บทที่ 4
โปรแกรมพลวัต

การวิเคราะห์ปัญหาโปรแกรมบางประเภท เราไม่อาจใช้วิธีการแบบตรงไปตรงมา ดังเช่นปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นได้ ปัญหาบางประเภทมีความยุ่งยาก มีกระบวนการตัดสินใจซ้ำซ้อน ไม่อาจแก้ปัญหาทั้งหมดพร้อมกันทีเดียวได้ ต้องใช้วิธีแยกเป็นปัญหาย่อยหรือแยกเป็นขั้นตอน (stage) แต่ละปัญหาย่อยหรือขั้นตอนจะมีตัวแปรที่เราจะหาค่าดีที่สุด เพียงตัวเดียวเท่านั้น การหาคำตอบต่อปัญหาทั้งหมด จะใช้วิธีการวิเคราะห์ปัญหาย่อยแต่ละปัญหาให้ได้ค่าของตัวแปรที่เหมาะสม การคำนวณในปัญหาหรือขั้นตอนต่าง ๆ จะถูกเชื่อมเข้าด้วยกัน ด้วยการคำนวณแบบต่อเนื่อง เพื่อให้ได้คำตอบที่ดีที่สุดต่อปัญหาทั้งหมด การหาคำตอบด้วยวิธีการเช่นนี้เรียกว่า โปรแกรมพลวัต (Dynamic Programming) ซึ่งริชาร์ด เบลแมน เป็นผู้คิดขึ้นในปี ค.ศ. 1950 จำแนกเป็น 2 ประเภทใหญ่ ๆ ดังนี้

1. พวกที่เกี่ยวข้องกับปัญหา Deterministic กล่าวคือ การเปลี่ยนแปลงของสภาวะจากสภาวะหนึ่งไปยังอีกสภาวะหนึ่ง และผลที่ได้อันสืบเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงภายใต้การตัดสินใจหนึ่งเป็นสิ่งที่ทราบได้แน่นอน

2. พวกที่เกี่ยวข้องกับปัญหา Probabilistic ซึ่งขบวนการเปลี่ยนแปลงของสภาวะจากสภาวะหนึ่งไปยังอีกสภาวะหนึ่ง และผลที่ได้อันเนื่องมาจากการเปลี่ยนแปลงภายใต้การตัดสินใจหนึ่ง เป็นสิ่งที่ไม่อาจทราบได้แน่นอน ต้องอาศัยการคาดคะเนในเชิงความน่าจะเป็น รายละเอียดในเรื่องนี้จะได้กล่าวถึงต่อไปในบทที่ 5

4.1 แนวความคิดเกี่ยวกับโปรแกรมพลวัต

จากโปรแกรมเชิงคณิตศาสตร์

ค่าที่ดีที่สุด $Z = g_1(x_1) + g_2(x_2) + \ldots + g_n(x_n)$

โดยมีข้อจำกัด $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leqslant b$ (4.1)

และ $x_1, x_2, \ldots, x_n = 0, 1, 2, \ldots$

เมื่อ n = จำนวนกิจกรรม

b = ปริมาณทรัพยากรที่มีอยู่ และมีค่าเป็นเลขจำนวนเต็มบวก

x_j = จำนวนหน่วย (เลขจำนวนเต็ม ≥ 0) ของทรัพยากรที่นำมาใช้ในกิจกรรม j, $j = 1,2,\ldots,n$

$g_j(x_j)$ = ผลตอบแทนที่คาดว่าจะได้จากการใช้ทรัพยากร x_j หน่วย ในกิจกรรม j, $j = 1,2,\ldots,n$

ในการคำนวณตามโปรแกรมพลวัต เราจะแบ่งปัญหาเป็นปัญหาย่อย หรือที่เรียกว่า ขั้นตอน (stage) ออกเป็น n ขั้นตอน ซึ่งจะเป็นส่วนหนึ่งของปัญหาที่มีทางเลือกที่ไม่เกี่ยวข้องกันของตัวแปรตัดสินใจหนึ่ง และเราจะมาพิจารณาทางเลือก (คำตอบ) ที่ดีที่สุดของตัวแปรตัดสินใจในขั้นตอนนั้น แต่ละขั้นตอนจะต้องมีความสัมพันธ์ระหว่างกัน โดยมีจุดหมาย (state) เป็นตัวรวมความสัมพันธ์ระหว่างขั้นตอนเข้าด้วยกัน จุดหมายจะแสดงให้เห็นถึงสถานะของข้อจำกัดที่รวมทุกขั้นตอนเข้าด้วยกัน

ในตัวแบบ (4.1) แต่ละกิจกรรมจะแสดงถึงขั้นตอนที่จะต้องนำมาพิจารณาตัดสินใจทางเลือกในขั้นตอน j จะถูกกำหนดด้วยตัวแปรตัดสินใจ x_j ซึ่งแสดงถึงการใช้ทรัพยากรในกิจกรรม j ได้ผลตอบแทน $g_j(x_j)$ ทุกขั้นตอนจะผูกพันกันด้วยข้อเท็จจริงที่ว่า ทุกกิจกรรม (ขั้นตอน) จะแข่งขันกันให้ได้ส่วนแบ่งจากทรัพยากรที่มีจำกัด b ดังนั้น จุดหมาย (state) จึงต้องกำหนดในเทอมของการจัดสรรทรัพยากร ความสัมพันธ์ระหว่างขั้นตอน เป็นความสัมพันธ์ต่อเนื่อง ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่เรียกว่า recursive function กำหนดโดย

$$f_j(x) = \underset{x_j}{\text{ค่าที่ดีที่สุด}} \{f_j(x, x_j)\}$$

เมื่อ x เป็นจุดหมายในขั้นตอนที่ j

$f_j(x, x_j)$ เป็นผลรวมของค่าตอบแทน จากที่มีจำนวนทรัพยากรเหลือ x และ x_j เป็นจำนวนที่จัดสรรในขั้นตอนนี้

$f_j(x)$ เป็นผลตอบแทนดีที่สุด ที่จุดคำตอบดีที่สุด $d_j(x)$

การหาคำตอบดีที่สุดในแต่ละขั้นตอนมี 2 แบบ

1) การคำนวณแบบรุดหน้า (Forward) จะเริ่มจากการหาค่าที่ดีที่สุดในขั้นตอน j, $j = 1,2,\ldots,n$ ตามลำดับ

นั่นคือฟังก์ชันสัมพันธ์ต่อเนื่อง $f_j(x) = \underset{x_j}{\text{ค่าที่ดีที่สุด}} \{g_1(x_1) + g_2(x_2) + \ldots + g_j(x_j)\}$

$$\text{โดยมีข้อจำกัด} \quad x_1 + x_2 + \ldots + x_j = x \qquad (4.2)$$

$$x = 0,1,2,\ldots,b$$

ที่จุดเริ่มต้น $j = 1 \quad f_1(x) = \underset{x_1}{\text{ค่าที่ดีที่สุด}} \{g_1(x_1)\} = g_1(x)$

นั่นคือผลตอบแทนที่ดีที่สุดจากกิจกรรม 1 เมื่อมีจำนวนทรัพยากรที่จะนำมาใช้ในกิจกรรมนี้โดยเฉพาะ x หน่วย ด้วยเหตุที่มีกิจกรรมเดียว และมีทรัพยากรใช้ x หน่วย ดังนั้น จำนวนทรัพยากรที่ดีที่สุดที่จัดสรรให้กิจกรรม 1 $d_1(x) = x$

ขั้นตอนต่อไป $j = 2$ จะถือว่าเรามีเพียงกิจกรรม 1 และ 2 เท่านั้นที่จะนำมาพิจารณา และมีทรัพยากรที่จะนำมาใช้ใน 2 กิจกรรมนี้ x หน่วย ถ้าเราจัดสรรให้กิจกรรมที่ 2 เท่ากับ x_2 หน่วย และที่เหลือ $(x - x_2)$ หน่วยเป็นของกิจกรรมที่ 1 ผลรวมของผลตอบแทนที่ได้จะเท่ากับ

$$g_2(x_2) + f_1(x - x_2)$$

ดังนั้น ผลรวมของผลตอบแทนที่ดีที่สุด สำหรับกิจกรรม 1 และกิจกรรม 2 เมื่อมีการจัดสรรทรัพยากรให้ x หน่วย จะได้มาจากการเลือกค่า x_2 ที่มีปริมาณ

$$f_2(x) = \underset{\substack{x_2 = 0,1,\ldots,x \\ x = 0,1,\ldots,b}}{\text{ค่าดีที่สุด}} \{g_2(x_2) + f_1(x - x_2)\}$$

ถ้าเราให้ $d_2(x)$ = ค่าของ x_2 ที่มีผลตอบแทน $f_2(x)$ $d_2(x)$ จะเป็นจำนวนทรัพยากรที่ดีที่สุดที่จัดสรรให้กิจกรรม 2 เมื่อมีทรัพยากร x หน่วย ใช้ในกิจกรรม 1 และกิจกรรม 2

ขั้นตอนต่อไป เราพิจารณาการจัดสรรทรัพยากร x หน่วย สำหรับกิจกรรม 1, 2 และ 3 หาผลรวมของผลตอบแทนที่ดีที่สุด จากการจัดสรรให้กิจกรรม 3 x_3 หน่วย ที่เหลือ $x - x_3$ หน่วย จัดสรรให้กิจกรรม 1 และกิจกรรม 2 รวมกัน

ทำซ้ำกระบวนการนี้ในขั้นตอนที่ $j = 4,5,\ldots,n$ แต่ละขั้นตอน จะได้

$$f_j(x) = \underset{\substack{x_j = 0,1,\ldots,x \\ x = 0,1,\ldots,b}}{\text{ค่าที่ดีที่สุด}} \{g_j(x_j) + f_{j-1}(x - x_j)\} \qquad (4.3)$$

และ $d_j(x)$ = จำนวนจัดสรรที่ดีที่สุดสำหรับกิจกรรม j

= ค่าของ x_j ที่มี $f_j(x)$

เมื่อถึงขั้นตอนที่ n, $j = n$ เราจะได้

$$f_n(x) = \underset{\substack{x_n = 0,1,\ldots,x \\ x = 0,1,\ldots,b}}{\text{ค่าที่ดีที่สุด}} \{g_n(x_n) + f_{n-1}(x - x_{n-1})\}$$

และ $d_n(x)$ = จำนวนจัดสรรที่ดีที่สุดสำหรับกิจกรรม n

ในขั้นตอนนี้ เราถือว่า เราจัดสรรทรัพยากร x หน่วย ให้กับกิจกรรม 1,2,...,n นั่นก็คือ ปัญหาเดิม เมื่อเราให้ $x = b$ ค่าของ $f_n(b)$ ที่ได้จะเป็นผลตอบแทนรวมที่ดีที่สุด จากการจัดสรรทรัพยากร b หน่วย ให้กับกิจกรรม 1,2,...,n จำนวนหน่วยที่ดีที่สุดที่จัดสรรให้แต่ละกิจกรรมก็คือ

$$x_n^* = d_n(b) \text{ จำนวนที่จัดสรรให้กิจกรรม } n$$

$$x_{n-1}^* = d_{n-1}(b - x_n^*) \text{ จำนวนที่จัดสรรให้กิจกรรม } n-1$$

$$x_j^* = d_j\Big(b - \sum_{k=j+1}^{n} x_k^*\Big) \text{ จำนวนที่จัดสรรให้กิจกรรม } j \qquad (4.4)$$

$$x_1^* = d_1\Big(b - \sum_{k=2}^{n} x_k^*\Big) \text{ จำนวนที่จัดสรรให้กิจกรรม } 1$$

2. การคำนวณแบบย้อนหลัง (Backward) จะเริ่มจากการหาค่าที่ดีที่สุดในขั้นตอน $n, n-1, n-2, \ldots, 1$ ตามลำดับ

นั่นคือ $f_j(x) = \underset{x_j}{\text{ค่าที่ดีที่สุด}} \{g_j(x_j) + \ldots + g_{n-1}(x_{n-1}) + g_n(x_n)\}$

โดยมีข้อจำกัด $x_j + \ldots + x_{n-1} + x_n = x$ (4.5)

$$x = 0,1,2,\ldots,b$$

ที่ขั้นตอน n $f_n(x) = \underset{x_n}{\text{ค่าดีที่สุด}} \{g_n(x_n)\} = g_n(x)$

จะเป็นผลตอบแทนที่ดีที่สุด จากการจัดสรรทรัพยากร x หน่วยให้กับกิจกรรม n เพียงกิจกรรมเดียว จำนวนจัดสรรที่ดีที่สุด $d_n(x) = x,\ x = 0,1,\ldots,b$

ที่ขั้นตอน j, $j = n-1, n-2, \ldots, 1$ ตามลำดับ เราจะได้

$$f_j(x) = \underset{\substack{x_j = 0,1,\ldots,x \\ x = 0,1,\ldots,b}}{\text{ค่าที่ดีที่สุด}} \{g_j(x_j) + f_{j+1}(x - x_j)\} \qquad (4.6)$$

และ $d_j(x)$ = ค่าของ x_j ที่มีผลตอบแทน $f_j(x)$

เมื่อ $j = 1$

$$f_1(x) = \underset{\substack{x_1 = 0,1,\ldots,x \\ x = 0,1,\ldots,b}}{\text{ค่าที่ดีที่สุด}} \{g_1(x_1) + f_2(x - x_1)\}$$

$d_1(x)$ = ค่าของ x_1 ที่มีผลตอบแทน $f_1(x)$

เมื่อ $x = b$

$$f_1(b) = \underset{x_1 = 0,1,\ldots,b}{\text{ค่าที่ดีที่สุด}} \{g_1(x_1) + f_2(b - x_1)\}$$

$$= \underset{\{x_k\}}{\text{ค่าที่ดีที่สุด}} \left[\sum_{k=1}^{n} g_k(x_k)\right] = Z_{\text{ดีที่สุด}}$$

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = b$$

จะเป็นผลตอบแทนรวมที่ดีที่สุด จากการจัดสรรทรัพยากร b หน่วยให้กับกิจกรรม $1,2,\ldots,n$

จำนวนหน่วยจัดสรรที่ดีที่สุด สำหรับกิจกรรม j, $j = 1,2,\ldots,n$

$$x_1^* = d_1(b)$$

$$x_j^* = d_j\left(b - \sum_{k=1}^{j-1} x_k^*\right) \tag{4.7}$$

จะเห็นได้ว่า ในการคำนวณแบบรุดหน้า

$$f_j(x, x_j) = g_j(x_j) + f_{j-1}(x - x_j)$$

และในการคำนวณแบบย้อนหลัง

$$f_j(x, x_j) = g_j(x_j) + f_{j+1}(x - x_j)$$

อย่างไรก็ตาม ไม่ว่าเราจะใช้วิธีการคำนวณแบบใด จะต้องมีเกณฑ์สมมติ(assumption) ของปัญหา ดังนี้

1. ผลตอบแทนจากทุกกิจกรรมวัดค่าเป็นหน่วยได้
2. ผลตอบแทนจากกิจกรรมที่กำหนดไว้ เป็นอิสระจากกิจกรรมอื่น ๆ
3. ฟังก์ชันผลตอบแทนเป็นฟังก์ชันที่ไม่มีค่าลดลง
4. ผลตอบแทนรวมจากทุกกิจกรรมเท่ากับผลบวกของผลตอบแทนจากแต่ละกิจกรรม

เราสรุปลักษณะพื้นฐานของปัญหาที่ใช้โปรแกรมพลวัตได้ดังนี้

1. ปัญหานั้นสามารถแยกเป็นปัญหาย่อย ๆ หรือแยกได้หลายขั้นตอน มีการตัดสินใจได้ในแต่ละขั้นตอน
2. การวิเคราะห์หาคำตอบในแต่ละขั้นตอน ขึ้นอยู่กับสาระข้อมูลที่ได้จากการตัดสินใจในขั้นตอนก่อน

3. แต่ละขั้นตอนต้องมีจุดหมาย (state) ค่าของมันจะแสดงถึงสภาวะที่เป็นไปได้ ที่กระบวนการจะอยู่ในขั้นตอนนั้น ผลการตัดสินใจของแต่ละขั้นตอน ได้มาจากการเปลี่ยนจุดหมายปัจจุบัน ไปเป็นจุดหมายที่เกี่ยวข้องกับขั้นตอนต่อไป

4. กำหนดจุดหมายปัจจุบันให้ ทางเลือกที่เหมาะสมสำหรับขั้นตอนที่เหลือ จะเป็นอิสระกับทางเลือกที่ได้จากขั้นตอนก่อน

5. การวิเคราะห์อาจใช้วิธีการคำนวณแบบรุดหน้า (Forward) นั่นคือ เริ่มต้นจากการหาคำตอบที่เหมาะสมในแต่ละจุดหมายจากขั้นตอนแรก ไปสู่ขั้นตอนที่เหลือตามลำดับจนถึงขั้นตอนสุดท้าย หรืออาจใช้วิธีคำนวณแบบย้อนหลัง (Backward) นั่นคือ เริ่มต้นจากขั้นตอนสุดท้ายหาคำตอบที่เหมาะสมจากขั้นตอนนี้ ย้อนขึ้นไปตามลำดับจนถึงขั้นตอนแรก ความสัมพันธ์ในแต่ละขั้นตอนจะเป็นแบบต่อเนื่อง ซึ่งแสดงถึงคำตอบที่เหมาะสมสำหรับแต่ละจุดหมาย ในขั้นตอน n กำหนดให้มีคำตอบที่เหมาะสมสำหรับแต่ละจุดหมาย ในขั้นตอน $n-1$ ที่เหลือ (การคำนวณแบบย้อนหลัง)

4.2 ปัญหา DP ตัวแบบ (4.1) และการคำนวณ

ปัญหาโปรแกรมพลวัต (DP) ที่มีตัวแบบ (4.1) ได้แก่ปัญหาการลงทุนในโครงการต่าง ๆ จัดการลงทุนในลักษณะหุ้น แต่ละหุ้นมีจำนวนเงินคงที่ หรือในลักษณะการลงทุนที่มีการเพิ่มจำนวนทุนในอัตราที่คงที่ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 4.1 บริษัทมั่งคั่งมีโครงการลงทุนที่น่าสนใจ 3 โครงการ บริษัทมีหุ้นส่วนผู้ร่วมลงทุนรวมกันแล้ว 6 หุ้นด้วยกัน ค่าคาดหมายของผลตอบแทนจากการลงทุนในแต่ละโครงการมีดังนี้

	ผลตอบแทนจากการลงทุน x_j หุ้นในโครงการ j						
จำนวนหุ้น x_j	0	1	2	3	4	5	6
$g_1(x_1)$	0	20	40	75	90	95	100
$g_2(x_2)$	0	15	30	60	85	92	105
$g_3(x_3)$	0	15	40	80	85	90	95

บริษัทควรจะลงทุนในโครงการไหน อย่างไรจึงจะเกิดผลดีที่สุด

วิธีทำ ในที่นี้เรากำหนดโครงการ j เป็นขั้นตอนที่ j, $j = 1,2,3$

ตัวแปรตัดสินใจในขั้นตอนที่ j

x_j = จำนวนหุ้นที่ลงทุนในโครงการ j, $x_j = 0,1,2,\ldots,6$

จุดหมาย x จะแสดงถึงสถานะของการลงทุน

ในการคำนวณแบบย้อนหลัง เราจะได้

$$f_3(x) = g_3(x), \quad x_3 = x = 0,1,2,\ldots,6$$

$$d_3(x) = x_3$$

และ $$f_j(x) = \underset{\substack{x_j = 0,1,\ldots,x \\ x = 0,1,\ldots,6}}{\text{ค่าสูงสุด}} \left[g_j(x_j) + f_{j+1}(x - x_j)\right], \quad j = 2,1$$

$d_j(x)$ = ค่าของ x_j ที่มีผลตอบแทน $f_j(x)$

สรุปผลที่ได้ ดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 1 (การคำนวณในขั้นตอนที่ 3)

x	0	1	2	3	4	5	6
$f_3(x)$	0	15	40	80	85	90	95
$d_3(x)$	0	1	2	3	4	5	6

ตารางที่ 2 (การคำนวณในขั้นตอนที่ 2)

x_2 / x	ผลตอบแทนรวม = $g_2(x_2) + f_3(x - x_2)$							$f_2(x)$	$d_2(x)$
	0	1	2	3	4	5	6		
0	0							0	0
1	15	15						15	0 หรือ 1
2	40	30	30					40	0
3	80	55	45	60				80	0
4	85	95	70	75	85			95	1
5	90	100	110	100	100	92		110	2
6	95	105	115	140	125	107	105	140	3

ตารางที่ 3 (การคำนวณในขั้นตอนที่ 1)

x_1 / x	**ผลตอบแทนรวม** $= g_1(x_1) + f_2(6 - x_1)$							$f_1(x)$	$d_1(x)$
	0	1	2	3*	4	5	6		
6	140	130	135	155	130	110	100	155	3

สรุปว่า บริษัทเลือกลงทุนที่ให้ผลตอบแทนรวมกัน 155 โดยการลงทุนในโครงการหนึ่ง 3 หุ้น โครงการสาม 3 หุ้น ไม่ลงทุนในโครงการที่ 2

หมายเหตุ **การคำนวณและความหมาย**

จากตารางที่ 1 มีความหมายว่า ลงทุนเฉพาะในโครงการ 3 โครงการเดียว ด้วยเหตุที่ผลตอบแทนที่ได้จากการลงทุน x หุ้นเป็นฟังก์ชันที่ไม่มีค่าลดลง ดังนั้น ถ้ามีโครงการเดียวเราจะลงทุนทั้งหมด 6 หุ้น ผลตอบแทนที่ดีที่สุดจากการลงทุน 6 หุ้นในโครงการ 3 จะเท่ากับ

$$f_3(6) = g_3(6) = 95$$

แต่เรามีโครงการให้เลือกมากกว่า 1 โครงการ ดังนั้น ถ้าเราเลือกลงทุนในโครงการ 3 x หุ้น ผลตอบแทนที่ดีที่สุดที่ได้จากโครงการ 3 จะเท่ากับ

$$f_3(x) = g_3(x), \quad x = 0,1,2,\ldots,6$$

จำนวนหุ้นที่ดีที่สุด $d_3(x) = x, \quad x = 0,1,2,\ldots,6$

จากตารางที่ 2 มีความหมายว่า เราลงทุนในโครงการที่ 2 และ 3 รวมกัน x หุ้น เมื่อเราลงทุนในโครงการ 2 x_2 หุ้น ที่เหลือ $x - x_2$ หุ้น จะเป็นจำนวนที่ลงทุนในโครงการ 3 ผลตอบแทนที่ได้จะเท่ากับ

$$g_2(x_2) + f_3(x - x_2)$$

ค่าที่ได้ขึ้นอยู่กับค่าของ x และ x_2

ผลตอบแทนที่ดีที่สุด และจำนวนการลงทุนที่เหมาะสมในขั้นตอนนี้

$$f_2(x) = \underset{\substack{x_2 = 0,1,\ldots,x \\ x = 0,1,\ldots,6}}{\text{ค่าสูงสุด}} \left[g_2(x_2) + f_3(x - x_2)\right]$$

$$d_2(x) = \text{ค่าของ } x_2 \text{ ที่มีผลตอบแทน } f_2(x)$$

ตัวอย่างเช่น

$$x = 2 \quad f_2(2) = \underset{x_2 = 0,1,2}{\text{ค่าสูงสุด}} \left[g_2(x_2) + f_3(2 - x_2)\right]$$

$$= \text{ค่าสูงสุด} \begin{bmatrix} g_2(0)+f_3(2) &=& 0+40 &=& 40 \\ g_2(1)+f_3(1) &=& 15+15 &=& 30 \\ g_2(2)+f_3(0) &=& 30+0 &=& 30 \end{bmatrix}$$

$$= 40$$

$$d_2(2) = 0$$

แสดงว่า ถ้าเราเลือกลงทุนในโครงการที่ 2 และ 3 รวมกัน 2 หุ้น ทางเลือกที่ดีที่สุดก็คือ ไม่ลงทุนในโครงการ 2 ลงทุนในโครงการ 3 โครงการเดียว 2 หุ้น จะได้ผลตอบแทนสูงสุด 40

ถ้า $x = 5$ $\quad f_2(5) = \underset{x_2 = 0,1,2,3,4,5}{\text{ค่าสูงสุด}} \left[g_2(x_2) + f_3(5-x_2)\right]$

$$= \text{ค่าสูงสุด} \begin{bmatrix} g_2(0)+f_3(5) &=& 0+90 &=& 90 \\ g_2(1)+f_3(4) &=& 15+85 &=& 100 \\ g_2(2)+f_3(3) &=& 30+80 &=& 110 \\ g_2(3)+f_3(2) &=& 60+40 &=& 100 \\ g_2(4)+f_3(1) &=& 85+15 &=& 100 \\ g_2(5)+f_3(0) &=& 92+0 &=& 92 \end{bmatrix}$$

$$= 110$$

$$d_2(5) = 2$$

แสดงว่า ถ้าเลือกลงทุนในโครงการ 2 และ 3 รวมกัน 5 หุ้น การตัดสินใจที่ดีที่สุดคือ ลงทุนในโครงการ 2 2 หุ้น ที่เหลือ 3 หุ้น นำไปลงทุนในโครงการ 3 จะได้ผลตอบแทนสูงสุด 110

การคำนวณสำหรับ x ค่าอื่น ๆ และการอ่านผลที่ได้ ใช้วิธีการในทำนองเดียวกัน

จากตารางที่ 3 มีความหมายว่าเราพิจารณาการลงทุนในโครงการ 1, 2 และ 3 รวมกัน x หุ้น ซึ่งก็คือการพิจารณาการลงทุนในโครงการทั้งหมดนั่นเอง นั่นคือ ปัญหาเดิม ดังนั้นค่าของ x จึงเท่ากับ 6 เท่านั้น

ผลตอบแทนที่ดีที่สุดของปัญหาการลงทุน และจำนวนหุ้นที่เหมาะสมของโครงการ 1 พิจารณาจาก

$$f_1(6) = \underset{x_1 = 0,1,2,3,4,5,6}{\text{ค่าสูงสุด}} \left[g_1(x_1) + f_2(6-x_1)\right]$$

$$= \text{ค่าสูงสุด} \begin{bmatrix} g_1(0)+f_2(6) & = & 0+140 & = & 140 \\ g_1(1)+f_2(5) & = & 20+110 & = & 130 \\ g_1(2)+f_2(4) & = & 40+95 & = & 135 \\ g_1(3)+f_2(3) & = & 75+80 & = & 155 \\ g_1(4)+f_2(2) & = & 90+40 & = & 130 \\ g_1(5)+f_2(1) & = & 95+15 & = & 110 \\ g_1(6)+f_2(0) & = & 100+0 & = & 100 \end{bmatrix}$$

$= 155$

= ผลตอบแทนสูงสุดจากการลงทุนใน 3 โครงการนี้

$d_1(6) = 3 =$ จำนวนหุ้นที่ลงทุนในโครงการ 1

การหาจำนวนที่เหมาะสมในโครงการอื่น ใช้วิธีการใน (4.7) นั่นคือ

$x_1^* = d_1(6) = 3$

$x_2^* = d_2(6-3) = d_2(3) = 0$ (จากตาราง 2)

$x_3^* = d_3(6-3-0) = d_3(3) = 3$ (จากตาราง 1)

ให้เรามาศึกษาเพิ่มเติมจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 4.2 บริษัทเอซีมีโรงงานผลิตสินค้าในเขตต่าง ๆ 4 เขตด้วยกัน ในช่วงที่เศรษฐกิจกำลังขยายตัวอย่างรวดเร็ว บริษัทได้สั่งซื้อเครื่องจักรใหม่อีก 6 เครื่อง ปริมาณสินค้าที่ผลิตโดยเครื่องจักรใหม่ ขึ้นอยู่กับความสามารถในการผลิตของโรงงานด้วย ปริมาณการผลิต (1000 หน่วย) ที่คาดหมายไว้แล้วจากแต่ละโรงงาน เมื่อผลิตสินค้าตามจำนวนเครื่องจักรใหม่ กำหนดได้ดังตารางต่อไปนี้

จำนวนเครื่องจักร (x_j)	โรงงานเอ	โรงงานบี	โรงงานซี	โรงงานดี
0	0	0	0	0
1	3	5	4	2
2	6	7	8	6
3	9	9	12	8
4	12	10	12	9
5	14	10	12	10
6	15	10	12	10

บริษัทควรจัดส่งเครื่องจักรไปโรงงานอย่างไร จึงจะดีที่สุด

วิธีทำ ในที่นี้ เราก้ำหนดให้โรงงาน เอ บี ซี และ ดี เป็นขั้นตอนที่ 1, 2, 3 และ 4 ตามลำดับ ถ้าใช้การคำนวณแบบย้อนหลัง เราจะเริ่มต้นที่ขั้นตอน 4 (โรงงานดี) ย้อนกลับมาตามลำดับที่ขั้นตอน 3, 2, 1

การคำนวณในแต่ละขั้นตอน มีดังนี้

เริ่มจากขั้นตอนที่ 4 $f_4(x) = g_4(x_4),\ x_4 = x = 0,1,2,3,4,5,6$

ขั้นตอนที่ 3 $f_3(x) = \underset{\substack{x_3 = 0,1,\ldots,x \\ x = 0,1,\ldots,6}}{\text{ค่าสูงสุด}} \left[g_3(x_3) + f_4(x - x_3)\right]$

ขั้นตอนที่ 2 $f_2(x) = \underset{\substack{x_2 = 0,1,\ldots,x \\ x = 0,1,\ldots,6}}{\text{ค่าสูงสุด}} \left[g_2(x_2) + f_3(x - x_2)\right]$

ขั้นตอนที่ 1 $f_1(6) = \underset{x_1 = 0,1,\ldots,6}{\text{ค่าสูงสุด}} \left[g_1(x_1) + f_2(6 - x_1)\right]$

กล่าวโดยสรุป เราจะได้

$$f_4(x) = g_4(x_4) \quad x_4 = x = 0,1,2,\ldots,6$$

และ

$$f_j(x) = \underset{\substack{x_j = 0,1,\ldots,x \\ x = 0,1,\ldots,6}}{\text{ค่าสูงสุด}} \left[g_j(x_j) + f_{j+1}(x - x_j)\right]$$

สรุปผลที่ได้ดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 1

$x_4 = x$	0	1	2	3	4	5	6
$f_4(x)$	0	2	6	8	9	10	10
$d_4(x)$	0	1	2	3	4	5	6

ตารางที่ 2

x_3 \ x	$g_3(x_3) + f_4(x - x_3)$ 0	1	2	3	4	5	6	$f_3(x)$	$d_3(x)$
0	0							0	0
1	2	4						4	1
2	6	6	8					8	2
3	8	10	10	12				12	3
4	9	12	14	14	12			14	2 หรือ 3
5	10	13	16	18	14	12		18	3
6	10	14	17	20	18	14	12	20	3

ตารางที่ 3

x_2 \ x	$g_2(x_2) + f_3(x - x_2)$ 0	1	2	3	4	5	6	$f_2(x)$	$d_2(x)$
0	0							0	0
1	4	5						5	1
2	8	9	7					9	1
3	12	13	11	9				13	1
4	14	17	15	13	10			17	1
5	18	19	19	17	14	10		19	1 หรือ 2
6	20	23	21	21	18	14	10	23	1

ตารางที่ 4

$x \backslash x_1$	$g_1(x_1)+f_2(6-x_1)$ 0	1	2	3	4	5	6	$f_1(x)$	$d_1(x)$
6	23	22	23	22	21	19	15	23	0 หรือ 2

การแจกจ่ายเครื่องจักรที่เหมาะสมที่สุดก็คือ บริษัทควรจัดส่งเครื่องจักรไปโรงงานเอ 2 เครื่อง โรงงานบี 1 เครื่อง โรงงานซี 3 เครื่อง ไม่ส่งโรงงานดี หรือบริษัทอาจจัดส่งเครื่องจักรไปโรงงานบี 1 เครื่อง โรงงานซี 3 เครื่อง และโรงงานดี 2 เครื่อง ไม่ส่งโรงงานเอ ได้ปริมาณการผลิตรวมกัน 23,000 หน่วย

ในปัญหาการผลิตหรือการส่งสินค้าไปจำหน่ายในที่ต่าง ๆ ถ้าการผลิตหรือส่งนั้น ไม่มีการพิจารณาค่าเสียหาย จากการที่ผลิตหรือส่งได้ไม่ครบจำนวน หรือเกินจำนวนที่ต้องการ ไม่มีอัตราส่วนลดในกรณีที่ส่งจำนวนมาก ปัญหานี้ก็จะเป็นปัญหาที่มีตัวแบบ (4.1) โดยทั่วไปการผลิตหรือส่งสินค้าไปให้ลูกค้าหรือไปจำหน่าย มักจะส่งเป็นลอท ถ้าเราทราบต้นทุนการผลิตต่อลอท อัตราค่าขนส่ง ราคาขาย เราจะหากำไรต่อลอทได้ ดังนั้น

ถ้าเราให้ $g_j(x_j) \;=\;$ กำไรที่ได้จากการผลิตหรือส่งสินค้า x_j ลอท

$$g_j(x_j) \;=\; p_jx_j$$

เมื่อ p_j เป็นกำไรต่อลอทจากการส่งไปที่ j

ตัวอย่างที่ 4.3 นายพานิชต้องการส่งสินค้าจำนวน 5 ลอท แต่ละลอทมีขนาด 10 ชิ้น ไปจำหน่ายที่ศูนย์การค้า 4 แห่ง คาดว่าจะได้กำไรจากการจำหน่ายแต่ละศูนย์การค้าเท่ากับ 80, 120, 100 และ 90 บาทต่อลอทตามลำดับ ถ้าความต้องการสินค้าของศูนย์การค้าเท่ากับ 4, 2, 2 และ 3 ลอทตามลำดับ นายพานิชควรจัดส่งสินค้าไปจำหน่ายอย่างไร จึงจะได้กำไรมากที่สุด

วิธีทำ กำหนดขั้นตอน j แทนศูนย์การค้า j, $j = 1,2,3,4$ ตามลำดับ

$x_j \;=\;$ จำนวนลอทสินค้าที่ส่งศูนย์การค้า j

ในขั้นตอนที่ 1 $f_1(x) \;=\; g_1(x_1) \;=\; 80x_1,\;\; x_1 \;=\; x \;=\; 0,1,2,3,4, x \leqslant 5$

x	0	1	2	3	4	5
$f_1(x)$	0	80	160	240	320	320
$d_1(x)$	0	1	2	3	4	4

ขั้นตอน 2 $g_2(x_2) = 120x_2, \quad x_2 = 0,1,2$

$$f_2(x) = \underset{\substack{x_2 \leqslant x = 0,1,\ldots,5 \\ x_2 = 0,1,2}}{\text{ค่าสูงสุด}} \left[120x_2 + f_1(x - x_2)\right]$$

$x \backslash x_2$	$120x_2 + f_1(x-x_2)$ 0	1	2	$f_2(x)$	$d_2(x)$
0	0			0	0
1	80	120		120	1
2	160	200	240	240	2
3	240	280	320	320	2
4	320	360	400	400	2
5	320	440	480	480	2

ขั้นตอนที่ 3 $g_3(x_3) = 100x_3, \quad x_3 = 0,1,2$

$$f_3(x) = \underset{\substack{x_3 \leqslant x = 0,1,\ldots,5 \\ x_3 = 0,1,2}}{\text{ค่าสูงสุด}} \left[100x_3 + f_2(x - x_3)\right]$$

$x \backslash x_3$	$100x_3 + f_2(x-x_3)$ 0	1	2	$f_3(x)$	$d_3(x)$
0	0			0	0
1	120	100		120	0
2	240	220	200	240	0
3	320	340	320	340	1
4	400	420	440	440	2
5	480	500	520	520	2

ขั้นตอนที่ 4 $g_4(x_4) = 90x_4, \quad x_4 = 0,1,2,3$

$x = 5 \qquad f_4(5) = \underset{x_4 = 0,1,2,3}{\text{ค่าสูงสุด}} \left[90x_4 + f_3(5-x_4)\right]$

$x \backslash x_4$	$90x_4 + f_3(5-x_4)$ 0	1	2	3	$f_4(5)$	$d_4(5)$
5	520	530	520	510	530	1

สรุปว่า นายพานิชส่งสินค้าไปจำหน่ายที่ศูนย์การค้า 4 1 ลอท ที่ศูนย์การค้า 3 2 ลอท ศูนย์การค้า 2 2 ลอท ไม่ส่งศูนย์การค้า 1 คาดว่าจะได้กำไรทั้งหมด 530 บาท

หมายเหตุ ปัญหาในตัวอย่างนี้ แตกต่างกับ 2 ตัวอย่างแรก ตรงที่มีขีดจำกัดสูงสุดของ x_j ด้วย นักศึกษาอาจจะหาตารางของกำไรจากการจำหน่ายสินค้า x_j ลอท ที่ศูนย์การค้า j นั่นคือ $g_j(x_j)$ ก่อนก็ได้ โดยที่

$$g_2(x_2) = 240, \quad x_2 = 3,4,5$$

$$g_3(x_3) = 200, \quad x_3 = 3,4,5$$

$$g_4(x_4) = 270, \quad x_4 = 4,5$$

นอกนั้นเหมือนเดิม

ให้นักศึกษาเขียนตัวแบบ และแก้ปัญหาโดยใช้โปรแกรมเชิงจำนวนเต็ม

ปัญหาโปรแกรมพลวัต (DP) โดยทั่วไปอาจจะมีตัวแบบต่างไปจากตัวแบบ (4.1) แต่มักจะเป็นปัญหาที่มีข้อจำกัดสำคัญ (ที่ไม่ใช่ขีดจำกัดของตัวแปร) เพียง 1 ข้อ เราใช้วิธีการโปรแกรมพลวัตได้ ถ้าสามารถแยกเป็นปัญหาย่อยของ 1 ตัวแปรได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

4.3 ปัญหาการบรรทุกของรถสินค้า

ปัญหาการจัดส่งสินค้าหรือการนำสินค้าชนิดต่าง ๆ ไปจำหน่าย โดยอาศัยรถสินค้าก็คือข้อจำกัดในเรื่องน้ำหนักบรรทุก และ/หรือ ปริมาณของที่จุได้ เป็นผลให้เกิดการจำกัดในเรื่องปริมาณสินค้าแต่ละชนิดด้วย ถ้าเรามีสินค้า n ชนิดที่ต้องการนำไป ภายใต้ข้อจำกัดในเรื่องน้ำหนัก

ถ้า v_j = กำไรต่อหน่วยของสินค้าชนิดที่ j

w_j = น้ำหนักต่อหน่วยของสินค้าชนิดที่ j

x_j = เป็นจำนวนหน่วยของสินค้า j ที่จะนำไป

A = น้ำหนักรวมทั้งหมดที่สามารถนำไปได้

ตัวแบบของปัญหานี้คือ

$$\text{หาค่าสูงสุดของ } \sum_{j=1}^{n} v_j x_j$$

$$\text{โดยมีข้อจำกัด } \sum_{j=1}^{n} w_j x_j \leqslant A \qquad (4.8)$$

$$\text{และ} \quad x_j = 0,1,2,\ldots \quad \text{ทุกค่า } j$$

จะเห็นได้ว่า ปัญหานี้เป็นกรณีหนึ่งของปัญหาโปรแกรมเชิงจำนวนเต็ม

สมมติว่า เรานำสินค้าชนิดที่ n ไปชนิดเดียว จำนวนสินค้าที่เราจะนำไปได้มากที่สุด จะเท่ากับ

ค่าที่เป็นเลขจำนวนเต็มของ $A/w_n = [A/w_n]$

ดังนั้น ถ้าเรานำสินค้า n ไป x หน่วยน้ำหนัก, $x = 0,1,2,\ldots,A$

$$\text{จำนวนสินค้า } n = [x/w_n] = d_n(x)$$

$$\text{กำไรที่จะได้} = f_n(x) = v_n x_n,\ x_n \leqslant [x/w_n] \qquad (4.9)$$

ตัวอย่างเช่น $x = 5,\ w_n = 2,\ v_n = 12$ เราจะได้

$$f_n(5) = 12 \times 2 = 24,\ d_n(5) = 2$$

ถ้าเรานำสินค้า n และ $n-1$ ไป กำหนดว่าให้มีน้ำหนักรวมกัน x ถ้าเรานำสินค้า $n-1$ ไป x_{n-1} หน่วย จะมีน้ำหนัก $w_{n-1}x_{n-1}$ ดังนั้น ที่เหลือ $x - w_{n-1}x_{n-1}$ จะเป็นน้ำหนักของสินค้า n

กำไรที่จะได้จากการนำสินค้า 2 ชนิดนี้ไป จะเท่ากับ

$$v_{n-1}x_{n-1} + f_n(x - w_{n-1}x_{n-1})$$

ค่านี้จะแปรไปตามจำนวน x_{n-1} และน้ำหนัก $x = 0,1,2,\ldots,A$

ดังนั้น กำไรสูงสุดจากการนำสินค้า 2 ชนิดนี้ไป จะเท่ากับ

$$f_{n-1}(x) = \underset{\substack{x_{n-1} \leqslant [x/w_{n-1}] \\ x = 0,1,\ldots,A}}{\text{ค่าสูงสุด}} \left[v_{n-1}x_{n-1} + f_n(x - w_{n-1}x_{n-1})\right]$$

$$d_{n-1}(x) = \text{จำนวนของ } x_{n-1} \text{ ที่มีกำไร } f_{n-1}(x)$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้าเรานำสินค้า $n, n-1,\ldots,j$ ไป โดยให้มีน้ำหนักรวมกัน x หน่วย จำนวนหน่วยสูงสุดของ $x_j = [x/w_j]$ ถ้าเรานำสินค้า j ไป x_j หน่วย จะมีน้ำหนัก w_jx_j สินค้า $j+1,\ldots,n$ จะนำไปได้โดยมีน้ำหนักรวมกัน $x - w_jx_j$ จะได้ฟังก์ชันสัมพันธ์ต่อเนื่อง

$$f_j(x) = \underset{\substack{x_j \leqslant [x/w_j] \\ x = 0,1,\ldots,A}}{\text{ค่าสูงสุด}} \left[v_jx_j + f_{j+1}(x - w_jx_j)\right] \tag{4.10}$$

$d_j(x)$ = จำนวนหน่วยของ x_j ที่มีค่ากำไร $f_j(x)$

เมื่อ $j = 1$ x จะเป็นน้ำหนักรวมของสินค้าทุกชนิด ดังนั้น $x = A$

และ $x_1 \leqslant [A/w_1]$ เราจะได้

$$f_1(A) = \underset{x_1 = 0,1,\ldots,[A/w_1]}{\text{ค่าสูงสุด}} \left[v_1x_1 + f_2(A - w_2x_2)\right] \tag{4.11}$$

= กำไรรวมสูงสุด

$d_1(A)$ = จำนวนหน่วยของ x_1 ที่มีกำไร $f_1(A)$

กล่าวได้ว่า ในการแก้ปัญหาที่มีตัวแบบ (4.8) เรามีวิธีการคำนวณ 2 แบบ ดังนี้

1) ทำตามวิธีที่กล่าวข้างต้นจาก (4.9) ถึง (4.11)

จำนวนสินค้า j ที่เหมาะสม จะได้จาก

$$x_1^* = d_1(A)$$

$$x_j^* = d_j\left[A - \sum_{k=1}^{j-1} w_kx_k^*\right]$$

2) เปลี่ยนตัวแบบของปัญหา (4.8) ให้มีตัวแบบ (4.1) นั่นคือ กำหนดตัวแปรตัดสินใจ $y_j = w_jx_j$, $j = 1,2,\ldots,n$

ตัวแบบ (4.8) จะเปลี่ยนเป็น

ค่าสูงสุดของ $\sum_{j=1}^{n} g_j(y_j)$

โดยมีข้อจำกัด $\sum_{j=1}^{n} y_j \leqslant A$

$y_j = 0,1,2,\ldots,$ ทุก j

ในเมื่อ $g_j(y_j) = v_n[y_j/w_j]$

ตัวอย่างที่ 4.4 จงหาคำตอบที่ดีที่สุดของปัญหาในตัวอย่าง 3.2 ด้วยวิธีการของโปรแกรมพลวัต

วิธีทำ **วิธีที่ 1** จากตัวแบบของปัญหาในตัวอย่าง 3.2

เราใช้ขั้นตอน j แทนสินค้าชนิดที่ j, j = 1,2,3 ตามลำดับ

ตารางที่ 1 ขั้นตอนที่ 3

$$f_3(x) = 48x_3, \quad x_3 \leqslant [x/2], \quad x = 0,1,2,\ldots,10$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f_3(x)$	0	0	48	48	96	96	144	144	192	192	240
$d_3(x)$	0	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5

ตารางที่ 2 ขั้นตอนที่ 2

$$f_2(x) = \underset{\substack{0 \leqslant x_2 \leqslant [x/4] \\ x = 0,1,\ldots,10}}{\text{ค่าสูงสุด}} [112x_2 + f_3(x-4x_2)]$$

x_2 \ x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	48	48	96	96	144	144	192	192	240
1					112	112	160	160	208	208	256
2									224	224	272
$f_2(x)$	0	0	48	48	112	112	160	160	224	224	272
$d_2(x)$	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2

ตารางที่ 3 ขั้นตอนที่ 1

$$f_1(10) = \underset{x_1 = 0,1,2,3}{\text{ค่าสูงสุด}} [80x_1 + f_2(10-3x_1)]$$

x \ x_1	0	1	2	3	$f_1(x)$	$d_1(x)$
10	272	240	272	240	272	0 หรือ 2

จะเห็นว่า

เมื่อ $x_1^* = d_1(10) = 0$ จะได้ $x_2^* = d_2(10-0) = 2$, $x_3^* = d_3(10-0-4\times 2) = 1$

เมื่อ $x_1^* = d_1(10) = 2$ จะได้ $x_2^* = d_2(10-3\times 2) = 1$, $x_3^* = d_3(10-6-4) = 0$

สรุปได้ว่า นายไทยควรจะนำสินค้าชนิดที่ 2 ไป 2 หน่วย ชนิดที่ 3 ไป 1 หน่วย หรือนำสินค้าชนิดที่ 1 2 หน่วย รวมกับสินค้าชนิดที่ 2 อีก 1 หน่วย จะทำให้ได้กำไร 272 บาท น้ำหนักสินค้าทั้งหมด 10 กก.

การบ้านให้นักศึกษาพิจารณาว่า หากนายไทยต้องการได้กำไรอย่างต่ำ 240 โดยมีความประสงค์ว่าจะนำสินค้าติดตัวไป มีน้ำหนักรวมกันน้อยที่สุด เขาควรจัดการอย่างไร จึงจะเหมาะสมที่สุด

(คำตอบนำไปทุกชนิดอย่างละ 1 หน่วย หรือเอาไปเฉพาะชนิดที่ 3 อย่างเดียว 3 หน่วย)

ให้นักศึกษาหาคำตอบของตัวอย่างนี้ ตามวิธีการที่ 2 ในที่นี้เราจะได้ตารางของ $g_j(y_j)$ ดังนี้

y_j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$g_1(y_1) = 80[y_1/3]$	0	0	0	80	80	80	160	160	160	240	240
$g_2(y_2) = 112[y_2/4]$	0	0	0	0	112	112	112	112	224	224	224
$g_3(y_3) = 48[y_3/2]$	0	0	48	48	96	96	144	144	192	192	240

4.4 ปัญหาเกี่ยวกับการกำหนดงานการผลิต (Scheduling Problem)

ให้เรามาพิจารณาปัญหาสินค้าหรือวัสดุคงคลังอย่างง่าย ที่ใช้ในการกำหนดงานการผลิตสินค้าหรือการสั่งซื้อวัสดุอุปกรณ์มาใช้ในการผลิต ในช่วงระยะการผลิตที่แบ่งเป็นงวด ๆ n งวด การกะประมาณสินค้าให้พอดีกับจำนวนอุปสงค์ของสินค้าที่คาดคะเนไว้หรือตามใบสั่งซื้อขึ้นอยู่กับจำนวนที่ผลิตหรือจำนวนวัสดุที่ต้องสั่งซื้อ และเวลาที่ใช้ในการผลิต สมมติว่า เรากะเวลาที่ใช้ในการผลิตเหมาะสมแล้ว สิ่งที่ต้องพิจารณาคือ จำนวนสินค้าที่จะผลิตหรือจำนวนวัสดุที่จะต้องสั่งซื้อเพื่อการผลิต หากเราสั่งซื้อหรือผลิตจำนวนมาก ต้นทุนในการผลิตหรือซื้อก็จะต่ำ แต่อาจจะมีวัสดุหรือสินค้าคงเหลือจำนวนมาก ทำให้ต้นทุนในการจัดเก็บสูง แต่ถ้าเราสั่งซื้อหรือผลิตจำนวนน้อย เพื่อจะให้ต้นทุนในการจัดเก็บต่ำ ก็อาจทำให้เราผลิตสินค้าไม่พอกับความ

ต้องการ เกิดผลเสียหายมากมาย จึงต้องพิจารณาทั้งปริมาณและค่าใช้จ่ายควบคู่กันไป ดังนั้นเป้าหมายในการกำหนดงานการผลิตก็คือ ต้องการให้มีต้นทุนการผลิตหรือซื้อกับต้นทุนในการจัดเก็บสินค้าหรือวัสดุคงคลังรวมกัน มีค่าต่ำที่สุด โดยมีข้อจำกัดว่า จะต้องมีปริมาณผลิตหรือจำนวนวัสดุอุปกรณ์พอดีกับความต้องการในงวดนั้น ๆ ถือว่า ก่อนการผลิตงวดแรก และหลังการผลิตงวดสุดท้าย จะต้องไม่มีสินค้าหรือวัสดุคงเหลือ นอกจากนี้ จำนวนสินค้าหรือวัสดุคงเหลือหลังการผลิตงวดที่ $i-1$ รวมกับจำนวนสินค้าที่ผลิตหรือวัสดุที่สั่งซื้อมาใช้ในการผลิตงวดที่ i จะต้องมีจำนวนเพียงพอกับจำนวนอุปสงค์ (ความต้องการ) ในงวดที่ i ต้นทุนในการจัดเก็บสินค้าหรือวัสดุคงเหลือ ในงวดที่ i ขึ้นอยู่กับ จำนวนสินค้าหรือวัสดุคงเหลือเมื่อสิ้นสุดงวดที่ i

การกำหนดงานการผลิตโดยใช้โปรแกรมพลวัต ทำได้ดังนี้

ให้ n = จำนวนงวดการผลิต

d_i = จำนวนอุปสงค์ของสินค้าในงวดที่ i

$PC_i(j)$ = ค่าใช้จ่ายในการผลิตหรือสั่งซื้อวัสดุ j หน่วยในงวดที่ i

$EIC_i(j)$ = ค่าใช้จ่ายในการจัดเก็บสินค้าหรือวัสดุ j หน่วย เมื่อสิ้นสุดการผลิตงวดที่ i

K = จำนวนสินค้าหรือวัสดุคงเหลือก่อนการผลิตในแต่ละงวด

$f_i(K)$ = นโยบายเกี่ยวกับค่าใช้จ่ายที่เหมาะสมของการผลิตงวดที่ i

$x_i(K)$ = จำนวนสินค้าที่ผลิตหรือจำนวนวัสดุที่สั่งซื้อที่เหมาะสมของงวดที่ i

การคำนวณเริ่มต้นด้วย

$$f_n(K) = PC_n(d_n - K) \qquad K = 0,1,\ldots,d_n - 1$$

$$x_n(K) = d_n - K \qquad K = 0,1,\ldots,d_n - K$$

ความสัมพันธ์ต่อเนื่องคือ

$$f_i(K) = \underset{a \leqslant Z \leqslant b}{\text{ค่าต่ำสุด}} \left[PC_i(Z) + EIC_i(K+Z-d_i) + f_{i+1}(K+Z-d_i)\right]$$

ในเมื่อ a = ค่าสูงสุด $(0, d_i - K)$ และ $b = \sum_{j=i}^{n} d_j - K$

$$x_i(K) = \text{ค่าของ } Z \text{ ที่มีค่าใช้จ่ายที่เหมาะสม } f_i(K)$$

ตัวอย่างที่ 4.5 บริษัทประกอบรถยนต์ ได้รับใบสั่งซื้อรถยนต์ใน 3 เดือนข้างหน้า เป็นจำนวน 3, 2 และ 4 คันตามลำดับ การผลิตรถยนต์แต่ละคันจะต้องใช้ชิ้นส่วนประกอบที่สำคัญ ซึ่งบริษัท

จะต้องสั่งซื้อจากที่อื่น ในราคาชิ้นละ 240 บาท การสั่งซื้อแต่ละครั้งต้องเสียค่าใช้จ่ายในการสั่งซื้อ 800 บาท ชิ้นส่วนประกอบนี้ต้องการการเก็บรักษาเป็นพิเศษ จึงมีค่าเก็บรักษาค่อนข้างแพง เมื่อเทียบกับราคาของมัน ค่าจัดเก็บชิ้นส่วนคงคลังต่อเดือนต่อชิ้น เท่ากับ 160 บาท ดังนั้น ก่อนการผลิตในเดือนแรก และภายหลังการผลิตในเดือนที่ 3 จึงไม่มีชิ้นส่วนประกอบนี้เหลืออยู่

เพื่อให้การผลิตได้ครบจำนวนและทันความต้องการของลูกค้า บริษัทควรวางแผนในการสั่งซื้อชิ้นส่วนนี้อย่างไรจึงจะดีที่สุด

วิธีทำ ในที่นี้ เรามีค่าใช้จ่าย 2 ประเภท คือ

ค่าใช้จ่ายในการสั่งซื้อชิ้นส่วนประกอบ j ชิ้น ในเดือนที่ i เท่ากับ

$$PC_i(j) \;=\; 800+240j, \; j \;=\; 0,1,\ldots,9$$

ค่าใช้จ่ายในการจัดเก็บชิ้นส่วน j ชิ้น หลังการผลิตเดือนที่ i เท่ากับ

$$EIC_i(j) \;=\; 160j, \qquad j \;=\; 0,1,\ldots,6$$

j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$PC_i(j)$	0	1040	1280	1520	1760	2000	2240	2480	2720	2960
$EIC_i(j)$	0	160	320	480	640	800	960			

กำหนดการสั่งซื้อเดือนที่ i เป็นขั้นตอน i, i = 1,2,3

ขั้นตอนที่ 3 เราเริ่มต้นการสั่งซื้อของเดือนที่ 3 ถือว่า ต้นเดือนนี้มีชิ้นส่วนคงเหลือให้นำมาใช้ได้ K ชิ้น โดยเหตุที่บริษัทต้องการผลิตรถยนต์ 4 คัน จำนวนชิ้นส่วนจึงต้องมีพอเพียงกับจำนวนรถที่จะผลิต และเมื่อสิ้นสุดการผลิตจะต้องไม่มีชิ้นส่วนเหลืออยู่ ดังนั้น K = 0,1,2,3 หรือ 4 ชิ้น และบริษัทต้องสั่งซื้อชิ้นส่วนประกอบนี้เพิ่มเข้ามาอีก 4 – K ชิ้น ต้นทุนในการซื้อรวมทั้งราคาของ จะเท่ากับ

$$f_3(K) \;=\; PC_3(4-K), \; K \;=\; 0,1,2,3,4$$

จำนวนสั่งซื้อที่เหมาะสม $x_3(K) \;=\; 4-K$

K	0	1	2	3	4
$f_3(K)$	1760	1520	1280	1040	0
$x_3(K)$	4	3	2	1	0

ขั้นตอนที่ 2 พิจารณาจำนวนชิ้นส่วนประกอบที่จะสั่งซื้อในเดือนที่ 2 เพื่อนำมาใช้ในการผลิตของเดือนที่ 2 และ 3 ในเดือนที่ 2 นี้ บริษัทต้องผลิตรถให้ได้ 2 คัน ก่อนการผลิตบริษัทมีชิ้นส่วนประกอบในสต็อค K ชิ้น ด้วยเหตุที่ต้นทุนในการสั่งซื้อสูงมาก ดังนั้น บริษัทอาจจะสต็อคชิ้นส่วนประกอบให้เพียงพอกับการผลิตรถยนต์ในเดือนที่ 2 และ 3 ก็ได้ นั่นคือ $K \leqslant 6$ ถ้า Z เป็นจำนวนชิ้นส่วนประกอบที่บริษัทสั่งเข้ามาเมื่อเริ่มการผลิตเดือนที่ 2

จำนวนชิ้นส่วนที่เหลือของเดือนนี้ $= K+Z-2$

จะได้ $$f_2(K) = \underset{a \leqslant Z \leqslant 6-K}{\text{ค่าต่ำสุด}} \left[PC_2(Z) + EIC_2(K+Z-2) + f_3(K+Z-2)\right]$$

ในเมื่อ a = ค่าสูงสุด $(0, 2-K)$

สรุปผลที่ได้ในตารางที่ 2 ดังนี้

K \ Z	$PC_2(Z)+EIC_2(K+Z-2)+f_3(K+Z-2)$ 0	1	2	3	4	5	6	$f_2(K)$	$x_2(K)$
0			3,040	3,200	3,360	3,520	2,880	2,880	6
1		2,800	2,960	3,120	3,280	2,640		2,640	5
2	1,760	2,720	2,880	3,040	2,400			1,760	0
3	1,680	2,640	2,800	2,160				1,680	0
4	1,600	2,560	1,920					1,600	0
5	1,520	1,680						1,520	0
5	640							640	0

ขั้นตอนที่ 1 พิจารณาจำนวนชิ้นส่วนประกอบที่จะสั่งซื้อในเดือนแรก เพื่อนำมาใช้ในการผลิตทั้ง 3 เดือน ก่อนการผลิต ไม่มีจำนวนชิ้นส่วนในสต็อคเลย นั่นคือ $K = 0$ แต่บริษัทอาจสั่งซื้อชิ้นส่วนมาเตรียมไว้เพื่อให้เพียงพอกับการผลิตทั้ง 3 เดือน ก็ได้ นั่นคือ $Z \leqslant 9$ จะได้

$$f_1(0) = \underset{3 \leqslant Z \leqslant 9}{\text{ค่าต่ำสุด}} \left[PC_1(Z) + EIC_1(Z-3) + f_2(Z-3)\right]$$

สรุปผลที่ได้ในตารางที่ 3 ดังนี้

K \ Z	3	4	5	6	7	8	9	$f_1(0)$	$x_1(0)$
0	4,400	4,560	4,080	4,400	4,720	5,040	4,560	4,080	5

จากตารางที่ 3 จะเห็นได้ว่า $x_1(0) = 5$ ซึ่งทำให้ $K = 2$ (ตารางที่ 2) และ $x_2(2) = 0$ ซึ่งทำให้ $K = 0$ (ตารางที่ 1) และ $x_3(0) = 4$

สรุปได้ว่า บริษัทควรสั่งซื้อชิ้นส่วนประกอบในต้นเดือนแรก 5 ชิ้น เพื่อใช้ในการผลิตรถยนต์ของเดือนแรก และเดือนที่ 2 และสั่งซื้อในต้นเดือนที่ 3 เพื่อใช้ในการผลิตของเดือนนี้ 4 ชิ้น เสียค่าใช้จ่ายทั้งหมดเท่ากับ 4,080 บาท

ตัวอย่างที่ 4.6 จากสถิติการขายในแต่ละปี ทำให้นายพานิชสามารถพยากรณ์จำนวนอุปสงค์สินค้าใน 4 เดือนแรกของปีหน้าได้ดังนี้

เดือน	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.	เม.ย.
จำนวนอุปสงค์ (ลอท)	40	40	30	20

นายพานิชต้องการวางแผนในการสั่งซื้อและสต็อคสินค้าไว้ในช่วง 4 เดือนนี้ การสั่งซื้อในแต่ละครั้ง ต้องเสียค่าใช้จ่าย 30 บาท โรงงานคิดค่าบริการในการส่งแต่ละครั้ง 120 บาท และคิดราคาสินค้าชิ้นละ 60 บาท การสั่งซื้อสินค้าต้องสั่งเป็นลอท แต่ละลอทจะมี 10 ชิ้น โรงงานมีส่วนลดตามจำนวนลอท ดังนี้

จำนวนลอท	1	2	3	4	5
% ส่วนลด	5	5	10	20	25

ในแต่ละเดือน นายพานิชมีสถานที่เก็บสินค้าคงคลังได้ไม่เกิน 40 ชิ้น เสียค่าเก็บรักษาชิ้นละ 3 บาทต่อเดือน นายพานิชควรสั่งซื้อและเก็บสินค้าคงคลังอย่างไร จึงจะเสียค่าใช้จ่ายในช่วง 4 เดือนนี้ต่ำสุด ถ้าการสั่งซื้อในแต่ละครั้งจะไม่เกิน 5 ลอทและก่อน 1 ม.ค. กับหลัง 30 เม.ย. ไม่มีสินค้าค้างสต็อค

วิธีทำ ค่าใช้จ่ายในการเก็บสินค้าคงคลัง j ลอท, $j \leqslant 4$ ในเดือนที่ i และค่าใช้จ่ายในการสั่งซื้อสินค้า j ลอทในเดือนที่ $i, i = 1,2,3,4$ $EIC_i(j) = 3 \times 10j$ และ

$$PC_i(j) = 30 + 120 + 60 \times 10j - 60 \times 10j \times \frac{d}{100} \text{ บาท}$$

เมื่อ d = % ส่วนลด

# ลอท (j)	$PC_i(j)$	$EIC_i(j)$
1	$150 + 600 - 600 \times .05 = 720$	30
2	$150 + 1200 - 1200 \times .05 = 1290$	60
3	$150 + 1800 - 1800 \times .10 = 1770$	90
4	$150 + 2400 - 2400 \times .20 = 2070$	120
5	$150 + 3000 - 3000 \times .25 = 2400$	—

กำหนดเดือน ม.ค., ก.พ., มี.ค. และ เม.ย. ตามลำดับ เป็นขั้นตอนที่ 1, 2, 3 และ 4

K เป็นจุดหมายแสดงถึงจำนวนลอทของสินค้าคงคลัง, $K \leqslant 4$

Z เป็นตัวแปรแสดงถึงจำนวนลอทสินค้าที่ซื้อ, $Z \leqslant 5$

เริ่มต้นจากขั้นตอนที่ 4 (เดือน เม.ย.)

จำนวนอุปสงค์ของสินค้าในเดือนนี้ = 20 ชิ้น หรือ 2 ลอท

หลัง 30 เม.ย. ไม่มีสินค้าคงคลัง ดังนั้น

$$Z + K \leqslant 2, \quad K = 0,1,2$$

$$f_4(K) = PC_i(2 - K)$$

$$x_4(K) = 2 - K$$

K	0	1	2
$f_4(K)$	1290	720	0
$x_4(K)$	2	1	0

ขั้นตอนที่ 3 (เดือน มี.ค.)

จำนวนอุปสงค์ของสินค้าในเดือนนี้ = 30 ชิ้น หรือ 3 ลอท

หลัง 31 มี.ค. จะต้องมีสินค้าคงคลังไม่เกิน 2 ลอท ดังนั้น

$$3 \leqslant K+Z \leqslant 5,\ K = 0,1,2,3,4;\ Z = 0,1,2,3,4,5$$

$$f_3(K) = \underset{3 \leqslant K+Z \leqslant 5}{\text{ค่าต่ำสุด}} \left[PC_3(Z) + EIC_3(K+Z-3) + f_4(K+Z-3)\right]$$

K \ Z	0	1	2	3	4	5	$f_3(K)$	$x_3(K)$
0	—	—	—	3060	2820	2460	2460	5
1	—	—	2580	2520	2130	—	2130	4
2	—	2010	2040	1830	—	—	1830	3
3	1290	1470	1350	—	—	—	1290	0
4	750	780	—	—	—	—	750	0

ขั้นตอนที่ 2 (เดือน ก.พ.)

จำนวนสินค้าในเดือนนี้เท่ากับ 40 ชิ้น หรือ 4 ลอท สิ้นเดือน ก.พ. มีสินค้าคงคลังได้ 4 ลอท ดังนั้น

$$4 \leqslant K+Z \leqslant 8,\ K = 0,1,2,3,4;\ Z = 0,1,2,3,4,5$$

$$f_2(K) = \underset{4 \leqslant K+Z \leqslant 8}{\text{ค่าต่ำสุด}} \left[PC_2(Z) + EIC_2(K+Z-4) + f_3(K+Z-4)\right]$$

K \ Z	0	1	2	3	4	5	$f_2(K)$	$x_2(K)$
0	—	—	—	—	4530	4560	4530	4
1	—	—	—	4230	4230	4290	4230	3 หรือ 4
2	—	—	3750	3930	3960	3780	3750	2
3	—	3180	3450	3660	3450	3270	3180	1
4	2460	2880	3180	3150	2940	—	2460	0

ขั้นตอนที่ 1 (เดือน ม.ค.)

ก่อนวันที่ 1 ม.ค. ไม่มีสินค้าคงคลัง (K = 0) จำนวนอุปสงค์ในเดือนนี้เท่ากับ 40 ชิ้น หรือ 4 ลอท ดังนั้น Z = 4 หรือ 5

$$f_1(0) = \underset{Z = 4,5}{\text{ค่าต่ำสุด}} \left[PC_1(Z) + EIC_1(Z-4) + f_2(Z-4)\right]$$

Z / K	4	5	$f_1(0)$	$x_1(0)$
0	6600	6660	6600	4

สรุปว่า สั่งสินค้าในเดือนมกราคม 40 ชิ้น เดือนกุมภาพันธ์ 40 ชิ้น เดือนมีนาคม 50 ชิ้น ไม่สั่งซื้อในเดือนเมษายน

ค่าใช้จ่ายในการซื้อและเก็บสินค้าคงคลัง = 6,600 บาท

4.5 ปัญหาการแทนที่ (Replacement Problem)

การทำกิจกรรมใดที่ต้องอาศัยเครื่องมือช่วย เช่น การใช้เครื่องจักร เครื่องยนต์ เป็นต้น ปัญหาที่ต้องเผชิญก็คือ เมื่อไรจะต้องมีการซ่อมแซม ซึ่งอาจจะเป็นการแทนที่ชิ้นส่วนบางอย่างของมัน หรืออาจแทนที่ทั้งหมด นั่นคือการเปลี่ยนใหม่นั่นเอง ทั้งนี้เนื่องจากของเหล่านี้ เมื่อใช้ไปนาน ๆ จะเสื่อมคุณภาพ ทำงานได้ไม่เต็มที่ ทำให้กิจกรรมหยุดชะงักบ่อยครั้ง เกิดผลเสียต่อการงาน ผลตอบแทนที่ได้ลดน้อยลง นอกจากนี้ค่าใช้จ่ายในการบำรุงรักษาก็จะสูงตามไปด้วย จึงต้องมีนโยบายที่เหมาะสมมาใช้ในการแทนที่ วิธีการพิจารณาหนึ่งก็คือ การใช้โปรแกรมพลวัต

กำหนด $r_i(t)$ = ผลตอบแทนที่ได้ในปีที่ i จากการใช้เครื่องมือปีที่ $(i-t)$ มีอายุใช้งาน t ปี ในปีที่ i

$u_i(t)$ = ค่าบำรุงรักษาในปีที่ i ของเครื่องมือปีที่ $(i-t)$ มีอายุใช้งาน t ปี

$c_i(t)$ = ค่าใช้จ่ายของปีที่ i จากการแทนที่เครื่องมือปีที่ $(i-t)$ มีอายุใช้งาน t ปี

IT = อายุการใช้งานของเครื่องมือนับถึงปีแรกที่นำมาใช้

$f_i(t)$ = ผลตอบแทนที่ดีที่สุดในปีที่ $i, i+1, \ldots, n$ เมื่อเริ่มต้นใช้เครื่องมือที่มีอายุใช้งานแล้ว t ปี ในปีที่ i

$x_i(t)$ = นโยบายที่เหมาะสมในต้นปีที่ i ที่มีผลตอบแทน $f_i(t)$

ทั่วไปจะมีนโยบายให้เลือก 2 ทางคือ แทนที่ใหม่หมด นั่นคือ ซื้อเครื่องมือใหม่มาใช้ กับยังคงใช้เครื่องมือชิ้นเดิม การใช้เครื่องมือเดิม มักจะได้ผลตอบแทนลดน้อยลงไปตามอายุใช้งานที่

เพิ่มขึ้น นอกจากนี้ยังต้องเสียค่าบำรุงรักษามาก ส่วนการใช้เครื่องมือใหม่ ผลตอบแทนที่ได้จะสูง ค่าบำรุงรักษาต่ำ แต่เราต้องมีค่าใช้จ่ายในการแทนที่เครื่องมือเดิมด้วย ค่าใช้จ่ายส่วนนี้ขึ้นอยู่กับจำนวนปีใช้งานของเครื่องมือเดิม

ถ้าเราให้ R_K เป็นผลตอบแทนที่คำนวณได้จากการใช้เครื่องมือเดิมในปีที่ $i, i+1, \ldots, n$ รวมกัน

$$R_K = r_i(t) - u_i(t) + f_{i+1}(t+1)$$

และ R_P เป็นผลตอบแทนที่คำนวณได้จากการใช้เครื่องมือใหม่ ในปีที่ $i, i+1, \ldots, n$ รวมกัน

$$R_P = r_i(0) - u_i(0) - c_i(t) + f_{i+1}(1)$$

จะได้ว่า $f_i(t)$ = ค่าสูงสุด (R_K, R_P) $i = 1,2,\ldots,n;\ t = 1,\ldots,(i-1), (i+IT-1)$

ตัวอย่างที่ 4.7 บริษัทมีเครื่องจักรที่มีอายุใช้งานแล้ว 2 ปี เมื่อเริ่มต้นการทำงานในปี 2529 (ปีที่ 1) บริษัทคาดคะเน อายุ ผลตอบแทน ค่าบำรุงรักษา และค่าแทนที่ ตามปี พ.ศ. ที่ผลิตไว้ดังต่อไปนี้

อายุ	**ปี 2527**			**ปี 2529 (ปี 1)**			**ปี 2530 (ปี 2)**		**ปี 2531 (ปี 3)**
	2	3	4	0	1	2	0	1	0
ผลตอบแทน	30	20	15	40	35	35	45	40	50
ค่าบำรุงรักษา	9	9	12	3	3	6	3	3	3
ค่าแทนที่	62	65	70	50	55	60	53	55	53

ถ้าต้นปี 2529 บริษัทมีเครื่องจักรที่ผลิตในปี 2527 มาใช้งาน บริษัทควรมีนโยบายเกี่ยวกับการแทนที่เครื่องจักรนี้อย่างไร เมื่อเริ่มต้นการใช้งานเครื่องจักรในปีนี้ และเริ่มต้นการใช้งานในอีก 2 ปีถัดไป

วิธีทำ เริ่มด้วยการพิจารณาว่า ต้นปี 2531 (ปี 3) จะยังคงใช้เครื่องจักรตัวเดิม ที่มีอายุใช้งาน 1 ปี (เครื่องจักรผลิตในปี 2530) 2 ปี (เครื่องจักรผลิตในปี 2529) หรือ 4 ปี (เครื่องจักรผลิตในปี 2527) หรือจะซื้อเครื่องจักรใหม่ (เครื่องจักรที่ผลิตในปี 2531) มาใช้ในปีนี้ นั่นคือ เมื่อ $i = 3$, $t = 1,2$ หรือ 4 (ถือว่าผลตอบแทนในปี 2532 ไม่มี)

อายุเครื่องจักร (t)	R_K	R_P	$t_3(t)$	$x_3(t)$
1	$40-3$	$50-3-55$	37	ใช้เครื่องเดิม
2	$35-6$	$50-3-60$	29	ใช้เครื่องเดิม
4	$15-12$	$50-3-70$	3	ใช้เครื่องเดิม

ขั้นตอนต่อไป พิจารณาว่าในต้นปี 2530 (ปี 2) ควรจะมีการแทนที่เครื่องจักรเก่าที่มีอายุใช้งาน 1 ปี (ผลิตในปี 2529) หรือ 3 ปี (ผลิตในปี 2527) หรือไม่ นั่นคือเมื่อ $i = 2, t = 1,3$ จะได้

อายุเครื่องจักร (t)	R_K	R_P	$f_2(t)$	$x_2(t)$
1	$35-3+29$	$45-3-55+37$	61	ใช้เครื่องเดิม
3	$20-9+3$	$45-3-65+37$	14	ใช้เครื่องเดิมหรือซื้อใหม่

ขั้นตอนสุดท้าย พิจารณาว่า ในต้นปี 2529 ควรจะมีการแทนที่เครื่องจักรเก่าที่ผลิตในปี 2527 หรือไม่ นั่นคือ $i = 1, t = 2$

อายุเครื่องจักร (t)	R_K	R_P	$f_1(2)$	$x_1(2)$
2	$30-9+14$	$40-3-62+61$	36	ซื้อใหม่

สรุปได้ว่า ในต้นปี 2529 เราแทนที่เครื่องจักรเก่าที่ผลิตในปี 2527 มาซื้อเครื่องจักรใหม่ที่ผลิตในปีนั้น ต้นปี 2530 เครื่องจักรนี้มีอายุใช้งาน 1 ปี ซึ่งบริษัทยังคงเลือกใช้เครื่องจักรนี้ต่อไป ต้นปี 2531 เครื่องจักรมีอายุใช้งาน 2 ปี ซึ่งบริษัทยังคงตัดสินใจใช้เครื่องจักรนี้ จากนโยบายที่ใช้ในช่วง 3 ปีนี้ทำให้บริษัทได้ผลตอบแทนสูงสุด 36

4.6 ปัญหาการเดินทาง

เป็นการเดินทางของพนักงานขาย ที่จะต้องเลือกเส้นทางที่เหมาะสมที่สุดในการเดินทางจากจุดต้นทางไปยังปลายทาง ซึ่งมีหลายเส้นทางให้เลือก กำหนดเป็นผังการเดินทางหรือโครงข่าย

ของเส้นทาง ปัญหาก็คือ การพิจารณาเส้นทางที่ปลอดภัยที่สุด ดีที่สุด ที่จะทำให้สามารถเดินทางไปถึงจุดปลายทางได้โดยเสียค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด ในแง่ของบริษัทประกันภัยที่รับประกันชีวิตผู้โดยสารจะเลือกเส้นทางเดินทางที่จะทำให้เสียค่ากรมธรรม์ประกันชีวิตต่ำที่สุด ซึ่งค่าใช้จ่ายของกรมธรรม์จะขึ้นอยู่กับ การประเมินความปลอดภัยของแต่ละเส้นทาง เส้นทางที่ปลอดภัยที่สุด จะเสียค่ากรมธรรม์ประกันชีวิตถูกที่สุดด้วย

การใช้โปรแกรมพลวัตกำหนดเส้นทางการเดินทางที่เหมาะสมที่สุด เราจะแบ่งเส้นทางเป็นระยะ นั่นคือขั้นตอน แต่ละระยะหรือขั้นตอนจะมีจุดหมาย ซึ่งแสดงถึงจุดที่พนักงานขายหรือผู้โดยสาร กำหนดว่าเป็นจุดที่จะหยุดพัก ระหว่างการเดินทางตามเส้นทางที่จะไป

เราให้ x_i เป็นตัวแปรเกี่ยวกับการตัดสินใจ ซึ่งเป็นจุดหมายที่มี i ขั้นตอนที่เหลือ

$i = 1,2,\ldots,n$

c_{ij} เป็นค่าใช้จ่ายเกี่ยวกับการเดินทาง จากจุด i ไปยังจุดหมาย j

$f_i(x, x_i)$ เป็นค่าใช้จ่ายทั้งหมด สำหรับขั้นตอนที่ i กำหนดว่าพนักงานขายหรือผู้โดยสารอยู่ที่ x_i

$f_i(x)$ เป็นค่าต่ำสุดของ $f_i(x, x_i)$

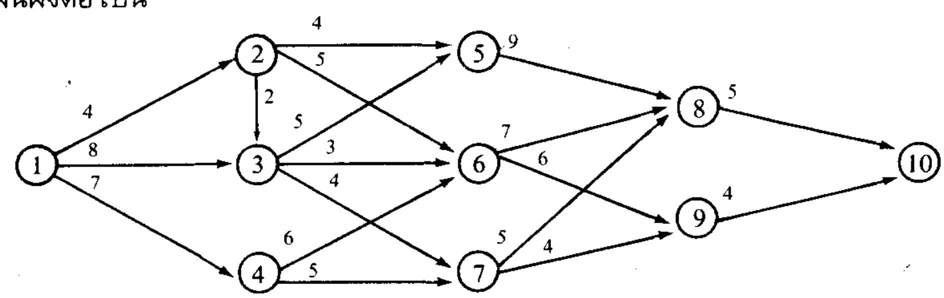
$d_i(x)$ เป็นค่าของ x_i ที่มีค่าใช้จ่ายรวม $f_i(x)$

การคำนวณจะเริ่มต้น $f_n(x) = f_n(x, x_n), \ x_n = x$

และความสัมพันธ์ต่อเนื่อง ก็คือ

$$\begin{aligned} f_i(x) &= \text{ค่าต่ำสุด} \left[f_i(x, x_i)\right] \\ &= \text{ค่าต่ำสุด} \left[c_{xx_i} + f_{i+1}(x)\right] \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 4.8 พนักงานขายผู้หนึ่ง นำสินค้าไปจำหน่าย ณ ที่แห่งหนึ่ง (จุดที่ 10) เขาเริ่มออกเดินทางจากบริษัท (จุดที่ 1) เพื่อไปยังสถานที่ที่ต้องการ ซึ่งมีเส้นทางให้เลือกหลายเส้นทางตามแผนผังต่อไปนี้



ค่าใช้จ่ายในการเดินทางจากจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่ง ตามเส้นทางที่มี คือตัวเลขที่กำกับไว้บนเส้นทางระหว่างจุดนั้น ๆ พนักงานขายผู้นี้ ควรเลือกเส้นทางใดจึงจะเหมาะสมที่สุด

วิธีทำ เราแบ่งระยะการเดินทางเป็น 4 ขั้นตอน

ขั้นตอนที่ 4 เป็นขั้นตอนสุดท้าย เมื่อพนักงานขายมาถึงจุดที่ 8 หรือ 9 ซึ่งจะมีขั้นตอนเดียวที่เหลืออยู่ อันแสดงว่า เขาเดินทางถึงสถานที่ที่ต้องการ นั่นคือเสร็จสิ้นการเดินทาง ผลที่ได้ในขั้นนี้คือ

x	$f_4(x)$	$d_4(x)$
8	5	10
9	4	10

เมื่อมี 2 ขั้นตอนที่เหลืออยู่ กล่าวคือ เมื่อพนักงานมาอยู่ที่จุด $x, x = 5, 6$ หรือ 7 จุดต่อไปก็ต้องเป็นจุดที่ 8 หรือ 9 ผลที่ได้ตามขั้นตอนนี้คือ

x_3 / x	$c_{xx_3} + f_4(x)$ 8	9	$f_3(x)$	$d_3(x)$
5	14	—	14	8
6	12	10	10	9
7	10	8	8	8

ขั้นต่อไป พิจารณาว่า พนักงานมี 3 ขั้นตอนเหลืออยู่ กล่าวคือ เมื่อพนักงานมาอยู่ที่จุด 2, 3 หรือ 4 จุดต่อไปก็จะเป็นจุดที่ 5, 6 หรือ 7 ดังนั้นผลลัพธ์ที่ได้ก็คือ

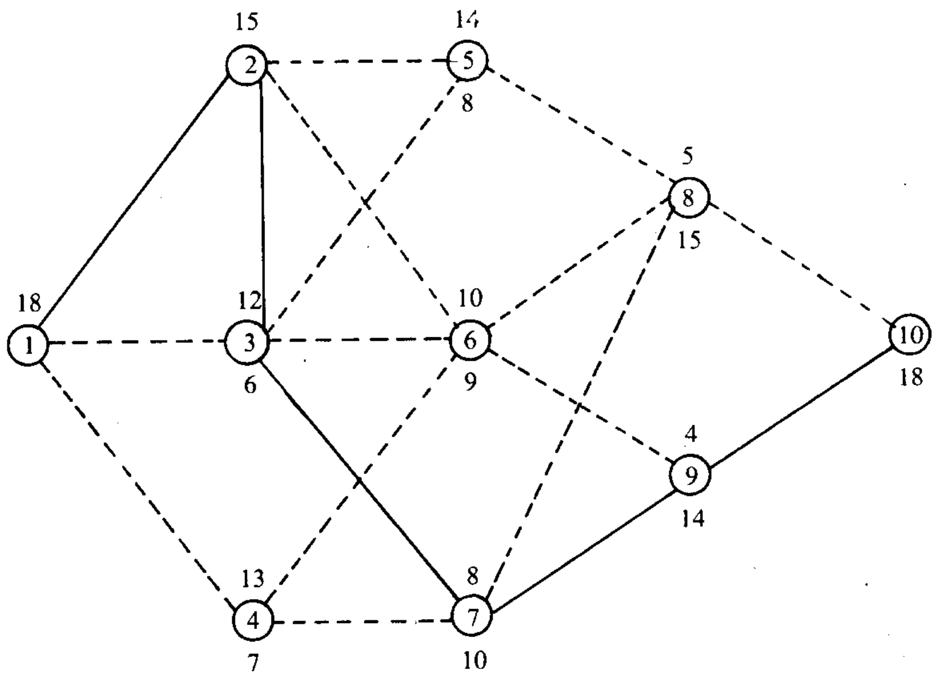
x_2 / x	$c_{xx_2} + f_3(x)$ 5	6	7	$f_2(x)$	$d_2(x)$
2	18	15	—	15	6
3	19	13	12	12	7
4	—	16	13	13	7

ขั้นสุดท้าย เป็นการพิจารณาจากจุดต้นทาง (1) ดังนั้น ค่าใช้จ่ายที่คำนวณได้ จะเป็นค่าใช้จ่ายทั้งหมดของการเดินทางจากจุดที่ 1 ไปยังจุดที่ 10 นั่นเอง ผลที่ได้ก็คือ

x \ x_1	$c_{xx_1} + f_2(x)$ 2	23	3	4	$f_1(x)$	$d_1(x)$
1	19	18	20	20	18	23

จากตารางสุดท้าย ชี้ให้เห็นว่า พนักงานขายควรใช้เส้นทาง 1 – 2 – 3 ซึ่งจากตารางที่ 3 จะได้ 3 – 7 และจากตารางที่ 2 และตารางแรก จะได้ 7 – 9 และ 9 – 10 ตามลำดับ

สรุปได้ว่า เส้นทางการเดินทางที่เหมาะสมที่สุด คือ 1 – 2 – 3 – 7 – 9 – 10 ซึ่งจะมีค่าใช้จ่ายรวมกันต่ำสุดเท่ากับ 18 แสดงให้เห็นด้วยผังการเดินทาง ดังนี้



เส้นทึบแสดงถึงเส้นทางการเดินทางของพนักงานขาย ตัวเลขบนวงกลมแสดงถึงค่าใช้จ่ายรวมที่ดีที่สุด คำนวณแบบย้อนหลัง ส่วนตัวเลขใต้วงกลมได้จากการคำนวณแบบรุดหน้า

แบบฝึกหัดที่ 4

1. นายรามใช้เวลานอกเวลางานในวันจันทร์ถึงศุกร์ ทำหน้าที่เป็นที่ปรึกษาทางด้านวิเคราะห์ระบบงาน มีบริษัท 3 แห่งต้องการให้นายรามช่วยงานด้านนี้ โดยมีค่าตอบแทนตามจำนวนวันที่นายรามไปทำงานให้ดังนี้

จำนวนวัน	ค่าตอบแทน (พันบาท)		
	บริษัท ก	บริษัท ข	บริษัท ค
0	0	0	0
1	2	2.5	3
2	5	5.0	6
3	8	7.5	8
4	10	10.0	11
5	12	12.5	13

นายรามควรแบ่งการทำงานอย่างไร จึงจะทำให้เขาได้ค่าตอบแทนต่อสัปดาห์มากที่สุด

ถ้านายรามกำหนดการทำงานว่า จะต้องไปช่วยงานแต่ละบริษัทอย่างน้อย 1 วัน เขาควรจัดสรรเวลาการทำงานอย่างไรจึงจะดีที่สุด

2. นายเกษมมีรถบรรทุกสินค้า ซึ่งมีความจุ 18 ลูกบาศก์เมตร มีสินค้า 3 ชนิด ที่นายเกษมจะรับไปส่งให้ลูกค้า ค่าตอบแทนและขนาดของสินค้าแต่ละชนิด มีดังนี้

ชนิดสินค้า	ค่าตอบแทน (ร้อยบาท/หน่วย)	ขนาด ($ม^3$/หน่วย)
1	6	2
2	18	5
3	30	8

นายเกษมควรรับส่งสินค้าชนิดใด ในปริมาณเท่าใด จึงจะได้ค่าตอบแทนมากที่สุด

3. โรงงานวางแผนการผลิตในเดือนหน้า แยกเป็นสัปดาห์ โดยกำหนดว่าในแต่ละสัปดาห์จะผลิตสินค้าไม่เกิน 5 ลอท และให้มีสินค้าคงคลังได้ไม่เกิน 3 ลอท แต่ตอนปลายเดือน (สิ้นสัปดาห์ที่ 4) จะต้องไม่มีสินค้าคงคลัง ค่าใช้จ่ายในการเตรียมการผลิตแต่ละสัปดาห์เท่ากับ 500 บาท

ค่าใช้จ่ายในการเก็บสินค้าคงคลังในแต่ละสัปดาห์เท่ากับ 50 บาทต่อลอท ค่าใช้จ่ายในการผลิตต่อลอท และจำนวนอุปสงค์สินค้า มีดังนี้

	สัปดาห์ที่ 1	2	3	4
จำนวนอุปสงค์ (ลอท)	2	1	3	5
ต้นทุนการผลิต (ร้อยบาท/ลอท)	1	1	4	3

โรงงานควรวางแผนการผลิตและเก็บสินค้าอย่างไร จึงจะเกิดผลดีที่สุด กำหนดว่า เริ่มต้นเดือน (ก่อนสัปดาห์ที่ 1) ไม่มีสินค้าคงคลัง

ถ้าต้นเดือนมีสินค้าคงคลัง 3 ลอท และโรงงานต้องการให้มีสินค้าคงคลังปลายเดือน 2 ลอท ตารางการผลิตที่ดีที่สุด ควรจะเป็นอย่างไร