บทที่ 5
โปรแกรมเชิงน่าจะเป็น

เท่าที่กล่าวมาแล้วข้างต้น เราพิจารณาการสร้างตัวแบบและแก้ปัญหา โดยถือว่ามีสาระข้อมูล (information) ครบถ้วนสมบูรณ์ เช่น ในปัญหาการจัดสรรทรัพยากร ปัญหาการผลิต เราทราบค่าที่แน่นอนของปริมาณทรัพยากร b_i ที่จะนำมาใช้ในการผลิต ทราบค่าที่แน่นอนของจำนวนทรัพยากร i ที่ใช้ผลิตสินค้า j หนึ่งหน่วย ทราบค่าที่แน่นอนของกำไรต่อหน่วยของสินค้า j c_j และสามารถพยากรณ์จำนวนอุปสงค์ของสินค้า j ได้ ดังนั้น เมื่อเราตัดสินใจผลิตสินค้า j เป็นจำนวน x_j หน่วย เราก็ต้องใช้ทรัพยากร i เท่ากับ $a_{ij}x_j$ และจะได้กำไรจากสินค้า j เท่ากับ c_jx_j ซึ่งแน่นอน ค่าเหล่านี้ย่อมเป็นค่าคงที่ แต่ในหลาย ๆ สถานการณ์ เราไม่อาจหาสาระข้อมูลได้ครบถ้วน อาจมีความผันแปรเชิงสุ่มหรือมีองศาความไม่แน่นอนเกิดขึ้นในส่วนประกอบของระบบงานบางระบบ ค่า a_{ij}, b_i หรือ c_j บางตัวหรือทุกตัว มีลักษณะเป็นตัวแปรเชิงสุ่มมากกว่าจะเป็นค่าคงที่ เช่น กำไรต่อหน่วย c_j ซึ่งคำนวณได้จากรายได้สุทธิกับค่าใช้จ่ายเกี่ยวกับสินค้า j ในบางครั้งเราไม่อาจกำหนดราคาขายที่แน่นอนของสินค้านี้ได้ ราคาอาจจะต้องเปลี่ยนแปรไปตามกลไกของตลาด หรือตามความต้องการของลูกค้า ค่าใช้จ่ายในการผลิตสินค้าอาจจะเปลี่ยนแปรไป เนื่องจากการควบคุมคุณภาพสินค้า และปัจจัยอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องกับการผลิตหรือการจำหน่ายสินค้านั้น กำไรสุทธิของสินค้าแต่ละชนิดอาจเป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่ถือว่า รู้ค่าเฉลี่ย หรือความแปรปรวน สำหรับค่า a_{ij} หรือ b_i ก็เช่นเดียวกัน เราไม่อาจกำหนดค่าที่แท้จริงได้ แต่จากประสบการณ์ของโรงงานจะช่วยให้สามารถประมาณค่าได้ การเปลี่ยนแปลงในค่าเหล่านี้สืบเนื่องมาจากแรงงานคน การทำงานของเครื่องจักร และความต้องการของลูกค้า ซึ่งอยู่เหนือการคาดหมายหรือการควบคุมของโรงงาน เช่น การขาดงานของลูกจ้าง การหยุดงานของเครื่องจักร การเปลี่ยนแปลงการซื้อของลูกค้า ฯลฯ แต่อย่างไรก็ตาม ค่าเหล่านี้สามารถคาดคะเนได้ โดยอาศัยวิธีการทางสถิติ

เมื่อตัวพารามิเตอร์ของตัวแบบการโปรแกรมเชิงคณิตศาสตร์ มีลักษณะเป็นตัวแปรเชิงสุ่ม จึงจำเป็นต้องศึกษาหลักของความน่าจะเป็นและความรู้เกี่ยวกับสถิติ (ให้นักศึกษาทบทวนเรื่องราวเหล่านี้จาก ST 203 และ ST 204) มาใช้ในการเขียนตัวแบบและแก้ปัญหา ปัญหาโปรแกรมเชิงสถิติ มักจะเป็นปัญหาเกี่ยวกับการเสี่ยง ถ้าเรารู้การแจกแจงน่าจะเป็นของตัวแปรเชิงสุ่ม แต่ถ้ามีอย่างน้อยที่สุด 1 ตัวแปร ที่เราไม่ทราบการแจกแจงของมัน การพิจารณาปัญหาประเภทนี้จะอยู่ภายใต้ความไม่แน่นอน

5.1 โปรแกรมเชิงสถิติ (Stochastic Programming)

การแก้ปัญหาโปรแกรมเชิงสถิติ ในที่นี้จะพูดถึงกรณีของฟังก์ชันเป้าหมายที่ได้จากการคำนวณค่าคาดหวัง เรียกว่าปัญหาค่าคาดหวัง และกรณีของการพิจารณาจากฟังก์ชันการแจกแจงน่าจะเป็น ที่เรียกว่าปัญหาการแจกแจง ในแต่ละกรณีเราถือว่า เรารู้การแจกแจงน่าจะเป็นของตัวพารามิเตอร์ และเป็นปัญหาที่มีจำนวนขั้นตอน และจำนวนจุดหมายที่จำกัด การหาคำตอบของปัญหาจะใช้วิธีการของโปรแกรมพลวัต ซึ่งเราเรียกปัญหาพวกนี้ว่าเป็นปัญหาโปรแกรมพลวัตเชิงสถิติ (Stochastic Dynamic Programming)

5.1.1 SDP ของปัญหาค่าคาดหวัง

เป็นการพิจารณาปัญหาภายใต้สภาวการณ์ที่เราสามารถคาดคะเน การแจกแจงน่าจะเป็นของผลลัพธ์ได้ การตัดสินใจในแต่ละขั้นตอนและผลลัพธ์ที่ได้ เนื่องจากการตัดสินใจหนึ่งเป็นไปตามกฎความน่าจะเป็น ดังนั้น ในขั้นตอนที่ j เราไม่เพียงแต่จะพิจารณาตัวแปรตัดสินใจ D_j เท่านั้น เราจะต้องพิจารณาแฟกเตอร์เชิงสุ่ม R_j ด้วย การคำนวณยังคงใช้วิธีการเดียวกันกับกรณีการโปรแกรมพลวัตภายใต้ความแน่นอน อาจจะมีแตกต่างกันบ้างตรงที่ เราต้องใช้ค่าความน่าจะเป็นมาเกี่ยวข้องด้วย หากเป้าหมายเป็นเรื่องเกี่ยวกับค่าคาดหมายของผลตอบแทน เราต้องคำนวณค่าผลตอบแทนคาดหวังในแต่ละจุดหมายและแต่ละขั้นตอน ตัวอย่างเช่น

ในปัญหาการแจกจ่ายสินค้าไปยังเขตการค้า หรือในปัญหาการลงทุนในโครงการต่าง ๆ ที่มีการตัดสินใจภายใต้การเสี่ยง นั่นคือในปัญหาการจำหน่ายสินค้า เราทราบความน่าจะเป็นของจำนวนอุปสงค์ของสินค้าในแต่ละเขตการค้า หรือในปัญหาการลงทุน ผลตอบแทนที่จะได้จากโครงการต่าง ๆ เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เราสามารถคาดคะเนความน่าจะเป็นของผลตอบแทนนั้นได้ ผลตอบแทนที่ดีที่สุด จะเป็นค่าสูงสุดของค่าคาดหวังของผลตอบแทน นั่นก็คือ

เมื่อตัวพารามิเตอร์ของตัวแบบการโปรแกรมเชิงคณิตศาสตร์ มีลักษณะเป็นตัวแปรเชิงสุ่ม จึงจำเป็นต้องศึกษาหลักของความน่าจะเป็นและความรู้เกี่ยวกับสถิติ (ให้นักศึกษาทบทวนเรื่องราวเหล่านี้จาก ST 203 และ ST 204) มาใช้ในการเขียนตัวแบบและแก้ปัญหา ปัญหาโปรแกรมเชิงสถิติ มักจะเป็นปัญหาเกี่ยวกับการเสี่ยง ถ้าเรารู้การแจกแจงน่าจะเป็นของตัวแปรเชิงสุ่ม แต่ถ้ามีอย่างน้อยที่สุด 1 ตัวแปร ที่เราไม่ทราบการแจกแจงของมัน การพิจารณาปัญหาประเภทนี้จะอยู่ภายใต้ความไม่แน่นอน

5.1 โปรแกรมเชิงสถิติ (Stochastic Programming)

การแก้ปัญหาโปรแกรมเชิงสถิติ ในที่นี้จะพูดถึงกรณีของฟังก์ชันเป้าหมายที่ได้จากการคำนวณค่าคาดหวัง เรียกว่าปัญหาค่าคาดหวัง และกรณีของการพิจารณาจากฟังก์ชันการแจกแจงน่าจะเป็น ที่เรียกว่าปัญหาการแจกแจง ในแต่ละกรณีเราถือว่า เรารู้การแจกแจงน่าจะเป็นของตัวพารามิเตอร์ และเป็นปัญหาที่มีจำนวนขั้นตอน และจำนวนจุดหมายที่จำกัด การหาคำตอบของปัญหาจะใช้วิธีการของโปรแกรมพลวัต ซึ่งเราเรียกปัญหาพวกนี้ว่าเป็นปัญหาโปรแกรมพลวัตเชิงสถิติ (Stochastic Dynamic Programming)

5.1.1 SDP ของปัญหาค่าคาดหวัง

เป็นการพิจารณาปัญหาภายใต้สภาวการณ์ที่เราสามารถคาดคะเน การแจกแจงน่าจะเป็นของผลลัพธ์ได้ การตัดสินใจในแต่ละขั้นตอนและผลลัพธ์ที่ได้ เนื่องจากการตัดสินใจหนึ่งเป็นไปตามกฎความน่าจะเป็น ดังนั้น ในขั้นตอนที่ j เราไม่เพียงแต่จะพิจารณาตัวแปรตัดสินใจ D_j เท่านั้น เราจะต้องพิจารณาแฟกเตอร์เชิงสุ่ม R_j ด้วย การคำนวณยังคงใช้วิธีการเดียวกันกับกรณีการโปรแกรมพลวัตภายใต้ความแน่นอน อาจจะมีแตกต่างกันบ้างตรงที่ เราต้องใช้ค่าความน่าจะเป็นมาเกี่ยวข้องด้วย หากเป้าหมายเป็นเรื่องเกี่ยวกับค่าคาดหมายของผลตอบแทน เราต้องคำนวณค่าผลตอบแทนคาดหวังในแต่ละจุดหมายและแต่ละขั้นตอน ตัวอย่างเช่น

ในปัญหาการแจกจ่ายสินค้าไปยังเขตการค้า หรือในปัญหาการลงทุนในโครงการต่าง ๆ ที่มีการตัดสินใจภายใต้การเสี่ยง นั่นคือในปัญหาการจำหน่ายสินค้า เราทราบความน่าจะเป็นของจำนวนอุปสงค์ของสินค้าในแต่ละเขตการค้า หรือในปัญหาการลงทุน ผลตอบแทนที่จะได้จากโครงการต่าง ๆ เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เราสามารถคาดคะเนความน่าจะเป็นของผลตอบแทนนั้นได้ ผลตอบแทนที่ดีที่สุด จะเป็นค่าสูงสุดของค่าคาดหวังของผลตอบแทน นั่นก็คือ

ถ้า D_j เป็นจำนวนอุปสงค์ของสินค้าในเขตการค้า j

$P(D_j = k)$ เป็นความน่าจะเป็นที่เขตการค้า j ต้องการสินค้า k หน่วย

f_j เป็นกำไรต่อหน่วยของสินค้า จากเขตการค้า j

x เป็นจำนวนสินค้าที่ส่งไปจำหน่าย

กรณีที่สินค้ามีไม่เพียงพอความต้องการ หรือกรณีที่สินค้ามีมากเกินความต้องการ ในที่นี้เราถือว่าไม่มีค่าใช้จ่ายหรือค่าเสียหายใด ๆ เกิดขึ้น เราจะได้ค่าคาดหวังของกำไร เท่ากับ

$$\sum_{k=0}^{x-1} kf_jP(D_j = k) + xf_jP(D_j \geqslant x) \tag{5.1}$$

ถ้าเราสร้างตารางค่าคาดหวังของกำไร ผลที่ได้จะเป็นการแก้ปัญหาโปรแกรมพลวัตที่มีตัวแบบ (4.1) นั่นเอง

สำหรับตัวแบบโดยทั่ว ๆ ไป จะกำหนดได้ดังนี้

ถ้า x_j = จำนวนสินค้าที่ส่งไปขายเขตการค้า j, $x_j \leqslant D_j$

$E(P_j|x_j)$ = ค่าคาดหวังของกำไรที่ได้จากการจำหน่ายสินค้า x_j หน่วยในเขตการค้า j

ดังนั้น $$E(P_j|x_j) = f_j\Big[\sum_{k=0}^{x_j-1} kP(D_j = k) + x_jP(D_j \geqslant x_j)\Big] \tag{5.2}$$

ถ้าโรงงานมีสินค้าทั้งหมด b หน่วย ส่งไปจำหน่ายที่เขตการค้า n แห่ง ให้ได้ค่าคาดหวังของกำไรทั้งหมดสูงสุด ตัวแบบจะเขียนได้ดังนี้

$$\begin{aligned} &\text{ค่าสูงสุด } Z = E(P_1|x_1) + E(P_2|x_2) + \ldots + E(P_n|x_n) \\ &\text{โดยมีข้อจำกัด } x_1 + x_2 + \ldots + x_n = b \\ &\qquad x_j = 0,1,2,\ldots \text{ ทุกค่า } j \end{aligned} \tag{5.3}$$

เทียบกับตัวแบบ (4.1) ค่า $E(P_j|x_j)$ ก็คือ $g_j(x_j)$ นั่นเอง การคำนวณทำได้ 2 วิธีการ คือ

1) วิธีการตามตัวแบบ (4.1) นั่นคือสร้างตารางของ $E(P_j)$

2) วิธีการตามตัวแบบ (5.3) โดยตรง นั่นคือ กำหนดเขตการค้า j เป็นขั้นตอนที่ j การคำนวณจะทำแบบรุดหน้าหรือย้อนหลังก็ได้

ถ้าใช้การคำนวณแบบย้อนหลัง เราจะได้

$$f_j(x) = \underset{x_j}{\text{ค่าสูงสุด}}\Big[E(P_j|x_j) + \ldots + E(P_{n-1}|x_{n-1}) + E(P_n|x_n)\Big]$$

โดยมีข้อจำกัด $x_j + \ldots + x_{n-1} + x_n \;=\; x$ (5.4)

$$x = 0,1,\ldots,b$$

ที่ขั้นตอน n

$$f_n(x) = \underset{x_n}{\text{ค่าสูงสุด}}\left[E(P_n|x_n)\right] = E(P_n|x)$$

จะเป็นค่าคาดหวังของกำไรสูงสุด ที่ได้จากการส่งสินค้า x หน่วยไปที่เขตการค้า n เพียงแห่งเดียว จำนวนจัดส่งที่ดีที่สุด

$$d_n(x) = x, \quad x = 0,1,\ldots,b$$

ที่ขั้นตอน j, $j = n-1,\ldots,2,\ 1$ ตามลำดับ จะได้ค่าคาดหวังของกำไรสูงสุดจากการขายสินค้า x_j หน่วย ที่เขตการค้า j และขายสินค้า $x - x_j$ หน่วย ที่เขตการค้า $j+1,\ldots,n$

$$f_j(x) = \underset{\substack{x_j = 0,1,\ldots,x \\ x = 0,1,\ldots,b}}{\text{ค่าสูงสุด}} \left[E(P_j|x_j) + f_{j+1}(x - x_j)\right] \tag{5.5}$$

และ $d_j(x)$ = ค่าของ x_j ที่มีค่าคาดหวังของกำไร $f_j(x)$

เมื่อ $j = 1$ และ $x = b$

$$f_1(b) = \underset{x_1 = 0,1,\ldots,b}{\text{ค่าสูงสุด}} \left[E(P_1|x_1) + f_2(b - x_1)\right]$$

$$= \underset{\{x_k\}}{\text{ค่าสูงสุด}} \left[\sum_{k=1}^{n} E(P_k|x_k)\right] = Z_{\text{สูงสุด}}$$

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = b$$

จำนวนหน่วยสินค้าที่ส่งให้เขตการค้า j ที่ดีที่สุด

$$x_j^* = d_j\left(b - \sum_{k=1}^{j-1} x_k^*\right)$$

เมื่อ $\quad x_1^* = d_1(b)$

ตัวอย่างที่ 5.1 พ่อค้าขายส่งต้องการส่งสินค้าที่มีอยู่ 6 ลอท แต่ละลอทมี 50 ชิ้น ไปยังร้านค้า 3 แห่ง ความต้องการสินค้าในร้านแต่ละแห่งเป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีการแจกแจงน่าจะเป็น ดังนี้

จำนวนลอท	**ความน่าจะเป็นของจำนวนอุปสงค์** $P(D = k)$		
k	**ร้านค้า 1**	**ร้านค้า 2**	**ร้านค้า 3**
0	0	0.1	0.1
1	0.2	0.2	0.3
2	0.2	0.3	0.4
3	0.4	0.3	0
4	0.2	0.1	0.2

ถ้ากำไรที่ได้จากการจำหน่ายสินค้าของร้านค้าแต่ละแห่งเท่ากับ 1,000 1,100 และ 1,200 บาทต่อลอท ตามลำดับ พ่อค้าควรส่งสินค้าไปจำหน่ายร้านค้าใดบ้าง จึงจะดีที่สุด

วิธีทำ เริ่มต้นจากขั้นตอนที่ 3 คือ การพิจารณาจำนวนลอทสินค้า x_3 ที่จะส่งไปจำหน่ายที่ร้านค้า 3

$$x_3 = x \leqslant 4, \quad x = 0,1,2,\ldots,6$$

กำไรที่คาดว่าจะได้จากการส่งสินค้า x ลอทที่ดีที่สุด จะเท่ากับ

$$f_3(x) = E(P_3|x)$$

$$= 1200\left[\sum_{k=0}^{x-1} kP(D_3 = k) + xP(D_3 \geqslant x)\right] \text{ บาท}$$

$$= 1.2\left[\sum_{k=0}^{x-1} kP(D_3 = k) + xP(D_3 \geqslant x)\right] \text{ พันบาท}$$

$$d_3(x) = x, x \leqslant 4$$

ได้ผลสรุปดังนี้

x	0	1	2	3	4	5	6
$f_3(x)$	0	1.08	1.80	2.04	2.28	2.28	2.28
$d_3(x)$	0	1	2	3	4	4	4

ขั้นตอนที่ 2 พิจารณาจำนวนลอทสินค้า x_2 ที่ส่งไปขายร้านค้า 2

จะได้ $f_2(x) = \underset{\substack{x_2 = 0,1,\ldots,x \leqslant 4 \\ x = 0,1,\ldots,6}}{\text{ค่าสูงสุด}} \left[E(P_2|x_2) + f_3(x - x_2)\right]$

$$E(P_2|x_2) = 1.1\left[\sum_{k=0}^{x_2-1} kP(D_2 = k) + x_2P(D_2 \geqslant x_2)\right] \text{ พันบาท}$$

ได้ผลสรุปดังนี้

$x \backslash x_2$	$E(P_2\|x_2) + f_3(x - x_2)$: 0	1	2	3	4	$f_2(x)$	$d_2(x)$
0	0					0	0
1	1.08	0.99				1.08	0
2	1.80	2.07	1.76			2.07	1
3	2.04	2.79	2.84	2.20		2.84	2
4	2.28	3.03	3.56	3.28	2.31	3.56	2
5	2.28	3.27	3.80	4.00	3.39	4.00	3
6	2.28	3.27	4.04	4.24	4.11	4.24	3

ขั้นตอนที่ 1 พิจารณาจำนวนลอทสินค้า x_1 ที่ส่งไปขายร้านค้า 1 และจำนวนสินค้า $6 - x_1$ ลอทที่ขายในร้านค้า 1 และ 3 จะได้

$$f_1(x) = \underset{x_1 = 0,1,\ldots,4}{\text{ค่าสูงสุด}} \left[E(P_2|x_1) + f_2(6 - x_1)\right]$$

$$E(P_1|x_1) = \sum_{k=0}^{x_1-1} kP(D_1 = k) + x_1P(D_1 \geqslant x_1) \text{ พันบาท}$$

ได้ผลสรุปดังนี้

$x \backslash x_1$	$E(P_1\|x_1) + f_2(6 - x_1)$: 0	1	2	3	4	$f_1(6)$	$d_1(6)$
6	4.24	5.00	5.36	5.24	4.67	5.36	2

สรุปได้ว่า

พ่อค้าจะส่งสินค้าไปจำหน่ายที่ร้านค้า 1 = 2 ลอท ร้านค้า 2 = 2 ลอท และร้านค้า 3 = 2 ลอท คาดว่าจะได้กำไรรวม = 5,360 บาท

คำอธิบาย (การคำนวณและแปลความหมาย)

จากตารางที่ 1 มีความหมายว่า พ่อค้าส่งสินค้าไปจำหน่ายที่ร้านค้า 3 เพียงแห่งเดียว จำนวนขายมากที่สุดจะเท่ากับ 4 ถ้าพ่อค้าส่งไปขาย 2 ลอท (x = 2) โอกาสที่จะขายไม่ได้เลยเท่ากับ 0.1 โอกาสที่จะขายได้ 1 ลอทเท่ากับ 0.3 และโอกาสที่จะขายได้หมดเท่ากับ $0.4+0.2$

ค่าคาดหวังของกำไร = $1.2[0(.1)+1(.3)+2(.6)]$ พันบาท

ค่าคาดหวังของกำไรจากการส่งไปขาย x ลอท จะคำนวณได้ดังนี้

x	**ค่าคาดหวังของกำไร**
0	$1.2[0(.1+.3+.4+0+.2)]$
1	$1.2[0(.1)+1(.3+.4+0+.2)]$
2	$1.2[0(.1)+1(.3)+2(.4+0+.2)]$
3	$1.2[0(.1)+1(.3)+2(.4)+3(0+.2)]$
4	$1.2[0(.1)+1(.3)+2(.4)+3(0)+4(.2)]$
5	$1.2[0(.1)+1(.3)+2(.4)+3(0)+4(.2)+5(0)]$
6	$1.2[0(.1)+1(.3)+2(.4)+3(0)+4(.2)+5(0)+6(0)]$

จากตารางที่ 2 x = 1 หมายความว่า พ่อค้าส่งสินค้าไปขายที่ร้านค้า 2 และ 3 เท่ากับ 1 ลอท ถ้า $x_2 = 1$ แสดงว่าส่งไปขายเฉพาะร้านค้า 2 โอกาสที่จะขายไม่ได้เท่ากับ 0.1 โอกาสที่ขายได้หมดเท่ากับ $.2+.3+.3+.1$

ค่าคาดหวังของกำไรรวมที่ดีที่สุด จะคำนวณได้จาก

$$\text{ค่าสูงสุด}\begin{bmatrix} E(P_2|0)+f_3(1) = 1.1[(1)]+1.08 \\ E(P_2|1)+f_3(0) = 1.1[0(.1)+1(.9)]+0 \end{bmatrix}$$

x = 3 หมายความว่า พ่อค้าจะส่งสินค้าไปจำหน่ายที่ร้านค้า 2 และ 3 รวมกัน 3 ลอท ถ้าเขาส่งไปที่ร้านค้า 2 x_2 ลอท x_2 ต้องไม่เกิน 3 ถ้า $x_2 = 2$ แสดงว่าขายที่ร้านค้า 2 2 ลอท ความน่าจะเป็นที่จะขายได้ 0, 1, 2 ลอทจะเท่ากับ 0.1, 0.2 และ 0.7 ตามลำดับ ที่เหลือ 1 ลอท จะขายที่ร้านค้า 3

ค่าคาดหวังของกำไรรวมที่ดีที่สุด จะคำนวณได้จาก

$$\text{ค่าสูงสุด}\begin{bmatrix} E(P_2|0)+f_3(3) & = & 1.1\left[0(1)\right]+2.04 \\ E(P_2|1)+f_3(2) & = & 1.1\left[1(.9)\right]+1.80 \\ E(P_2|2)+f_3(1) & = & 1.1\left[1(.2)+2(.7)\right]+1.08 \\ E(P_2|3)+f_3(0) & = & 1.1\left[1(.2)+2(.3)+3(.4)\right]+0 \end{bmatrix}$$

$x = 6$ หมายความว่า พ่อค้าจะส่งสินค้าไปจำหน่ายที่ร้านค้า 2 และ 3 รวมกัน 6 ลอท ถ้าเขาส่งไปจำหน่ายที่ร้านค้า 2 x_2 ลอท ที่เหลือ $6-x_2$ ลอทจะส่งไปที่ร้านค้า 3 โดยเหตุที่จำนวนอุปสงค์สูงสุดของร้านค้า 2 เท่ากับ 4 ลอท ดังนั้น ค่าของ x_2 จะต้องไม่เกิน 4 ลอท

ค่าคาดหวังของกำไรรวมที่ดีที่สุด จะคำนวณได้จาก

$$\text{ค่าสูงสุด}\begin{bmatrix} E(P_2|0)+f_3(6) & = & 1.1\left[\left[0(1)\right]+2.28 \\ E(P_2|1)+f_3(5) & = & 1.1\left[1(.9)\right]+2.28 \\ E(P_2|2)+f_3(4) & = & 1.1\left[1(.2)+2(.7)\right]+2.28 \\ E(P_2|3)+f_3(3) & = & 1.1\left[.2+2(.3)+3(.4)\right]+2.04 \\ E(P_2|4)+f_3(2) & = & 1.1\left[.2+.6+3(.3)+4(.1)\right]+1.80 \end{bmatrix}$$

จากตารางที่ 3 พ่อค้ามีสินค้าทั้งหมด 6 ลอท ที่จะส่งไปจำหน่ายที่ร้านค้าทั้ง 3 ด้วยเหตุที่จำนวนอุปสงค์สูงสุดของร้านค้า 1 เท่ากับ 4 ดังนั้นค่าของ x_1 ต้องไม่เกิน 4

ค่าคาดหวังของกำไรรวมที่ดีที่สุด จะคำนวณได้จาก

$$\text{ค่าสูงสุด}\begin{bmatrix} E(P_1|0)+f_2(6) & = & 1.0\ \left[0(1)\right]+4.24 \\ E(P_1|1)+f_2(5) & = & \left[0+1(1)\right]+4.00 \\ E(P_1|2)+f_2(4) & = & \left[1(.2)+2(.8)\right]+3.56 \\ E(P_1|3)+f_2(3) & = & \left[.2+2(.2)+3(.6)\right]+2.84 \\ E(P_1|4)+f_2(2) & = & \left[.2+.4+3(.4)+4(.2)\right]+2.07 \end{bmatrix}$$

การอ่านคำตอบ $f_1(6) = 5.36$ พันบาท จะเป็นค่าคาดหวังของกำไรรวมสูงสุด การแจกจ่ายที่ดีที่สุด จะได้จาก

$$x_1^* = d_1(6) = 2, \qquad x_2^* = d_2(6-2) = 2, \qquad x_3^* = d_3(6-2-2) = 2$$

ให้นักศึกษาแก้ปัญหาในตัวอย่างนี้ โดยสร้างตารางของ

$$g_j(x_j) = E(P_j|x_j)$$

แล้วหาคำตอบตามวิธีการของตัวแบบ (4.1)

ข้อสังเกต

ในทางปฏิบัติ การส่งสินค้าไปจำหน่าย เราจะพบว่า ในบางครั้งจะมีค่าใช้จ่ายบางประเภทคงที่ และบางครั้งการส่งไปขายจำนวนมากจะมีส่วนลดพิเศษ เป็นต้น กรณีเช่นนี้ เราอาจพิจารณาจำนวนสินค้าคงเหลือด้วย นั่นคือ พิจารณาค่าของ x_j ตามค่าของ x ถ้า $x_j > D_j$ จำนวนที่มากกว่าจะเป็นจำนวนสินค้าคงเหลือ หรือสินค้าคงคลังนั่นเอง

โดยทั่วไปการคาดคะเนจำนวนอุปสงค์สินค้าของเขตการค้าหนึ่ง มักจะคาดคะเนเป็นงวด ๆ เช่น เป็นวัน สัปดาห์ หรือเดือน เป็นต้น การผลิตหรือสั่งสินค้ามาจำหน่าย จะต้องพิจารณาความต้องการหรืออุปสงค์สินค้าในแต่ละงวด และดูความเหมาะสมในการเก็บสินค้าคงคลังด้วย ซึ่งเราเรียกปัญหาประเภทนี้ว่า **ปัญหาสินค้าคงคลัง** (Inventory Problem)

ในปัญหาสินค้าคงคลัง การพิจารณากำหนดการผลิตสินค้าและจำนวนสินค้าคงคลังที่เหมาะสม เมื่อจำนวนอุปสงค์สินค้าไม่แน่นอน แต่เราสามารถคาดคะเนการแจกแจงน่าจะเป็นของจำนวนอุปสงค์สินค้าได้ กำหนดการผลิตและจำนวนสินค้าคงคลังที่ดีที่สุด จะขึ้นอยู่กับค่าคาดหวังของค่าใช้จ่ายต่ำสุด หรือค่าคาดหวังของผลตอบแทนสูงสุด

สมมติว่า เรามี I_j = จำนวนสินค้าคงเหลือ (คงคลัง) เมื่อเริ่มต้นการผลิตในงวดที่ j, $j = 1,2,\ldots,n$

f = ราคาขายต่อหน่วยของสินค้า

r = ต้นทุนการผลิตต่อหน่วย

c = ต้นทุนการจัดเก็บสินค้าคงเหลือต่อหน่วย

D_j = จำนวนอุปสงค์ของสินค้าในงวดที่ j

$P(D_j = d)$ = ความน่าจะเป็นของจำนวนอุปสงค์สินค้าในงวดที่ j เท่ากับ d หน่วย, $d = 0,1,\ldots,k$

x_j = จำนวนสินค้าที่ผลิตในขั้นตอน (งวดที่) j เมื่อมีสินค้าคงเหลือก่อนการผลิตนี้ I_j หน่วย, $j = 1,2,\ldots,n$ $x_j = 0,1,\ldots, k - I_j$

ดังนั้น ต้นทุนการผลิตสินค้านี้จะเท่ากับ $r x_j$

ค่าคาดหวังของกำไรที่ได้จากการขายสินค้า $x_j + I_j = a$ หน่วย

$$E(P_j | x_j + I_j = a) = \sum_{d=0}^{a-1} P(D_j = d)\{fd - c(a-d)\} + P(D \geqslant a)fa - r x_j \qquad (5.6)$$

ถ้า $v_j(I_j)$ = ค่าคาดหวังสูงสุดของกำไร กำหนดว่ามีสินค้าคงเหลือ I_j หน่วย และมี $j-1$ ขั้นตอนที่เหลือ, $j = n, n-1, \ldots, 1$

$d(I_j)$ = ค่าของ x_j ที่มีค่าคาดหวังของกำไรสูงสุด $v_j(I_j)$ เราจะได้ recursive function

$$v_j(I_j) = \underset{x_j = 0,1,\ldots,k-I_j}{\text{ค่าสูงสุด}} \Big[E(P_j|x_j+I_j) + \sum_{k=0}^{x_j+I_j-1} P(D_j = d)v_{j+1}(x_j+I_j-d)$$
$$+ P(D_j \geqslant x_i+I_i)v_{j+1}(0)\Big]$$

ให้ $x_j + I_j = a, \; I_j \leqslant a \leqslant k$ จะได้

$$f_j(I_j) = \underset{x_j = 0,1,\ldots,k-I_j}{\text{ค่าสูงสุด}} \Big[\sum_{d=0}^{a-1} P(D_j = d)\{fd - c(a-d) + v_{j+1}(a-d)$$
$$+ P(D \geqslant a)\{fa + v_{i+1}(0)\} - r\,x_j\Big] \quad (5.7)$$

ตัวอย่างที่ 5.2 ผู้จัดการฝ่ายผลิตกำลังพิจารณาดูความจำเป็นในการเก็บของคงคลังที่มีราคาค่อนข้างแพง ในระหว่างการผลิต 2 เดือนหน้า ต้นทุนการผลิตของชิ้นนี้ต่อหน่วย เป็น 25,000 บาท ต้นทุนจัดเก็บของคงเหลือต่อหน่วยเป็น 2,500 บาท ราคาขายต่อหน่วยของของชิ้นนี้ เท่ากับ 50,000 บาท ด้วยเหตุที่ช่วงเวลาที่เริ่มการผลิตจำนวนใหม่นั้นสั้น จำนวนที่ผลิตได้ในแต่ละเดือนจึงจัดแค่ให้เพียงพอกับจำนวนอุปสงค์ของเดือนนั้น เมื่อเริ่มการผลิตในต้นเดือนแรก ไม่มีสินค้าคงคลังเลย ของชิ้นใดที่เหลืออยู่หลังการผลิตในเดือนที่ 2 จะมีราคา 12,500 บาท จำนวนอุปสงค์ของชิ้นนี้มีการกระจายแบบเดียวกันทั้ง 2 เดือน และมีการแจกแจงดังต่อไปนี้

จำนวนอุปสงค์ D_j	0	1	2	3
ความน่าจะเป็น	0.25	0.40	0.20	0.15

สิ่งที่จะต้องพิจารณาก็คือ ควรจะกำหนดการผลิตในเดือนแรกกี่ชิ้น เดือนที่ 2 กี่ชิ้น ด้วยเหตุที่จำนวนอุปสงค์ไม่แน่นอน ดังนั้น จำนวนของคงเหลือจึงไม่แน่นอนด้วย ถ้าจำนวนอุปสงค์มากกว่าจำนวนผลิต ไม่ถือว่าเกิดการเสียหาย เพียงแต่ไม่มีของขายเท่านั้นเอง การตัดสินใจเกี่ยวกับการผลิตก็เพื่อให้ได้ค่าคาดหวังสูงสุดของผลตอบแทน

วิธีทำ จุดหมายของปัญหานี้อยู่ที่จำนวนของคงเหลือ เมื่อเริ่มต้นการผลิตแต่ละเดือน เมื่อต้องการกำหนดการผลิตในช่วง 2 เดือน ดังนั้น เราแบ่งขั้นตอนของปัญหานี้เป็น 2 ขั้นตอน เริ่มต้นจากการพิจารณาจำนวนของคงเหลือเมื่อสิ้นสุดการผลิตในเดือนที่ 2 ของเหล่านี้มีราคาต่อหน่วย 12,500 บาท ดังนั้น ถ้าเราให้ I_3 เป็นจำนวนของคงเหลือเมื่อสิ้นสุดการผลิตเดือนที่ 2 และ $v_3(I_3)$ พันบาทเป็นกำไรที่ได้จากการมีของคงเหลือจำนวนนี้ จะได้

I_3	0	1	2	3
$v_3(I_3)$	0	12.5	25.0	37.5

เราไม่เรียกว่าขั้นตอน เนื่องจากไม่มีการผลิตหลังเดือนที่ 2 เพียงแต่พิจารณาค่าหากมีของเหลือจากเดือนที่ 2 เท่านั้น

ต่อไปพิจารณาขั้นตอนที่ 2 ซึ่งก็คือการผลิตในเดือนที่ 2 เมื่อมีสินค้าคงคลังก่อนการผลิต I_2, $I_2 = 0,1,2,3$ จำนวนของที่ผลิตในเดือนที่ 2 คือ x_2, $x_2 + I_2 \leqslant 3$ จำนวนที่ขายได้ ก็คือจำนวนอุปสงค์ของของนั้น แต่ต้องไม่เกินปริมาณผลิตและของคงเหลือรวมกัน จะได้ผลดังตารางต่อไปนี้

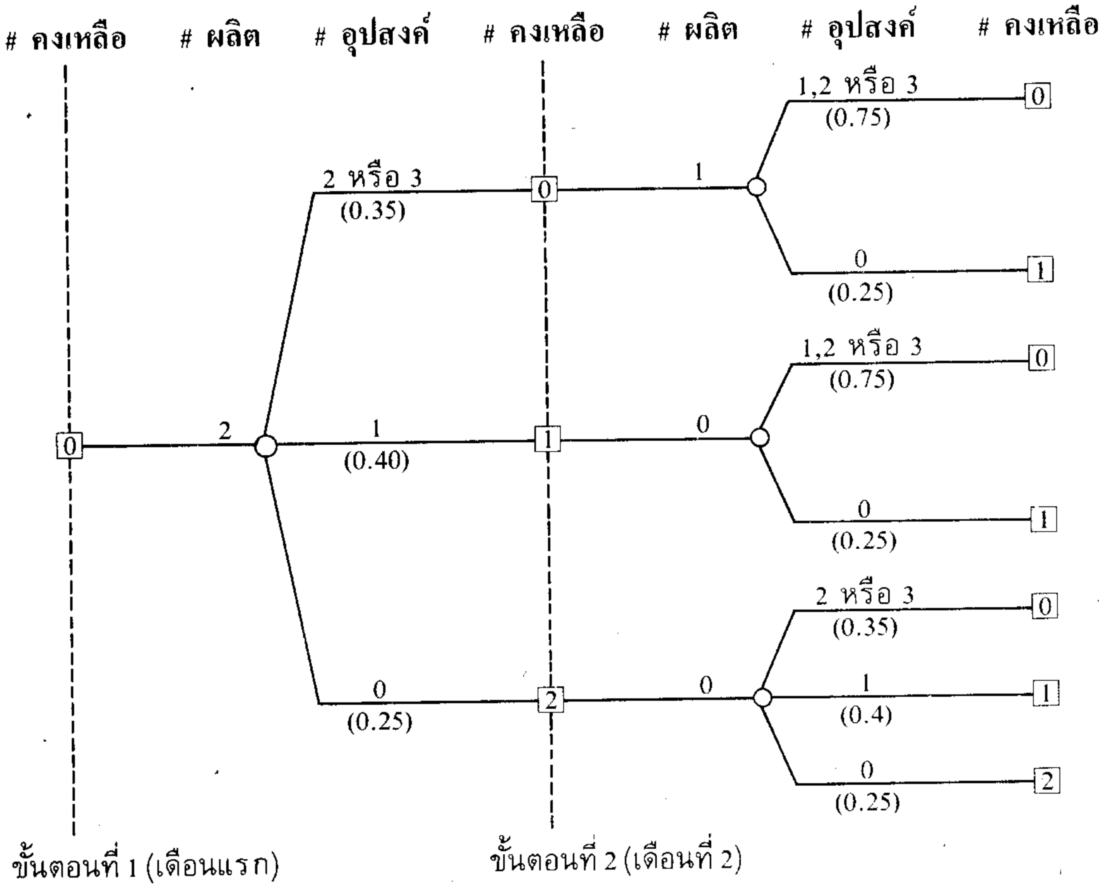
I_2	x_2	ค่าคาดหวังของกำไร (พันบาท)	$v_2(I_2)$	$d(I_2)$
0	0	0.0	15.0	1
	1	$0.25(0-2.5+12.5)+0.75(50)-25 = 15.0$		
	2	$0.25(0-5.0+25)+0.4(50-2.5+12.5)+0.35(100)-50 = 14.0$		
	3	$0.25(37.5-7.5)+0.4(50-5+25)+0.2(100-2.5+12.5)$ $+0.15(150)-75 = 5.0$		
1	0	$0.25(12.5-2.5)+0.75(50) = 40.0$	40.0	0
	1	$0.25(25-5)+0.4(50-2.5+12.5)+0.35(100)-25 = 39.0$		
	2	$0.25(37.5-7.5)+0.4(50-5+25)+0.2(100-2.5+12.5)$ $+0.15(150)-50 = 30.0$		
2	0	$0.25(25-5)+0.4(50-2.5+12.5)+0.35(100) = 64.0$	64.0	0
	1	$0.25(37.5-7.5)+0.4(50-5+25)+0.2(100-2.5+12.5)$ $+0.15(150)-25 = 55.0$		
3	0	$0.25(37.5-7.5)+0.4(50-5+25)+0.2(100-2.5+12.5)+0.15(150)$	80.0	

ขั้นตอนต่อไป เป็นการพิจารณาจำนวนผลิต เดือนแรก ก่อนการผลิตในเดือนนี้ ไม่มีสินค้าคงคลัง นั่นคือ $I_1 = 0$ เราจึงพิจารณาเฉพาะจำนวนผลิต $x_1 = 0,1,2$หรือ 3 สรุปผลได้ดังนี้

x_1	ค่าคาดหวังของกำไร (พันบาท)	$v_1(I_1)$	$d(I_1)$
0	$1.00(15) = 15.0$	40.0	2
1	$0.25(40-2.5)+0.75(50+15)-25 = 33.125$		
2	$0.25(64-5)+0.4(50-2.5+40)+0.35(100+15)-50 = 40.0$		
3	$0.25(80-7.5)+0.4(50-5+64)+0.2(100-2.5+40)+0.15(150+15)-75$		
	$= 38.975$		

สรุปได้ว่า ในเดือนแรกจะผลิต (x_1) 2 หน่วย ถ้าขายหมด แสดงว่าไม่มีของคงเหลือในต้นเดือน 2 ด้วยความน่าจะเป็น 0.35 เป็นผลให้ตัดสินใจผลิตในเดือนที่ 2 1 หน่วย ถ้าขายหมดจะไม่มีของคงเหลือ เมื่อสิ้นเดือนที่ 2 ด้วยความน่าจะเป็น 0.75 แต่ถ้าขายไม่ได้ก็จะมีของคงเหลือเมื่อสิ้นเดือน 1 หน่วยด้วย ความน่าจะเป็น 0.25 ถ้าในเดือนแรกขายได้ 1 หน่วย จะมีของคงเหลือต้นเดือนที่ 2 1 หน่วย ด้วยความน่าจะเป็น 0.40 เป็นผลให้ตัดสินใจไม่ผลิตในเดือนที่ 2 ดังนั้น จะมีของอยู่ในเดือนนี้ 1 หน่วย ถ้าขายหมด จะไม่มีของเหลือเมื่อสิ้นเดือนที่ 2 ด้วยความน่าจะเป็น 0.75 แต่ถ้าขายไม่ได้ จะมีของคงเหลือเมื่อสิ้นเดือนที่ 2 1 หน่วย ด้วยความน่าจะเป็น 0.25 ถ้าในเดือนแรกขายของไม่ได้เลย จะมีของคงเหลือในต้นเดือน 2 2 หน่วย ด้วยความน่าจะเป็น 0.25 เป็นผลให้ตัดสินใจไม่ผลิตในเดือนที่ 2 ดังนั้น ในเดือนนี้จะมีของอยู่ 2 หน่วย ถ้าขายหมดจะไม่มีของเหลือเมื่อสิ้นสุดเดือนที่ 2 ด้วยความน่าจะเป็น 0.35 ถ้าขายได้ 1 หน่วย จะมีของคงเหลือในสิ้นเดือน 1 หน่วย ด้วยความน่าจะเป็น 0.4 แต่ถ้าขายไม่ได้เลย จะมีของคงเหลือเมื่อสิ้นเดือน 2 หน่วย ด้วยความน่าจะเป็น 0.25 คาดว่าจะได้ผลตอบแทนรวมกันทั้งหมด 40,000 บาท

การตัดสินใจดังกล่าวแสดงให้เห็นได้ด้วยแผนภูมิ ดังต่อไปนี้



5.1.2 SDP ของปัญหาการแจกแจงน่าจะเป็น

การหาคำตอบต่อปัญหาการโปรแกรมพลวัตเชิงน่าจะเป็น นอกจากจะใช้วิธีพิจารณาจากค่าคาดหวังแล้ว ปัญหาบางประเภทจะพิจารณาจากค่าความน่าจะเป็นโดยตรง อาจจะเป็นการหาเพื่อให้ได้ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ทุกขั้นตอนมีค่ามากที่สุด หรือน้อยที่สุด แล้วแต่กรณี โดยเหตุที่แต่ละขั้นตอนเป็นอิสระกัน ดังนั้น การหาค่าความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ในทุกขั้นตอน จะเป็นผลคูณของความน่าจะเป็นของแต่ละขั้นตอน การคำนวณค่าความน่าจะเป็น อาศัยกฎแห่งความน่าจะเป็น

ถ้าเรามี x_j เป็นตัวแปรตัดสินใจในขั้นตอนที่ j

$P_j(x_j)$ เป็นความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่เกิด x_j ในขั้นตอน j

x เป็นจุดหมายในขั้นตอน j, $x_j \leq x$

$f_n(x)$ เป็นความน่าจะเป็นที่เหมาะสมในขั้นตอน n เมื่อมี $n-1$ ขั้นตอนเหลืออยู่

$d_n(x)$ เป็นนโยบายที่เหมาะสมของ x_n ซึ่งมีความน่าจะเป็น $f_n(x)$

จะได้ $f_n(x) = P_n(x_n)$ และ $d_n(x) = x_n$

ความสัมพันธ์ของฟังก์ชันต่อเนื่องคือ

$$f_j(x) = \text{ค่าต่ำสุดหรือค่าสูงสุด}\left[P_j(x_j)f_{j-1}(x-x_j)\right] \quad j = 1,2,\ldots,n \qquad (5.8)$$
$$x_j = 0,1,\ldots,x$$

ตัวอย่างที่ 5.3 ปัญหาสำคัญที่รัฐบาลกำลังเผชิญอยู่ในขณะนี้ ปัญหาหนึ่งคือ ความล้มเหลวในการดำเนินงานของรัฐวิสาหกิจ ซึ่งจากการคาดคะเนผลการดำเนินงานในปีนี้ประมาณว่า รัฐวิสากิจ ก ข และ ค จะประสบความล้มเหลวในการดำเนินงาน ด้วยความน่าจะเป็น 0.60, 0.80 และ 0.55 ตามลำดับ รัฐจำเป็นต้องยื่นมือเข้าไปช่วย โดยมีเป้าหมายที่จะทำให้ความน่าจะเป็นที่รัฐวิสาหกิจทั้ง 3 ประสบความล้มเหลวในการดำเนินงานน้อยที่สุด โดยเหตุที่งบประมาณมีจำกัด จึงตัดสินใจว่า จะให้งบช่วยเหลือรัฐวิสาหกิจทั้ง 3 รวมกันไม่เกิน 3 หน่วยงบประมาณ ความน่าจะเป็นที่คาดคะเนได้ของรัฐวิสาหกิจแต่ละแห่ง ที่จะประสบความล้มเหลว ภายหลังการเพิ่มงบประมาณเข้าไป 1, 2 หรือ 3 หน่วย มีดังต่อไปนี้

จำนวนหน่วยงบประมาณ	**รัฐวิสาหกิจ**		
	ก	**ข**	**ค**
1	0.30	0.60	0.30
2	0.20	0.30	0.10
3	0.15	0.10	0.05

รัฐควรจัดสรรงบประมาณช่วยเหลือการดำเนินงานแก่รัฐวิสาหกิจแต่ละแห่งอย่างไร จึงจะเกิดผลดีที่สุด

วิธีทำ เราแบ่งแต่ละรัฐวิสาหกิจเป็นขั้นตอนหนึ่ง ๆ ดังนั้น การคำนวณจะมี 3 ขั้นตอน เริ่มต้นการคำนวณจากรัฐวิสาหกิจ ค (ขั้นตอนที่ 3) จะได้

$x = x_3$	0	1	2	3
$f_3(x)$	0.55	0.30	0.10	0.05
$d_3(x)$	0	1	2	3

ขั้นที่ 2 พิจารณาจากรัฐวิสาหกิจ ข เพิ่มงบประมาณให้รัฐวิสาหกิจ ข และ ค รวมกัน x หน่วย โดยเพิ่มให้ ข x_2 หน่วย ที่เหลือ $x - x_2$ หน่วยเป็นของ ค

ความน่าจะเป็นที่การดำเนินงานของรัฐวิสาหกิจทั้ง 2 จะล้มเหลวจะเท่ากับ

$$p_2(x_2)f_3(x - x_2)$$

ความน่าจะเป็นที่จะประสบความล้มเหลวน้อยที่สุด

$$f_2(x) = \underset{\substack{x_2 = 0,1,\ldots,x \\ x = 0,1,\ldots,3}}{\text{ค่าต่ำสุด}} \left[p_2(x_2)f_3(x - x_2)\right]$$

ปรากฏผลตามตาราง ดังนี้

$x \backslash x_2$	$p_2(x_2)f_3(x-x_2)$ 0	1	2	3	$f_2(x)$	$d_2(x)$
0	(0.80)(0.55)				0.44	0
1	(0.80)(0.30)	(0.60)(0.55)			0.24	0
2	(0.80)(0.10)	(0.60)(0.30)	(0.30)(0.55)		0.08	0
3	(0.80)(0.05)	(0.60)(0.10)	(0.30)(0.30)	(0.10)(0.55)	0.04	0

ขั้นตอนที่ 1 ซึ่งเป็นขั้นสุดท้าย ค่าของ $x = 3$ เท่านั้น ความน่าจะเป็นที่การดำเนินงานของทั้งสามจะประสบความล้มเหลว เมื่อให้งบช่วยเหลือแก่ ก 0, 1, 2 หรือ 3 หน่วย และให้งบช่วยเหลือ ข และ ค รวมกัน $3 - x$ หน่วย จะเป็นผลคูณระหว่าง $p_1(x_1)$ กับ $f_2(3 - x_1)$ ผลสรุปมีดังนี้

$x \backslash x_1$	0	1	2	3	$f_1(x)$	$d_1(x)$
3	(0.60)(0.04)	(0.30)(0.08)	(0.20)(0.24)	(0.15)(0.44)	0.024	0 หรือ 1

สรุปว่า รัฐควรให้งบประมาณช่วยเหลือเฉพาะรัฐวิสาหกิจ ค แห่งเดียว 3 หน่วยงบประมาณ หรือให้งบประมาณช่วยเหลือรัฐวิสาหกิจ ก 1 หน่วย และให้ ค 2 หน่วยก็ได้ ความน่าจะเป็นที่รัฐวิสาหกิจทั้งสามจะดำเนินงานล้มเหลว เท่ากับ 0.024

หมายเหตุ

การอ่านผลลัพธ์จากตาราง ในที่นี้ $d_1(x) = 0$ หรือ 1 ดังนั้น

ถ้า $x_1^* = d_1(3) = 0,\ x_2^* = d_2(3-0) = 0,\ x_3^* = d_3(3-0-0) = 3$

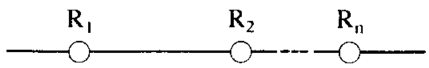
ถ้า $x_1^* = d_1(3) = 1,\ x_2^* = d_2(3-1) = 0,\ x_3^* = d_3(3-1-0) = 2$

การนำกฎของความน่าจะเป็นไปประยุกต์ใช้ ที่สำคัญเรื่องหนึ่งก็คือ การวัดความเชื่อถือได้ของเครื่องมือ หรือระบบงาน ความเชื่อถือได้จะวัดจากค่าของความน่าจะเป็นของการใช้งานได้ของเครื่องมือหรือระบบงานนั้น ๆ เครื่องมือหรือระบบงานที่มีส่วนประกอบทางด้านเครื่องจักรไฟฟ้า จะมีอายุการใช้งานที่จำกัด เครื่องมือหรือระบบงานที่นำส่วนประกอบต่าง ๆ มาต่อกันเข้าจะทำให้มีโอกาสใช้งานได้มากยิ่งขึ้น การต่อส่วนประกอบของเครื่องมือหรือของระบบงานใด ๆ มีวิธีการต่อกันได้ 2 แบบ

1) การต่อแบบอนุกรม เครื่องมือหรือระบบงาน จะทำงานได้ก็ต่อเมื่อทุกส่วนประกอบใช้งานได้ ดังนั้น

ถ้า R_j เป็นความเชื่อถือได้ (ความน่าจะเป็นของการใช้งานได้) ของส่วนประกอบ $j,\ j = 1,2,\ldots,n$

ถ้านำทุกส่วนประกอบ มาต่อกันเข้าแบบอนุกรม เป็นระบบหนึ่ง



ความเชื่อถือได้ของระบบ = ความน่าจะเป็นของการใช้งานได้ของทั้งระบบ

$$= R_1 \cdot R_2 \ldots R_n = \prod_{i=1}^{n} R_i$$

2) การต่อแบบขนาน ถ้าในส่วนประกอบใดของระบบหรือเครื่องมือใดมาจากการนำชิ้นส่วนต่อแบบขนาน ชิ้นส่วนใดจะทำงานได้ หรือจะทำงานไม่ได้ จะเป็นอิสระต่อกัน ส่วนประกอบของระบบจะทำงานได้ก็ต่อเมื่อมีชิ้นส่วน อย่างน้อย 1 ชิ้นทำงานได้ ดังนั้น ถ้าชิ้นส่วนแต่ละชิ้นมีความเชื่อถือได้ $R_j,\ j = 1,2,\ldots,n$

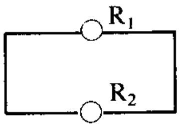
ความเชื่อถือได้ของส่วนประกอบในระบบนี้

= ความน่าจะเป็นของการใช้งานได้ของชิ้นส่วนอย่างน้อยที่สุด 1 ชิ้น

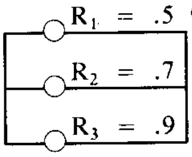
= 1 – ความน่าจะเป็นที่ชิ้นส่วนทุกชิ้นใช้งานไม่ได้

$$= 1-(1-R_1)(1-R_2)\ldots(1-R_n) = 1-\prod_{i=1}^{n}(1-R_i)$$

ตัวอย่างเช่น

$n = 2$ 

ความเชื่อถือได้ของส่วนประกอบนี้ $= 1-(1-R_1)(1-R_2)$

$n = 3$ 

ความเชื่อถือได้ของส่วนประกอบนี้ $= 1-(.5)(.3)(.1)$ $= .985$

ในปัญหาความเชื่อถือได้ (Reliability Problem) จะพูดถึงการออกแบบส่วนประกอบของระบบงาน เช่น เครื่องมือเครื่องใช้ทางด้านอิเล็กทรอนิกส์ไฟฟ้า แต่ละส่วนประกอบของระบบจะต่อกันแบบอนุกรม ภายในส่วนประกอบหนึ่ง ๆ จะต่อกันแบบขนาน นั่นก็หมายความว่าถ้าส่วนประกอบใดทำงานไม่ได้ ระบบนี้ก็ทำงานไม่ได้ ถ้าภายในส่วนประกอบใดมีชิ้นส่วนใดทำงานไม่ได้อย่างน้อย 1 ชิ้น ส่วนประกอบนั้น ๆ ยังคงทำงานได้ และระบบนี้ยังคงทำงานได้ อย่างไรก็ตามการประกอบส่วนประกอบของระบบ ยังมีข้อจำกัดในเรื่องงบประมาณค่าใช้จ่ายของเครื่องมือในเรื่องของน้ำหนัก หรือรูปร่างของระบบต่าง ๆ ปัญหาในเรื่องนี้จึงเป็นปัญหาที่จะต้องพิจารณาว่า จะออกแบบส่วนประกอบของระบบงาน ตามเกณฑ์กำหนด (specification) และภายใต้ข้อจำกัดของงบประมาณ หรือน้ำหนัก ฯลฯ อย่างไร จึงจะทำให้ระบบงานนั้น มีความเชื่อถือได้สูงสุด

ในการออกแบบเครื่องมือหรือระบบงาน ที่ประกอบด้วย n ส่วนประกอบที่ต่อกันแบบอนุกรม

กำหนดตัวแปรตัดสินใจ x_j เป็นจำนวนหน่วยของชิ้นส่วน ในส่วนประกอบ j ที่ต่อขนานกันได้ไม่เกิน m ชิ้น, $x_j = 1,2,\ldots,m$

$R_j(x_j)$ เป็นความเชื่อถือได้ของส่วนประกอบ j ที่มีชิ้นส่วนประกอบต่อขนานกัน x_j ชิ้น, $x_j = 1,2,\ldots,m$

Z = ความเชื่อถือได้ของเครื่องมือหรือระบบงานทั้งหมด

ถ้า $c_j(x_j)$ เป็นราคาของชิ้นส่วน x_j ชิ้น ในส่วนประกอบ j

และ b = จำนวนเงินที่จะใช้สร้างเครื่องมือหรือระบบงาน

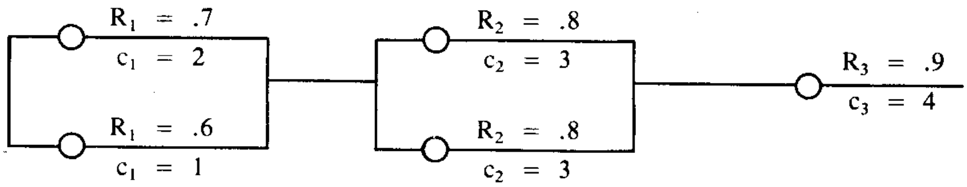
จะได้

ค่าสูงสุด $Z = \prod_{j=1}^{n} R_j(x_j)$

โดยมีข้อจำกัด $\sum_{j=1}^{n} c_j(x_j) \leqslant b$ (5.9)

$$x_j = 1,2,\ldots,m$$

ตัวอย่างเช่น ถ้า $n = 3, x_1 = 2, x_2 = 2, x_3 = 1$ เราจะได้เครื่องมือที่มีรูปแบบดังนี้



ความเชื่อถือได้ของเครื่องมือนี้ $= [1-(.3)(.4)][1-(.2)(.2)][.9]$

ราคาของเครื่องมือ $= (2+1)+(3+3)+4 = 13$

ค่านี้ต้องไม่เกินค่า b

การแก้ปัญหา ใช้โปรแกรมพลวัต จะทำแบบรุดหน้า หรือย้อนกลับก็ได้

ขั้นตอน j แสดงถึง ส่วนประกอบสำคัญที่ $j, j = 1,2,\ldots,n$

จุดหมาย x แสดงถึง จำนวนงบประมาณ หรือค่าใช้จ่ายรวมที่อยู่ในแต่ละขั้นตอน

พิจารณาจากเกณฑ์กำหนดของปัญหา จะเห็นได้ว่า ส่วนประกอบสำคัญแต่ละส่วนจะต้องมีชิ้นส่วนอย่างน้อย 1 ชิ้น ดังนั้น จึงมีข้อจำกัดของค่า x (การคำนวณแบบรุดหน้า) ดังนี้

ในขั้นตอนที่ 1 จะได้ $c_1(1) \leqslant x \leqslant b - \sum_{j=2}^{n} c_j(1)$

$$f_1(x) = \underset{x_1 = 1,2,\ldots,m}{\text{ค่าสูงสุด}} \; R_1(x_1)$$

= ความเชื่อถือได้ของส่วนประกอบที่ 1 ที่ได้จากการต่อชิ้นส่วนแบบขนาน x_1 ชิ้น มีค่าใช้จ่าย x

$d_1(x)$ = ค่าของ x_1 ที่มีความเชื่อถือได้ $f_1(x)$

ในขั้นตอนที่ $j,\ j = 2,3,\ldots,n$

จะได้ $\ell = c_1(1)+\ldots+c_j(1) \leqslant x \leqslant b - \sum_{k=j+1}^{n} c_k(1) = u$

$f_j(x)$ = ความเชื่อถือได้ที่ดีที่สุดของส่วนประกอบที่ $1,2,\ldots,j$ มีค่าใช้จ่ายรวมกัน x

เราจะได้ฟังก์ชันความสัมพันธ์ต่อเนื่อง (recursive function) $j = 2,3,\ldots,n$ ดังนี้

$$f_j(x) = \underset{x_j}{\text{ค่าสูงสุด}} \left[R_j(x_j)\cdot f_{j-1}(x - c_j(x_j))\right]$$

$$\ell \leqslant x \leqslant u \qquad (5.10)$$

$d_j(x) \;=\;$ ค่าของ x_j ที่มีความเชื่อถือได้ $f_j(x)$

ให้เรามาพิจารณาจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 5.4 หน่วยงานผลิตต้องการออกแบบเครื่องมืออิเล็กทรอนิกส์ ที่มีส่วนประกอบสำคัญต่อกันแบบอนุกรม 3 ส่วน แต่ละส่วนประกอบจะมีชิ้นส่วนประกอบต่อกันแบบขนาน ไม่เกิน 3 ชิ้น ราคาของชิ้นส่วนประกอบ c_j และความเชื่อถือได้ R_j ของชิ้นส่วนแต่ละชิ้นที่จะนำมาใช้ในส่วนประกอบสำคัญ j กำหนดไว้ดังนี้

ชิ้นส่วนประกอบ 1		ชิ้นส่วนประกอบ 2		ชิ้นส่วนประกอบ 3	
c_1	R_1	c_2	R_2	c_3	R_3
2	0.7	1	0.6	3	0.9

หน่วยงานผลิตมีงบประมาณที่จะสร้างเครื่องมือนี้เท่ากับ 12 ดังนั้น หน่วยงานผลิตควรจะออกแบบเครื่องมืออย่างไรจึงจะเกิดผลดีที่สุด

วิธีทำ เพื่อความสะดวก เราหาราคาและความเชื่อถือได้ของชิ้นส่วนประกอบที่ j เมื่อมีจำนวนที่นำมาต่อขนานกัน k ชิ้น $k = 1,2,3$ ซึ่งเราจะได้

$R_j(1) = R_j, \quad R_j(2) = 1-(1-R_j)^2, \quad R_j(3) = 1-(1-R_j)^3$

ปรากฏผลดังนี้

k	j = 1		j = 2		j = 3	
	$c_1(k)$	$R_2(k)$	$c_2(k)$	$R_2(k)$	$c_3(k)$	$R_3(k)$
1	2	0.7	1	0.6	3	0.9
2	4	0.91	2	0.84	6	0.99
3	6	0.973	3	0.936	9	0.999

การคำนวณแบบรุดหน้า

ขั้นตอนที่ 1 $2 \leqslant x \leqslant 8$, $f_1(x) =$ ค่าสูงสุด $R_1(x_1)$
$x_1 = 1,2,3$

x_1 \ x	2	3	4	5	6	7	8
1	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7
2			0.91	0.91	0.91	0.91	0.91
3					0.973	0.973	0.973
$f_1(x)$	0.7	0.7	0.91	0.91	0.973*	0.973	0.973
$d_1(x)$	1	1	2	2	3	3	3

ขั้นตอน 2 $3 \leqslant x \leqslant 9$

$f_2(x) =$ ค่าสูงสุด $[R_2(x_2) \cdot f_1(x-x_2)]$ $(\because c_2 = 1)$
$x_2 = 1,2,3$
$3 \leqslant x \leqslant 9$

x \ x_2	1	2	3	$f_2(x)$	$d_2(x)$
3	(.6)(.7) = .42			.42	1
4	(.6)(.7) = .42	(.84)(.7) = .588		.42	1
5	(.6)(.91) = .546	(.84)(.7) = .588	(.936)(.7) = .6552	.6552	3
6	(.6)(.91) = .546	(.84)(.91) = .7644	(.936)(.7) = .6552	.7644	2
7	(.6)(.973) = .5838	(.84)(.91) = .7644	(.936)(.91) = .85176	.85176	3
8	(.6)(.973) = .5838	(.84)(.973) = .81732	(.936)(.91) = .85176	.85176	3
9	(.6)(.973) = .5838	(.84)(.973) = .81732	(.936)(.973) = .91073*	.91073*	3

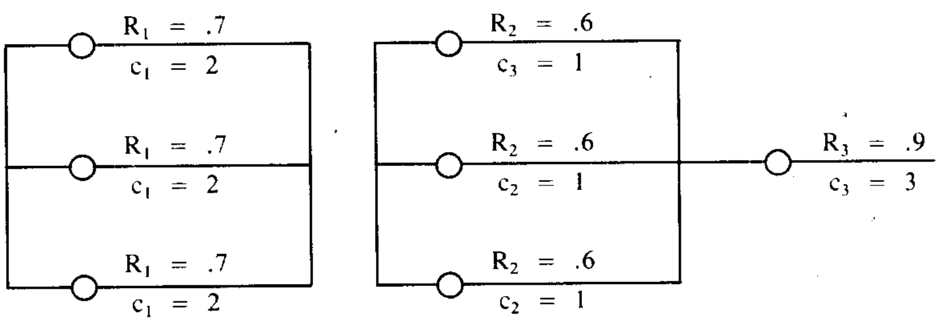
ขั้นตอน 3 $6 \leqslant x \leqslant 12$

$$f_3(x) = \underset{\substack{x_3 = 1,2,3 \\ 6 \leqslant x \leqslant 12}}{\text{ค่าสูงสุด}} \left[R_3(x_3) \cdot f_2(x - 3x_3)\right]$$

x_3 / x	1	2	3	$f_3(x)$	$d_3(x)$
6	(.9)(.42) = .378			.378	1
7	(.9)(.42) = .378			.378	1
8	(.9)(.6552) = .5897			.5897	1
9	(.9)(.7644) = .6879	(.99)(.42) = .4158		.6879	1
10	(.9)(.85176) = .7666	(.99)(.42) = .4158		.7666	1
11	(.9)(.85176) = .7666	(.99)(.6552) = .6486		.7666	1
12	(.9)(.91073) = .8196*	(.99)(.7644) = .7567	(.999)(.42) = .4196	.8196*	1

สรุปได้ว่า ความเชื่อถือได้สูงสุดของเครื่องมือจะเท่ากับ .8196 ใช้งบประมาณเท่ากับ 12 พอดี โดยออกแบบให้มีการต่อขนานกันของชิ้นส่วนในส่วนประกอบ 1 3 ชิ้น ต่ออนุกรมกับส่วนประกอบ 2 ที่มีชิ้นส่วน 2 ต่อขนานกัน 3 ชิ้น ต่ออนุกรมกับส่วนประกอบ 3 มีชิ้นส่วน 3 1 ชิ้น

รูปร่างของเครื่องมือ แสดงด้วยผังภูมิดังนี้



ค่าใช้จ่ายทั้งหมด $= 3\times2+3\times1+1\times3 = 12$

ความเชื่อถือได้ของเครื่องมือ $= \left[1-(.3)^3\right]\left[1-(.4)^3)\right]\left[.9\right] = 0.8196$

5.2 ลูกโซ่มาร์คอฟ (Markov chains)

ในปัญหาโปรแกรมพลวัต เราพูดถึงจุดหมาย (state) ว่าเป็นมาตรการเฉพาะรายเกี่ยวกับระบบ เช่น ถ้าระบบเป็นการจัดสรรหุ้นให้กับโครงการต่าง ๆ จุดหมายก็คือ จำนวนหุ้นที่จะนำไปพิจารณาเพื่อการจัดสรร ถ้าระบบเป็นคิวของนักศึกษาที่มาลงทะเบียนเรียน จุดหมายก็คือ จำนวนนักศึกษาที่อยู่ในคิวนั้น เป็นต้น ถ้าจุดหมายของระบบเปลี่ยนแปรไป โดยมีความน่าจะเป็นที่กำหนดได้ในช่วงเวลาหนึ่ง เราจะเรียกว่าเป็นกระบวนการเฟ้นสุ่ม (stochastic process) จุดหมายในกระบวนการเฟ้นสุ่มจะมีความสัมพันธ์กับระบบพลวัต แต่มีคำถามบางอย่างที่น่าสนใจแตกต่างไปจากระบบพลวัต คำถามที่เราต้องการพิจารณา ก็คือ

1) ถ้ากำหนดจุดหมายปัจจุบัน r ให้ระบบ มันจะเปลี่ยนเป็นจุดหมาย s ใน n ขั้นตอนต่อไปด้วยความน่าจะเป็นเท่าใด

2) หลังการเปลี่ยนขั้นตอนหลาย ๆ ขั้น ความน่าจะเป็นที่ระบบจะอยู่ที่จุดหมาย s จะเป็นเท่าใด

3) ถ้าในปัจจุบัน บริษัทมีส่วนแบ่งในตลาดจำนวนหนึ่งที่คงที่ ใน n ขั้นตอนต่อไปส่วนแบ่งในตลาดจะเป็นเท่าใด

4) ส่วนแบ่งในตลาดของคู่แข่งขันแต่ละรายในอนาคต จะยังคงคงที่หรือมีการเปลี่ยนแปลงอย่างไร หรือไม่

คำถามเหล่านี้จะตอบได้ก็โดยอาศัยกระบวนการเฟ้นสุ่มอย่างหนึ่ง ที่มีคุณสมบัติเฉพาะเรียกว่า คุณสมบัติมาร์คอฟ นั่นก็คือ การใช้ระบบลูกโซ่มาร์คอฟ โดยทั่วไปเราใช้ลูกโซ่มาร์คอฟในปัญหาการเปลี่ยนยี่ห้อสินค้า ปัญหาการเจริญเติบโตของประชากร ปัญหาทางการบัญชี และปัญหาอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องกับระบบพลวัต

เราสนใจการวิเคราะห์ระบบ ที่มีจุดหมายต่อไปของระบบขึ้นอยู่กับจุดหมายปัจจุบัน และเป็นอิสระกับจุดหมายก่อนหน้านี้ของระบบ

5.2.1 แนวคิดเกี่ยวกับลูกโซ่มาร์คอฟ

ถ้าเรามี X_i เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่แสดงถึงจุดหมายที่กำหนดให้ของระบบ ในขั้นที่ i, $i = 1,2,\ldots$ เมื่อ $X_i = 0,1,2,\ldots,N$ ในที่นี้ ขั้นที่ i มักจะมีความหมายถึงเวลา i หรือ i หน่วยเวลานับจาก 0 ตัวอย่างเช่น ในระบบของคงคลัง X_1 เป็นระดับคงเหลือของสินค้าสิ้นอาทิตย์แรก X_2 เป็นระดับคงเหลือของสินค้าสิ้นอาทิตย์ที่ 2,... ในอีกความหมายหนึ่ง ขั้นที่ i อาจจะแสดงถึงเมื่อไรที่จะมีการติดต่อครั้งที่ i เกิดขึ้น ตัวอย่างเช่น เมื่อมีลูกค้ามาซื้อของยี่ห้อหนึ่ง เราต้องการ

จะรู้ว่า ในครั้งต่อไป ลูกค้าคนนี้จะซื้อของยี่ห้อใด (จุดหมายของระบบในขั้นที่ 1) และหลังจากครั้งถัดไปจะซื้อยี่ห้อใด (จุดหมายของระบบในขั้นที่ 2) เป็นต้น ตัวแปรเชิงสุ่ม X_i แต่ละตัวจะมีฟังก์ชันน่าจะเป็นของมันเอง

เราเรียกกลุ่มของตัวแปร $\{X_i\}$ นี้ว่า **กระบวนการเฟ้นสุ่ม** (Stochastic Process) เมื่อ i มีค่าอยู่ในเซตของ I

ถ้าการแจกแจงน่าจะเป็นเงื่อนไขของ X_{i+1} เป็นอิสระกับจุดหมาย ระบบอยู่ในขั้นที่ $0,1,2,\ldots,i-1$ และขึ้นอยู่กับจุดหมายที่ระบบอยู่ในขั้น i เพียงอย่างเดียว กล่าวได้ว่า กระบวนการเฟ้นสุ่ม มีคุณสมบัติมาร์คอฟอันดับหนึ่ง (first – order markovian property)

นั่นก็คือ กระบวนการเฟ้นสุ่ม มีคุณสมบัติมาร์คอฟ ถ้า

$$P(X_{i+1} = s|X_0 = t_0, X_1 = t_1,\ldots,X_{i-1} = t_{i-1}, X_i = r) = P(X_{i+1} = s|X_i = r) \quad (5.11)$$

เราเรียกปริมาณ $P(X_{i+1} = s|X_i = r)$ ว่า **ความน่าจะเป็นของการถ่ายทอดหนึ่งขั้น** (one – step transition probability) จากจุดหมาย r ในขั้นที่ i ไปยังจุดหมาย s ในขั้นที่ i + 1 ดังนั้น ความน่าจะเป็นของการถ่ายทอด 1 ขั้น จะแสดงถึง ความน่าจะเป็นเงื่อนไขของ X_{i+1} เมื่อกำหนด X_i มาให้

สำหรับแต่ละ r และ s ถ้า

$$P(X_{i+1} = s|X_i = r) = P(X_i = s|X_0 = r) = p_{rs} \quad (5.12)$$

ทุกค่า i แล้ว เรากล่าวว่า ความน่าจะเป็นของการถ่ายทอด 1 ขั้น จะไม่เปลี่ยนแปลง นั่นคือ one – step stationary transition probabilities

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่เปลี่ยนจากจุดหมาย r ในขั้นปัจจุบันไปยังจุดหมาย s ในขั้นต่อไป จะเป็นอิสระกับจำนวนขั้นในปัจจุบัน ซึ่งเป็นการเน้นว่า one – step stationary transition probabilities ยังคงคงที่ ตลอดช่วงเวลาทั้งหมดของการวิเคราะห์

ความน่าจะเป็นดังกล่าว จะเขียนอยู่ในรูปของจัตุรัสเมตริกซ์ P ดังนี้

$$P = \begin{array}{c|c} \text{จาก} \backslash \text{ไป} & 1 \quad 2 \quad \cdots \quad n \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{array} & \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \end{array}$$

โดยที่ $p_{rs} > 0$ และ $\sum_{S=1}^{n} p_{rs} = 1$

เรากล่าวว่า กระบวนการเฟ้นสุ่ม $\{X_i\}$ เป็น first – order first – state Markov chain ถ้ามันมีคุณสมบัติมาร์คอฟอันดับหนึ่ง จำนวนที่จำกัดของจุดหมาย เซตของความน่าจะเป็นของการถ่ายทอดคงที่ (stationary transition probabilities) และเซตของความน่าจะเป็นเริ่มต้น $P(X_0 = r)$ ทุกค่า r

ตัวอย่างที่ 5.5 จากการสำรวจ การสมัครเข้าเป็นนักศึกษาในคณะวิทยาศาสตร์ พบว่ามี 50% ที่นักศึกษาจะเลือกวิชาเอกศาสตร์คอมพิวเตอร์ 24% เลือกวิชาเอกเคมี ที่เหลืออีก 26% จะเลือกสาขาอื่น ๆ จากการคาดคะเนได้มีการกะประมาณไว้ว่า ในแต่ละปี นักศึกษาที่เลือกวิชาเอกศาสตร์คอมพิวเตอร์ เคมี และสาขาอื่น ๆ จะยังคงเลือกเรียนสาขาเดิมอยู่ 75%, 80% และ 60% ของจำนวนนักศึกษาที่เรียนอยู่เดิม ตามลำดับ ในแต่ละปีนักศึกษาที่เลือกสาขาศาสตร์คอมพิวเตอร์เมื่อต้นปี จะเปลี่ยนวิชาเอกเป็นเคมีในปีต่อไป เท่ากับ 2% 9% ของนักศึกษาวิชาเอกเคมี จะเปลี่ยนวิชาเอกเป็นสาขาอื่น ๆ ในปีต่อไป และ 25% ของนักศึกษาสาขาอื่น จะเปลี่ยนไปเลือกวิชาเอกคอมพิวเตอร์

เรากำหนด X_i เป็นการเลือกสาขาวิชาของนักศึกษาที่สมัครเรียนในปีนี้ ด้วยเหตุที่สาขาวิชาเป็นการวัดเชิงคุณภาพ ดังนั้น เรากำหนดให้

$$X_0 = \begin{cases} 0 & \text{ถ้าเลือกสาขาศาสตร์คอมพิวเตอร์ในปีนี้} \\ 1 & \text{ถ้าเลือกสาขาเคมีในปีนี้} \\ 2 & \text{ถ้าเลือกสาขาอื่น ๆ ในปีนี้} \end{cases}$$

และ

$$X_1 = \begin{cases} 0 & \text{ถ้าเลือกสาขาศาสตร์คอมพิวเตอร์ในปีหน้า (ขั้นที่ 1)} \\ 1 & \text{ถ้าเลือกสาขาเคมีในปีหน้า (ขั้นที่ 1)} \\ 2 & \text{ถ้าเลือกสาขาอื่น ๆ ในปีหน้า (ขั้นที่ 1)} \end{cases}$$

จะเห็นได้ว่า ระบบ (นักศึกษาเลือกสาขาวิชาในคณะวิทยาศาสตร์) อยู่ในจุดหมายต่างกัน คือ 0, 1 และ 2 ในแต่ละปี แต่ละครั้งที่นักศึกษาเลือกสาขาวิชา การติดต่อหรือขั้นที่เกิดขึ้น ยังผลให้ระบบอยู่ในจุดหมาย 0, 1 และ 2 นั่นก็คือ $\{X_i\}$ เป็นกระบวนการเฟ้นสุ่ม

ความน่าจะเป็นเริ่มต้น เมื่อ r = 0,1,2 ตามลำดับ

$$P(X_0 = r) = \begin{bmatrix} 0.50 & 0.24 & 0.26 \end{bmatrix}$$

ความน่าจะเป็นของการถ่ายทอด 1 ขั้น กำหนดในตารางที่ 1 ดังนี้

จากจุดหมาย		จุดหมายที่เปลี่ยนไป เป็นจุดหมาย		
		0	1	2
	0	0.75	0.02	0.23
จุดหมายเริ่มต้น	1	0.11	0.80	0.09
	2	0.25	0.15	0.60

ในตารางที่ 1 เราถือว่า มีคุณสมบัติมาร์คอฟอันดับหนึ่ง และมีความน่าจะเป็นของการถ่ายทอดคงที่ ดังนั้น P_{rs} จะแสดงถึง ความน่าจะเป็นที่จะเปลี่ยนจากจุดหมาย r ไปเป็นจุดหมาย s ในหนึ่งขั้น

ตัวอย่างเช่น

P_{00} = ความน่าจะเป็นที่นักศึกษาสมัครเรียนในสาขาคอมพิวเตอร์ จะยังคงเลือกคอมพิวเตอร์ในปีหน้า

= 0.75

P_{01} = ความน่าจะเป็นที่นักศึกษาสมัครเรียนในสาขาคอมพิวเตอร์ จะเปลี่ยนไปเลือกเคมีในปีหน้า

= 0.02

P_{21} = ความน่าจะเป็นที่นักศึกษาสมัครเรียนในสาขาอื่น ๆ จะเปลี่ยนมาเลือกคอมพิวเตอร์ในปีหน้า

= 0.25

เป็นต้น

อาศัยข้อมูลที่ได้นี้ สามารถนำไปใช้เพื่อพิจารณาว่า ส่วนแบ่งของนักศึกษาสาขาต่าง ๆ ในคณะวิทยาศาสตร์จะเปลี่ยนแปลงอย่างไรในปีหน้า (ขั้นที่ 1) ซึ่งจะหาได้ดังต่อไปนี้

ส่วนแบ่งของนักศึกษาสาขาคอมพิวเตอร์ในคณะ ในขั้นที่ 1

= ความน่าจะเป็นที่จะมีนักศึกษาเลือกคอมพิวเตอร์เป็นวิชาเอกในปีหน้า

$= 0.50P_{00} + 0.24P_{10} + 0.26P_{20}$

$= (0.50)(0.75) + (0.24)(0.11) + (0.26)(0.25) = 0.4664$

ส่วนแบ่งของนักศึกษาสาขาเคมีของคณะ ในขั้นที่ 1

= ความน่าจะเป็นที่จะมีนักศึกษาเลือกเคมีเป็นวิชาเอกในปีหน้า

$= \; 0.50P_{01} + 0.24P_{11} + 0.26P_{21}$

$= \; (0.50)(0.02) + (0.24)(0.80) + (0.26)(0.15) \; = \; 0.2410$

ส่วนแบ่งของนักศึกษาสาขาอื่น ๆ ของคณะในขั้นที่ 1

= ความน่าจะเป็นที่จะมีนักศึกษาเลือกสาขาอื่น ๆ ในปีหน้า

$= \; 0.50P_{02} + 0.24P_{12} + 0.26P_{22}$

$= \; (0.50)(0.23) + (0.24)(0.09) + (0.26)(0.60) \; = \; 0.2926$

เปรียบเทียบผลที่ได้ในตารางที่ 2 ดังต่อไปนี้

ตารางที่ 2 การเปลี่ยนแปลงส่วนแบ่งในแต่ละสาขาวิชา จากขั้นที่ 0 (ปีสมัคร) ไปเป็นขั้นที่ 1 (สิ้นปีแรก)

	จุดหมาย		
	0	1	2
ขั้นที่ 0	0.5000	0.2400	0.2600
1	0.4664	0.2410	0.2926

จากข้อมูลในตารางที่ 1 สามารถนำไปใช้ในการพิจารณาต่อไปว่า

1) ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนจากจุดหมาย r ไปสู่จุดหมาย s ในอีก n ขั้นข้างหน้า (สำหรับทุกจุดหมาย r และ s) จะเป็นเท่าใด

2) ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนจากจุดหมาย r ไปสู่จุดหมาย s เป็นครั้งแรก ในอีก n ขั้น (สำหรับทุก r และ s) จะเป็นเท่าใด

3) ค่าความคาดหวังของจำนวนขั้นที่จะเปลี่ยนจากจุดหมาย r ไปสู่จุดหมาย s เป็นครั้งแรก (สำหรับทุก r และ s) จะเป็นเท่าใด

4) ความน่าจะเป็นที่อยู่ในจุดหมาย s ภายหลังขั้นตอนหลายขั้น (สำหรับทุกจุดหมาย s)

คำตอบเหล่านี้จะได้จากการหา ความน่าจะเป็นถ่ายทอดขั้นที่ n

5.2.2 ความน่าจะเป็นของการถ่ายทอด n ขั้น

เรานิยาม $p_{rs}^{(n)}$ เป็นความน่าจะเป็นของการถ่ายทอด n ขั้น (n – step stationary transition-probabilities) จะได้

$$p_{rs}^{(n)} \; = \; P(X_{i+n} \; = \; s|X_i \; = \; r) \; = \; P(X_n \; = \; s|X_0 \; = \; r) \qquad (5.13)$$

ในเมื่อ $p_{rs}^{(n)} \geqslant 0$ ทุกจุดหมาย r และ s, n = 1,2,...

$$\sum_{s=0}^{N} p_{rs}^{(n)} = 1 \quad \text{ทุกจุดหมาย } r, n = 1,2,\ldots$$

โดยทั่วไป สามารถคำนวณได้จาก

$$p_{rs}^{(n)} = \sum_{j=0}^{N} p_{rj}p_{js}^{(n-1)} = \sum_{j=0}^{N} p_{rj}^{(k)}p_{js}^{(n-k)} \tag{5.14}$$

ในเมื่อ จุดหมายที่เป็นไปได้ เป็น 0,1,2,...,N

ให้เรามาพิจารณา กรณีที่ r = 0, s = 1, n = 2 และ N = 3 ความหมายในที่นี้ก็คือ ต้องการหาความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนจากจุดหมาย 0 (ขั้นเริ่มต้น) ไปเป็นจุดหมาย 1 ในอีก 2 ขั้นต่อไป (ขั้นที่ 2) นั่นคือค่า $p_{01}^{(2)}$ ถ้าเราพิจารณาเหตุการณ์ที่เริ่มต้นจากจุดหมาย 0 เปลี่ยนจุดหมายในอีก 2 ขั้นต่อไป ไปเป็นจุดหมาย 1 มีทางเกิดขึ้นได้ 4 หนทางด้วยกัน ดังนี้

1) เปลี่ยนเป็นจุดหมาย 0 ขั้นที่ 1 แล้วเปลี่ยนเป็นจุดหมาย 1 ในขั้นที่ 2 ด้วยความน่าจะเป็น $p_{00}p_{01}$

2) เปลี่ยนเป็นจุดหมาย 1 ในขั้นที่ 1 และยังคงอยู่จุดหมายเดิม ในขั้นที่ 2 ด้วยความน่าจะเป็น $p_{01}p_{11}$

3) เปลี่ยนเป็นจุดหมาย 2 ในขั้นที่ 1 แล้วเปลี่ยนเป็นจุดหมาย 1 ในขั้นที่ 2 ด้วยความน่าจะเป็น $p_{02}p_{21}$

4) เปลี่ยนเป็นจุดหมาย 3 ในขั้นที่ 1 แล้วเปลี่ยนเป็นจุดหมาย 1 ในขั้นที่ 2 ด้วยความน่าจะเป็น $p_{03}p_{31}$

ดังนั้น $p_{01}^{(2)} = p_{00}p_{01} + p_{01}p_{11} + p_{02}p_{21} + p_{03}p_{31}$

ตัวอย่างที่ 5.6 จากปัญหาการเปลี่ยนสาขาวิชาของนักศึกษาคณะวิทยาศาสตร์ในตัวอย่างที่ 5.5 จงหา

1) เมตริกซ์ของความน่าจะเป็นที่นักศึกษา จะเปลี่ยนหรือคงสาขาเดิม เมื่อสิ้นปีที่ 2 และหาส่วนแบ่งของนักศึกษาแต่ละสาขาวิชา

2) ความน่าจะเป็นของนักศึกษาที่สมัครเข้าเรียนวิชาเอกเคมี จะย้ายไปเลือกวิชาเอกสาขาอื่น ๆ เมื่อสิ้นปีที่ 3

3) ความน่าจะเป็นของนักศึกษาที่สมัครเข้าเรียนวิชาเอกสาขาอื่น ๆ จะเปลี่ยนไปเลือกสาขาคอมพิวเตอร์ เมื่อสิ้นปีที่ 5

วิธีทำ การคำนวณใช้สูตร (5.14) เมื่อ $r = 0,1,2$; $s = 0,1,2$; $n = 2$ และ $N = 3$ จะได้เมตริกซ์ของความน่าจะเป็น ถ่ายทอด สิ้นปีที่ 2 ดังนี้

$$p^{(2)} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \quad 0 \quad & \quad 1 \quad & \quad 2 \quad \end{array} \\ \begin{bmatrix} .5625+.0022+.0575 & .0150+.0160+.0345 & .1725+.0018+.1380 \\ .0825+.0880+.0225 & .0022+.6400+.0135 & .0253+.0720+.0540 \\ .1875+.0165+.1500 & .0050+.1200+.0900 & .0575+.0135+.3600 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$= \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} .6222 & .0655 & .3123 \\ .1930 & .6557 & .1513 \\ .3540 & .2150 & .4310 \end{bmatrix} \end{array} \qquad (1)$$

สิ้นปีที่ 2 (ต้นปีที่ 3) จะมีส่วนแบ่งนักศึกษาในคณะดังนี้

ส่วนแบ่งนักศึกษาวิชาเอกคอมพิวเตอร์

$= (.5)(.6222) + (.24)(.1930) + (.26)(.3540)$

$= .4495$

ส่วนแบ่งนักศึกษาวิชาเอกเคมี

$= (.5)(.0655) + (.24)(.6557) + (.26)(.2150)$

$= .2460$

ส่วนแบ่งนักศึกษาในสาขาอื่น ๆ

$= 1 - .4495 - .2460$

$= .3045$

2) ความน่าจะเป็นของนักศึกษาที่สมัครเข้าเรียนเคมี จะเปลี่ยนเป็นสาขาอื่น เมื่อสิ้นปีที่ 3 $= p_{12}^{(3)}$

$= p_{10}p_{02}^{(2)} + p_{11}p_{12}^{(2)} + p_{12}p_{22}^{(2)}$

$= (.11)(.3123) + (.80)(.1513) + (.09)(.4310)$

$= .1942$

3) ความน่าจะเป็นของนักศึกษาที่สมัครเรียนสาขาอื่น จะเปลี่ยนเป็นสาขาคอมพิวเตอร์ เมื่อสิ้นปีที่ 5

$= p_{20}^{(5)}$

$= p_{20}p_{00}^{(4)} + p_{21}p_{10}^{(4)} + p_{22}p_{20}^{(4)}$

$$= p_{20}\Big[\sum_{j=0}^{2} p_{0j}^{(2)}p_{j0}^{(2)}\Big] + p_{21}\Big[\sum_{j=0}^{2} p_{1j}^{(2)}p_{j0}^{(2)}\Big] + p_{22}\Big[\sum_{j=0}^{2} p_{2j}^{(2)}p_{j0}^{(2)}\Big]$$

$$= (.25)(.5103) + (.15)(.3002) + (.60)(.4143)$$

$$= .4212$$

ให้นักศึกษาหาเมตริกซ์ของความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสาขาวิชาเมื่อสิ้นปีที่ 3, 5, 10, 15, 20 ตามลำดับ

ถ้าเราคำนวณค่าความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสาขาวิชา เมื่อ n โตขึ้นเรื่อย จะพบว่า ในระยะแรก ค่าของความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสาขาวิชา จะยังคงขึ้นอยู่กับเงื่อนไขเริ่มต้น แต่เมื่อค่า n เพิ่มสูงขึ้น ๆ จะพบว่า ค่าของความน่าจะเป็นจะคงที่ นั่นคือ เมื่อ n โต ๆ ค่าความน่าจะเป็นในจุดหมายหลังการเปลี่ยน จะเท่ากับความน่าจะเป็นในจุดหมายก่อนการเปลี่ยน แสดงว่าการเปลี่ยนแปลงจุดหมายของระบบเป็นอิสระกับเวลา ซึ่งเราเรียกว่า จุดหมายอยู่ตัว (steady state) และเรียกความน่าจะเป็นคงที่ในจุดหมายนี้ว่า steady state stationary transition probabilities เขียนแทนด้วย a_s ดังนั้น

$$a_s = \lim_{n \to \infty} p_{rs}^{(n)}, \; s = 0,1,2,\ldots,N \tag{5.15}$$

เมื่อระบบของเราประกอบด้วย N+1 จุดหมาย ค่าความน่าจะเป็นที่คงที่ในแต่ละจุดหมาย จะได้จากสมการเชิงเส้นของจุดหมายอยู่ตัว N+2 สมการคือ

$$a_s = \sum_{r=0}^{N} a_r p_{rs}, \; s = 0,1,\ldots,N \tag{5.16}$$

และ $$\sum_{S=0}^{N} a_s = 1 \tag{5.17}$$

สมการใน (5.17) จะต้องเป็นหนึ่งในระบบ N+2 สมการเสมอ เพื่อเป็นหลักประกันว่า ผลบวกของความน่าจะเป็นทุกจุดหมายต้องเท่ากับ 1 เสมอ

5.2.3 เวลาของการถ่ายทอดครั้งแรก (first – passage time)

บ่อยครั้งที่ความสนใจจะมุ่งไปในเรื่องที่เกี่ยวกับเวลาของการถ่ายทอด (transition time) ของลูกโซ่มาร์คอฟ ข้อมูลข่าวสารเกี่ยวกับเวลาถ่ายทอด มักจะนิยามในเทอมของเวลาของการถ่ายทอดครั้งแรก (first – passive time) ซึ่งหมายถึงจำนวนขั้นของการถ่ายพอดที่จำเป็นในการเปลี่ยนจากจุดหมาย r ไปเป็นจุดหมาย s เป็นครั้งแรก และกำหนดโดย T_{rs}

ถ้า T_{rs} เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันการแจกแจงน่าจะเป็น $g_{rs}(t)$, $t = 1,2,3,\ldots$

$g_{rS}(1)$ = ความน่าจะเป็นที่จะเปลี่ยนจากจุดหมาย r เป็นจุดหมาย s เป็นครั้งแรกในการเปลี่ยน 1 ขั้น

$= P(X_1 = s | X_0 = r)$

$= p_{rS}$

$g_{rS}(2)$ = ความน่าจะเป็นที่จะเปลี่ยนจากจุดหมาย r เป็นจุดหมาย s เป็นครั้งแรกในการเปลี่ยน 2 ขั้น

$= P(X_2 = s | X_0 = r, X_1 = \bar{S})$, $\bar{S}$ ไม่ใช่จุดหมาย s

$= p_{rS}^{(2)} - p_{rS}p_{SS}$

$= p_{rS}^{(2)} - g_{rS}(1)p_{SS}$

โดยทั่วไป

$$g_{rS}(n) = p_{rS}^{(n)} - \sum_{t=1}^{n-1} g_{rS}(t)p_{SS}^{(n-t)}$$

โดยที่ T_{rS} เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม ดังนั้น

$$\sum_{t=1}^{\infty} g_{rS}(t) = 1$$

ค่าคาดหวังของจำนวนขั้น (เวลา) ของการเปลี่ยนจุดหมายจาก r เป็น s เป็นครั้งแรก $= \mu_{rS}$

$$\mu_{rS} = \sum_{t=1}^{\infty} t g_{rS}(t)$$

ถ้า $r = s$ ค่าที่ได้จะเป็นค่าคาดหวังของการเปลี่ยนไปอยู่ที่จุดหมายเดิมเป็นครั้งแรก นั่นคือ ค่าคาดหวังของการเวียนกลับ (recurrence time) ของจุดหมาย r ค่านี้จะเป็นส่วนกลับของความน่าจะเป็นที่คงที่ของจุดหมายอยู่ตัว r

โดยทั่วไป ถ้า T_{rS} เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม, $r = 0,1,2,\ldots, s-1, s+1,\ldots,N$ ค่าคาดหวังของเวลา (จำนวนขั้น) ของการเปลี่ยนจุดหมายจาก r ไป S, $r \neq s$ เป็นครั้งแรก จะหาได้จากระบบสมการเชิงเส้น N สมการ คือ

$$\mu_{rS} = 1 + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq S}}^{N} p_{rj}\mu_{jS} \qquad (5.18)$$

ค่าคาดหมายของเวลา (จำนวนขั้น) ที่จะเวียนกลับไปยังจุดตั้งต้นเป็นครั้งแรก จะได้จาก

$$\mu_{SS} = \frac{1}{a_S} \qquad (5.19)$$

ตัวอย่างที่ 5.7 จากปัญหาการย้ายสาขาวิชาในตัวอย่างที่ 5.5 จงหา

1) ค่าคาดหวังของจำนวนปีที่นักศึกษาสาขาคอมพิวเตอร์ จะย้ายเป็นสาขาอื่น เป็นครั้งแรก

2) ค่าคาดหวังของจำนวนปีที่นักศึกษาสาขาเคมี จะย้ายเป็นสาขาอื่น เป็นครั้งแรก

3) ค่าคาดหวังของจำนวนปีที่นักศึกษาแต่ละสาขา จะหวนกลับมาเลือกสาขาเดิมอีกภายหลังการย้ายสาขาวิชา

วิธีทำ คำถาม (1) และ (2) คือการหาค่า μ_{02} และ μ_{12} ตามลำดับ

จากสมการ (5.18) เราจะได้

$$\mu_{02} = 1+P_{00}\mu_{02}+P_{01}\mu_{12} = 1+.75\mu_{02}+.02\mu_{12}$$

$$+.25\mu_{02}-.02\mu_{12} = 1 \qquad \ldots.(1)$$

$$\mu_{12} = 1+P_{10}\mu_{02}+P_{11}\mu_{12} = 1+.11\mu_{02}+.80\mu_{12}$$

$$-.11\mu_{02}+.20\mu_{12} = 1 \qquad \ldots.(2)$$

$$10(1)+(2) \quad 2.39\mu_{02} = 11 \Rightarrow \mu_{02} = \frac{11}{2.39} = 4.6$$

จาก (1) $\mu_{12} = \dfrac{.15}{.02} = 7.5$

คาดว่าประมาณ 4 ปี นักศึกษาสาขาคอมพิวเตอร์จะย้ายเป็นสาขาอื่นเป็นครั้งแรก และโดยประมาณ 7 ปี นักศึกษาสาขาเคมีจะย้ายเป็นสาขาอื่นเป็นครั้งแรก

คำถาม (3) คือการหาค่า μ_{00}, μ_{11} และ μ_{22} ซึ่งเป็นส่วนกลับของ a_0, a_1 และ a_2 ตามลำดับ เราจึงต้องหาค่า a_S, $s = 0,1,2$ ก่อน จากสูตร (5.17) และ (5.16) จะได้

$$a_0+a_1+a_2 = 1 \qquad \ldots\ldots..(3)$$

$$.25a_0-.11a_1-.25a_2 = 0 \qquad \ldots\ldots..(4)$$

$$-.02a_0+.20a_1-.15a_2 = 0 \qquad \ldots\ldots..(5)$$

$$.25(3)-(4) \qquad .36a_1+.50a_2 = .25 \qquad \ldots\ldots..(6)$$

$$.02(3)+(5) \qquad .22a_1-.13a_2 = .02 \qquad \ldots\ldots..(7)$$

$$11(6)-18(7) \qquad 7.84a_2 = 2.39$$

$$\Rightarrow \mu_{22} = \frac{1}{a_2} = \frac{7.84}{2.39} = 3.28$$

$$\mu_{11} = \frac{1}{a_1} = \frac{.22}{.0596} = 3.69$$

$$\mu_{00} = \frac{1}{a_0} = \frac{1}{.4241} = 2.358$$

คาดว่า ภายหลังการเปลี่ยนสาขาวิชา นักศึกษาที่สมัครในสาขาคอมพิวเตอร์ เคมี และสาขาอื่น ๆ จะหวนกลับมาเลือกสาขาเดิมอีก โดยเฉลี่ยเท่ากับ 2, 3 และ 3 ปี ตามลำดับ

ปัญหาในทางปฏิบัติ โดยทั่วไปเราจะใช้สูตรเหล่านี้โดยตรงไม่ได้ เพราะบางจุดหมายจะมีจำนวนขั้นหรือระยะเวลาการถ่ายทอดจำกัด นั่นคือ การเปลี่ยนแปลงจะมาถึงจุดหมายสิ้นสุด หรือจุดหมายสุดท้าย (absorbing state) ปัญหาแต่ละประเภทจะมีระยะเวลาหรือจำนวนขั้นที่สิ้นสุดของจุดหมายแตกต่างกันไป เช่น ในปัญหาการเปลี่ยนหรือย้ายสาขาวิชา จะมีจุดหมายสุดท้ายคือจบการศึกษา ซึ่งอาจจะเป็น 3, 4 หรือมากกว่า หรือหมดสถานภาพคือครบ 8 ปี เป็นต้น ดังนั้น ในปัญหาที่มีเงื่อนไขเช่นนี้ ถ้าเรารวมจุดหมายสุดท้ายทุกจุดหมาย มาประกอบเป็นจุดหมายสุดท้าย q เวลาของการถ่ายทอดเป็นครั้งแรก (first – passage time) จะเป็น ค่าคาดหวังของเวลาหรือจำนวนขั้นที่มาถึงจุดหมายสุดท้าย (μ_{rq}) ซึ่งกำหนดได้ดังนี้

$$\mu_{rq} = 1 + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq q}}^{N} P'_{rj}\mu_{jq} \tag{5.20}$$

ในเมื่อ P'_{rj} เป็นความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนจากจุดหมายเริ่มต้น r มาถึงจุดหมายสุดท้าย q

และ
$$P'_{rj} = P_{rj} + \sum_{\substack{S=0 \\ S \neq j}}^{N} P_{rS}P'_{Sj} \tag{5.21}$$

ให้นักศึกษาดูตัวอย่างการสิ้นสุดของจุดหมาย ในตัวอย่างที่ 5.9

5.2.4 กระบวนการตัดสินใจมาร์คอฟ

กระบวนการตัดสินใจมาร์คอฟ (Markovian decision process) มีลักษณะเช่นเดียวกับโปรแกรมพลวัต แต่เป็นโปรแกรมที่มีความน่าจะเป็นของการถ่ายทอด 1 ขั้น ดังนั้น การตัดสินใจตามกระบวนการนี้ จึงเป็นการพิจารณาผลจากการแก้ปัญหาโดยวิธีการโปรแกรมพลวัตเชิงสถิติ เมื่อมีทางเลือกหลายทาง แต่ละทางเลือกจะมีเมตริกซ์ของความน่าจะเป็นของการถ่ายทอด 1 ขั้น และมีเมตริกซ์ของผลตอบแทนหรือของค่าใช้จ่าย ของการถ่ายทอด 1 ขั้น เป้าหมายของปัญหานี้ ก็คือ การพิจารณาทางเลือกที่ดีที่สุด ที่มีค่าคาดหวังของผลตอบแทนสูงสุด หรือค่าคาดหวังของค่าใช้จ่ายต่ำสุด ของกระบวนการตลอดขั้นตอนที่มีจำนวนจำกัด

สมมติว่าเรามี k ทางเลือก มีเมตริกซ์ P^k และ R^k เป็นเมตริกซ์ของความน่าจะเป็นถ่ายทอด และของฟังก์ชันผลตอบแทนสำหรับทางเลือกที่ k, $k = 1,2,\ldots,M$

กำหนด $f_j(r)$ = ค่าคาดหมายของผลตอบแทนที่ดีที่สุด ของขั้นตอน $j, \; j+1, \ldots, n$ กำหนดว่า จุดหมายของระบบของการเริ่มต้นของขั้นที่ j คือ r

$$f_j(r) = \text{ค่าสูงสุด}_{k}\left[\sum_{S=0}^{N} p_{rS}^{k}\left[c_{rS}^{rk} + f_{j+1}(s)\right]\right], j = 1,2,\ldots,n$$

ในเมื่อ $f_{n+1}(s) \equiv 0$ ทุกค่า S

และ c_{rS}^{k}, p_{rS}^{k} เป็นค่าของผลตอบแทน และของความน่าจะเป็นตามลำดับ จากจุดหมาย r ไป s ของทางเลือก k นั่นคือสมาชิกตัวที่ (r, s) ของ R^k และ P^k ตามลำดับ

ถ้า v_r^k เป็นค่าคาดหวังของผลตอบแทน ซึ่งเป็นผลจากการถ่ายทอดจากจุดหมาย r กำหนดว่า ทางเลือกเป็น k ,

$$\text{จะได้ } v_r^k = \sum_{S=0}^{N} p_{rS}^{k} c_{rS}^{k} \tag{5.22}$$

ฟังก์ชันสัมพันธ์ต่อเนื่อง (recursive function) ของโปรแกรมพลวัต จะกำหนดได้โดย

$$f_n(r) = \text{ค่าสูงสุด}_{k}\left\{v_r^k\right\}$$

$$f_j(r) = \text{ค่าสูงสุด}_{k}\left[v_r^k + \sum_{S=0}^{N} p_{rS}^{k} f_{j+1}(s)\right] \tag{5.23}$$

$$j = n-1, \ldots, 2, 1$$

ตัวอย่างที่ 5.8 จากผลการวิจัยของนักวิชาการเกษตร ทำการทดลองผลที่ได้จากการปลูกพืชเกษตรในเขตที่ดินแห่งหนึ่ง เมื่อเริ่มต้นการเพาะปลูกในแต่ละปี เขาจะทดสอบสภาพของดินที่ทำการเพาะปลูก และวัดปริมาณผลผลิตที่ได้ภายหลังการเก็บเกี่ยว สรุปได้ว่า ปริมาณผลผลิตที่ได้จะขึ้นอยู่กับสภาพของดินที่ทำการเพาะปลูก ซึ่งเขาแยกเป็น 4 กรณี คือผลผลิตดี ปานกลาง พอใช้ และเลว จากการสังเกตตลอดปีการเพาะปลูก เขาถือว่าปริมาณผลผลิตในปีนี้จะขึ้นอยู่กับสภาพของดินในปีก่อนเพียงอย่างเดียวเท่านั้น และปริมาณที่ได้ในปีนี้จะไม่ดีกว่าปีก่อน ซึ่งแสดงให้เห็นได้จากเมตริกซ์ของความน่าจะเป็นถ่ายทอดตลอดช่วงระยะเวลา 1 ปี จากจุดหมายของปริมาณผลผลิตหนึ่งไปยังจุดหมายอื่น ๆ

จุดหมายของระบบปีหน้า

$$\text{จุดหมายของระบบปีนี้}\quad \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} .2 & .4 & .3 & .1 \\ 0 & .2 & .5 & .3 \\ 0 & 0 & .5 & .5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} = P^1$$

ในเมื่อจุดหมายของระบบ 0, 1, 2 และ 3 แสดงถึงปริมาณผลผลิต (สภาพของดิน) ดี ปานกลาง พอใช้ และเลว ตามลำดับ

การวิจัยยังคงมีต่อไป โดยทดลองใส่ปุ๋ยก่อนการเพาะปลูก ไม่ว่าสภาพของดินจะเป็นอย่างไรก็ตาม ผลสรุปที่ได้ก็คือ ถ้าเขาไม่ใช้ปุ๋ยเข้าช่วย ความน่าจะเป็นถ่ายทอด จะยังคงเป็นเช่นที่กำหนดใน P^1 แต่ถ้าเขาใช้ปุ๋ยปรับสภาพของดิน ไม่ว่าจะมีสภาพใด เขาจะได้ความน่าจะเป็นถ่ายทอดตามที่กำหนดในเมตริกซ์ P^2 ดังนี้

จุดหมายของระบบปีหน้า

$$\text{จุดหมายของระบบปีนี้}\quad \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} .3 & .5 & .15 & .05 \\ .1 & .3 & .4 & .2 \\ .05 & .1 & .6 & .25 \\ 0 & .05 & .4 & .55 \end{bmatrix} \end{array} = P^2$$

จากการนำผลผลิตที่ได้ไปจำหน่าย จะได้ผลตอบแทน (เมื่อหักต้นทุนและค่าใช้จ่ายต่าง ๆ แล้ว) ตามที่กำหนดในเมตริกซ์ R^1 เมื่อไม่ใช้ปุ๋ย และใน R^2 เมื่อใช้ปุ๋ยช่วยปรับสภาพดินทุกจุดหมาย ดังนี้

$$R^1 = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 10 & 9 & 6 & 3 \\ 0 & 7 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array}, \quad R^2 = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 8 & 7 & 5 & 1 \\ 7 & 6 & 4 & 0 \\ 8 & 5 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

ถ้าเขาต้องการเพาะปลูกพืชชนิดนี้เป็นเวลา 3 ปี เขาควรจะใช้ปุ๋ยหรือไม่ใช้ปุ๋ยในปีใด จึงจะทำให้ได้ผลตอบแทนรวมสูงสุด

วิธีทำ กำหนด $k = 1,2$ เป็นทางเลือกของการใช้ปุ๋ย และการไม่ใช้ปุ๋ย ในทุกสภาพของดิน ตามลำดับ

k^* เป็นทางเลือกที่ดีที่สุด มีค่า $f_j(r)$, $j = 3,2,1$

ขั้นตอนที่ 3

r	$v_r^k = \sum_{S=0}^{3} p_{rS}^k c_{rS}^k$		$f_3(r)$	k^*
	k = 1	k = 2		
0	$.2\times10+.4\times9+.3\times6+.1\times3 = 7.7$	$.3\times8+.5\times7+.15\times5+.05\times1 = 6.7$	7.7	1
1	$0\times0+.2\times7+.5\times5+.3\times2 = 4.5$	$.1\times7+.3\times6+.4\times4+.2\times0 = 4.1$	4.5	1
2	$0\times0+0\times0+.5\times4+.5\times1 = 2.5$	$.05\times8+.1\times5+.6\times3+.25\times0 = 2.7$	2.7	2
3	$0\times0+0\times0+0\times0+1\times(-1) = -1$	$0\times7+.05\times3+.4\times1+.55\times(-1) = 0$	0	2

ขั้นตอนที่ 2

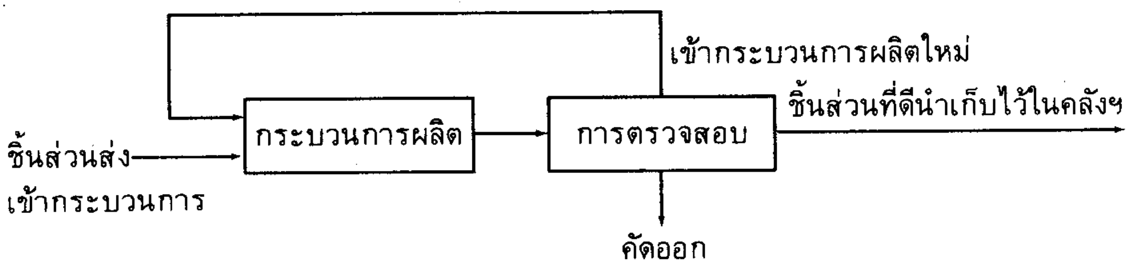
r	$v_r^k + \sum_{S=0}^{3} p_{rS}^k f_3(s)$		$f_2(r)$	k^*
	k = 1	k = 2		
0	$7.7+1.54+1.8+.81+0 = 11.85$	$6.7+2.31+2.25+.405+0 = 11.665$	11.85	1
1	$4.5+0+.9+1.35+0 = 6.75$	$4.1+.77+1.35+1.08+.0 = 7.3$	7.3	2
2	$2.5+0+0+1.35+0 = 3.85$	$2.7+.385+.45+1.62+0 = 5.155$	5.155	2
3	$-1+0+0+0+0 = -1$	$0+0+.225+1.08+0$	1.305	2

ขั้นตอนที่ 1

r	$v_r^k + \sum_{S=0}^{3} p_{rS}^k f_2(s)$		$f_1(r)$	k*
	k = 1	k = 2		
0	7.7 + 2.37 + 2.92 + 1.5465 + .1305 = 14.667	6.7 + 3.555 + 3.65 + .77325 + .06525 = 14.7435	14.7435	2
1	4.5 + 0 + 1.46 + 2.5775 + .3915 = 8.929	4.1 + 1.185 + 2.19 + 2.062 + .261 = 9.798	9.798	2
2	2.5 + 0 + 0 + 2.5775 + .6525 = 5.73	2.7 + .5925 + .73 + 3.093 + .32625 = 7.4417	7.4417	2
3	− 1 + 0 + 0 + 0 + 1.305 = .305	0 + 0 + .365 + 2.062 + .71775 = 3.1447	3.1447	2

ทางเลือกที่ดีที่สุดของนักวิชาการเกษตรก็คือ ในปีที่ 1 เขาควรใช้ปุ๋ยช่วยในการเพาะปลูกไม่ว่าสภาพของดินจะเป็นอย่างไรก็ตาม ในปีที่ 2 เขาควรใช้ปุ๋ยเฉพาะกรณีที่สภาพของดินปานกลาง พอใช้ และเลว ปีที่ 3 เขาควรใช้ปุ๋ยเฉพาะกรณีที่สภาพของดิน พอใช้ หรือเลว นอกนั้นไม่ควรใช้ปุ๋ย ผลตอบแทนทั้งหมดที่ได้ในช่วง 3 ปี ก็คือ ถ้าปีแรกดินมีสภาพดี จะได้ค่าคาดหวังของผลตอบแทน 14.7435 ถ้าปีแรกดินอยู่ในสภาพปานกลาง ค่าคาดหวังของผลตอบแทนจะเท่ากับ 9.798 ถ้าปีแรกดินอยู่ในสภาพพอใช้ ค่าคาดหวังของผลตอบแทนจะเท่ากับ 7.4417 ถ้าปีแรกดินอยู่ในสภาพเลว ค่าคาดหวังของผลตอบแทนจะเท่ากับ 3.1447

ตัวอย่างที่ 5.9 โรงงานประกอบชิ้นส่วนที่สำคัญชนิดหนึ่งเพื่อเตรียมเข้ากระบวนการอื่นต่อไป คุณภาพของชิ้นส่วนนี้มีความสำคัญต่อการใช้อย่างยิ่ง จึงต้องมีการตรวจสอบทุกครั้งที่ผลิตมาได้ ถ้าคุณภาพตรงตามเกณฑ์กำหนด นั่นคือผ่านการตรวจสอบจะถูกนำไปเก็บไว้ในคลังฯ เพื่อรอการประกอบต่อไป แต่ถ้าคุณภาพไม่ตรงตามเกณฑ์กำหนด อาจจะคัดชิ้นส่วนนั้นออกไป หรืออาจจะนำกลับเข้ากระบวนการผลิตชิ้นส่วนใหม่ก็ได้ ผังของกระบวนการนี้ แสดงให้เห็นได้ตามรูปที่ (1)



เมื่อนำชิ้นส่วนเข้ากระบวนการผลิต (ไม่ว่าจะเป็นครั้งแรกหรือผ่านการตรวจแล้วนำมาเข้าใหม่ก็ตาม) จะมีโอกาส 85% ที่จะได้ของมีคุณภาพตรงตามมาตรฐาน 5% จะถูกคัดออกไป ที่เหลือ 10% จะถูกนำเข้ากระบวนการใหม่ ชิ้นส่วนที่ผลิตเสร็จแล้วมีต้นทุนการผลิต 50 บาทต่อชิ้น (รวมค่าวัสดุและแรงงานด้วย) ค่าใช้จ่ายในการดำเนินงานและตรวจสอบจะเท่ากับ 10 บาทต่อชิ้นโดยประมาณ ชิ้นส่วนที่ถูกคัดออกจะมีราคา 5 บาทต่อชิ้น ในแต่ละงวดการผลิตโรงงานต้องการชิ้นส่วนที่มีมาตรฐานเก็บไว้ 1000 ชิ้น

โรงงานกำลังพิจารณาว่าควรจะมีการปรับปรุงเครื่องมือในการผลิตหรือไม่ โดยที่การปรับปรุงจะต้องเสียค่าใช้จ่าย 2,000 บาท คาดว่าการปรับปรุงจะสามารถลด % ชิ้นส่วนที่คัดออกจาก 5 เหลือ 2% แต่จะเพิ่มจำนวนที่ต้องนำเข้ากระบวนการใหม่ จาก 10 เป็น 15%

ถ้าท่านเป็นผู้จัดการโรงงาน ท่านจะปรับปรุงเครื่องมือหรือไม่

จงหาว่าการปรับปรุงเครื่องมือจะช่วยให้การผลิตดำเนินไปอย่างประหยัด ควรจะผลิตให้ได้ชิ้นส่วนที่ดีมีคุณภาพได้มาตรฐานกี่ชิ้น จึงจะเหมาะสมที่สุด

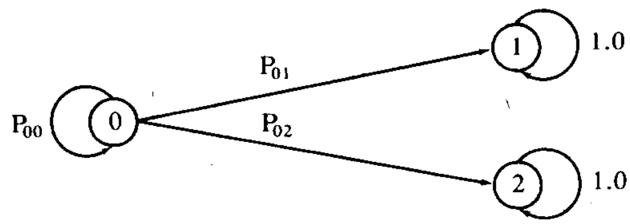
วิธีทำ สำหรับชิ้นส่วนแต่ละชิ้น เราพิจารณากระบวนการผลิตและการตรวจสอบเป็น กระบวน-การมาร์คอฟ 3 สถานภาพ คือ

สถานภาพ 0 กำลังอยู่ในกระบวนการ หรือกำลังตรวจสอบ

สถานภาพ 1 คัดออก

สถานภาพ 2 ผ่านการตรวจสอบ

จะเห็นได้ว่า สถานภาพ 1 และ 2 เป็นสถานภาพที่สิ้นสุด โดยมีสถานภาพ 0 เป็นสถานภาพถ่ายทอด แสดงให้เห็นได้ด้วยผังการถ่ายทอดอย่างง่าย ดังต่อไปนี้

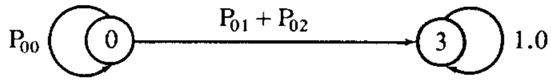


พิจารณาผลที่ได้ก่อนการปรับปรุงเครื่องมือ เรามี $P_{00} = 0.10$, $P_{01} = 0.05$, $P_{02} = 0.85$ หาค่าความน่าจะเป็นของสถานภาพสิ้นสุด 1 และ 2 จะได้

$$P'_{01} = 0.05 + 0.10P'_{01} \quad \text{นั่นคือ } P'_{01} = 0.056$$

$$P'_{02} = 0.85 + 0.10P'_{02} \quad \text{นั่นคือ } P'_{02} = 0.944$$

เรารวมสถานภาพ 1 และ 2 ประกอบเป็นสถานภาพสิ้นสุด 3 จะได้ผังแสดงการถ่ายทอดดังนี้



ดังนั้น จำนวนครั้ง (ขั้น) ที่คาดว่าจะสิ้นสุด μ_{03} จะคำนวณได้จาก

$$\mu_{03} = 1 - 0.10\mu_{03} \quad \text{นั่นคือ } \mu_{03} = 1.111$$

จำนวนชิ้นส่วนที่จะนำเข้ากระบวนการผลิตเริ่มต้น เพื่อให้ได้ชิ้นส่วนที่ได้มาตรฐาน 1000 ชิ้น จะเท่ากับ

$$1000/P'_{02} = 1000/0.944 = 1059$$

จำนวนชิ้นส่วนที่คาดว่าจะถูกคัดออก จะเท่ากับ $1059P'_{01} = 1059(0.056) = 59$

ค่าใช้จ่ายจากการผลิตก่อนการปรับปรุงเครื่องมือ จะเท่ากับ

ต้นทุนการผลิตทั้งหมด + ค่าคาดหมายของค่าใช้จ่ายในการดำเนินการ – ค่าที่ได้จากชิ้นส่วนคัดออก

$$(1059)(50) + (1059)(10)(1.111) - (5)(59) = 64{,}420.50$$

พิจารณาผลที่ได้ภายหลังการปรับปรุงเครื่องมือ มี $P_{00} = 0.15$, $P_{01} = 0.02$, $P_{02} = 0.83$

ดังนั้น $P'_{01} = 0.02/(1-0.15) = 0.024$, $P'_{02} = 0.83/(1-0.15) = 0.976$

และ $\mu_{03} = 1/(1-0.15) = 1.176$

เพื่อให้ได้ชิ้นส่วนที่มีมาตรฐานครบ 1000 ชิ้น จำนวนชิ้นส่วนที่จะส่งเข้ากระบวนการเริ่มต้น จะเท่ากับ

$$1000/0.976 = 1025$$

ดังนั้น ค่าใช้จ่ายในการผลิตให้ได้ชิ้นส่วนมาตรฐานครบ 1000 ชิ้น ภายหลังการปรับปรุงเครื่องมือ

$$(1025)(50) + (1025)(10)(1.176) - (1025)(0.024)(5) + 2000 = 65{,}181$$

เปรียบเทียบค่าใช้จ่ายในการผลิตทั้งหมดเพื่อให้ได้ชิ้นส่วนมีมาตรฐาน 1000 ชิ้น จะเห็นว่ากระบวนการผลิตเดิม เสียค่าใช้จ่ายน้อยกว่า

จึงสรุปว่า ยังไม่ควรปรับปรุงเครื่องมือ

เพื่อให้การใช้เครื่องมือที่ปรับปรุงใหม่เป็นไปอย่างประหยัด อย่างน้อยที่สุด จะต้องมีค่าใช้จ่ายในการผลิต เพื่อให้ได้จำนวนชิ้นส่วนได้มาตรฐานเท่ากัน ทั้งก่อนและหลังการปรับปรุง มีค่าเท่ากัน

สมมติเราต้องการให้ได้ชิ้นส่วนที่มีมาตรฐาน m ชิ้น

ดังนั้น ค่าใช้จ่ายในการผลิตเพื่อให้ได้ชิ้นส่วนมาตรฐานครบ m ชิ้น ก่อนการปรับปรุงเครื่องมือ

$$= \frac{m}{0.944}\left[50+(10)(1.111)-(5)(0.056)\right] = 64.44m$$

และ ค่าใช้จ่ายในการผลิตเพื่อให้ได้ชิ้นส่วนมาตรฐานครบ m ชิ้น ภายหลังการปรับปรุงเครื่องมือ

$$= \frac{m}{0.976}\left[50+(10)(1.176)-(5)(0.024)\right]+2000 = 63.16m+2000$$

จะได้ $64.44m = 63.16m+2000$ หรือ $m = 1{,}562$ ชิ้น

นั่นก็คือ การปรับปรุงเครื่องมือใหม่ จะช่วยในการประหยัดค่าใช้จ่ายได้ ก็ต่อเมื่อเราต้องผลิตให้ได้ชิ้นส่วนมาตรฐานโดยเฉลี่ยมากกว่า 1,562 ชิ้น

แบบฝึกหัดที่ 5

1. พ่อค้าต้องการส่งสินค้าที่มีอยู่ 5 ลอท ไปจำหน่ายที่ตลาด 3 แห่ง ความต้องการสินค้าของตลาดแต่ละแห่ง เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีการแจกแจงดังนี้

# ที่ต้องการ (ลอท)	0	1	2	3	4	5
ตลาด ก	0.1	0.2	0.3	0.2	0.1	0.1
ตลาด ข	0	0.1	0.3	0.4	0.1	0.1
ตลาด ค	0	0	0.2	0.4	0.3	0.1

ถ้ากำไรที่ได้จากการขายในตลาดแต่ละแห่งเท่ากับ 1,500, 1,600 และ 1,450 บาทต่อลอท ตามลำดับ พ่อค้าควรจัดส่งสินค้าไปจำหน่ายอย่างไร จึงจะเกิดผลดีที่สุด

2. องค์การแห่งหนึ่งมีงานที่อยู่ในความรับผิดชอบ 3 โครงการ องค์การได้รับความช่วยเหลือจากต่างประเทศ ในรูปผู้เชี่ยวชาญ 2 คน ซึ่งคาดว่าจะช่วยให้งานในแต่ละโครงการได้ผลตามเป้าหมายและทันเวลา ความน่าจะเป็นที่งานแต่ละโครงการจะประสบผลสำเร็จ เมื่อมีผู้เชี่ยวชาญมาให้คำแนะนำ มีดังนี้

	โครงการ		
	1	2	3
# ผู้เชี่ยวชาญ 0	0.90	0.85	0.78
1	0.92	0.95	0.93
2	0.95	0.98	0.98

องค์การควรจัดส่งผู้เชี่ยวชาญประจำโครงการใด จึงจะเกิดผลดีที่สุด

3. จากการสำรวจความนิยมของผงซักฟอกยี่ห้อเอ กับยี่ห้อบี โดยการสอบถามแม่บ้าน 1,200 คน พบว่ามี 700 คน ซื้อยี่ห้อเอ แต่โดยทั่วไป การซื้อผงซักฟอกของแม่บ้านในแต่ละเดือนมักจะไม่คงที่ และพบว่า 20% ของผู้ซื้อยี่ห้อเอ จะยังคงซื้อยี่ห้อเดิมในเดือนต่อไป 40% ของผู้ที่ซื้อยี่ห้อบี จะเปลี่ยนมาซื้อยี่ห้อเอ ในเดือนต่อไป

3.1 จงเขียนเมตริกซ์ของความน่าจะเป็นถ่ายทอด

3.2 ถ้าแม่บ้านซื้อยี่ห้อเอ จงหาว่าโอกาสที่เธอจะซื้อยี่ห้อเอในต้นเดือนที่ 4 จะมีกี่ %

3.3 จงหาส่วนแบ่งตลาดของผงซักฟอก 2 ยี่ห้อนี้ ในต้นเดือนที่ 4

3.4 จงหาว่าโดยเฉลี่ย จะใช้เวลากี่เดือน แม่บ้านที่ซื้อยี่ห้อเอ จะเปลี่ยนมาซื้อยี่ห้อบีเป็นครั้งแรก

3.5 จงหาว่าโดยเฉลี่ย จะใช้เวลากี่เดือน ที่แม่บ้านซื้อยี่ห้อบี แล้วหวนกลับมาซื้อยี่ห้อบีอีก

4. ปัญหาของโรงงานก็คือการเสื่อมสภาพของเครื่องจักร ซึ่งจะจัดไว้ 5 สภาพตามประสิทธิภาพของการทำงาน ดังต่อไปนี้

สถานภาพ	0	1	2	3	4
ประสิทธิภาพ %	95 – 100	87 – 94	76 – 86	70 – 75	หยุดการดำเนินงาน

จะมีการตรวจสอบเครื่องจักรทุก ๆ สัปดาห์ แต่ละครั้งที่ตรวจสอบจะจำแนกประเภทเครื่องจักรเป็น 5 สถานภาพตามตารางข้างต้น ถ้าเครื่องจักรใช้งานไม่ได้ จะต้องนำไปซ่อมแซมในวันหยุด ให้ทันใช้งานได้ในวันจันทร์ ภายหลังการซ่อมแซมเครื่องจักรจะมีประสิทธิภาพในการทำงาน 87 – 94% แต่ต้องเสียค่าใช้จ่ายในการซ่อม 6,000 บาท

4.1 จงเขียนเมตริกซ์ของความน่าจะเป็นถ่ายทอดให้สมบูรณ์

จงอธิบายความหมายของ P_{13} และ P_{41}

จาก \ ถึง	0	1	2	3	4
0	0.50	0.45	0.03	0.02	0
1		0.56	0.40	0.03	0.01
2		0	0.45	0.50	
3				0.60	
4					

4.2 จงหาความน่าจะเป็นที่สถานภาพอยู่ตัว กำหนดว่า $a_1 = 0.32$

4.3 ถ้ากำไรที่ได้จากสัปดาห์ก่อนของผลผลิตในแต่ละสถานภาพเป็น 10,000 8,000 6,000 และ 4,000 จงหาค่าคาดหมายของกำไรต่อสัปดาห์ที่จะได้ในที่สุด (ระยะยาว)

5. บริษัทพิจารณาสื่อการโฆษณาระหว่าง วิทยุ โทรทัศน์ และหนังสือพิมพ์ ซึ่งมีค่าใช้จ่ายต่อสัปดาห์ เท่ากับ 5,000; 20,000 และ 7,500 บาท ตามลำดับ บริษัทจำแนกปริมาณขายในแต่ละสัปดาห์เป็น 3 ประเภท คือ (1) พอใช้ (2) ดี และ (3) ดีที่สุด และสรุปความน่าจะเป็นถ่ายทอดจากการใช้สื่อโฆษณาแต่ละชนิดได้ดังนี้

$$\begin{array}{cccc} & \textbf{วิทยุ} & & \\ & 1 & 2 & 3 \\ \begin{array}{c}1\\2\\3\end{array} & \multicolumn{3}{c}{\begin{bmatrix} .4 & .5 & .1 \\ .1 & .7 & .2 \\ .1 & .2 & .7 \end{bmatrix}} \end{array} \quad \begin{array}{cccc} & \textbf{โทรทัศน์} & & \\ & 1 & 2 & 3 \\ \begin{array}{c}1\\2\\3\end{array} & \multicolumn{3}{c}{\begin{bmatrix} .7 & .2 & .1 \\ .3 & .6 & .1 \\ .1 & .7 & .2 \end{bmatrix}} \end{array} \quad \begin{array}{cccc} & \textbf{หนังสือพิมพ์} & & \\ & 1 & 2 & 3 \\ \begin{array}{c}1\\2\\3\end{array} & \multicolumn{3}{c}{\begin{bmatrix} .2 & .5 & .3 \\ 0 & .7 & .3 \\ 0 & .2 & .8 \end{bmatrix}} \end{array}$$

ผลตอบแทนที่ได้ต่อสัปดาห์ (ล้านบาท) จากแต่ละกรณี ตามลำดับ กำหนดได้ดังนี้

$$\begin{array}{cccc} & \textbf{วิทยุ} & & \\ & 1 & 2 & 3 \\ \begin{array}{c}1\\2\\3\end{array} & \multicolumn{3}{c}{\begin{bmatrix} 10 & 13 & 15 \\ 7 & 10 & 17 \\ 5 & 6 & 12 \end{bmatrix}} \end{array} \quad \begin{array}{cccc} & \textbf{โทรทัศน์} & & \\ & 1 & 2 & 3 \\ \begin{array}{c}1\\2\\3\end{array} & \multicolumn{3}{c}{\begin{bmatrix} 24 & 30 & 40 \\ 20 & 24 & 42 \\ 14 & 17 & 26 \end{bmatrix}} \end{array} \quad \begin{array}{cccc} & \textbf{หนังสือพิมพ์} & & \\ & 1 & 2 & 3 \\ \begin{array}{c}1\\2\\3\end{array} & \multicolumn{3}{c}{\begin{bmatrix} 10 & 13 & 18 \\ 8 & 11 & 20 \\ 6 & 10 & 16 \end{bmatrix}} \end{array}$$

จงหานโยบายการโฆษณาที่ดีที่สุด