เราอาจได้ผลการทดลอง $f_1:f_2$ เป็น 83:17, 82:18, ..., ในขณะที่ $F_1:F_2$ คงเป็น 75:25 ลองคำนวณค่า χ^2 จะได้ดังนี้

ถ้า $f_1:f_2 = 83:17$, $\chi^2 = 3.413 \sim \chi^2_{(1)}$, ถ้า $f_1:f_2 = 82:18$, $\chi^2 = 2.613 \sim \chi^2_{(1)}$ และถ้า $f_1:f_2 = 81:19$, $\chi^2 = 1.920 \sim \chi^2_{(1)}$

จะเห็นว่า ค่า f_i เป็นตัวแปรที่เกิดจากการนับจึงเป็นตัวแปรแบบไม่ต่อเนื่อง (discrete) สำหรับค่าต่างๆ ของ f_i เมื่อเปลี่ยนเป็นค่า χ^2 จะได้ค่าแบบก้าวกระโดด คือมีเพียงบางค่า เช่นจาก 3.413 ถึง 2.613, 2.613 ถึง 1.920 ซึ่งไม่ถูกต้อง เพราะ χ^2 เป็นการแจกแจงแบบต่อเนื่อง แสดงว่า ค่า χ^2 ที่ได้เป็นเพียง**ค่าประมาณ**ของการแจกแจงที่แท้จริง แต่โชคดีที่ค่าประมาณนี้ใกล้เคียงกับค่าที่แท้จริงเมื่อ DF > 1 จึงถือหลักว่า ถ้า χ^2 มี DF > 1 ไม่ต้องปรับความต่อเนื่อง สำหรับ DF หรือ V = 1

Yates (1934) เสนอแนะให้ปรับความต่อเนื่อง จึงเรียกว่า Yates Correction for Continuity โดยใช้วิธีหัก 0.5 จากค่าเบียงเบนสัมบูรณ์ของ fi และ Fi ดังนั้น $\chi^2_C = (|f_i-F_i| - 0.5)^2/F_i$, $\chi^2_C \sim \chi^2_{(1)}$

จากตัวอย่างที่ 1 ควรปรับความต่อเนื่อง เพราะ v = 1

$$\chi^2_C = (|84-75| - 0.5)^2/75 + (|16-25| - 0.5)^2/25$$

$$= 8.5^2/75 + 8.5^2/25 == 3.853^*$$

$.025 < \text{p-value} < .05$

11.3 การแบ่งแยกค่า χ^2 (Subdividing **Chi-square** Analysis)

<u>ตัวอย่างที่ 4</u> จากตัวอย่างที่ 2 ผลวิเคราะห์ χ^2 สรุปว่าข้อมูลจากตัวอย่างไม่สนับสนุนอัตรา 9:3:3:1 ซึ่งเมื่อพิจารณาจากข้อมูลแล้วจะเห็นว่าลักษณะที่ 4 มี f_i = 6 ดังนั้น ลองตัด f_4 ให้เหลือเพียง 3 ลักษณะแรก จะได้สมมติฐาน ดังนี้

H_0 : อัตราส่วน f_1, f_2, f_3 มาจากประชากรที่มีอัตราส่วน = 9:3:3

H_a : อัตราส่วน f_1, f_2, f_3 มาจากประชากรที่มีอัตราส่วน = 9:3:3

ลักษณะ :	1	2	3	n
f_i :	152	39	53	244
F_i :	146.4	48.8	48.8	244

หมายเหตุ

$F_i = n\pi_i$ เช่น

$F_1 = (244)(9/15)$

$= 146.4$

$|f_i-F_i|$: 5.6 9.8 4.2 , $V = k-1 = 2$

$$\chi^2 = 5.6^2/146.4 + 9.8^2/48.8 + 4.2^2/48.8 = 2.543$$

$\chi^2_{2,.25} = 2.773$, $\chi^2_{2,.50} = 1.386$, $.25 < \text{p-value} < .50$

p-value > .05 จึงปฏิเสธ H_0 ไม่ได้ สรุปว่าอัตราส่วน f_1, f_2, f_3 เป็นไปตามอ้าง คือ 9:3:3

ตัวอย่างที่ 5 สำหรับ $f_4 = 6$ เราอาจต้องการวิเคราะห์ว่าลักษณะที่ 4 เมื่อเทียบกับลักษณะอื่นๆ อยู่ในอัตราส่วน 1:15 ? นั่นคือ

H_0 : f_4 : f อื่นๆ มาจากประชากรที่มีอัตราส่วน = 1:15

H_a : f_4 : f อื่นๆ มาจากประชากรที่มีอัตราส่วน $\neq$ 1:15

	เขียว-ผิวขรุขระ	อื่นๆ	n	
f_i :	6	244	250	
Fi :	(15.625)	(234.375)	250	
$\lvert f_i-F_i\rvert$:	9.625	9.625		, V = (k-l) = 1

(1) $\chi^2 = 9.625^2/15.625 + 9.625^2/234.375 = 6.324^*$, $.01 < \text{p-value} < .025$

(2) $\chi^2_C = (9.625-0.5)^2/15.625 + (9.625-0.5)^2/234.375 = 5.684^*$

(V = 1) $.01 < \text{p-value} < .025$

$\chi^2_{.005} = 7.879$, $\chi^2_{.01} = 6.63$, $\chi^2_{.025} = 5.024$, = 1

ข้อควรระวังในการคำนวณค่า χ^2

(1) ค่า f_i ต้องอยู่ในรูปความถี่ ไม่ใช่รูปเปอร์เซนต์ (2) ถ้า V = 1 ควรปรับความต่อเนื่อง (3) ค่า F_i ต้องไม่เล็กเกินไป Cochran (1954) เสนอว่า F_i ไม่ควรน้อยกว่า 1.0 และต้องมีค่า F_i อย่างมากไม่เกิน 20% ที่มีค่าน้อยกว่า 5.0 ถ้า $F_i < 1$ ควรยุบประเภท F_i ของประเภทนั้น.ไปรวมกับชั้นข้างเคียง (และยุบ f_i ไปรวมกับชั้นข้างเคียงด้วย) (4) ถ้า k = 2 และ f_i เป็นค่าเล็กทั้ง f_1 และ f_2 ควรใช้ binomial test

11.4 การรวมค่า χ^2 และการตรวจสอบความเป็นเอกภาพ (V = 1)

ถ้ามีผลการทดลองในลักษณะเดียวกัน หลายๆ งานทดลอง จึงมีข้อมูลในเรื่องเดียวกันหลายชุด นอกจากการวิเคราะห์แต่ละชุดแล้ว การนำผลทดลองทุกชุดมารวมกัน จะทำให้ค่าทดสอบมีประสิทธิภาพสูงขึ้น แต่ก่อนนำมารวมต้องตรวจสอบก่อนว่า การทดลองเหล่านั้น**มาจากประชากรเดียวกันหรือไม่**

เรียกว่าการตรวจสอบความเป็นเอกภาพ (homogeneous) (H_0) ถ้ายอมรับ H_0 แสดงว่าตัวอย่างเหล่านั้นเป็นเอกภาพกัน สามารถนำมารวมกันได้ แต่ถ้าปฏิเสธ H_0 แสดงว่า ตัวอย่างไม่เป็นเอกภาพกัน (heterogeneous) จะนำมาวิเคราะห์รวมกันไม่ได้ การตรวจสอบนี้ เรียกว่า heterogeneity χ^2 หรือ interaction χ^2 โดยมีวิธีการดังนี้

(1) นำค่า χ^2 ของแต่ละชุด (ซึ่งเรียกว่า Individual χ^2) มารวมกัน สมมติมี m ชุด แต่ละชุดมี 1 df จะได้ **total of χ^2 ที่มี m df**

(2) นำข้อมูลทุกชุดรวมกัน ให้เหลือเพียงชุดเดียว หาค่า χ^2 เรียกว่า **χ^2 of totals** และมี **df = k-1**

(3) หาผลต่างของค่า χ^2 ในข้อ (1) และ (2) จะได้ **heterogeneity χ^2** หรือ **interaction χ^2** ด้วย df = m - (k-1) เพื่อใช้ทดสอบสมมติฐาน

H_0 : ตัวอย่าง m ชุด เป็นเอกภาพกัน (homogeneity)

H_a : ตัวอย่าง m ชุด ไม่เป็นเอกภาพกัน

ถ้ายอมรับ H_0 จึงนำข้อมูล m ชุดมาวิเคราะห์รวมกันได้

ตัวอย่างที่ 6 ถ้าทดลองปลูกถั่วลูกผสม สีเหลือง:เขียว (ซึ่งตามทฤษฎีต้องได้อัตราส่วน 3:1) จำนวน 5 ครั้ง ได้ผลการทดลอง ดังนี้

การทดลอง	สีเหลือง	สีเขียว	จำนวนเมล็ด (n)	χ^2	df
1	25	11	36	.592	1
	(27)	(9)			
2	32	7	39	1.035	1
	(29.25)	(9.75)			
3	14	5	19	.017	1
	(14.25)	(4.75)			

การทดลอง	สีเหลือง	สีเขียว	จำนวนเมล็ด (n)	χ^2	df
4	70	27	97	.416	1
	(72.75)	(24.25)			
5	24	13	37	2.027	1
total of χ^2				4.807	5
	165	63		.842	1
χ^2 of total	(171)	(57)		-	-
Heterogeneity χ^2	$.50 < \text{p-value} < .75$			3.245	4

$(\chi^2_{4,.75} = 1.923,\ \chi^2_{4,.50} = 3.357)$

ค่า Heterogeneity χ^2 ไม่มีนัยสำคัญ จึงสรุปว่าตัวอย่าง 5 ชุดเป็นเอกภาพ จึงสามารถนำมารวมเป็นชุดเดียวกันได้ เรียกว่า นำมา pool ได้ ซึ่งค่าสถิติที่ได้ คือ χ^2 of total = .842 ซึ่งไม่มีนัยสำคัญ จึงสรุปว่า อัตราส่วน เหลือง:เขียว เป็นไปตามทฤษฎีพันธุกรรมคือ 3:1

ข้อสังเกต ในขั้นตอนการหา heterogeneity χ^2 แม้ว่า $\nu = 1$ ยังไม่ต้องปรับความต่อเนื่อง แต่ถ้าผลสรุปว่าเป็นเอกภาพกัน นั่นคือจะใช้ χ^2 totals ซึ่งมี $\nu = 1$ ควรหาค่า χ^2_C กรณีนี้ $\chi^2_C = .707$ ซึ่งไม่มีนัยสำคัญ

ตัวอย่างที่ 7 แสดงการวิเคราะห์ค่า χ^2 จากตัวอย่างที่ไม่เอกภาพกัน ถ้าไม่ตรวจสอบก่อน จะให้ผลผิดพลาด

H_0 : **ข้อมูลมาจากประชากรที่มีอัตราส่วนของผู้ถนัดขวา:ซ้าย = 1:1**

H_a : **ข้อมูลมาจากประชากรที่มีอัตราส่วนของผู้ถนัดขวา:ซ้าย $\neq$ 1:1**

ตัวอย่าง	ถนัดขวา	ถนัดซ้าย	n	χ^2	df
1	3	11	14	4.572*	1
	(7)	(7)			
2	4	12	16	4.000*	1
	(8)	(8)			
3	5	5	20	5.000*	1
	(10)	(10)			
4	14	4	18	5.556*	1
	(9)	(9)			
5	13	4	17	4.764*	1
	(8.5)	(8.5)			
6	17	5	22	6.546*	1
	(11)	(11)			
total of χ^2				30.438	6
χ^2 of totals	56	51	107	.234	1
	(53.5)	(53.5)			
Heterogeneity χ^2		p-value < .01		30.204*	5

การรวมข้อมูลเป็นชุดเดียวกัน ไม่เหมาะสม

ข้อสังเกต (1) พิจารณาจากข้อมูลแต่ละชุด ทุกชุดสรุปได้ว่า อัตราส่วนผู้ถนัดขวา:ซ้าย ไม่ใช่ 1:1 (2) เมื่อนำข้อมูลทั้ง 5 ชุด มารวมกันได้ χ^2 of totals หรือ pooled χ^2 = .234 ซึ่งไม่มีนัยสำคัญ จึงสรุปว่า อัตราส่วน ขวา:ซ้าย เป็น 1:1 (3) เมื่อพิจารณา Heterogeneity χ^2 พบว่ามีนัยสำคัญสูงมาก (p-value < .001) แสดงว่า ข้อมูล 5 ชุด ไม่เป็นเอกภาพกัน จึงนำมารวมกันไม่ได้ ดังนั้น การ

วิเคราะห์ในข้อ (2) จึงไม่ถูกต้อง

<u>ตัวอย่างที่ 8</u> เพื่อแสดงว่า เมื่อตัวอย่างทุกชุดเป็นเอกภาพกัน การนำข้อมูลมารวมกัน จะให้พลังทดสอบสูงขึ้น

H_0 : อัตราส่วน ขวา:ซ้าย = 1:1 , H_a : อัตราส่วน ขวา:ซ้าย $\neq$ 1:1

ตัวอย่าง	ขวา	ซ้าย	n	χ^2	df
1	15	7	22	2.910	1
	(11)	(11)			
2	16	8	24	2.666	1
	(12)	(12)			
3	12	5	17	2.882	1
	(8.5)	(8.5)			
4	13	5	18	3.556	1
	(9)	(9)			
total of χ^2				12.014	4
χ^2 of totals	56	25	81	11.864	1
	(40.5)	(40.5)			
Heterogeneity χ^2	.975 < p-value < .99			.150	3

เนื่องจาก Heterogeneity χ^2 ไม่มีนัยสำคัญ แสดงว่าข้อมูล 4 ชุดเป็นเอกภาพกัน จึงนำมารวมเป็นชุดเดียวกัน แล้วใช้ค่า χ^2 of totals = 11.864* วิเคราะห์ จะเห็นว่า เมื่อวิเคราะห์แยกแต่ละกลุ่ม ไม่มีชุดใดที่ได้ χ^2 ที่มีนัยสำคัญ นั่นคือ ต้องสรุปว่า อัตราส่วน ขวา:ซ้าย = 1:1 แต่เมื่อนำมารวมกันแล้วสามารถปฏิเสธ H_0 ได้ คือพบความแตกต่างมีนัยสำคัญ และสรุปว่า อัตราส่วน ไม่ใช่ 1:1

11.5 แบบทดสอบ Goodness of Fit ของ Kolmogorov-Smirnov

ตัวสถิติ χ^2 เหมาะสมกับข้อมูลที่มีสเกลการวัดแบบนามบัญญัติ สำหรับข้อมูลที่มีสเกลการวัดที่ละเอียดขึ้น เช่น แบบเรียงลำดับ, แบบอันตรภาค หรือ แบบอัตราส่วน ควรใช้แบบทดสอบ Goodness of fit ของ Kolmogorov-Smirnov โดยมีขั้นตอน ดังนี้

(1) เรียง f_i ตามกลุ่มจากน้อยไปหามาก หรือมากมาหาน้อย (2) หาค่าคาดหมาย F_i จาก H_0 (3) หาค่าสะสมของ f_i และ F_i สำหรับทุกๆ ชั้น (4) หาค่า $|d_i|$ = |ค่าสะสม f_i - ค่าสะสม F_i| (5) ค่าสถิติทดสอบ คือ D = maximum $|d_i|/n$ (6) เปรียบเทียบค่า D กับค่าจากตาราง Kolmogorov-Smirnov และจะปฏิเสธ H_0 ถ้าค่า D ใหญ่กว่าค่าจากตาราง (7) เนื่องจากตำราบางเล่มแนะนำให้ใช้ $|d_i|$ = |ความถี่สะสมสัมพัทธ์ของ f_i - ความถี่สะสมสัมพัทธ์ของ F_i| จึงใช้ D = max $|d_i|$ แทน max $|d_i|/n$ จะให้ค่า D เท่ากัน อนึ่งสำหรับข้อมูลจากประชากรที่มีการแจกแจงแบบต่อเนื่อง ค่าความถี่สะสมสัมพัทธ์ คือ ความน่าจะเป็นสะสม หรือพื้นที่สะสมนั่นเอง

ข้อสังเกต (1) แบบทดสอบนี้ จะให้พลังทดสอบสูงกว่า χ^2 เมื่อ n มีค่าเล็ก, หรือ F_i มีค่าเล็ก (2) จำนวนชั้นของข้อมูลควรมากพอสมควร เพราะถ้ามีน้อยจะทำให้ type I error สูง ส่วนค่า f_i จะเป็นค่าเล็กหรือใหญ่ก็ได้

<u>ตัวอย่างที่ 9</u> แสดงการทดสอบ goodness of fit สำหรับข้อมูลที่มีสเกลแบบเรียงลำดับ ข้อมูลในตารางคือจำนวนแมลงเต่าทองภายใต้พื้นที่ 5 ตำแหน่ง แต่ละตำแหน่ง ใช้ไฟแสงสว่างในขนาดแตกต่างกัน ตั้งแต่ต่ำสุดถึงสูงสุด ดังนั้น ข้อมูลจึงใช้สเกลแบบเรียงลำดับ เพราะสามารถจัดลำดับกลุ่ม 5 กลุ่มได้ตามความแรงของไฟ แต่ยังไม่ใช่สเกลอันตรภาค หรือ สเกลอัตราส่วน เนื่องจากระยะห่างระหว่างกลุ่มอาจไม่เท่ากัน ให้ทดสอบว่าการเกาะกลุ่มของแมลงไม่แตกต่างกันในพื้นที่ 5 ส่วนนั้น

H_0 : การเกาะกลุ่ม ไม่ต่างกันเมื่ออยู่ภายใต้แสงสว่างที่ต่างกัน

H_a : การเกาะกลุ่ม แตกต่างกันเมื่ออยู่ภายใต้แสงสว่างที่ต่างกัน

		ขนาดของแสงสว่าง					
		1	2	3	4	5	
f_i	:	0	7	6	38	14	n = 65
F_i	:	13	13	13	13	13	
(1) f_i (สะสม)	:	0	7	13	51	65	
(2) F_i (สะสม)	:	13	26	39	52	65	
$\|d_i\|=\|(1)-(2)\|$	:	13	19	26	1	0	

$D = \max|d_i|/n = 26/65 = .40^{**}$, $p << .001$

เปิดตาราง n = 65, $D_{.001}$ = .23810 จึงปฏิเสธ H_0 และสรุปว่าการเกาะกลุ่มของแมลงมีความแตกต่างกัน เมื่ออยู่ภายใต้แสงสว่างที่ต่างกัน

<u>**ตัวอย่างที่ 10**</u> แสดงการทดสอบ goodness of fit ของข้อมูลสเกลอัตราส่วน และเป็น grouped data ข้อมูลคือจำนวนไส้เดือนต่อพื้นที่ 1 ตารางเมตร เมื่อขุดด้วยความลึกระดับต่างๆ

H_0 : ตัวอย่างมาจากประชากรที่มีการแจกแจงแบบสม่ำเสมอกันสำหรับทุกชั้นระดับความลึก

H_a : ตัวอย่างมาจากประชากรที่มีการแจกแจงแบบไม่สม่ำเสมอกันสำหรับทุกชั้นระดับความลึก

		ความลึกของดินที่ขุด (เซนติเมตร)				
		0-10	10-20	20-30	30-40	n
f_i	:	32	28	21	11	92
F_i	:	23	23	23	23	
f_i (สะสม)	:	32	60	81	92	

	ความลึกของดินที่ขุด (เซนติเมตร)			
	0-10	10-20	20-30	30-40
F_i (สะสม) :	23	46	69	92
$\lvert d_i \rvert$:	9	14	12	0

$D = \max \lvert d_i \rvert / n = 14/92 = .15217^*$, $.02 < p < .05$

for $n = 92$, $D_{.02} = .15616$, $D_{.05} = .13965$

11.6 ตาราง Contingency สำหรับทดสอบความเป็นอิสระกัน

บางครั้งข้อมูลที่ได้มาจากตัวแปร 2 ตัวพร้อมกัน ดังนั้นจะต้องแสดงข้อมูลโดยใช้ตาราง 2 ทาง ซึ่งเรียกว่าตาราง Contingency เพื่อใช้ทดสอบสมมติฐานหลักว่าตัวแปร 2 ตัวดังกล่าว**เป็นอิสระกัน** กับ สมมติฐานรองว่าตัวแปร 2 ตัวดังกล่าว**ไม่เป็นอิสระกัน** โดยใช้ตัวสถิติทดสอบ

$$\chi^2 = \sum_{i}^{r}\sum_{j}^{c}(f_{ij} - F_{ij})/F_{ij} \sim \chi^2_{(r-1)(c-1)}$$

f_{ij} = observed frequency ของลักษณะ i, j ของตัวแปรที่ (1) และ (2) ตามลำดับ

$F_{ij} = (R_iC_j)/n$ = expected frequency

R_i = ยอดรวมของลักษณะที่ i ของตัวแปรที่ (1), C_j = ยอดรวมของลักษณะ j ของตัวแปรที่ (2)

และจะปฏิเสธ H_0 เมื่อ $\chi^2 > \chi^2_{(r-1)(c-1,}$

ตัวอย่างที่ 11 แสดงตาราง contingency ขนาด 2 x 4 เพื่อทดสอบความสัมพันธ์ระหว่างสีผมและเพศ

H_0 : สีผมเป็นอิสระกับเพศ, H_a : สีผมไม่เป็นอิสระกับเพศ

			สีผม			
เพศ	ดำ	น้ำตาล	บรอนด์	แดง	รวม	
ชาย	32(29)	43(36)	16(26.67)	9(8.33)	$100 = R_1$	
หญิง	55(58)	65(72)	64(53.33)	16(16.67)	$200 = R_2$	
	87	108	80	25	$300 = n$	
	C_1	C_2	C_3	C_4		

$\chi^2 = (32\text{-}29)^2/29 + (43\text{-}36)^2/36 + \ldots + (16\text{-}16.67)^2/16.67 = 8.992^*$

$.025 < \text{p-alue} < .05$, $= (r\text{-}1)(c\text{-}1) = (2\text{-}1)(4\text{-}1) = 3$

$\chi^2_{.05,3} = 7.815$, $\chi^2_{.025,3} = 9.348$, $E_{ij} = (R_i \cdot C_j)/m$ เช่น

$E_{11} = (R_1C_1)/n = (100)(87)/300 = 29$, $E_{23} = (200)(80)/300 = 53.33$

ปฏิเสธ H_0 และสรุปว่าสีผมมีความสัมพันธ์กับเพศ

หมายเหตุ : df ได้จาก df(total) - df(แถว) - df(col) = (rc-1) - (r-1) - (c-1) = (r-1)(c-1)

11.7 ตาราง Contingency ขนาด 2 x 2

สำหรับตารางขนาด 2 x 2 ซึ่งเป็นตารางที่เล็กที่สุด มีสูตรเฉพาะ ดังนี้

$$\chi^2 = n(f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21})^2/C_1.C_2.R_1.R_2$$

เนื่องจาก $\nu = (2\text{-}1)(2\text{-}1) = 1$ จึงควรปรับความต่อเนื่อง ดังนี้

$$\chi^2_C = n(|f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21}| - n/2)^2/C_1.C_2.R_1.R_2$$

<u>**ตัวอย่างที่ 12**</u> แบ่งหนูที่เป็นโรคเป็น 2 กลุ่ม กลุ่มหนึ่งได้รับยารักษาโรค อีกกลุ่มให้เป็น Control คือไม่รับยา เพื่อศึกษาว่ามีอัตราการอยู่รอดแตกต่างกันหรือไม่

H_0 : อัตราการอยู่รอดไม่มีความสัมพันธ์กับชนิดของยาที่ได้รับ

H_a : อัตราการอยู่รอดมีความสัมพันธ์กับชนิดของยาที่ได้รับ

	ตาย	รอด	รวม
ไม่ได้รับยา	9	15	24
ได้รับยา	15	10	25
	24	25	49

$\chi^2_C = 49[|(9)(10) - (15)(15)| - 49/2]^2/(24)(25)(24)(25)$

$= 1.662, \ \nu = 1, \ \chi^2_{.10,1} = 2.71, \ \chi^2_{.025,1} = 1.32$

$.01 < \text{p-value} < .25$ สรุปว่า ยังปฏิเสธ H_0 ไม่ได้ นั่นคือ อัตราการอยู่รอดไม่ต่างกัน ระหว่าง 2 กลุ่ม หรือไม่มีความสัมพันธ์กับยาที่ได้รับ

11.8 การตรวจสอบความเป็นเอกภาพ ระหว่างตาราง 2x2 หลายชุด

คล้ายๆ กับหัวข้อ 11.4 แต่ข้อมูลอยู่ในรูปตาราง 2x2 จึงมีวิธีการเหมือนกัน

ตัวอย่างที่ 13 ทำการทดลอง เหมือนตัวอย่างที่ 12 รวม 4 ชุด

งานทดลอง		ตาย	รอด	รวม	χ^2	df
ชุดที่ 1						
	ใช้ยา	9	15	24		
	ไม่ใช้ยา	15	10	25	2.481	1
		24	25	49		

งานทดลอง		ตาย	รอด	รวม	χ^2	df
ชุดที่ 2						
	ใช้ยา	13	12	25		
	ไม่ใช้ยา	18	7	25	2.122	1
		31	19	50		
ชุดที่ 3						
	ใช้ยา	12	13	25		
	ไม่ใช้ยา	17	8	25	2.053	1
		29	21	50		
ชุดที่ 4						
	ใช้ยา	10	14	24		
	ไม่ใช้ยา	16	9	25	2.452	1
		26	23	49		
Total of χ^2					9.108	4

		ตาย	รอด			
	ใช้ยา	44	54	98		
	ไม่ใช้ยา	66	34	100		
χ^2 of total		110	88	198	8.926*	1
Heterogeneity χ^2		.975 < p-value < .99			.182	3

ค่า Heterogeneity χ^2 ไม่มีนัยสำคัญ จึงสรุปว่าข้อมูล 4 ชุด เป็นเอกภาพกัน หรือ มาจากประชากร

แบบเดียวกัน จึงสามารถรวมกัน หาค่า pooled χ^2 หรือ χ^2 of total = 8.926, .001 < p-value < .005 สรุปได้ว่า อัตราการอยู่รอด มีความสัมพันธ์กับยาที่ได้รับ หรืออีกนัยหนึ่งคืออัตราการอยู่รอดมีความแตกต่างกัน ระหว่างกลุ่มที่ได้รับยาและไม่ได้รับยา กลุ่มที่ได้รับยาจะมีอัตรายู่รอดสูงกว่า และพึงสังเกตว่า ค่า χ^2 แต่ละชุด ไม่มีนัยสำคัญ จึงไม่สามารถตรวจจับความแตกต่าง แต่เมื่อนำมารวมกันเป็น χ^2 of totals แล้ว ให้ผลหลังการทดสอบดีขึ้นมาก

11.9 การแบ่งแยกตาราง Contingency

เมื่อต้องการลดขนาดของตาราง Contingency เพื่อลดขอบเขตการเปรียบเทียบ มีวิธีการดังนี้

ตัวอย่างที่ 14 จากตัวอย่างที่ (11) ให้ทดสอบ H_0 : สีผม ดำ, น้ำตาล, แดง ไม่มีความสัมพันธ์กับเพศ และ H_a : สีผม ดำ, น้ำตาล, แดง มีความสัมพันธ์กับเพศ

	สีผม			
เพศ	**ดำ**	**น้ำตาล**	**แดง**	**รวม**
ชาย	32 (32.22)	43 (41.24)	9 (9.55)	84
หญิง	55 (53.78)	65 (66.76)	16 (15.45)	136
	87	108	25	220

χ^2 = .245, df = 2, ยังปฏิเสธ HO ไม่ได้ .75 < p-value < .90

ตัวอย่างที่ 15 H_0 : สีผมบรอนด์ หรือไม่บรอนด์ ไม่มีความสัมพันธ์กับเพศ

H_a : สีผมบรอนด์ หรือไม่บรอนด์ มีความสัมพันธ์กับเพศ

สีผม			
เพศ	บรอนด์	ไม่บรอนด์	
ชาย	16 (26.67)	84 (73.33)	100
หญิง	64 (53.33)	136 (146.67)	200
	80	220	300

$\chi^2 = 7.928$, df = 1, $.001 < \text{p-value} < .005$

สรุปว่า การมีผมบรอนด์ขึ้นอยู่กับเพศ ซึ่งจากข้อมูล พบว่าหญิงมีผมบรอนด์มากกว่าชาย

11.10 ประเภทของตาราง Comtingency แบบ r x c

แบ่งเป็น 2 ประเภทโดยพิจารณาค่า marginal total ดังนี้

(1) marginal total ด้านใดด้านหนึ่ง เป็นแบบกำหนด อีกด้านหนึ่งเป็นแบบสุ่ม จะเป็นเรื่องของการทดสอบความเป็นเอกภาพ (test of homogeneity) ถ้า fixed ด้าน แถว r แถว (นั่นคือ มีประชากรพหุนาม r ประชากร) ในแต่ละกลุ่มมี C ลักษณะ (j = 1, 2, ..., C) ต้องการตรวจสอบว่าลักษณะต่างๆ ใน k ประชากร ไม่แตกต่างกัน หรือเป็นเอกภาพกัน นั่นคือ

$H_0 : P_{1j} = P_{2j} = ... = P_{rj}$, j =1, 2, ..., C

(2) ค่า marginal total ทั้ง 2 ด้านเป็นแบบสุ่ม จะมีสมมติฐาน H_0 ว่า อิทธิพลด้านแถวและ col. ไม่เกี่ยวข้องกัน (no association) หรือ H_0 : ลักษณะ A และ B เป็นอิสระกัน

สำหรับการหาค่า E_{ij} และค่า χ^2 ทำตามปกติ แต่สมมติฐานแตกต่างกัน สำหรับ 2 กรณี

ตัวอย่างที่ 16 ต้องการศึกษาว่าโรคกระเพาะชนิดหนึ่งมีความสัมพันธ์กับกลุ่มเลือดหรือไม่ จึงแบ่งผู้ทดลองเป็น 2 กลุ่ม คือคนไข้ที่เป็นโรค ซึ่งมี 1301 คน และคนปกติ (Control) 6313 คน

	กลุ่มเลือด				
	O	A	B	AB	
คนไข้	698	472	102	29	1301 (fixed)
Control	2892	2625	570	226	6313 **(fixed)**
	3590	3097	672	255	7616 = n

$H_0 : P_{11} = P_{21}, P_{12} = P_{22}, P_{13} = P_{23}, P_{14} = P_{24}$ **หรือ**

อัตราส่วนของกลุ่มเลือดแต่ละชนิด ใน 2 กลุ่มเป็นเอกภาพกัน

$\chi^2 = 29.12^{**}$, $\nu = 3$, $\chi^2_{3,.005} = 12.8$, p-value < .005 **จึงปฏิเสธ** H_0 **และสรุปว่าอัตราส่วนของกลุ่มเลือด 4 ประเภท ระหว่างคนเป็นโรคกระเพาะและคนปกติ ไม่เป็นเอกภาพกัน แต่ถ้าไม่ได้กำหนดค่า** marginal total 1301 **และ** 6313 **จึงถือว่าเป็นแบบสุ่ม จะมีสมมติฐาน**

H_0 : **กลุ่มเลือดและการเป็นโรคกระเพาะไม่มีความสัมพันธ์กัน (เป็นอิสระกัน)**

ค่าสถิติทดสอบ คือค่าเดิม คือ $\chi^2 = 29.12$, p-value < .005 **จึงปฏิเสธ** H_0 **ได้เช่นกัน แต่จะสรุปว่ากลุ่มเลือดและการเป็นโรคกระเพาะ มีความสัมพันธ์กัน หรือไม่เป็นอิสระกัน**

แบบฝึกหัดที่ 11

1. นก 2 ชนิดนี้ ชอบแหล่งหาอาหารแบบเดียวกัน หรือไม่ ?

แหล่งอาหาร

ชนิด	ในน้ำ	ที่เฉอะแฉะ	ที่แห้ง
1	39	104	31
2	48	294	162

2. อัตราโรค rabies ที่พบจากตัวสกั๊งค์ ของ 2 ท้องที่ แตกต่างกันหรือไม่ ?

ท้องที่	พบเชื้อ rabies	ไม่พบเชื้อ rabies
1	14	29
2	12	38

3. จากหญิงตั้งครรภ์ 361 คน ที่กินยาแก้แพ้ชนิดหนึ่ง มี 14 คน มีอาการตกเลือดหลังคลอด ส่วนหญิงตั้งครรภ์อีก 340 คน ซึ่งไม่ได้กินยาแก้แพ้ มีเพียง 6 คนที่มีอาการตกเลือดหลังคลอดบุตร จะสรุปว่าอาการตกเลือด มีความสัมพันธ์กับยาแก้แพ้ได้หรือไม่

4. ให้ทดสอบว่าจำนวนของนกชนิดหนึ่งที่พบใน 4 ฤดู มีความสัมพันธ์กับเพศหรือไม่

เพศ	Spring	Summer	Fall	Winter
ผู้	163	135	71	43
เมีย	86	77	40	38

5. ในการสัมภาษณ์ผู้เข้าสมัครงาน 200 คน มี 72 คนที่สูบบุหรี่ 20 คนเคยสูบและเลิกสูบแล้ว และ 108 คน ไม่สูบ ถ้าสถิติเมื่อ 5 ปีที่แล้ว มี 41% ที่สูบ 9% เคยสูบและ 50% ไม่สูบ อยากทราบว่าในปัจจุบันนี้ยังมีอัตราส่วนเหมือน 5 ปีที่แล้วหรือไม่

6. จงหาอัตราส่วนลูกผสมต้นถั่วจากการผสมข้ามพันธุ์ระหว่าง พ่อ-แม่ ซึ่งมี genotype RrYy

7. จากลูกผสมถั่วในข้อ (6) จำนวน 85 เมล็ด ให้ทดสอบว่ามีการแจกแจงตามทฤษฎีกฎความน่าจะเป็น ซึ่งหาไว้ในข้อ (6) หรือไม่

Round,yellow	Round,green	Wrinkled,yellow	Wrinkled,green
48	16	14	7

8. ให้ทดสอบว่าความรุนแรงของการบาดเจ็บจากอุบัติเหตุ และข้อบังคับเกี่ยวกับเข็มขัดนิรภัย มีความสัมพันธ์กันหรือไม่

ข้อบังคับของประเทศ

ระดับการบาดเจ็บ	ต้องรัดเข็มขัดนิรภัย	รัดเข็มขัดและสวมสายบังคับ	ไม่บังคับ
ไม่เลย	75	60	65
เล็กน้อย	160	115	175
มาก	100	65	135
ถึงตาย	15	10	25

9. ต้องการศึกษาว่าความคงทนของดอก Azalia มีความสัมพันธ์กับสี หรือไม่

	สีขาว	สีชมพู	สีส้ม
บอบบาง,ช้ำง่าย	12	60	58
คงทนดี	50	10	10

9.1 กำหนด marginal total ด้าน col.

9.2 ไม่กำหนด marginal total ทั้ง 2 ด้าน (เป็นแบบ random) จงตั้งสมมติฐาน และทดสอบ

10. ศึกษาอัตราการเป็นโรคคอหอยพอกจาก 10 เมือง โดยกำหนดขนาดตัวอย่างแต่ละเมือง ได้ข้อมูลดังนี้

	เมือง 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
เป็น	36	17	12	1	4	14	7	27	2	4	
ไม่เป็น	500	350	300	300	350	500	200	500	200	200	3400

จงตั้งสมมติฐานที่เหมาะสม และทดสอบ

เฉลยแบบฝึกหัดที่ 11

1. H_0 : นก 2 ชนิดชอบแหล่งอาหารแบบเดียวกัน, $\chi^2 = 26.11 \sim \chi^2_{(2)}$

   p-value << .005 ปฏิเสธ H_0 และสรุปว่านก 2 ชนิดชอบแหล่งอาหารต่างกัน

2. H_0 : อัตราโรค rabies ของ 2 ท้องที่ไม่ต่างกัน, $\chi^2 = 0.85 \sim \chi^2_{(1)}$

   .25 < p-value < .50, อัตราการเป็นโรคของ 2 กลุ่มไม่ต่างกัน

3. H_0 : อาการตกเลือดเป็นอิสระกับยา, $\chi^2 = 2.82 \sim \chi^2_{(1)}$

   .05 < p-value < .10, ยังไม่ปฏิเสธ H_0, อาการตกเลือด ไม่มีความสัมพันธ์กับยาแก้แพ้

4. HO : จำนวนนกที่พบใน 4 ฤดู ไม่มีความสัมพันธ์กับเพศ, $\chi^2 = 4.146 \sim \chi^2_{(3)}$

   .10 < p-value < .25, ยังไม่ปฏิเสธ HO สรุปว่า จำนวนนกในฤดูต่างๆ ไม่สัมพันธ์กับเพศ

5. H_0 : อัตราส่วนเหมือนเมื่อ 5 ปีที่แล้ว, $\chi^2 = 2.08 \sim \chi^2_{(2)}$

   .25 <p-value < .50 ยังไม่ปฏิเสธ H_0, อัตราส่วนไม่ต่างจาก 5 ปีที่แล้ว

6. **RrYy** x **RrYy** จะได้ genotype 16 อย่าง แต่จะมี phenotype 4 อย่างคือ RY : RG : WY : WG = 9 : 3 : 3 : 1 (R = round, Y = yellow, G = green, W = wrinkle)

7. H_0 : อัตรา 4 อย่าง = 9:3:3:1, $\chi^2 = .7725 \sim \chi^2_{(3)}$, p-value > .25 ยังไม่ปฏิเสธ สรุปว่า อัตราส่วนเป็น 9:3:3:1

8. H_0 : ความรุนแรงของการบาดเจ็บไม่มีความสัมพันธ์กับข้อบังคับเข็มขัดนิรภัย

   $\chi^2 = 11.4 \sim \chi^2_{(6)}$, .05 < p-value < .10, ยังไม่ปฏิเสธ H_0 สรุปว่า ความรุนแรงไม่สัมพันธ์กับข้อบังคับ

9. 9.1 ถ้า marginal total ด้านหนึ่ง fixed จะเป็นการทดสอบความเป็นเอกภาพ นั่นคือ คง

   H_0 : $\pi_{11} = \pi_{21}$, $\pi_{12} = \pi_{22}$, $\pi_{13} = \pi_{12}$, $\chi^2 = 82.3 \sim \chi^2_{(2)}$

   p-value << .005, ปฏิเสธ H_0, อัตราความบอบบางของ 3 สี ไม่เป็นแบบเดียวกัน สีขาวจะบอบบางกว่าสีอื่น

   9.2 ถ้า marginal total เป็น random ทั้ง 2 ด้าน เป็นเรื่องการทดสอบความเป็นอิสระหรือความ

สัมพันธ์ (association) $\chi^2 = 82.3$, p-value << .05

ปฏิเสธ H_0 และสรุปว่าความบอบช้ำ (ง่ายหรือยาก) มีความสัมพันธ์กับสี

10. ค่า marginal total ด้าน col. เป็นแบบ fixed เป็นการทดสอบความเป็นเอกภาพ, $\chi^2 \sim \chi^2_{(9)}$, p-value << .005 สรุปว่าอัตราการเป็นโรคคอหอยพอกของ 10 เมือง ไม่เป็นเอกภาพกัน