บทที่ 1
ปัญหาโปรแกรมเชิงคณิตศาสตร์

การดำเนินงานต่าง ๆ ไม่ว่าจะเป็นงานทางด้านธุรกิจ อุตสาหกรรม เกษตรกรรม และการบริหารงานของรัฐบาล ฯลฯ จะบรรลุความสำเร็จตามเป้าหมายที่กำหนดไว้ โดยประหยัด หรือเกิดผลดีที่สุดต่อหน่วยงาน จำเป็นต้องอาศัยการวางแผน และการตัดสินใจที่เหมาะสม การวางแผนที่ดี จะต้องมีการใช้หลักเกณฑ์ทางวิชาการควบคู่กันไปกับการปฏิบัติที่จริงจัง ต้องศึกษาให้เข้าใจถึงหลักการ รายละเอียดของระบบงาน และเป้าหมายของการทำงานนั้น เพื่อให้สามารถจัดเก็บข้อมูลได้ครบถ้วนและถูกต้อง แล้วนำมาสร้างแบบจำลอง เพื่อการวิเคราะห์และวางแผนในลักษณะต่าง ๆ ตามที่ต้องการต่อไป ด้วยเหตุที่การบริหารงานต้องการการตัดสินใจที่รวดเร็วและถูกต้อง ในขณะที่ปริมาณงาน ปริมาณข้อมูลและระบบต่าง ๆ ได้ขยายกว้างขวางและสลับซับซ้อนยิ่งขึ้น ทรัพยากรส่วนใหญ่อันได้แก่ คนปฏิบัติงาน เครื่องจักร ที่ดิน เงินทุน วัสดุอุปกรณ์ต่าง ๆ ที่จะนำมาใช้ในการดำเนินงาน ก็มีจำนวนจำกัดและหาได้ยาก ต้องรู้จักใช้อย่างมีประสิทธิภาพและประหยัด จึงต้องอาศัยเทคนิคใหม่ ๆ ที่มีประสิทธิภาพสูง เช่น โปรแกรมเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical Programming) มาใช้ในงานวิเคราะห์วิจัย และใช้เครื่องคอมพิวเตอร์สมัยใหม่ที่ให้ผลลัพธ์อย่างรวดเร็วและแม่นยำในการประมวลผล

1.1 แนวความคิดเกี่ยวกับปัญหาโปรแกรมเชิงคณิตศาสตร์

โปรแกรมเชิงคณิตศาสตร์เป็นเทคนิคการวิเคราะห์ ซึ่งเกี่ยวกับการหาค่าที่เหมาะสมของกระบวนการตัดสินใจที่ซ้ำซ้อน เทคนิคการตัดสินใจนี้ขึ้นอยู่กับปัญหาที่ต้องการหาแนวปฏิบัติที่ให้ผลดีที่สุด เช่น ให้ได้ผลตอบแทนมากที่สุด ให้เสียค่าใช้จ่ายต่ำสุด ให้ใช้เวลาดำเนินการต่ำสุด เป็นต้น ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับว่า มีเป้าหมายวางไว้อย่างไร เป้าหมายนี้จะเป็นฟังก์ชันของตัวแปร โดยที่ตัวแปรเหล่านี้อาจเป็นอิสระต่อกัน หรืออาจจะมีความสัมพันธ์กันตามข้อกำหนดที่มี

ปัญหาการโปรแกรมเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical Programming Problem) จึงเป็นปัญหาการหาทางเลือกที่ดีที่สุด โดยมีเป้าหมายและข้อจำกัด อยู่ในรูปของฟังก์ชันหรือความสัมพันธ์ของฟังก์ชันของตัวแปร แสดงด้วยตัวแบบทางคณิตศาสตร์ ดังนี้

ค่าที่ดีที่สุด $Z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (1.1)

โดยมีข้อจำกัด $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)\{\leqslant, =, \geqslant\} b_i \quad i = 1, 2, \ldots, m$ (1.2)

และ $x_j \geqslant 0 \quad j = 1, 2, \ldots, n$ (1.3)

ในเมื่อ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ เป็นตัวแปรตัดสินใจ (decision variables) หรือตัวแปรควบคุมได้ (controlled variables)

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ เป็นฟังก์ชันเป้าหมาย

$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ เป็นเงื่อนไขของการดำเนินงาน หรือข้อจำกัดในการใช้ทรัพยากร i, $i = 1, 2, \ldots, m$

b_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ เป็นปริมาณของทรัพยากร i ที่มีอยู่

การหาแนวปฏิบัติหรือค่าที่ดีที่สุด ก็คือการหาค่าของ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ที่จะทำให้ได้ค่า Z ใน (1.1) ดีที่สุด นั่นคือค่า Z สูงสุดหรือค่า Z ต่ำสุด แล้วแต่เป้าหมายที่วางไว้ ภายใต้ข้อจำกัด (1.2) และ (1.3) ให้เรามาพิจารณาจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1.1 บริษัท สยาม จำกัด ผลิตผลิตภัณฑ์ 3 ชนิด โดยใช้วัตถุดิบ ก และวัตถุดิบ ข เป็นส่วนผสม ในแต่ละสัปดาห์บริษัทมีวัตถุดิบ ก 500 กิโลกรัม และมีวัตถุดิบ ข 200 กิโลกรัม การผลิตแต่ละครั้งจะใช้เครื่องจักรซึ่งสามารถทำงานได้ 1,000 ชั่วโมงต่อสัปดาห์ รายละเอียดเกี่ยวกับการผลิตและกำไรที่คาดว่าจะได้จากการจำหน่าย กำหนดไว้ในตารางดังนี้

	ผลิตภัณฑ์		
	A	B	C
วัตถุดิบ ก (กก./ชิ้น)	6	2	3
วัตถุดิบ ข (กก./ชิ้น)	2	1	1
เครื่องจักร (ชม./ชิ้น)	3	4	5
กำไร(บาท/ชิ้น)	60	40	48

บริษัทควรวางแผนการผลิตอย่างไรจึงจะดีที่สุด จงเขียนตัวแบบทางคณิตศาสตร์ของปัญหานี้

วิธีทำ บริษัทกำหนดว่าจะผลิตผลิตภัณฑ์ A $= x_1$ ชิ้น

ผลิตผลิตภัณฑ์ B $= x_2$ ชิ้น

ผลิตผลิตภัณฑ์ C $= x_3$ ชิ้น

จะได้ตัวแบบดังนี้

ค่าสูงสุด $Z = 60x_1 + 40x_2 + 48x_3$

โดยมีข้อจำกัด $6x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leqslant 500$

$$2x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 200$$

$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leqslant 1000$$

$$x_1, x_2, x_3 \geqslant 0$$

ตัวอย่างที่ 1.2 นายเกษมมีเงินอยู่ 5,000 บาท เขาสนใจการลงทุนกับหุ้น 2 ประเภท แต่ละประเภทมีราคาหุ้นละ 100 บาทเท่ากัน แต่ผลตอบแทนที่ได้ไม่เท่ากัน ผลตอบแทนที่ได้จากการซื้อหุ้นแต่ละประเภทเป็นฟังก์ชันของจำนวนหุ้นที่ซื้อ ดังนี้

หุ้นประเภท ก ให้ผลตอบแทน $=$ 40 $-$ จำนวนหุ้น ก

หุ้นประเภท ข ให้ผลตอบแทน $=$ 80 $-$ จำนวนหุ้น ข

นายเกษมควรลงทุนอย่างไร จึงจะเกิดผลดีที่สุด จงเขียนตัวแบบของปัญหานี้

วิธีทำ กำหนดว่านายเกษมซื้อหุ้น ก x_1 หุ้น

ซื้อหุ้น ข x_2 หุ้น

ผลตอบแทนที่ได้ทั้งหมด $= (40 - x_1)x_1 + (80 - x_2)x_2 = Z$

จำนวนเงินที่ลงทุน $= 100x_1 + 100x_2$ บาท

ดังนั้น $100x_1 + 100x_2 \leqslant 5000$

หรือ $x_1 + x_2 \leqslant 50$

จะได้ตัวแบบ : ค่าสูงสุด $Z = 40x_1 - x_1^2 + 80x_2 - x_2^2$

โดยมีข้อจำกัด $x_1 + x_2 \leqslant 50$

$$x_1, x_2 \geqslant 0$$

ตัวอย่างที่ 1.3 ผู้จัดการฝ่ายผลิตกำลังพิจารณาดูความจำเป็นในการเก็บของคงคลังที่มีราคาค่อนข้างแพง ในการผลิต 2 เดือนหน้า ต้นทุนการผลิตของชิ้นนี้ต่อหน่วยเป็น 25,000 บาท ต้นทุนการจัดเก็บของคงเหลือต่อหน่วยเป็น 2,500 บาท ราคาขายต่อหน่วยของของชิ้นนี้เท่ากับ 50,000 บาท ด้วยเหตุที่ช่วงเวลาเริ่มการผลิตจำนวนใหม่นั้นสั้น จำนวนที่ผลิตได้ในแต่ละเดือนจึงจัดแค่ให้เพียงพอกับจำนวนอุปสงค์ของเดือนนั้น เมื่อเริ่มการผลิตในต้นเดือนแรก ไม่มีสินค้าคงคลังเลย เมื่อสิ้นสุดเดือนที่ 2 หากมีของเหลือจากการจำหน่าย จะมีราคาลดลงเป็น 12,500 บาท

จำนวนอุปสงค์ของของในแต่ละเดือนจะมีการกระจายแบบเดียวกันคือ

จำนวนอุปสงค์ (D)	0	1	2	3
ความน่าจะเป็น	0.25	0.40	0.20	0.15

ถ้าท่านเป็นผู้จัดการ ท่านจะกำหนดการผลิตอย่างไร จึงจะดีที่สุด จงเขียนตัวแบบของปัญหานี้

วิธีทำ ในที่นี้จะเห็นว่า จำนวนอุปสงค์ไม่แน่นอน ดังนั้น จำนวนของคงเหลือไม่แน่นอนด้วย ถ้าจำนวนอุปสงค์มากกว่าของที่มีอยู่ ไม่ถือว่าเกิดการเสียหาย เพียงแต่ไม่มีของขายเท่านั้นเอง การตัดสินใจเกี่ยวกับการผลิตก็เพื่อให้ได้ค่าคาดหมายของผลตอบแทนสูงสุด เรากำหนดตัวแปรตัดสินใจ ดังนี้

กำหนดว่า ผลิตของในเดือนแรก x_1 หน่วย เดือนที่ 2 x_2 หน่วย

ต้นทุนทั้งหมด $= 25x_1 + 25x_2$ พันบาท $= A$

ค่าคาดหมายของปริมาณขายทั้งหมด

$$= \sum_{k=0}^{x_1-1} P(D_1=k)\ [50k + \sum_{j=0}^{x_2+I_2-1} P(D_2=j)\ (50j+12.5I_3) +$$

$$50(x_2+I_2)\ P(D_2 \geq x_2+I_2)]$$

$$+ P(D_1 \geq x_1)\ [50x_1 + \sum_{j=0}^{x_2-1} P(D_2=j)\ (50j+12.5I_3) +$$

$$50x_2 P(D_2 \geq x_2)] \qquad \text{พันบาท}$$

$$= B$$

ค่าคาดหมายของค่าเก็บรักษาทั้งหมด

$$= \sum_{k=0}^{x_1-1} P(D_1=k)\ [2.5I_2 + \sum_{j=0}^{x_2+I_2-1} 2.5I_3 P(D_2=j)$$

$$+ P(D_1 \geq x_1) \sum_{j=0}^{x_2-1} P(D_2=j)\ (2.5I_3) \qquad \text{พันบาท}$$

$$= C$$

ในเมื่อ $I_2 = x_1 - k$ และ $I_3 = x_2 + I_2 - j$

ดังนั้น กำไรที่คาดว่าจะได้ $Z = B - A - C$ พันบาท

ตัวแบบ : ค่าสูงสุด $Z = B - A - C$

โดยมีข้อจำกัด

$$x_1 \leq 3$$

$$x_2 \leq 3$$

$$x_2 + I_2 \leq 3$$

x_1, x_2, เป็นเลขจำนวนเต็มที่ไม่มีค่าเป็นลบ

พิจารณาจากปัญหาโปรแกรมเชิงคณิตศาสตร์ จะเห็นว่า

1. โครงสร้างของตัวแบบ ประกอบด้วย

1.1 ฟังก์ชันเป้าหมาย (objection function) ต้องกำหนดเป้าหมายชัดเจน และกำหนดค่าเป็นปริมาณ

1.2 เงื่อนไขของข้อจำกัด (constriants) จะอยู่ในรูปสมการ (=) หรืออสมการ ($\geqslant$ หรือ $\leqslant$) แสดงให้เห็นความสัมพันธ์ของตัวแปร คุณสมบัติตามข้อกำหนด และขอบเขตที่ต้องคำนึงถึง

1.3 ข้อกำกัด (restriction) ค่าของตัวแปรทุกตัวจะต้องไม่เป็นลบ แต่จะมีค่าต่อเนื่องหรือเป็นเลขจำนวนเต็มก็ได้

2. ฟังก์ชันที่แสดงความสัมพันธ์ในปัญหา อาจเป็นฟังก์ชันภายใต้ความแน่นอน หรือเป็นฟังก์ชันภายใต้ความไม่แน่นอน (เชิงน่าจะเป็น)

3. ฟังก์ชัน $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ และ $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, m$ ใน (1.1) และ (1.2) อาจเป็นฟังก์ชันเชิงเส้นของ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ หรืออาจจะมีอย่างน้อยที่สุด 1 ฟังก์ชันในกลุ่ม ที่ไม่เป็นเส้นตรงก็ได้ อาจจะเป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ (เรียบ) หรือเป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธุ์ไม่ได้ (ไม่เรียบ)

4. ค่าที่เหมาะสมอาจเกิดขึ้นในช่วงเวลาซึ่งไม่ทันได้เกิดการเปลี่ยนแปลง (คงที่) หรืออาจจะเกิดขึ้นในช่วงเวลาซึ่งจะมีการเปลี่ยนแปลงเกิดขึ้น (พลวัต) ก็ได้

ปัญหาในตัวอย่างที่ 1.1 เป็นแบบเชิงเส้น ในตัวอย่างที่ 1.2 มีฟังก์ชัน f ไม่เป็นเส้นตรง แต่ข้อจำกัด g เป็นเส้นตรง สำหรับปัญหาในตัวอย่างที่ 1.3 เป็นการคาดคะเนในช่วงเวลาต่อไปซึ่งอยู่ภายใต้ความไม่แน่นอน แต่จากการศึกษาข้อมูล ทำให้สามารถพยากรณ์ผลตอบแทน (กำไร) จากการผลิตและการเก็บของคงเหลือได้

1.2 ลักษณะปัญหาที่ใช้โปรแกรมเชิงคณิตศาสตร์

ปัญหาที่ใช้โปรแกรมเชิงคณิตศาสตร์ โดยทั่วไปจะเป็นปัญหาที่นำไปใช้ทางด้านการวางแผน เสนอแนวทางปฏิบัติ ควบคุมการดำเนินงาน ปรับปรุงประสิทธิภาพการทำงานขององค์การหรือหน่วยงานต่าง ๆ ลักษณะของปัญหาเหล่านี้ ได้แก่

1.2.1 ปัญหาการจัดสรร (Allocation Problem) เป็นปัญหาที่เกี่ยวกับการจัดสรรทรัพยากรที่มีอยู่อย่างจำกัด อาทิเช่น วัสดุอุปกรณ์ เวลา เงินทุน ผู้ปฏิบัติงาน ตลอดจนทรัพยากรธรรมชาติ เพื่อไปผลิตเป็นสินค้าและบริการอะไรบ้าง เป็นจำนวนเท่าใด ในลักษณะอย่างไร จึงจะให้ประโยชน์ต่อส่วนรวมมากที่สุด ตัวอย่างปัญหานี้ได้แก่

ตัวอย่างที่ 1.4 บริษัทเอบีต้องการวิเคราะห์ดูว่า ควรจะปลูกพืชประเภทใดบ้างในที่ดิน 350 ตารางหน่วย โดยเลือกจากพืช 3 ประเภท บริษัทมีคนงานอยู่ 380 คน การปลูกพืชแต่ละประเภทใช้คนงานโดยเฉลี่ย 1, 3 และ 2 คนต่อตารางหน่วย ตามลำดับ อย่างไรก็ตามบริษัทกำหนดไว้ว่าจะใช้พื้นที่ในการปลูกพืชประเภทที่ 2 ไม่เกิน 20 ตารางหน่วย และการปลูกพืชประเภทที่ 3 ใช้พื้นที่ได้มากที่สุด 10 ตารางหน่วย ถ้าปริมาณผลผลิตที่ได้ของพืชแต่ละประเภทโดยเฉลี่ยต่อตารางหน่วยเป็น 30, 50 และ 42 บริษัทควรจะวางแผนในการปลูกอย่างไร จึงจะทำให้ได้ผลผลิตรวมมากที่สุด จงเขียนตัวแบบของปัญหานี้

วิธีทำ กำหนดว่าบริษัทจะปลูกพืชประเภทที่ 1 = x_1 ตารางหน่วย

ปลูกพืชประเภทที่ 2 = x_2 ตารางหน่วย

ปลูกพืชประเภทที่ 3 = x_3 ตารางหน่วย

จะได้ ค่าสูงสุดของ $Z = 30x_1 + 50x_2 + 42x_3$

โดยมีข้อจำกัด

$$x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 350$$

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leqslant 380$$
$$x_2 \leqslant 20$$
$$x_3 \leqslant 10$$
$$x_1, x_2, x_3 \geqslant 0$$

การประยุกต์ใช้ปัญหาทางด้านการเกษตร โดยทั่วไปจะเป็นการวิเคราะห์แหล่งผลิต การใช้ที่ดิน การชลประทาน และการใช้น้ำที่จะช่วยเพิ่มผลผลิต การเลือกชนิดของพืช อุปสรรคในการผลิต แหล่งเงินทุนเป็นต้น

ปัญหาในตัวอย่างที่ 1.1 และ 1.2 เป็นตัวอย่างหนึ่งของปัญหาการจัดสรร นอกจากนี้ยังมีปัญหาทางด้านการโฆษณา พิจารณาว่าควรวางแผนการโฆษณาอย่างไร วิธีไหน ภายในวงเงินที่มีอยู่จำกัด จึงจะสามารถเรียกลูกค้าได้มากที่สุด ปัญหาทางด้านการผลิตและการตลาด วางแผนว่าจะผลิตสินค้าใด อย่างไร ภายใต้ข้อจำกัดของจำนวนอุปสงค์ และจำนวนอุปทาน นอกจากนี้ปัญหาการจัดสรรยังนำไปประยุกต์ใช้กับกิจกรรมทางการทหาร ทางอุตสาหกรรม ทางเศรษฐกิจ การเมือง ฯลฯ กล่าวโดยสรุป ปัญหาการจัดสรรจะมีตัวแปรตัดสินใจแทนกิจกรรมต่าง ๆ ที่ใช้ทรัพยากร มีปริมาณของทรัพยากรและการนำไปใช้เป็นข้อจำกัด และเป้าหมายของปัญหาการจัดสรรก็คือ การหาค่าสูงสุดของผลตอบแทน การหาค่าต่ำสุดของค่าใช้จ่าย เป็นต้น

1.2.2 ปัญหาการคำนวณส่วนผสม (Blending Problem) เป็นปัญหาเกี่ยวกับการนำวัตถุดิบซึ่งมีคุณสมบัติต่าง ๆ ทางเคมีหรือทางฟิสิกส์ มาผสมกันให้ได้ผลิตภัณฑ์ที่มีคุณภาพมาตรฐานตามข้อกำหนด โดยมีต้นทุนในการดำเนินงานต่ำสุด ตัวอย่างปัญหาประเภทนี้ได้แก่ ปัญหาทางด้านโภชนาการ ซึ่งเป็นปัญหาเกี่ยวกับการจัดเตรียมอาหารซึ่งมีคุณสมบัติเพียงพอและจำเป็นสำหรับกลุ่มคนบางประเภท เช่น คนไข้โรคเบาหวาน คนที่มีปัญหาเกี่ยวกับน้ำหนัก เป็นต้น ดังเช่นตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1.5 แผนกคนไข้พักฟื้นได้จัดบริการทางด้านโภชนาการสำหรับคนไข้ กำหนดว่าในแต่ละวัน จะต้องจัดเตรียมอาหารที่มีโปรตีนอย่างน้อยที่สุด 60 กรัม ให้มีแคลเซียมและธาตุเหล็กอย่างต่ำ 500 และ 10 มิลลิกรัม ตามลำดับ และให้ได้พลังงานไม่ต่ำกว่า 2,000 แคลอรี โดยเลือกจากอาหาร 5 ชนิด ในอาหารแต่ละชนิด 100 กรัม จะมีปริมาณของโปรตีน แคลเซียม ธาตุเหล็ก พลังงาน และมีราคา ดังนี้

ส่วนประกอบ	ชนิดของอาหาร				
	ก	ข	ค	ง	จ
โปรตีน (กรัม)	7.5	25.0	1.1	4.8	3.6
แคลเซียม (มิลลิกรัม)	16.8	650.3	12.7	58.9	480.4
ธาตุเหล็ก (มิลลิกรัม)	1.9	0.5	0.2	2.1	3.8
พลังงาน (แคลอรี)	250	48.9	803	102	30
ราคา (บาท)	80	220	215	125	160

แผนกอาหารควรเลือกใช้อาหารแต่ละชนิดอย่างไร จึงจะได้อาหารที่มีคุณค่าตามที่กำหนด แต่ให้เสียค่าใช้จ่ายต่ำสุด จงเขียนตัวแบบของปัญหานี้

วิธีทำ กำหนดว่า เลือกใช้อาหาร ก $= x_1$ ร้อยกรัม

อาหาร ข $= x_2$ ร้อยกรัม

อาหาร ค $= x_3$ ร้อยกรัม

อาหาร ง $= x_4$ ร้อยกรัม

อาหาร จ $= x_5$ ร้อยกรัม

ตัวแบบ : ค่าต่ำสุด $Z = 80x_1 + 220x_2 + 215x_3 + 125x_4 + 160x_5$

โดยมีข้อจำกัด

$$7.5x_1 + 25.0x_2 + 1.1x_3 + 4.8x_4 + 3.6x_5 \geqslant 60$$

$$16.8x_1 + 650.3x_2 + 12.7x_3 + 58.9x_4 + 480.4x_5 \geqslant 500$$

$$1.9x_1 + 0.5x_2 + 0.2x_3 + 2.1x_4 + 3.8x_5 \geqslant 10$$

$$250x_1 + 48.9x_2 + 803x_3 + 102x_4 + 30x_5 \geqslant 2000$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0$$

ปัญหาการคำนวณส่วนผสม นอกจากจะนำไปใช้ทางด้านโภชนาการแล้ว ยังนำไปใช้กับปัญหาการผลิตอาหารและยา เช่น การผลิตอาหารเลี้ยงสัตว์พิจารณาว่าควรเลือกใช้วัตถุดิบประเภทใดบ้าง ในปริมาณเท่าใดจึงจะได้อาหารที่มีคุณสมบัติตามที่ต้องการ แต่ให้มีต้นทุนการผลิตต่ำ นอกจากนี้ยังประยุกต์ใช้กับปัญหาเกี่ยวกับการผลิตสารเคมี ปัญหาการหลอมเหล็ก ปัญหาการกลั่นน้ำมัน เป็นต้น ปัญหาเหล่านี้จะมีจำนวนหรือสัดส่วนของวัตถุดิบที่เลือกใช้

เป็นตัวแปรตัดสินใจ คุณภาพมาตรฐานตามข้อกำหนด หรือคุณสมบัติตามข้อกำหนดของสิ่งนั้น จะเป็นข้อจำกัด เป้าหมายก็คือ การลงทุนหรือเสียค่าใช้จ่ายต่ำสุด

1.2.3 ปัญหาการแจกจ่าย (Distribution Problem) เป็นปัญหาเกี่ยวกับการกำหนดขนาดและที่ตั้งของโรงงาน คลังสินค้า ศูนย์การแจกจ่ายตลอดจนการกำหนดนโยบายในการแจกจ่าย จัดระบบการจัดส่งและการดำเนินงาน ให้สอดคล้องกับกำลังความสามารถที่มี และความต้องการของตลาด ทำให้เสียค่าใช้จ่ายต่ำสุด หรือก่อให้เกิดผลงานมากที่สุด ให้เรามาศึกษาจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1.6 องค์การคลังสินค้าวางแผนเปิดคลังสินค้าเพิ่มขึ้นอีก 2 แห่ง เพื่อรองรับสินค้าที่จะส่งเข้ามาเก็บไว้ รอการส่งไปจำหน่ายที่ตลาด 4 มุมเมือง โดยพิจารณาเลือกจากสถานที่ 3 แห่ง สถานที่แห่งแรกมีความจุ 17,000 หน่วย สามารถส่งสินค้าไปจำหน่ายที่ตลาด A, B และC ตามลำดับ สถานที่แห่งที่ 2 มีความจุ 16,500 หน่วย สามารถส่งสินค้าไปจำหน่ายที่ตลาด A, C และ D ตามลำดับ สถานที่แห่งที่ 3 มีความจุ 17,500 หน่วย สามารถส่งไปจำหน่ายที่ตลาดทั้ง 4 ได้ทุกตลาด จากการศึกษาข้อมูลของค่าใช้จ่ายในการลงทุนสร้างคลังสินค้า ค่าใช้จ่ายในการดำเนินการเก็บสินค้า อัตราค่าขนส่งสินค้าจากคลังสินค้าไปยังตลาด และความต้องการสินค้าของตลาดทั้ง 4 ปรากฏผลดังตารางต่อไปนี้

สถานที่ / ตลาดการค้า	อัตราค่าขนส่ง(บาท/หน่วย)			ความต้องการสินค้า (หน่วย)
	1	2	3	
A	15	16	12	8,500
B	17	—	11	8,000
C	14	13	10	9,000
D	—	18	14	8,000
การลงทุน (ล้านบาท)	4.5	4.2	5.3	
ค่าดำเนินงาน (บาท/หน่วย)	13	15	10	

องค์การควรสร้างคลังสินค้า ณ สถานที่ใดจึงจะเหมาะสมที่สุด จงเขียนตัวแบบของปัญหานี้

วิธีทำ จะเห็นได้ว่า ค่าใช้จ่ายในการเปิดคลังสินค้าแต่ละแห่ง ประกอบด้วยค่าใช้จ่ายในการลงทุนซึ่งคงที่ ค่าดำเนินงานซึ่งแปรผันไปตามจำนวนสินค้าที่จะนำมาเก็บไว้ และค่าขนส่งซึ่งขึ้นอยู่กับจำนวนสินค้าที่ส่งออกไปตามเส้นทางใดบ้าง ปัญหาของเราคือ การพิจารณาว่าควรเปิดคลังสินค้า ณ สถานที่ใดบ้าง เก็บและจัดส่งสินค้าอย่างไรจึงจะทำให้ค่าใช้จ่ายในการก่อสร้าง การดำเนินงาน และการขนส่งรวมกันต่ำที่สุด ดังนั้น ตัวแปรตัดสินใจในที่นี้จึงมี 2 ประเภท ประเภทแรกจะเป็นตัวแปรที่แสดงถึงการเลือกสถานที่ ประเภทที่สองเป็นตัวแปรที่แสดงถึงจำนวนสินค้าที่จะส่งจากคลังสินค้าไปยังตลาดการค้า เราจึงกำหนดให้

y_i = 1 ถ้าเปิดคลังสินค้าที่สถานที่ i, $i = 1, 2, 3$

= 0 อื่น ๆ

x_{ij} = จำนวนหน่วยของสินค้าที่ส่งจากสถานที่ i ไปยังตลาดการค้า j, $i = 1, 2, 3;$ $j = A, B, C, D$

(ในที่นี้ $x_{1D} = x_{2B} = 0$)

ค่าใช้จ่ายในการลงทุน $= 4.5y_1 + 4.2y_2 + 5.3y_3$ ล้านบาท $= 10^6 P_1$ บาท

ค่าใช้จ่ายในการดำเนินงาน

$= 13(x_{1A} + x_{1B} + x_{1C}) + 15(x_{2A} + x_{2C} + x_{2D}) + 10(x_{3A} + x_{3B} + x_{3C} + x_{3D})$ บาท

$= P_2$ บาท

ค่าใช้จ่ายในการขนส่ง

$= 15x_{1A} + 17x_{1B} + 14x_{1C} + 16x_{2A} + 13x_{2C} + 18x_{2D} + 12x_{3A} + 11x_{3B} + 10x_{3C} + 14x_{3D}$ บาท

$= P_3$ บาท

ตัวแบบ : ค่าต่ำสุด $Z = 10^6 P_1 + P_2 + P_3$

โดยมีข้อจำกัด

$$
\begin{aligned}
y_1 + y_2 + y_3 &= 2 \\
x_{1A} + x_{1B} + x_{1C} &\leqslant 17000y_1 \\
x_{2A} + x_{2C} + x_{2D} &\leqslant 16500y_2 \\
x_{3A} + x_{3B} + x_{3C} + x_{3D} &\leqslant 17500y_3 \\
x_{1A} + x_{2A} + x_{3A} &= 8500 \\
x_{1B} + x_{3B} &= 8000 \\
x_{1C} + x_{2C} + x_{3C} &= 9000 \\
x_{2D} + x_{3D} &= 8000
\end{aligned}
$$

$y_i \;=\; 0$ หรือ 1 ทุกค่า $i \;=\; 1, 2, 3$

$x_{ij} \;\geqslant\; 0$ ทุกค่า $i \;=\; 1, 2, 3, \quad j \;=\; A, B, C, D$

ปัญหาประเภทนี้จะนำไปประยุกต์ใช้ในการกำหนดจำนวนและสถานที่ตั้งสิ่งอำนวยความสะดวกต่าง ๆ เช่น โรงพยาบาล สถานีตำรวจ ฯลฯ การประยุกต์ใช้ที่สำคัญของปัญหานี้ก็คือ ปัญหาการขนส่ง เป็นปัญหาเกี่ยวกับการพิจารณาจัดส่งสินค้าจากโรงงานที่อยู่ต่างท้องที่กันไปเก็บไว้ที่คลังสินค้า หรือส่งไปที่ศูนย์การค้า หรือลูกค้าที่อยู่ต่างเมืองกันอย่างไร จึงจะเสียค่าใช้จ่ายต่ำสุด ในปัญหาการมอบงานจะพิจารณาว่า จะมอบงานให้ผู้ใดทำ หรือเครื่องจักรตัวใดควรทำงานชิ้นไหน จึงจะทำให้เสียค่าใช้จ่ายต่ำสุดหรือก่อให้เกิดผลงานมากที่สุด ฯลฯ

1.2.4 **ปัญหาสินค้าคงคลัง** (Inventory Problem) เป็นปัญหาเกี่ยวกับการเก็บรักษาทรัพยากร หรือสินค้าเพื่อใช้ในการผลิตหรือการดำเนินงานในเวลาต่อไป ปัญหาจะอยู่ที่การ**ตัดสินใจว่า ควรจะเก็บทรัพยากรอย่างไร ในปริมาณเท่าใด จึงจะเพียงพอต่อการนำไปใช้ใน**การผลิตหรือการดำเนินงาน โดยที่ทรัพยากรนั้นไม่เสื่อมคุณภาพ หรือไม่ทำให้ต้นทุนการผลิตและเก็บรักษาสูงเกินไป ในเรื่องการเก็บสินค้าคงคลังก็ต้องพิจารณาว่า ควรเก็บไว้ในปริมาณเท่าใด จึงจะเพียงพอต่อความต้องการของลูกค้า และจะเก็บไว้นานแค่ไหน จึงจะไม่ทำให้ค่าใช้จ่ายในการเก็บรักษาสูง ไม่ว่าจะเป็นการสั่งซื้อเข้ามาหรือผลิตเองก็ตาม ก็ต้องพิจารณาว่าการสั่งซื้อหรือผลิตในแต่ละครั้ง ควรจะมีปริมาณเท่าใด จึงจะดีที่สุด การศึกษาข้อมูลของค่าใช้จ่ายในการสั่งซื้อหรือผลิต การพยากรณ์ความต้องการในการใช้หรือความต้องการสินค้าของลูกค้าจะมีผลทำให้การตัดสินใจถูกต้อง มีความเชื่อมั่นสูง ดังเช่น ปัญหาในตัวอย่างที่ 1.3

นอกเหนือจากปัญหาที่กล่าวมาแล้ว ยังมีปัญหาที่ใช้โปรแกรมเชิงคณิตศาสตร์อีกมากที่ไม่ได้กล่าวถึงในที่นี้ เช่น ปัญหาการทดแทน (Replacement Problem) ปัญหาการควบคุมกระบวนการผลิตทางเคมี ปัญหาการจัดตารางการผลิตในเวลาและนอกเวลา ให้สอดคล้องกับความต้องการตามฤดูกาล ปัญหาการตลาด การธนาคาร การพาณิชย์ ปัญหาทางสาธารณูปโภคต่าง ๆ ปัญหาทางสังคมและทางการเมือง เป็นต้น นักศึกษาสามารถศึกษาค้นคว้าเรื่องราวเหล่านี้ได้จากหนังสืออ้างอิงท้ายเล่ม

1.3 เทคนิคหรือวิธีการที่ใช้ในปัญหาโปรแกรมเชิงคณิตศาสตร์

เทคนิคหรือวิธีการที่สำคัญ ๆ และศึกษากันมากได้แก่

1.3.1 โปรแกรมเส้นตรง (Linear Programming : LP) เป็นเทคนิคที่สำคัญและใช้กันแพร่หลายมากในปัจจุบัน LP ใช้กับปัญหาซึ่งความสัมพันธ์กันระหว่างตัวแปรทุกตัวเป็นแบบเชิงเส้น นั่นก็คือ การเปลี่ยนแปลงแต่ละหน่วยของตัวแปรตัวใดตัวหนึ่ง จะมีผลทำให้ปริมาณของตัวแปรอื่น ๆ ที่สัมพันธ์กันเปลี่ยนแปลงไปด้วยในอัตราส่วนที่คงที่ มักจะใช้กับปัญหาเกี่ยวกับการจัดสรรทรัพยากร ในเวลาใดเวลาหนึ่งที่มีให้ใช้ โดยไม่ทันเกิดการเปลี่ยนแปลงในทรัพยากรหรือวิธีเลือกใช้ทรัพยากร

ตัวแบบของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นเขียนได้ดังนี้

$$\text{ค่าสูงสุด (หรือค่าต่ำสุด)}\ Z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1.4}$$

โดยมีข้อจำกัด

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \{\leqslant, =, \geqslant\} b_i \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{1.5}$$

$$x_j \geqslant 0 \qquad j = 1,2,\ldots,n \tag{1.6}$$

ในเมื่อ c_j, b_i และ a_{ij} เป็นค่าคงที่ ทุก ๆ i และ j

ตัวอย่างของปัญหานี้ได้แก่ ตัวอย่างที่ 1.1, 1.4 และ 1.5 ฯลฯ

ปัจจุบันประเทศที่มีความเจริญทางวิชาการ นิยมใช้โปรแกรมเชิงเส้นกับปัญหาทางด้านธุรกิจ เศรษฐศาสตร์ อุตสาหกรรมและองค์การของรัฐอย่างกว้างขวาง เช่น ปัญหาในการวางแผนเกี่ยวกับการผลิตและสต๊อคสินค้า การวางแผนพัฒนาการเกษตร การทหาร การจัดการทางด้านโภชนาการ การจัดงบประมาณ และการให้บริการชุมชน เป็นต้น ทั้งนี้เนื่องจากว่า ปัญหานานาประการที่เกิดขึ้นในสาขาต่าง ๆ สามารถจำลองแบบได้หรืออย่างน้อยที่สุดก็ประมาณได้ด้วยตัวแบบของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้น นอกจากนี้ยังมีเทคนิคที่มีประสิทธิภาพในการหาคำตอบ เช่น วิธีการซิมเพลกซ์ เมื่อโปรแกรมวิธีการนี้ลงในเครื่องคอมพิวเตอร์ จะสามารถแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้น ที่มีตัวแปรนับร้อย และข้อจำกัดเป็นพัน ๆ ข้อได้ ดังนั้น แม้ว่าปัญหาที่แท้จริงจะยุ่งยากสลับซับซ้อน และโดยเนื้อแท้ไม่ได้มีความสัมพันธ์เชิงเส้น เราก็อาจปรับตัวแบบโดยใช้ตัวแปรและข้อจำกัดจำนวนมาก ให้เป็นตัวแบบเชิงเส้นตรงได้ และหากมีการเปลี่ยนแปลงใด ๆ ของข้อมูล ก็สามารถจัดการได้ด้วยวิธีการวิเคราะห์ความไวของตัวแบบโปรแกรมเชิงเส้น

1.3.2 โปรแกรมเลขจำนวนเต็ม (Integer Programming) เป็นโปรแกรมเชิงคณิตศาสตร์ที่มีข้อจำกัดของตัวแปรว่าจะต้องเป็นเลขจำนวนเต็มที่ไม่มีค่าเป็นลบ นั่นคือ

$$x_j = 0,1,2,\ldots \text{ ทุกค่า } j \tag{1.7}$$

ถ้าตัวแบบของปัญหาประกอบด้วย (1.4), (1.5) และ (1.7) นั่นคือปัญหาที่มีฟังก์ชัน f และ g_i ทุก ๆ i เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นตรง เราเรียกตัวแบบนี้ว่า โปรแกรมเลขจำนวนเต็มเชิงเส้น (Integer Linear Programming) กรณีที่มีตัวแปรบางตัวไม่มีค่าเป็นเลขจำนวนเต็ม เราเรียกโปรแกรมนี้ว่าเป็นแบบผสม

ปัญหาโปรแกรมเชิงจำนวนเต็มที่สำคัญ ได้แก่ ปัญหาการขนส่ง ปัญหาการมอบหมายงาน ปัญหาการจัดสรรงบประมาณ ปัญหาการจัดลำดับงาน เป็นต้น เทคนิคที่ใช้ในการหาคำตอบต่อปัญหาเหล่านี้ ไม่มีเทคนิคใดที่จัดว่าเป็นเทคนิคที่มีประสิทธิภาพโดยเฉพาะ แต่จะมีเทคนิคหลายแบบ แต่ละแบบจะเหมาะสมกับลักษณะของปัญหาหนึ่ง เช่น ใช้วิธีการขนส่ง (Transportation Method) กับปัญหาการขนส่ง หรือใช้วิธีการแจงนับ (Implicit Enumeration) กับปัญหาการเลือกโครงการที่จะลงทุน เป็นต้น

1.3.3 โปรแกรมพลวัต (Dynamic Programming) ใช้ในการแก้ปัญหาที่จะต้องตัดสินใจติดต่อกันเป็นขั้นตอนหลาย ๆ ขั้นตอน ลักษณะของปัญหาจะมีฟังก์ชัน $f, g_1, g_2, \ldots, g_m$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ที่เป็นอิสระต่อกัน สามารถแยกเป็นปัญหาย่อยของแต่ละตัวแปร ซึ่งเรียกว่าขั้นตอน การหาคำตอบต่อปัญหาทั้งหมด จำเป็นต้องสร้างตัวแบบทางคณิตศาสตร์ขึ้นมาให้เหมาะสมกับปัญหาย่อยแต่ละปัญหาโดยเฉพาะ ปัญหาทั้งหมดจะแยกเป็นปัญหาย่อย (ขั้นตอน) โดยที่ ตัวแบบของแต่ละปัญหาย่อยจะได้มาจากการเปลี่ยนตัวแบบปัจจุบัน เป็นตัวแบบที่เกี่ยวข้องกับตัวแบบของปัญหาย่อยต่อไป ฟังก์ชันที่แสดงความเกี่ยวข้องของตัวแบบ เรียกว่า ฟังก์ชันความสัมพันธ์ต่อเนื่อง (recursive function) เทคนิคการตัดสินใจจึงขึ้นอยู่กับปัญหาที่ต้องการหาค่าที่ดีที่สุดในแต่ละปัญหาย่อย (ขั้นตอน) ซึ่งเกี่ยวข้องกับตัวแปรที่ต้องการหาค่าดีที่สุดเพียงตัวเดียวเท่านั้น การคำนวณในขั้นตอนต่าง ๆ จะถูกเชื่อมโยงด้วยการคำนวณแบบต่อเนื่อง ในลักษณะที่ให้คำตอบที่เป็นไปได้ดีที่สุด ต่อปัญหาทั้งหมด เทคนิคของการคำนวณจะขึ้นอยู่กับ หลักของค่าดีที่สุด นั่นคือนโยบายที่ดีที่สุด ที่มีหลักเกณฑ์ว่า **ไม่ว่าจุดเริ่มต้นและตัวแปรตัดสินใจจะเป็นอย่างไร ตัวแปรตัดสินใจที่เหลือต้องประกอบกันขึ้นเป็นนโยบายที่ดีที่สุดกับผลที่มาจากการตัดสินใจครั้งแรก**

ตัวอย่างเช่น ปัญหาในตัวอย่างที่ 1.2 สามารถหาคำตอบโดยใช้โปรแกรมพลวัตได้ จากตัวอย่างที่ 1.2 เราจะแยกการแก้ปัญหาเป็น 2 ขั้นตอน นั่นคือ แยกปัญหาเดิมเป็นปัญหาย่อย 2 ปัญหา จะได้ตัวแบบของแต่ละปัญหา ดังนี้

ขั้นตอนหรือปัญหาย่อย 1

$$
\begin{aligned}
\text{ค่าสูงสุด } f_1(x,\ x_1) &= 40x_1 - x_1^2 \\
\text{โดยมีข้อจำกัด } x_1 &\leqslant x \leqslant 50 \\
x_1 &= 0, 1, 2, \ldots
\end{aligned}
$$

ขั้นตอนหรือปัญหาย่อย 2

$$
\begin{aligned}
\text{ค่าสูงสุด } f_2(x,\ x_2) &= 80x_2 - x_2^2 + f_1^*(50 - x_2) \\
\text{โดยมีข้อจำกัด } x_2 &\leqslant 50 \\
x_2 &= 0, 1, 2, \ldots
\end{aligned}
$$

ในเมื่อ $f_1^*(50 - x_2)$ เป็นค่าสูงสุดของฟังก์ชันเป้าหมายในขั้นตอนที่ 1 ณ จุด $x_1 = 50 - x_2$

การหาคำตอบสำหรับตัวอย่างที่ 1.2 จะเป็นการหาคำตอบที่เหมาะสมในแต่ละขั้นตอนติดต่อกันไป

1.3.4 โปรแกรมเชิงน่าจะเป็น (Probabilistic Programming) ใช้แก้ปัญหาภายใต้การเสี่ยงหรือภายใต้ความไม่แน่นอน เราไม่อาจทราบแน่นอนถึงสิ่งที่จะเกิดขึ้นในอนาคต แต่จากการศึกษาข้อมูลก็พอจะคาดคะเนความน่าจะเป็นของสิ่งที่จะเกิดขึ้นได้ โปรแกรมเชิงน่าจะเป็นที่จะกล่าวถึงในที่นี้ก็คือโปรแกรมเชิงสถิติ (Stochastic Programming) และกระบวนการลูกโซ่มาร์คอฟ (Markov chain)

เมื่อตัวพารามิเตอร์ในตัวแบบโปรแกรมเชิงคณิตศาสตร์ ถูกกำหนดว่า เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม เราใช้วิธีการของปัญหาการโปรแกรมเชิงสถิติ (Stochastic Programming Problem) ในการหาคำตอบ ไม่ว่าลักษณะของปัญหาจะเป็นแบบเชิงเส้น หรือแบบพลวัตก็ตาม ถ้าเราทราบการแจกแจงน่าจะเป็นของตัวแปรเชิงสุ่ม การหาคำตอบจะใช้เทคนิคการตัดสินใจภายใต้การเสี่ยง แต่ถ้าไม่ทราบการแจกแจงของตัวแปรอย่างน้อย 1 ตัว ก็ต้องใช้การตัดสินใจภายใต้ความไม่แน่นอน โดยทั่วไปเราจะพิจารณาเป้าหมายของปัญหาเหล่านี้ด้วย ค่าสูงสุดของค่าคาดหมายของฟังก์ชันเป้าหมาย ดังตัวอย่างที่ 1.3

สำหรับกระบวนการมาร์คอฟ เป็นการนำเอาทฤษฎีของ Andrei A. Markov นักคณิตศาสตร์ชาวรุสเซีย มาประยุกต์ใช้ในการพยากรณ์ความนิยมสินค้าของลูกค้าในท้องตลาด

ของบริษัทผู้ผลิตสินค้าประเภทเดียวกัน ว่ามีโอกาสของการเปลี่ยนแปรอย่างไร มีส่วนแบ่งของลูกค้าอย่างไร และภายในช่วงระยะเวลาหนึ่ง จะมีส่วนแบ่งเป็นอย่างไร นอกจากนี้ยังนำไปใช้ในการพยากรณ์คนงานแต่ละระดับ และอื่น ๆ อีกมาก

1.3.5 โปรแกรมที่ไม่เป็นเส้นตรง (Nonlinear Programming) เป็นโปรแกรมเชิงคณิต-ศาสตร์ที่ใช้หาคำตอบ กรณีที่ตัวแปรตัดสินใจมีความสัมพันธ์กันในลักษณะที่ไม่เป็นเส้นตรง นั่นคือ จะมีฟังก์ชัน $f, g_1, g_2, \ldots, g_m$ ใน (1.1) และ (1.2) อย่างน้อยที่สุด 1 ฟังก์ชันไม่เป็นเส้นตรง ปัญหาประเภทนี้มักจะประยุกต์ใช้กับปัญหาทางด้านการพยากรณ์ การกำหนดการผลิต การควบคุมสินค้าคงคลัง การควบคุมคุณภาพ การซ่อมแซมและการบำรุงรักษา การออกแบบกระบวนการ วิธีการทางบัญชีและการจัดสรรงบประมาณ เป็นต้น การหาคำตอบต่อปัญหาโปรแกรมที่ไม่เป็นเส้นตรง ยุ่งยากกว่าปัญหาการโปรแกรมที่เป็นเส้นตรงมาก ไม่มีอัลกอริทึมใดโดยเฉพาะที่จะนำมาใช้หาคำตอบ แต่มีอัลกอริทึมจำนวนมากที่ได้ถูกปรับปรุงจนเป็นที่ยอมรับและนำไปใช้อย่างได้ผลในทางปฏิบัติ อัลกอริทึมของแต่ละเทคนิคจะมีหลักการใช้ที่เหมาะสมกับสภาพความเป็นจริงที่เกิดขึ้น สามารถหาคำตอบได้โดยระบบคอมพิวเตอร์ที่ทันสมัย

ปัญหาโปรแกรมที่ไม่เป็นเส้นตรงที่สำคัญปัญหาหนึ่งก็คือ ปัญหาการโปรแกรมเชิงกำลังสอง (Quadratic Programming Problem) เป็นปัญหาของการหาค่าที่ดีที่สุด (ค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด) ของฟังก์ชันเป้าหมาย ซึ่งเป็นฟังก์ชันกำลังสอง โดยมีข้อจำกัดของปัญหา เป็นสมการหรืออสมการเชิงเส้น เขียนตัวแบบได้ดังนี้

ค่าที่ดีที่สุด $$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} q_{jk} x_j x_k \qquad (1.8)$$

โดยมีข้อจำกัด $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \{ \leqslant, =, \geqslant \} b_i \quad i = 1, 2, \ldots, m \qquad (1.9)$$

$$x_j \geqslant 0 \quad j = 1, 2, \ldots, n \qquad (1.10)$$

ในเมื่อ c_j, b_i, a_{ij} และ q_{jk} เป็นค่าคงที่ $q_{jk} = q_{kj}$

ตัวแบบ (1.8) – (1.10) นิยมใช้เพื่อศึกษาตัวแบบของการดำเนินงานของบริษัทหนึ่งในตลาดที่มีคุณสมบัติเป็นแบบการแข่งขันที่ไม่สมบูรณ์ ถ้าบริษัทจำหน่ายผลผลิตในตลาดการแข่งขันที่ไม่สมบูรณ์ รายได้ทั้งหมดจะถือว่าเป็นฟังก์ชันกำลังสอง แต่ถ้าบริษัทผู้ซื้อวัสดุอุปกรณ์เข้ามาเพื่อการผลิต ค่าใช้จ่ายของการผลิตจะเป็นฟังก์ชันกำลังสอง

แบบฝึกหัดที่ 1

1. โรงงานแห่งหนึ่งผลิตสินค้า 4 ประเภทเพื่อป้อนตลาด ในแต่ละวันโรงงานมีวัตถุดิบและแรงงานที่จะนำมาใช้ในการผลิตเป็นจำนวน 240 กิโลกรัม และ 400 ชั่วโมงตามลำดับ สินค้าที่ผลิตได้จะถูกนำไปเก็บที่คลังสินค้า เพื่อรอการส่งไปที่ตลาดต่อไป คลังสินค้าของโรงงานนี้มีพื้นที่วางสินค้าได้ 2000 ตารางเมตร รายละเอียดเกี่ยวกับการผลิตมีดังต่อไปนี้

	ประเภทของสินค้า			
	ก	ข	ค	ง
ขนาดของสินค้า (ตร.เมตร/หน่วย)	20	60	40	20
วัตถุดิบ (กิโลกรัม/หน่วย)	3	4	3	2.5
แรงงาน (ชั่วโมง/หน่วย)	3	9	5	4.5
ต้นทุนการผลิต (บาท/หน่วย)	18	25	20	17
ราคาขาย (บาท/หน่วย)	45	60	60	45

โรงงานควรวางแผนการผลิตในแต่ละวันอย่างไร จึงจะดีที่สุด จงเขียนตัวแบบของปัญหานี้

2. บริษัทคิดทำน้ำยาทำความสะอาด 4 สูตรด้วยกัน น้ำยาแต่ละสูตรจะมีส่วนประกอบของสาร 2 ประเภท แต่ใช้ปริมาณการผสมต่างกัน มีรายละเอียดดังต่อไปนี้

	น้ำยา				ปริมาณสารประกอบที่มี
	สูตร P	สูตร Q	สูตร R	สูตร S	
สารประกอบ A (ลิตร)	1.5	1.0	3.0	4.5	2400
สารประกอบ B (ลิตร)	0.5	0.5	1.0	0.5	900
กำไร (บาท/ลิตร)	48	36	100	128	

จากการวิจัยตลาด คาดหมายว่า ความต้องการของตลาดน้ำยาทำความสะอาด อาจเป็นสูตร P 2400 ลิตร หรือสูตร Q 1200 ลิตร หรือสูตร R 1200 ลิตร หรือสูตร S 300 ลิตร หรือทุกชนิดรวมกันตามอัตราส่วนความต้องการก็ได้ บริษัทควรวางแผนการผลิตอย่างไรจึงจะดีที่สุด จงเขียนตัวแบบโปรแกรมเชิงคณิตศาสตร์ของปัญหานี้

3. สำนักพิมพ์แห่งหนึ่งมีหนังสือรอการพิมพ์อยู่ 4 ประเภท ในสัปดาห์นี้สำนักพิมพ์มีแรงงานคนและเครื่องจักรที่จะใช้ในแผนกการพิมพ์ 4500 ชั่วโมง ใช้ในแผนกเข้าเล่มเย็บปก 4000 ชั่วโมง และมีกระดาษที่จะใช้ในการพิมพ์ 5900 หน่วย การพิมพ์หนังสือแต่ละประเภทแต่ละเล่มคาดว่าโดยเฉลี่ยจะใช้เวลาในแต่ละแผนก และใช้กระดาษในการพิมพ์ ดังต่อไปนี้

ประเภทหนังสือ	1	2	3	4
แผนกพิมพ์ (ชั่วโมง)	0.1	0.3	0.8	0.4
แผนกเย็บ (ชั่วโมง)	0.2	0.1	0.1	0.3
# กระดาษ (หน่วย)	0.2	0.3	0.2	0.3

กำไรที่คาดว่าจะได้จากการจำหน่ายหนังสือแต่ละประเภท เท่ากับ 24, 60, 96 และ 72 บาทต่อเล่ม ตามลำดับ สำนักพิมพ์ควรวางแผนการผลิตอย่างไร จึงจะดีที่สุด จงเขียนตัวแบบ

4. ในปีนี้ธนาคารไทยจำกัด จะปล่อยเงินกู้จำนวน 20 ล้านบาท เพื่อบริการลูกค้า โดยมีวงเงินสินเชื่อให้เลือกได้ 5 ประเภทด้วยกัน คือ เงินกู้ซื้อบ้าน การอุตสาหกรรม การค้า ซื้อรถยนต์ และเงินกู้สวัสดิการ ธนาคารคาดว่าจะได้ดอกเบี้ยจากเงินกู้แต่ละประเภทเท่ากับ 14%, 15%, 16%, 18% และ 20% ตามลำดับ ตามกฎหมายและนโยบายของธนาคาร กำหนดเงื่อนไขของการปล่อยเงินกู้แต่ละประเภท ดังนี้

(1) เงินกู้สวัสดิการ ให้กู้สูงสุด 3 ล้านบาท

(2) เงินกู้ซื้อบ้าน การอุตสาหกรรม หรือเพื่อการค้า ในวงเงินรวมกันไม่ต่ำกว่า 50% ของเงินกู้ทั้งหมด

(3) เงินกู้เพื่อการค้า หรือซื้อรถยนต์ จะต้องไม่เกิน 60% ของเงินกู้ทั้งหมด

ธนาคารควรปล่อยเงินกู้ประเภทใด ในวงเงินเท่าใด จึงจะดีที่สุด จงเขียนตัวแบบ

5. เพื่อการโภชนาการที่ดีของครอบครัว แม่บ้านจึงกำหนดรายการอาหารในแต่ละสัปดาห์ว่า จะต้องมีอาหารประเภทผักทุกวันวันละ 2 มื้อ คาดว่าจะได้คุณค่าอาหารจากผัก คือ เหล็ก ฟอสฟอรัส วิตามินเอ วิตามินซี และไนอาซิน อย่างน้อยที่สุด 7.20, 390, 17500, 274 และ 5 มิลลิกรัมตามลำดับ เพื่อมิให้เกิดความจำเจและเบื่อหน่าย แม่บ้านจัดซื้อผัก 5 ชนิดมาปรุงอาหารสลับกันไปในแต่ละมื้อ เฉพาะผักชนิดแรก จะซื้อมาไม่เกิน 2 ครั้งต่อสัปดาห์ ส่วนผักชนิดอื่น ๆ แต่ละชนิด จะซื้อมาไม่เกิน 4 ครั้งต่อสัปดาห์ คุณค่าอาหารตลอดจนราคาของผักที่จัดซื้อมาในแต่ละครั้งมีดังต่อไปนี้

คุณค่าอาหาร	ชนิดของผัก				
	1	2	3	4	5
เหล็ก (มก.)	0.48	0.54	0.54	1.26	0.60
ฟอสฟอรัส (มก.)	30	12	33	60	90
วิตามินเอ (มก.)	75	415	9065	2550	235
วิตามินซี (มก.)	30	9	3	59	9
ไนอาซิน (มก.)	0.15	0.30	0.35	0.60	0.80
ราคา (บาท)	5.00	12.50	12.50	20.00	7.50

แม่บ้านควรจัดสรรการซื้ออย่างไร จึงจะเกิดผลดีที่สุด จงเขียนตัวแบบของปัญหา

6. ความต้องการต่ำสุดของสินค้า A, B และ C ในแต่ละวัน มีปริมาณ 36, 45 และ 10 หน่วย ตามลำดับ โรงงานมีเครื่องจักร X, Y, S และ T ที่จะใช้ในการผลิต เครื่องจักรแต่ละเครื่องมีความสามารถในการผลิต 480 นาทีต่อวัน การผลิตสินค้า A ต้องผ่านขั้นตอนการผลิตของเครื่องจักร X, S และ T การผลิตสินค้า B มีกระบวนการผลิต 2 แบบ แบบแรกจะใช้เครื่องจักร X กับ S ส่วนแบบที่ 2 ใช้เครื่องจักร Y กับ T สำหรับสินค้า C อาจผลิตโดยใช้เครื่องจักร X กับ S หรือผลิตโดยใช้เครื่องจักร Y, S และ T ขั้นตอนในการทำงานของเครื่องจักร และค่าใช้จ่ายในการผลิตของเครื่องจักร มีดังนี้

สินค้า	กระบวนการ	เวลาที่ใช้ในการผลิตของเครื่องจักร (นาที/หน่วย)			
		X	Y	S	T
A	1	10		6	3
B	1	8		10	
	2		6		9
C	1	8		16	
	2		10	3	8
ค่าใช้จ่ายในการผลิต (บาท/นาที)		10.0	12.5	6.0	7.5

โรงงานควรจัดตารางการผลิตแต่ละวันอย่างไร จึงจะดีที่สุด จงเขียนตัวแบบ

7. โรงพยาบาลเอกชนแห่งหนึ่งเปิดบริการ 24 ชั่วโมง จึงมีความจำเป็นต้องมีนางพยาบาลประจำอยู่อย่างน้อยที่สุด ในแต่ละช่วงเวลา ดังต่อไปนี้

ช่วงที่	1	2	3	4	5	6
เวลา	7 – 11	11 – 15	15 – 19	19 – 23	23 – 3	3 – 7
จำนวนที่ต้องการ	55	60	70	45	15	25

นางพยาบาลแต่ละคนจะทำงาน 8 ชั่วโมงติดต่อกัน โรงพยาบาลควรจัดสรรการทำงานของนางพยาบาลอย่างไรจึงจะเพียงพอกับความต้องการในแต่ละช่วงเวลา แต่ให้มีจำนวนนางพยาบาลที่ทำงานแต่ละวันต่ำสุด จงเขียนตัวแบบ

8. แผนกขายสินค้า A ได้ประเมินความต้องการสินค้าใน 3 เดือนข้างหน้าเท่ากับ 220, 250 และ 200 หน่วย ตามลำดับ ขณะนี้โรงงานมีปัจจัยที่เพียงพอต่อการผลิตแต่ละเดือนเท่ากับ 250, 230 และ 240 หน่วยตามลำดับ ต้นทุนการผลิตแปรผันไปในแต่ละเดือน คิดเป็นอัตรา 15, 18 และ 14 บาทต่อหน่วย ตามลำดับ โรงงานควรจัดตารางการผลิตแต่ละเดือนอย่างไร จึงจะเพียงพอกับความต้องการ แต่ให้มีต้นทุนต่ำสุด จงเขียนตัวแบบ

9. บริษัทเงินทุนสยามคาดว่า จะสามารถหาเงินทุนในระยะแรกได้ 80 ล้านบาท ระยะที่สองในอีก 5 ปีข้างหน้า คาดว่าจะสามารถหาได้ 50 ล้านบาท ขณะนี้บริษัทกำลังพิจารณาการลงทุน

ใน 6 โครงการซึ่งต้องใช้เงินลงทุน (ล้านบาท) และมีมูลค่าปัจจุบันสุทธิ (NPV) ดังตาราง ต่อไปนี้

โครงการที่	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
ลงทุนระยะแรก	12	15	30	10	20	8
ลงทุนระยะที่สอง	5	7	25	6	10	2
NPV	14	16	40	15	18	12

บริษัทควรเลือกลงทุนในโครงการใดบ้าง จึงจะได้ประโยชน์สูงสุด จงเขียนตัวแบบ

10. โรงงานผลิตสินค้า 2 ชนิดในปริมาณ x_1 และ x_2 หน่วย ตามลำดับ การผลิตสินค้าแต่ละชนิด จะใช้วัตถุดิบ ก และวัตถุดิบ ข รายละเอียดเกี่ยวกับการผลิต มีดังนี้

	ปริมาณที่ใช้ (กก./หน่วย)		**ปริมาณที่มี**
	สินค้า A	**สินค้า B**	**(กิโลกรัม)**
วัตถุดิบ ก	2	2	200
วัตถุดิบ ข	8	3	600

ปริมาณสินค้าแต่ละชนิดที่ผลิตได้ จะขึ้นอยู่กับราคาของสินค้า ดังนี้

$$x_1 = 190 - 25P_1 \qquad \text{และ} \qquad x_2 = 250 - 50P_2$$

เมื่อ P_1 และ P_2 เป็นราคา (บาท/หน่วย) ของสินค้า A และสินค้า B ตามลำดับ โรงงานควรวางแผนการผลิตอย่างไร จึงจะดีที่สุด จงเขียนตัวแบบ